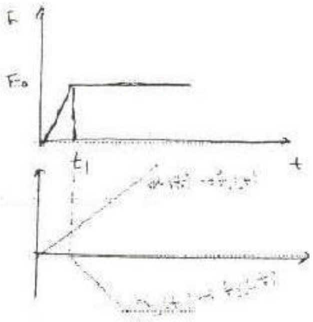
همان دامنه است و تغییری نکرده < $t_1/\pi = 1, 2, 3$

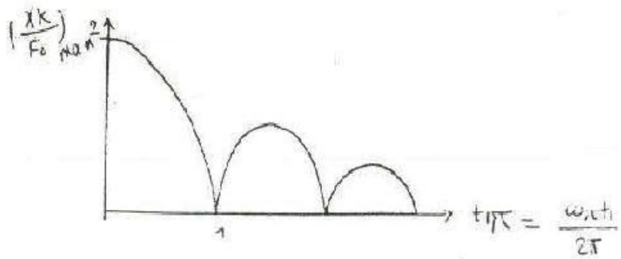
$t_1/\pi = 0.5, 1.5, 2.5 \rightarrow$ max دامنه

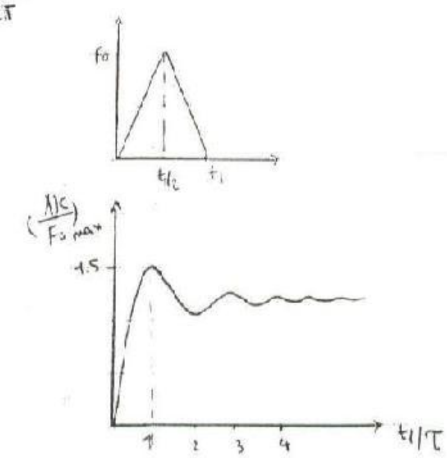
x max ← عکس العمل طبیعی

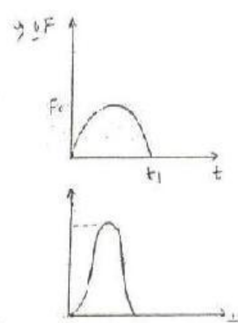
π < سیستم

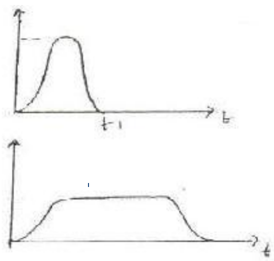
t_1, F_0 < تحریک

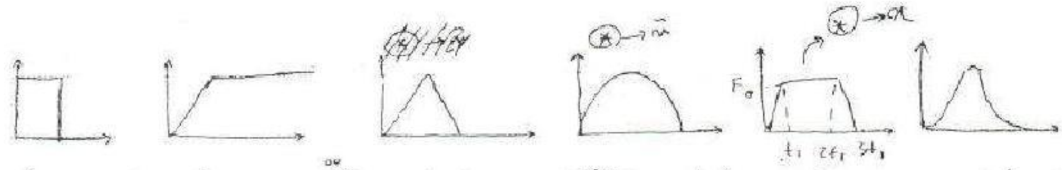












برای نمودارهای بالا، نمودار t_1/τ — $\left(\frac{XK}{F_0}\right)_{max}$ و t_1/τ — $\left(\frac{\ddot{X}K}{F_0}\right)$ را بدون مقیاس رسم نمایید.

$$\int_0^{t} \sin w\lambda(\sin w_n t\cos w_n\lambda - \sin w_n\lambda\cos w_n)d\lambda$$

$$\sin w_n t\int_0^{t}\sin w\lambda\cos w\lambda d\lambda - \cos w_n t\int_0^{t}\sin w\lambda\sin w_n$$

$$\int_0^{t}\sin w\lambda\cos w_n\lambda d\lambda = \frac{1}{w_n}\sin w\lambda\sin w_n\lambda\Big|_0^t - \int\frac{w}{w_n}\cos w\lambda\sin w_n\lambda d\lambda$$

$$u = \sin w\lambda \to du = w\cos w\lambda$$

$$= \frac{1}{w_n}\sin wt\sin w_n t - \frac{w}{w_n^2}\sin wt\sin w_n t$$

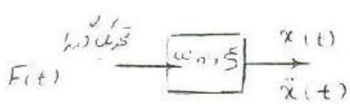
$$du = \cos w_n\lambda d\lambda \to u = \frac{1}{w_n}\sin w_n\lambda$$

$$u = \sin w_n\lambda \to du = w_n\cos w_n\lambda$$

$$du = \cos w\lambda d\lambda \to r = \frac{1}{w}\sin w\lambda$$

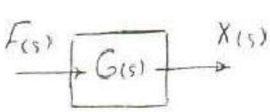
$$+\int\cos w_n\lambda\sin w\lambda d\lambda$$

