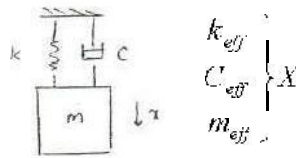


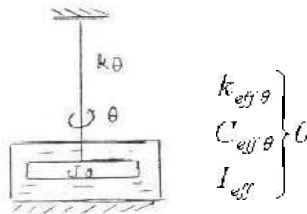
میرایی در واقع انرژی را به حرارت تبدیل می کند ما می توانیم حرارتی که در یک سیکل تولید می شود، (انرژی از دست می دهیم) را پیدا می کنیم، (کار)

می توانیم همین مقدار کار را محاسبه کنیم که تحت چه میرایی ویسکازی از دست داده می شود. به این ترتیب این ceq معادل را می یابیم و در معادله قرار می دهیم.



$$T = \frac{1}{2} m_{eff} \dot{X}^2$$

$$U = \frac{1}{2} m_{eff} X^2$$



برای معادل سازی، ابتدا باید مشخص کنیم که سیستم معادل را خطی در نظر گرفته ایم یا زاویه ای

$$m_{eff} \ddot{x} - k_{eff} x + c_{eff} \dot{X} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$$

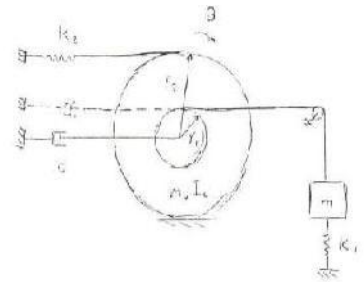
$$(r_1 + r_2) \theta = x$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} I_c \left(\frac{\dot{X}}{r_1 + r_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[m + \frac{I_c}{(r_1 + r_2)^2} \right] \dot{X}^2 \rightarrow m_{eff} = m + \frac{I_c}{(r_1 + r_2)^2}$$

$$U = \frac{1}{2} k_2 (x_B)^2 + \frac{1}{2} k_1 x^2 - \frac{1}{2} \left[k_2 \left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right) + k_1 \right] x^2 \rightarrow k_{eff} = k_1 + k_2 \left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right)^2$$

$$x_B = 2r_2 \theta = 2r_2 \left(\frac{x}{r_1 + r_2} \right)$$

برای پیدا کردن C_{eff} باید کار روی فنر را پیدا کنیم حال می خواهیم انتگرال مکان را به انتگرال زمان تبدیل



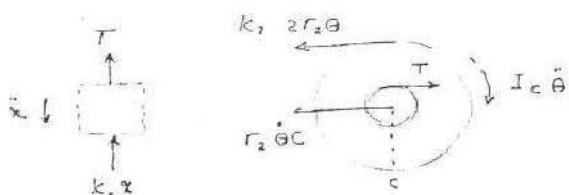
کنیم. چون دامنه همواره در ارتعاش آزاد تغییر می کند، نمی توان در کار و انتگرال قرار داد! پس نمی توان از راه ارژی کار کرد باید از راه نسبیت کار کنیم. یعنی اگر دمپر به جایی که هست در نقطه A به دیسک وصل بود، X آن با X برابر می شد و الان فقط سستی از آن است.

$$W = \int \dot{x} dx - \int c x dx$$

$$x = x \sin \omega_n t$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x \omega_n \cos \omega_n t$$

روش دیگر این است که از روش نیوٹن-اویار، معادله دیفرانسیل خود سیستم را پیدا کنیم.



$$-k_1 x - T = m \ddot{x}$$

$$\sum \mu_i = I_c \ddot{\theta}$$

$$-r_2^2 \ddot{\theta} - k_2 (2r_2) \theta + T (r_1 + r_2) = I_c \ddot{\theta}$$

$$r_2^2 \ddot{\theta} + k_2 (2r_2)^2 \theta - (r_1 + r_2) (-k_1 x - m \ddot{x}) + I_c \ddot{\theta} = 0$$

$$I_c \ddot{\theta} - r_2^2 \ddot{\theta} + [k_2 (2r_2)^2] \theta - (r_1 + r_2) k_1 x + (r_1 + r_2) m \ddot{x} = 0$$

$$\theta \frac{x}{r_1 - r_2}$$

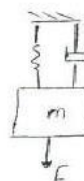
$$I_c \frac{x}{r_1 - r_2} - (r_1 - r_2) m \ddot{x} + r_2^2 c \frac{\ddot{x}}{r_1 - r_2} + k_2 (2r_2)^2 \frac{x}{r_1 - r_2} + (r_1 - r_2) k_1 x = 0$$

از معادله دیفرانسیل نمی توان معادل سازی کرد چون معادله دیفرانسیل ممکن است در یک عددی ضرب یا بر یک عددی تقسیم شود. پس ω_n درست در می آید ولی سایر معادل ها نه!

بنابراین باید از انرژی جنبشی و پتانسیل m_{eff} و k_{eff} را پیدا کنیم. بعد از معادله اولار، m_{eff} و k_{eff} را با مقادیر بدست آمده مقایسه می کنیم. مجموعه را یک عدد ضرب یا تقسیم می کنیم تا ضرایب X و \dot{x} همان m و k معادل شوند. در این جا ضریب \dot{x} ما همان C_{eff} خواهد شد.

$$\rightarrow C_{eff} = \left(\frac{r_2}{r_1 - r_2} \right)^2 c$$

ارتعاشات با تحریک خارجی



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

در این مرحله به حل همگن کاری نداریم چون شرایط اولیه مربوط به مدت ها قبل است و لحظه ای که ما بررسی می کنیم از آن زمان گذشته است.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_e \sin \omega t$$

سیستم های خطی اگر تحت تحریک هارمونیک قرار بگیرند عکس العمل باید هارمونیک باشد با همان فرکانس ولی دارای دامنه ای غیر از دامنه آن نیرو باشد و اختلاف بازی هم باید داشته باشد. پس جواب خصوصی ما خواهد بود.

$$x = x \sin(\omega t - \varphi)$$

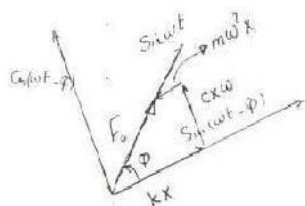
$$\dot{x} = x\omega \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\ddot{x} = -x\omega^2 \sin(\omega t - \varphi)$$

پس جواب خصوصی باید در معادله اصلی صدق کند. معادله دیفرانسیل یک معادله برداری است که می توان دو مجهول را از آن پیدا کرد. در معادله دیفرانسیل \dot{x} و x دو متغیر عددی هم اند.

$$m\omega^2 x \sin(\omega t - \varphi) + c\omega x \cos(\omega t - \varphi) + kx \sin(\omega t - \varphi) = F_e \sin \omega t$$

یک روش بسط دادن \sin و \cos است و مساوی قرار دادن ضرایب \sin و \cos .

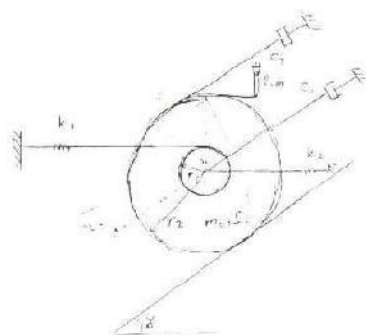


$$\tan \varphi = \frac{c\omega x}{kx - m\omega^2 x} \rightarrow \tan \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

$$(k - m\omega^2)^2 x^2 + (c\omega)^2 x^2 = F_0^2$$

دامنه \pm ندارد چون فقط مقدار است.

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$



برای نوسان کوچک

$$L_{eff} \quad m_{eff}$$

$$k_{eff} \quad k_{eff}$$

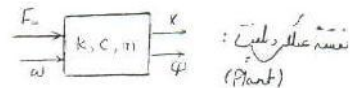
$$c_{eff} \quad c_{eff}$$

$$\theta$$



نایر پارامترهای ورودی با توجه به پارامترهای تعریف کننده

سیستم:



مثلا نرم افزاری که F_o, c, k, w, m را به آن می دهیم و x و φ را به ما می دهد.

باید تعداد این متغیر ها را کم کنیم یا آن ها را بی بعد کنیم. و یک ترکیب بین پارامتر های سیستم ورودی ها ایجاد کنیم تا تعداد ورودی ها کم شود.

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = w_n$$

$$\frac{c}{\sqrt{km}} = \xi$$

$$x = \frac{F_o}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} \rightarrow \div \frac{x}{F_o} = \frac{1/k}{\frac{1}{k} \sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}}$$

$$x = \frac{xk}{F_o} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{m}{k}w^2)^2 + (\frac{cw}{k})^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{m}{w_n^2}w^2)^2 + (2\xi \frac{w}{w_n})^2}}$$

$$\frac{w}{w_n} = r$$

نسبت فرکانسی که سیستم با آن تحریک شده به فرکانس طبیعی سیستم.

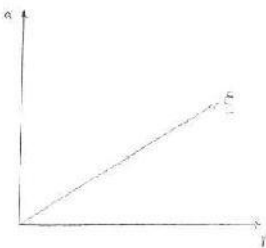
$$\frac{cw}{k} = \frac{c}{k} \cdot \frac{C_c}{C_c} = \xi \frac{\sqrt{km}}{k} w = 2\xi \frac{w}{w_n}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

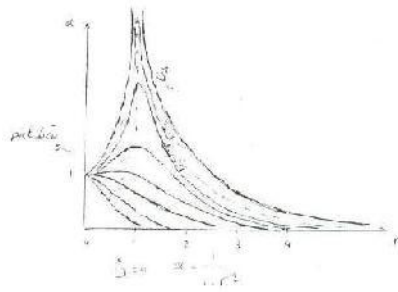
معادله بی بعد که هر دستگاه را مدتی قابل استفاده می کند.

توسط matlab می توان منحنی سه بعدی معادله بالا را رسم کرد. ولی با دست، عملا برای ξ های مختلف،

منحنی ∞ را رسم می کنیم.



$$\infty = \frac{xk}{F_o}$$

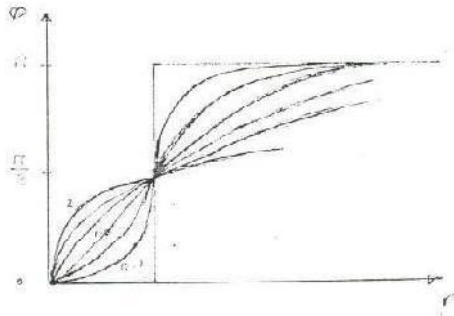


وقتی میرایی نداشته باشیم ($\xi = 0$) و سیستم با فرکانس طبیعی سیستم نوسان کند ($\omega_n - \omega$)، دامنه به سمت بی نهایت می رود \leftarrow تشدید رخ می دهد.

(حتی اگر میرایی کم هم باشد، دامنه باز زیاد می شود.)

منظور از اینکه دامنه بی نهایت می شود، یعنی سیستم تخریب می شود مثل کسی که می میرد، روحش به سمت بی نهایت می رود.

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \tan^{-1} \frac{\frac{c\omega}{k}}{1 - \frac{m}{k}\omega^2} = \tan^{-1} \frac{2\xi r}{1 - r^2}$$



$$\xi = 0$$

$$\tan \varphi = \frac{0}{r - r^2}$$

$$r - 1$$

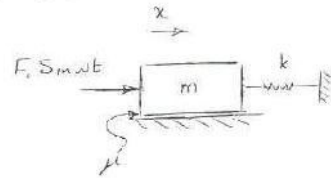
$$\tan^{-1} \frac{2\xi}{0} = \varphi$$

$$r < 1 \varphi = 0^+$$

$$r = 1 \varphi = ?$$

$$r > 1 \varphi = 0$$

تاثیر میرایی (میرایی)



$$m\ddot{x} + kx = \mu mg + F_0 \sin wt$$

چون مسئله ناپیوسته است، شرایط اولیه هم در مقدار جواب خصوصی تاثیر گذارند پس:

$$x(t) = x \sin(\omega t - \varphi) + \frac{\mu mg}{k} + x_1 \sin \omega_n t + x_2 \cos \omega_n t$$

$$\dot{x} < 0$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

$$x(t) = x \sin(\omega t - \varphi) - \frac{\mu mg}{k} + x_3 \sin \omega_n t + x_4 \cos \omega_n t$$

$$\dot{x} > 0$$

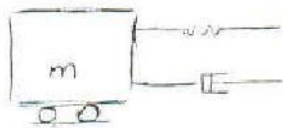
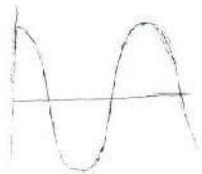
$$x(\pi)$$

$$\dot{x}(\pi)$$

این تحریک، میرایی را جبران می کند و دامنه ثابت می ماند. (ممکن است از دامنه اولیه کمتر شود، ولی در نهایت وقتی به صورت steady شده دامنه ثابت می ماند)

بهترین راه برای حل چنین معادله هایی، جاگزین کردن میرایی خشک با یک میرایی ویسکاز است.

(یک بار از روش قبلی هم سعی کنیم معادله را حل کنیم.)



$$F_c - c\dot{x}$$

$$w_c = \int F_c dx - \int c\dot{x} dx$$

$$x = x \sin wt$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = xw \cos wt$$

$$w_c = \int c(xw \cos wt)(xw \cos wt) dt$$

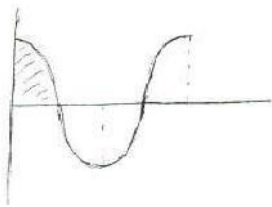
$$w_c = cx^2 w^2 \int_0^{2\pi/w} \cos^2 wt dt$$

$$w_c = cx^2 w^2 \int_0^{2\pi/w} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2wt}{2} \right) dt$$

$$w_u = \int F_u dx = \int \mu mg dx$$

$$dx = xw \cos wt dt$$

$$w_u = \int_0^{2\pi/w} \mu mg x w \cos wt dt = \mu mg x w \int_0^{2\pi/w} \pm \cos wt dt$$



ما مقداری انرژی را می‌خواهیم پس در جایی که \cos مثبت است، $+ \cos$ را در نظر می‌گیریم. و در جایی که \cos منفی است، \cos را در نظر می‌گیریم.

$$w_u = 4\mu mg x w \int_0^{2\pi/w} \cos wt dt = 4\mu mg x w \frac{1}{w} \sin wt$$

$$w_c = ceq x^2 w \pi$$

$$w_u = w_c > ceq = \frac{4\mu mg}{xw \pi}$$

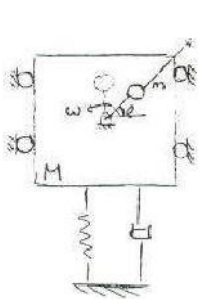
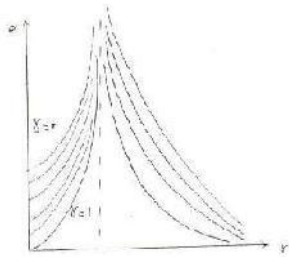
دیگر لازم نیست مسئله را دوباره حل کنیم. کافی است در حل مسئله قبلی به جای c ، ceq را به دست آوریم.

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + \left(\frac{4\mu mg}{\pi}\right)^2}} \rightarrow x^2(k - mw^2)^2 + \left(\frac{4\mu mg}{\pi}\right)^2 = F_0^2$$

$$x = \sqrt{\frac{F_0^2 - \left(\frac{4\mu mg}{\pi}\right)^2}{(k - mw^2)^2}}$$

$$x = \frac{4\mu mg}{\pi F_0}$$

میرایی خشک به ازای کلیه مقادیر X دامنه را بی نهایت می کند پس در رفیع رزونانس به ما کمکی نمی کند. X تا جایی می تواند بزرگ شود که برابر 1 شود. اگر X بیشتر از 1 شود، $4\mu mg > \pi F_0$ می شود یعنی نیروی اصطحکاک بیشتر از نیروی وارده است و اصلا حرکتی نداریم.



$mpw^2 \sin wt$ → مولفه عددی نیروی گریز از مرکز به جرم m وارد می شود.

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mpw^2 \sin wt$$

$$x(t) = x \sin(\omega t - \varphi)$$

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} = \frac{mpw^2}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{cw}{k - mw^2}$$

مرحله اول: حل معادله دیفرانسیل و بدست آوردن دامنه و اختلاف فاز

در قسمتی دامنه تابعی از w است و با افزایش w دامنه هم زیاد می شود، حالت قبلی F_0 ثابت بود!

مرحله دوم: بی بعد کردن

نمی توان صورت کسر را به طرف دیگر برد چون w متغیر است و نمی توان هر دو طرف تساوی w داشت.

$$x = \frac{mpw^2/k}{\sqrt{(1 - (\frac{w}{w_n})^2)^2 + (2\xi\frac{w}{w_n})^2}}$$

$$x = \frac{Mmpw^2/km}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{\frac{mp}{m}(\frac{w}{w_n})^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

حال قسمت ثابت صورت را به طرف دیگر تساوی می بریم.

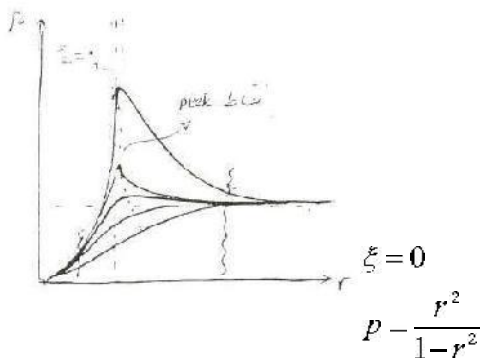
$$B = \frac{xM}{mp} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\xi r}{1-r^2}$$

$$\ddot{x}M = F$$

$$\dot{x}M = \bar{g}$$

$$xM = L$$



Peak بیشتر از $r=1$ است

در فرکانس پایین جرم اگر کوچک باشد دامنه هیچ تغییر نمی کند، در تشدید بیشترین دامنه را داریم.

اگر w از تشدید بیشتر شود، یعنی در w های خیلی بزرگ (نیروی وارد به جرم زیاد می شود و دمپر هم زیاد تر کار می کند) نیرو و دمپر با هم به تعادل می رسند و دامنه ثابت می ماند. ($B=1$)

مثلا برای طراحی یک ماشین لباسشویی که نلرزد (موقع آب گیری) باید k و c را طوری طراحی کنیم که یا r خیلی بزرگ باشد یا خیلی کوچک. چون w دست ما نیست، باید w_n را خیلی بزرگتر از w در نظر بگیریم پس باید k و c خیلی بزرگ باشند با این کار عملا ماشین لباس شویی نوسان نمی کند ولی در عوض کل

نیرو به پایه ماشین منتقل می شود و کل ساختمان می لرزد. پس این کار اصولی نیست، پس باید در قسمت بعد از $r=1$ از منحنی در نظر بگیریم.

$$w = 500 \text{ rpm}$$

$$w_n > 500 \text{ rpm}$$

$$w_n = \sqrt{k/m}$$

پروژه مطالعات ویژه:

تحلیل یک ماشین لباسشویی ← طراحی یک ماشین لباسشویی با مواد مختلف و بهینه سازی

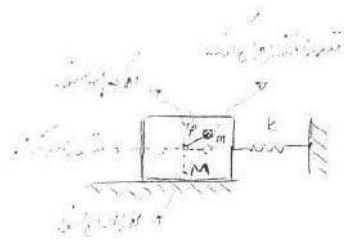
مسئله نوع برای میرایی خشک:

M وقتی در جهت افقی قرار می گیرد، به صورت یک نیروی

محرک خارجی عمل می کند. وقتی m عمودی قرار می گیرد

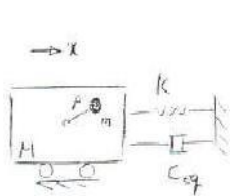
روی مقدار N تاثیر می گذارد، قبلاً همین معادله را داشتیم ولی N ثابت

بود و F_0 هم ثابت بود.



$$M\ddot{x} + kx \pm \mu N - mpw^2 \sin wt$$

چون مستقیماً نمی توان این مسئله را حل کرد، از معادل سازی استفاده می کنیم.



$$ceq = \frac{4\mu mg}{\pi x w}$$

$$x = \frac{mpw^2}{\sqrt{(k - Mw^2)^2 + (ceqw)^2}}$$

$$w_{\mu} = \left[\int F_f dx - \int \mu(mg - mpw^2 \sin wt) dx - \int \mu mg dx - \int mf w^2 \sin wt dx \right]$$

$$w_{\mu} = \int_0^{2\pi/w} \mu mg (xw \cos wt) dx - \int_0^{2\pi/w} mpw^2 \sin wt xw \cos wt dt$$

اگر فرض کنیم کار قسمت دوم ناچیز است، ceq مثل حالت قبلی همان $\frac{4\mu mg}{\pi x w}$ بدست می آید.

$$x = \frac{mpw^2}{\sqrt{(k - \mu w^2)^2 + (c\epsilon w)^2}}$$

$$x^2 \left[(k - \mu w^2)^2 + \left(\frac{4\mu m g w}{\pi x w} \right)^2 \right] = (mpw^2)^2$$

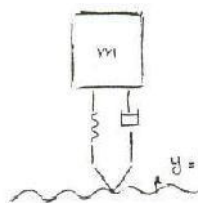
$$x^2 \left[(k - \mu w^2)^2 \right] = \left(\frac{4\mu m g}{\pi} \right)^2 + (mpw^2)^2$$

$$x = \frac{\sqrt{(mpw^2)^2 - \left(\frac{4\mu m g}{\pi} \right)^2}}{k - \mu w^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{\frac{(mpw^2)^2 \mu^2}{k^2 \mu^2} - \left(\frac{4\mu m g}{\pi k} \right)^2}}{1 - r^2}$$

$$\frac{xM}{mp} = \frac{\sqrt{\left(\frac{w}{w_n} \right)^4 - \left(\frac{4\mu M^2 g}{\pi k m p} \right)^2}}{1 - r^2}$$

یک حرکت موج به سیستم وارد می شود.



چند حالت برای جابجایی x و y داریم: اگر $y > x$ باشد فنر فشرده می شود.

فرض $\ddot{x} > \ddot{y}$



$$c(\dot{y} - \dot{x})$$

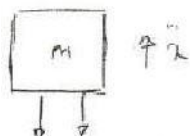
$$k(y - x)$$

$$\sum F_x = m a_x$$

$$k(y - x) + c(\dot{y} - \dot{x}) - m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = ky + c\dot{y}$$

اگر $x < y$ باشد فنر کشیده می شود.

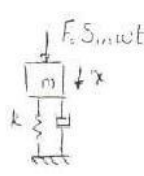


$$\begin{aligned}
 &k(x - y) \\
 &c(\dot{x} - \dot{y}) \\
 \sum F_x &= m\ddot{x} \\
 &k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y}) - m\ddot{x} \\
 m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= ky + c\dot{y}
 \end{aligned}$$

مسئله نوع سوم که دو نوع تحریک هارمونیک برای آن داریم:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky \sin \omega t + cy \omega \cos \omega t$$

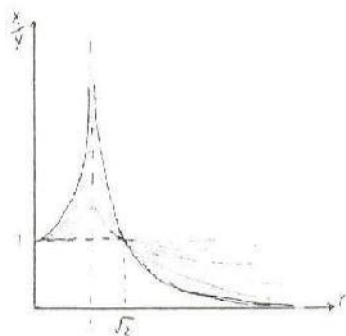
مسئله نوع اول که یک تحریک هارمونیک دارد:



$$\begin{aligned}
 x &= \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \\
 x &= x \sin(\omega t - \varphi) \\
 m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= F_0 \sin \omega t
 \end{aligned}$$

برای حل مسئله نوع سوم sin و cos را با هم ترکیب می کنیم تا تحریک sin خالص بدست آید، تابع حاصل دارای یک دامنه و یک اختلاف فاز است.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= \sqrt{(ky)^2 + (cy\omega)^2} \sin(\omega t - \varphi) \\
 x &= \frac{\sqrt{(ky)^2 + (cy\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \rightarrow x = \frac{\sqrt{y^2(1 + (\frac{c\omega}{k})^2)}}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + (\frac{c\omega}{k})^2}} \\
 \frac{x}{y} &= \frac{1 + (2\xi r)^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}
 \end{aligned}$$



در r کوچک منحنی در $r \rightarrow \infty$ به سمت صفر می رود

در r بزرگ منحنی در $r \rightarrow \infty$ به سمت یک می رود.

منحنی قبل از $\sqrt{2}$ هیچ وقت کمتر از یک نمی شود.

اگر بخواهیم سیستمی برای یک خودرو طراحی کنیم که حرکت

پایه به جرم منتقل نشود، باید کوچک باشد $\zeta \ll 1$ (مثلا در حد ۰,۱ و ...)

R بزرگتر از یک باشد $r \ll 1$ (مثلا ۰,۳ یا ۰,۴ یا ۰,۵)

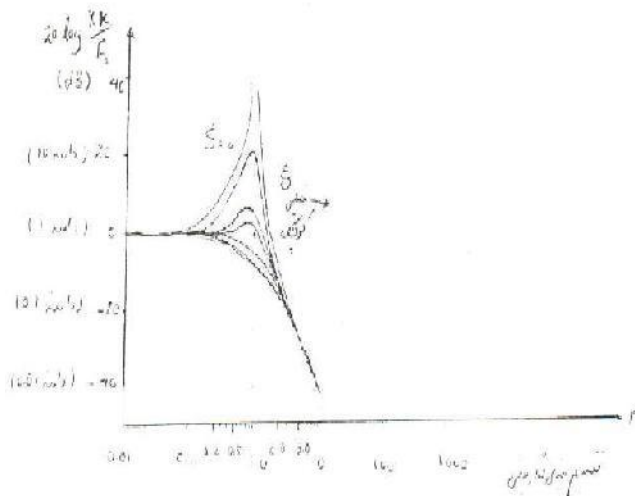
$$W' = 5W'' \rightarrow W'' = W'/5$$

اگر بخواهیم به ازای یک حرکت کوچک پایه، جرم، تغییرات زیادی پیدا کند (مثل مخلوط کن)

r باید بین ۰ تا $\sqrt{2}$ باشد (نزدیک به یک)

باید کوچک باشد.

نوع اول:



$$20 \log \frac{kx}{F_0} - 20 \log \left[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2 \right]^{1/2}$$

$$= -10 \log \left[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2 \right]$$

$$= 10 \log r^{-4}$$

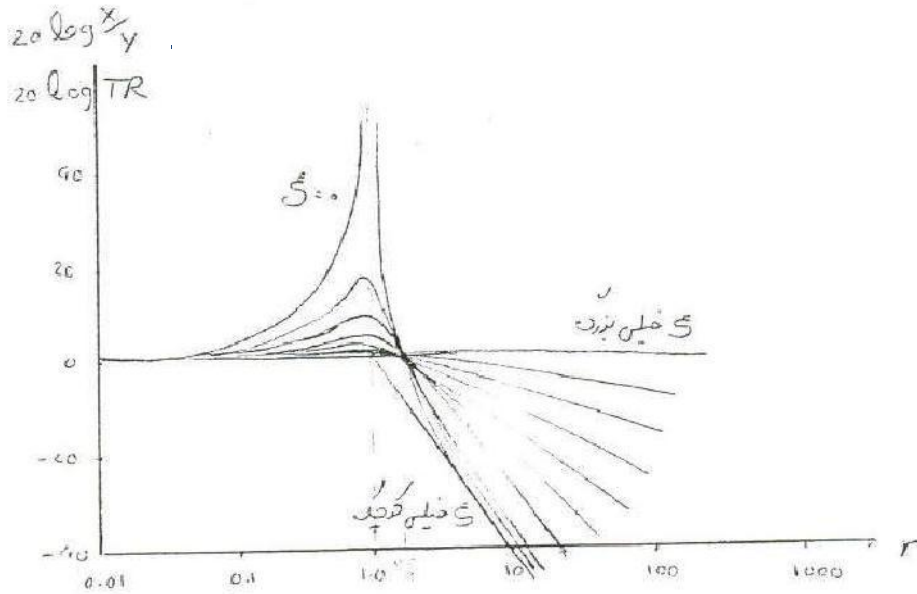
$$dB = -40 \log r$$

$$\frac{kx}{F_0} \approx \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

صفر در حد ۰ است.

برای اینکه دامنه هم رنج زیادی را پوشش دهد آن را لگاریتمی نمی کنیم بلکه از واحد دسی بل استفاده می کنیم.

$$dB = 20 \log \frac{xk}{F_0}$$



$$20 \log \frac{x}{y} = 20 \log \left[1 + (2\xi r)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 20 \log \left[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 10 \log \left[1 + (2\xi r)^2 \right] - 10 \log \left[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2 \right]$$

برای ξ خیلی کوچک

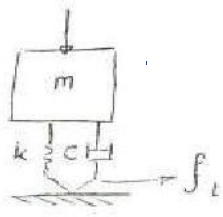
در r خیلی بزرگ قسمت اول صفر می شود (نسبت به قسمت دوم) و بقیه قضیه مثل مسئله حالت اول می شود. (شیب بجانب $40dB/dec$ برای ξ خیلی بزرگ)

R خیلی بزرگ حاصل صفر می شود یعنی شیب خط صفر است.

مسئله نوع چهارم:

وسیله ای مثل پیکور ها که با آن آسفالت خیابان را سوراخ می کنند وسیله ای است که یک نیروی ارتعاشی خیلی کم را به یک نیروی ارتعاشی خیلی زیاد تبدیل می کند.

$$F = F_0 \sin \omega t$$



$$f_t = kx - c\dot{x}$$

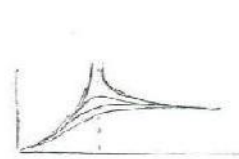
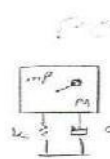
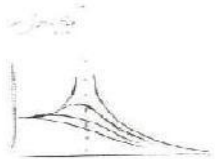
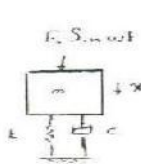
$$x = x \sin(\omega t - \varphi)$$

$$f_t = -kx \sin(\omega t - \varphi) - c\omega x \cos(\omega t - \varphi)$$

$$f_{t_0} = \sqrt{(kx)^2 + (c\omega x)^2} = x \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$$

$$\frac{F_{0c}}{F_0} = \frac{x \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{F_0} \rightarrow \frac{F_{0cr}}{F_0} = \frac{\sqrt{k^2 - (c\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{x}{y} = TR$$

نسبت انتقال در مسئله نوع سوم و چهارم یکی است و نمودار های مسئله نوع چهارم مثل نوع سوم است.

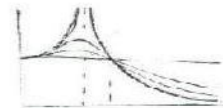
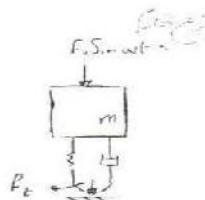
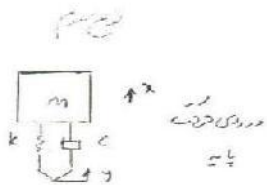


$$\frac{kx}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$\frac{Mx}{mp} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

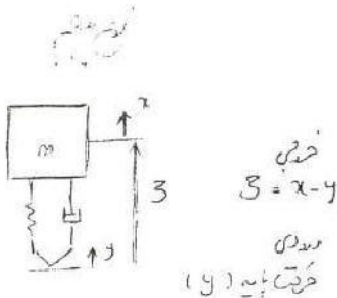
$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mp\omega^2 \sin \omega t$$



$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = cy' = ky'$$

$$\frac{F_t}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$



$$k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) - m\ddot{x}$$

$$x - y = z$$

$$kz + cz + m(\ddot{z} + \ddot{y}) = 0$$

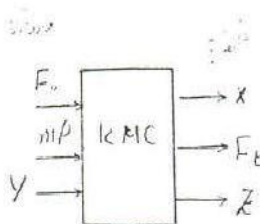
$$m\ddot{z} + cz + kz = -m\ddot{y}$$

$$m\ddot{z} + cz + kz = my\omega^2 \sin\omega t$$

$$z = z \sin(\omega t - \varphi)$$

$$z = \frac{my\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 - (c\omega)^2}} = \frac{ry^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$



$$F_0 \xrightarrow{1} x$$

$$F_0 \xrightarrow{4} F_t$$

$$m \xrightarrow{2} x$$

$$m \xrightarrow{6} F_t$$

$$y \xrightarrow{3} x$$

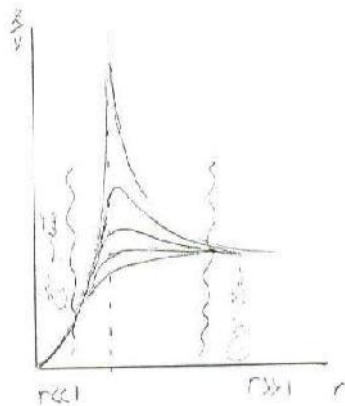
$$y \xrightarrow{7} F_t$$

$$y \xrightarrow{5} z$$

در فرهنگ قدیم 7 به معنای بی نهایت است.

به صورت پایه فقط همین 7 حالت وجود دارد. ولی می توان تعداد ورودی ها را افزایش داد و سایر خرجی

ها را بدست آورد.



در دو محدوده $r \ll 1$ و $r \gg 1$ بی تاثیر است و نمودار

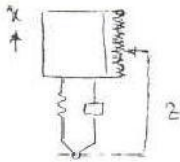
ها رو هم می افتند.

که معمولاً بین ۰ و ۰٫۱ یعنی کوچک است.

$$r \ll 1 \rightarrow \frac{z}{y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{1+o}}$$

$$\frac{z}{y} \ll r^2 - \frac{w^2}{w_n^2} \rightarrow y w^2 = z w_n^2$$

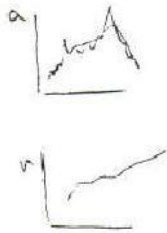
مثلاً نسبت یک رنوست روی جسم و اندازه گیری جریان و...



$$e^{-1} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}}$$

با یافتن Z و نصب آن در w_n^2 شتاب پایه بدست می آید. پس دستگاه بالا یک شتاب میخ است.

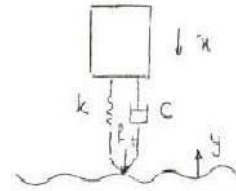
اگر ما یک منحنی شتاب نوسانی با noise داشته باشیم، برای انتگرال گیری آن و یافتن منحنی w، عملاً از یک منحنی صاف انتگرال گرفته می شود. ولی اگر v دارای noise باشد منحنی a که مشتق آن است یک صفحه سیاه می شود.



در $r \ll 1$ عملاً $\frac{z}{y} - 1$ یعنی $x = 0$ یعنی جرم حرکت نمی کند.

در این حالت ممکن است به چنین جرمی نیروی بسیار زیادی وارد شود، در هنگام زلزله خود زمین می لرزد پس ما به نقطه ثابتی نیاز داریم که لرزش زمین را نسبت به آن بسنجیم و مقدار این لرزش را محاسبه کنیم در $r \ll 1$ عملاً ما این نقطه ثابت (جسم m) را داریم.

چیزی که باید پیدا کنیم: $\frac{F_{t0}}{kY}$



$$y = Y \sin \omega t$$

$$x = X \sin(\omega t - \varphi)$$

$$f_t = F_{t0} \sin(\omega t - \theta)$$

$$f_t - k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = m\ddot{x}$$

$$(x - y)k - c(\dot{y} - \dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} - (x - y)k + (\dot{x} - \dot{y})c = f_t$$

$$m\ddot{x} = F_{t0} \sin(\omega t - \theta)$$

$$mX\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) = F_{t0} \sin(\omega t - \theta)$$

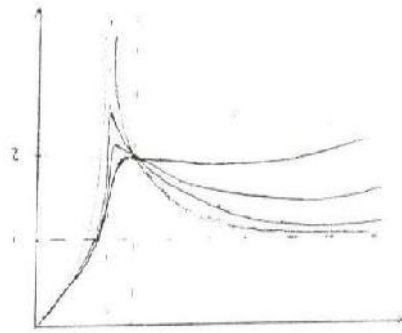
$$X = Y \frac{\sqrt{k + (c\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$mY\omega^2 \frac{\sqrt{k + (c\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = F_{t0}$$

$$\rightarrow \frac{F_{t0}}{kY} = \frac{r^2 \sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

Frequency response function (تابع) FRF به ازای فرکانس های مختلف با ξ های مختلف (دامنه را می یابیم).

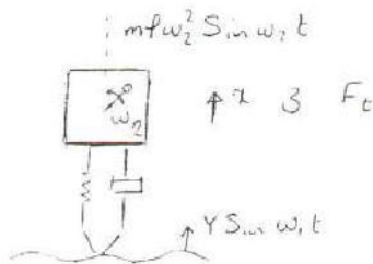
-



عمومی: چون هر کدام با یک دامنه حرکت می کنند و

یک W نمی توان دامنه را تعریف کرد، می توان response

را تعیین کرد ولی دامنه !



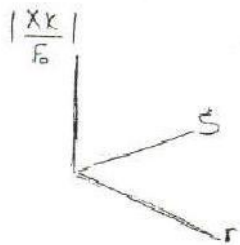
حاملی: اگر به صورت ساده تر، دو فرکانس را برابر کنیم می توان دو معادله

را ترکیب کرد و یک دامنه پیدا کرد در این نوع مسئله ها می توان FRF را رسم کرد.

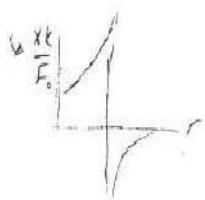
اگر ω_0 و ω_1 ضربی از هم باشند، هر چند سیکل یک بار، شکل تکرار می شود و عملا نقطه pick خواهد داشت.

تمرین: ۱- مسئله نوع ششم و هفتم را کامل حل کنید و نمودار FRF آن را رسم کنید.

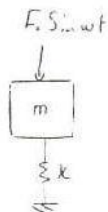
۲- با matlab هر ۷ نوع را به صورت سه بعدی رسم کنید.



اگر برای رسم نمودار قدر مطلق قرار بدهیم نمودار را منفی هم می کشد که غلط است.

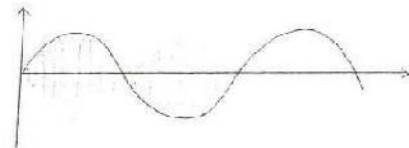
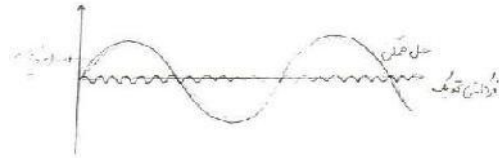
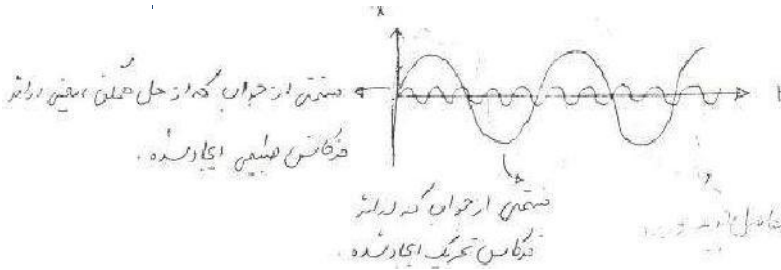


چون میرایی داخلی سیستم نیست اثر شرایط اولیه و حل همگن حذف نمی شود.



$$x(t) = x(\omega, \omega_0, F_0)$$

اگر W و W_n ضرب صحیحی از هم باشند، منحنی تکرار می شود.



$$G \rightarrow w = \frac{l\pi}{G}$$

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nwt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nwt$$

$$a_n = \frac{1}{G} \int_{-\frac{G}{2}}^{\frac{G}{2}} f(t) \cos nwt dt$$

$$b_n = \frac{1}{G} \int_{-\frac{G}{2}}^{\frac{G}{2}} f(t) \sin nwt dt$$

$$f(t) \rightarrow \text{زوج} \begin{cases} a_n \neq 0 \\ b_n = 0 \end{cases}$$

$$f(t) \rightarrow \text{فرد} \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n \neq 0 \end{cases}$$

محور های مختصات را می توان چنان انتخاب کرد که تابع زوج یا فرد یا نه زوج فرد شود.



$$F = F_0 \sin \omega t$$

$$x = x \sin(\omega t - \varphi)$$

$$F = F_0 \cos \omega t$$

$$x = x \cos(\omega t - \varphi)$$

برخی توابع هم متناوب اند ولی هارمونیک نیستند (نه زوج نه فرد)



توابع گذرا توابعی هستند که نمی توان یک دوره برای آن ها تعریف کرد

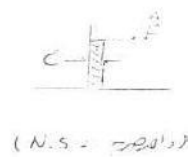
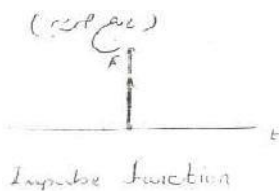


توابع گذرا زمانی شروع شده و متوقف می شود که نسبت به مدت مطالعه یا آزمایش زیاد نیست. (بی نهایت محسوب نمی شود)

توابع متناوب از $-\infty$ (مدت طولانی نسبت به مطالعه) شروع شده و تا $+\infty$ ادامه می یابد.

توابع گذرا تا لحظه صفر، صفر اند و از $t = 0$ شروع می شوند.

نوع اول: ساده ترین نوع تابع گذرا، تابعی است که قبل و بعد از صفر، صفر باشد و فقط در $t = 0$ مقدار داشته باشد.



چون ضربه کمیت دارد باید بتوان مقدار آن را نشان داد. این مقدار همان سطح زیر منحنی فوق است.

وقتی $t \rightarrow \infty$ رود، دامنه به سمت بی نهایت می رود.

$$F_{(t)} = F \delta(t)$$

$$F_{(t)} = Fdt$$



نوع دوم: تابع پله ای

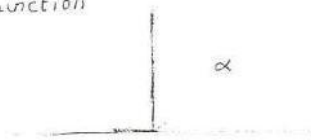
در $t = 0$ تابع غیر تحلیلی است چون بی نهایت مقدار دارد.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_0 & t > 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad \text{تابع پله واحد} \rightarrow F(t) = F_0 u(t)$$

نوع سوم، توابع شیب دار

Ramp Function



$$F(t) = \begin{cases} \alpha t & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad F(t) = \alpha \cdot tu(t)$$

گاهی مثلا در تابع ضربه، ضربه در $t = 0$ نخواهد بود.



$$F(t) = \tilde{F} \delta(t - G)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 1 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{تابع ضربه واحد}$$

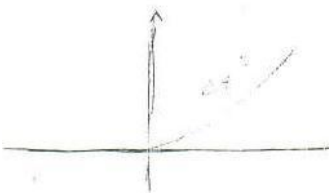


$$F(t) = F_0 u(t - G)$$

$$F(t) = \alpha (t - G) u(t - G)$$



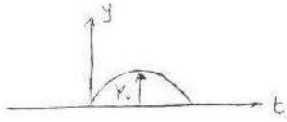
نوع چهارم:



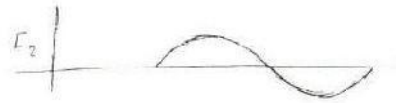
نوع پنجم:



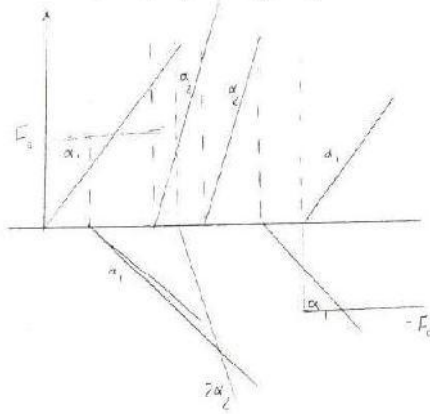
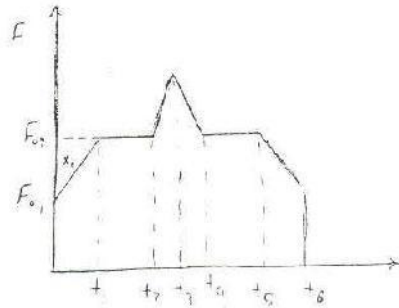
$$F = F_0 \sin \omega t \quad U(t)$$



$$U(t) F_1 = F_0 \sin \omega t$$



$$F_2 = F_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{G}{2} \right) \right] U \left(t - \frac{G}{2} \right)$$



فقط در $t=0$ وجود دارد.



درست بعد از ضربه، باید سرعت را داشته باشیم تا اندازه حرکت خطی بعد از ضربه را پیدا کنیم.

$$t > 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

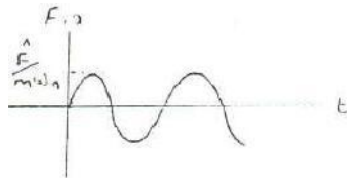
$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = \frac{\hat{F}}{m}$$

$$x(t) = A \sin \omega_n t - B \cos \omega_n t$$

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m \omega_n} \sin \omega_n t$$

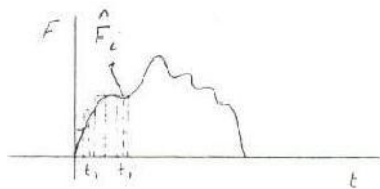
$\omega = \omega_n$ فرکانس طبیعی



$$\bar{F} = 1 \rightarrow$$

$$h(t) = \frac{1}{m \omega_n} \sin \omega_n t$$

عکس العمل در برابر ضربه واحد



$$F_{\text{total}} = \sum_1 \bar{F}_i$$

تابع رو به رو مجموعه ای از چند تابع مستطیلی است که وقتی عرض این ها به سمت صفر رود، هر کدام یک تابع ضربه اند.

فلسفه استفاده از توابع ضربه ای در پیدا کردن تحریک های گذرا

X_1 اولین تحریک ضربه ای

X دومین تحریک ضربه ای



$$x_1 = \frac{\vec{F}_1}{m\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$x_2 = \frac{\vec{F}_2}{m\omega_n} \sin \omega_n (t - t_2)$$

$$x_3 = \frac{\vec{F}_3}{m\omega_n} \sin \omega_n \sin \omega_n (t - t_3)$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{F}_i}{m\omega_n} \sin \omega_n (t - t_i)$$

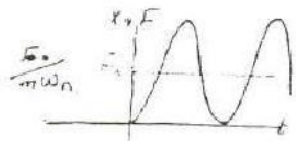
$$x(t) = \int_0^t \vec{F}_i \sin \omega_n (t - ti) d\lambda$$

$$x(t) = \int_0^t f(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t$$

هر تابع گذرایی که تا قبل از صفر صفر باشد $f(\lambda)$

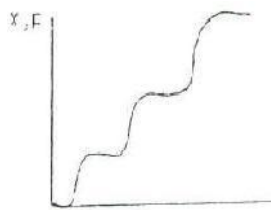
تابع پله ای:



$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_n} \sin \omega_n (t - \lambda) d\lambda$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_n} \frac{\cos \omega_n (t - \lambda)}{\omega_n} \Big|_0^t \rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} [1 - \cos \omega_n t]$$

تابع شیب:



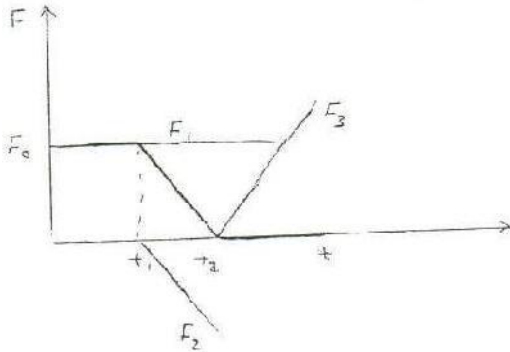
$$F(t) = \begin{cases} \alpha t & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{\alpha \lambda}{m\omega_n} \sin \omega_n (t - \lambda) d\lambda - \frac{\alpha}{m\omega_n} \int \lambda \sin \omega_n (t - \lambda) d\lambda$$

$$h(t) = \frac{\alpha}{m\omega_n^2} \left[t - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \right]$$

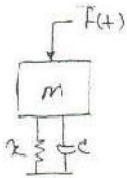
$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \alpha \lambda^2 \frac{\sin w_n(t-\lambda)}{m w_n} d\lambda$$



$$x(t) = x_1 u(t) + x_2 u(t-t_1) + x_3 u(t-t_2)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m w_n^2} (1 - \cos w_n t) u(t) - \frac{F_0}{(t_2 - t_1) m w_n^2} \left[(t-t_1) - \frac{\sin w_n(t-t_1)}{w_n} \right] H(t-t_1) + \frac{F_0}{(t_2 - t_1) m w_n^2} \left[(t-t_2) - \frac{\sin w_n(t-t_2)}{w_n} \right] u(t-t_2)$$



$$f(t) = \hat{F} \Delta \delta(t)$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0$$

$$\dot{x}(0) = \frac{\hat{F}}{m}$$

$$x(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 2\zeta w_n \dot{x} + w_n^2 x = 0$$

$$D^2 + 2\zeta w_n D + w_n^2 = 0$$

$$D_{1,2} = -\zeta w_n \pm w_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

حل نمایی $\zeta > 1$

حل نمایی خاص $\zeta = 1$

حل هارمونیک $\zeta < 1$

$$\xi > 1 \quad \text{برای} \quad x(t) = \frac{\hat{F}}{2m\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \left[e^{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - e^{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \right] g(t)$$

$$\xi = 1 \quad \text{برای} \quad x(t) = \frac{\hat{F}t}{m} e^{-\omega_n t} g(t)$$

$$0 < \xi < 1 \quad \text{برای} \quad x(t) = \frac{\hat{F}}{m\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t g(t)$$

عکس العمل سیستم در برابر ضربه واحد:

$$\hat{F} = 1$$

$$x(t) = g(t)$$

$$x(t) = \int_0^t f(\lambda) g(t - A) d\lambda$$

$\xi = 1$ تحریک پله ای $f(t) = F_0 u(t)$

$$x(t) = \frac{F_0 t}{m\omega_n^2} \left[1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \right]$$

$0 < \xi < 1$ تحریک شیب $f(t) = \alpha t u(t) \rightarrow$

$$x(t) = \frac{\alpha}{m\omega_n^2} \left[t - \frac{2\xi}{\omega_n} - e^{-\xi\omega_n t} \left(\frac{2\xi}{\omega_n} \cos \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \sin \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t \right) \right]$$

یا

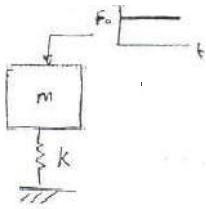
$$x(t) = \frac{\alpha}{m\omega_n^2} \left[t - \frac{2\xi}{\omega_n} - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t) - B \omega_n t e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \right]$$

$$B = \tan^{-1} \left[(2\xi \sqrt{1 - \xi^2}) / (2\xi^2 - 1) \right]$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 u(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) \rightarrow \xi > 1 \\ x(t) \rightarrow 0 < \xi < 1 \\ x(t) \rightarrow \xi = 1 \end{array} \right.$$

$\xi = 0$



$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} (1 - \cos\omega_n t)$$

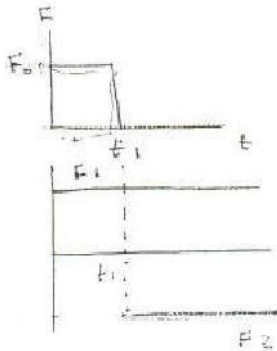
$$x_{\max} = \frac{2F_0}{m\omega_n^2}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n}$$

$$\ddot{x}(t) = +\frac{F_0\omega_n^2}{m} \cos\omega_n t$$

$$\ddot{x}_{\max} = \frac{F_0}{m}$$

ولی گاهی پیدا کردن max آسان نیست



$$0 < t < t_1 \quad x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} (1 - \cos\omega_n t)$$

$$t_1 < t \quad x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} (1 - \cos\omega_n t) - \frac{F_0}{m\omega_n^2} (1 - \cos\omega_n (t - t_1)) + \frac{F_2}{m\omega_n^2} (t - t_1)$$

برای $0 < t < t_1$ پیک همان مقدار حالت قبلی است.

برای $t > t_1$ باید با مشتق گیری، پیک را به دست آوریم.

$$\dot{x}(t) - \frac{F_0 \omega_n}{m \omega_n^2} \sin \omega_n t - \frac{F_0 \omega_n}{m \omega_n^2} \sin \omega_n (t - t_1) = 0$$

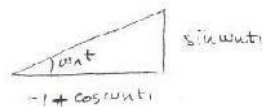
$$\Rightarrow \sin \omega_n t = \sin \omega_n (t - t_1)$$

$$\sin \omega_n t = \sin \omega_n t \cos \omega_n t_1 - \cos \omega_n t \sin \omega_n t_1$$

$$\sin \omega_n t (1 - \cos \omega_n t_1) = -\cos \omega_n t \sin \omega_n t_1 \rightarrow \div \cos \omega_n t$$

$$\tan \omega_n t = \frac{-\sin \omega_n t_1}{1 - \cos \omega_n t_1}$$

$$\cos \omega_n t \text{ ? } \sin \omega_n t \text{ ?}$$



$$\sin \omega_n t = \frac{\sin \omega_n t_1}{\sqrt{(\sin \omega_n t_1)^2 + (-1 + \cos \omega_n t_1)^2}}$$

$$\cos \omega_n t = \frac{1 - \cos \omega_n t_1}{\sqrt{(\sin \omega_n t_1)^2 + (-1 + \cos \omega_n t_1)^2}}$$

$$! \left(\frac{xk}{F_0} \right) = \frac{1}{\pi/2 + 1 - 2t_1/\tau} \left[\sin \frac{2\omega t}{\tau} - \frac{2t_1}{\tau} \sin \frac{\omega t}{t_1} \right] \quad | t < t_1$$

$$\left(\frac{xk}{F_0} \right) = \frac{1}{\pi/2 - 1 - 2t_1/\tau} \left[\sin \frac{2\omega t}{\tau} + \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{t_1}{\tau} \right) \right] \quad | t > t_1$$

$$\tau = \frac{2\bar{a}}{\omega_n}$$

$$\left(\frac{xk}{F_0} \right)_{\max} = 2 \sin \frac{\pi t_1}{\tau}$$

$$t > t_1$$