روش کلاسیک:



$$x(t) = \int_0^{t} f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda$$

در این فضا نمی توان رابطه بین g,f,x نوشت. ولی در فضای مختلط می شود.



$$x(s) = F(s)G(s)$$

$$x(t) = h^{-1}\left[x(s)\right] = \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$F(t) = F_{\circ}u(t)$$

$$F(s) = \frac{F_{\circ}}{s}$$

$$\rightarrow x(s) = \frac{F_{\circ}}{s}G(s)$$

$$G(s)?$$

برای پیدا کردن $G(s)$ ، از معادله دیفرانسیل لاپلاس می گیریم. (و به قسمت همگن کاری نداریم!) یعنی به شرایط اولیه و گذرا کاری نداریم. فقط قسمت ماندگار را بررسی می کنیم.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$h\left[x(t)\right] = x(s)$$

$$h\left[\dot{x}(t)\right] = sx(s) - x(0)$$

$$h\left[\ddot{x}(t)\right] = s^2x(s) - s\dot{x}(0) - x(0)$$

چون $G(s)$ رابطه ورودی به خروجی در حالت ماندگار است. به شرایط اولیه کاری نداریم و $\leftarrow$

$$ms^2x(s) + csx(s) + kx(s) = F(s)$$

$G(s) \leftarrow$ تابع تبدیل سیستم (برای سیستم های درجه اول، $G(s)$ حالت روبرو است)

$$G(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

تابع پله:

$$f(t) = F_{\circ}u(t)$$

$$F(s) = \frac{F_{\circ}}{s}$$

$$x(s) = \frac{F_{\circ}}{s}\left[\frac{1}{ms^2 - cs + k}\right]$$

برای لاپلاس معکوس گروتن، یا در جدول مقدار لاپلاس معکوس را می بینیم یا آن را به فرم استاندارد ساده در می آوریم و از حقطیات استفاده می کنیم. چون این تابع در جدول وجود ندارد.

$$x(t) - h^{-1}[x(s)] - h^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{A_2 + B_2 s}{ms^2 - cs + k}\right]$$

$$- h^{-1}\left[\frac{A_1 ms^2 + A_1 cs + A_1 k + A_2 s - B_2 s^2}{s(ms^2 + cs + k)}\right]$$

$$(A_1 m - B_2)s^2 + (A_1 c - A_2)s + A_1 k = F_o$$

$$A_1 - \frac{F_o}{k}$$

$$A_2 = \frac{-F_o}{ek}c$$

$$B_2 = \frac{-F_o}{mk}m$$

$$x(s) = \frac{-F_o}{ks} + \frac{\frac{-F_o c}{k} - \frac{F_o m}{k}s}{ms^2 - cs + k} = \frac{F_o}{k}\left[\frac{1}{s} - \frac{c + ms}{ms^2 - cs + k}\right]$$

$$x(t) - \frac{F_o}{k}[1 - \cos\ldots + \sin\ldots]$$

$$h[1] - \frac{1}{s}$$

$$h[t] = \frac{1}{s^2}$$

$$h\left[e^{-at}\right] - \frac{1}{s+a}$$

$$h\left[te^{-at}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$h[\cos wt] - \frac{s}{s^2 + w^2}$$

$$h[\sin wt] - \frac{w}{s^2 - w^2}$$

سیستم بی بعد شده ساده مرتبه ۲:

$$h^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}\right] - \frac{1}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t}\sin w_n\sqrt{1-\xi^2}\,t$$

$$h^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}\right] - \frac{1}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t}\cos w_n\sqrt{1-\xi^2}\,t$$

تابع ramp:

$$f(t) = \propto tu(t)$$

$$F(s) = \frac{\propto}{s^2}$$

$$x(s) = \frac{\propto}{s^2}\left[\frac{1}{ms^2+cs+k}\right] = \frac{A_1}{S}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3-B_3 s}{ms^2+cs+k}$$

چون تابع لاپلاس معکوس از صفر شروع می شود برای تحریک های گذرا مناسب است (قبل از صفر تعریف نشده)

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx = f(t)$$

روش مدرن: (فضای حالت)

وقتی سیستم ها چند درجه آزادی می شوند، روش مدرن بهتر است. د راین روش یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ را به ۲ معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می کنیم. برای این کار باید ۲ متغیر تعریف کنیم.

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2-\frac{k}{m}x_1-\frac{1}{m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k/m & -c/m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}f(t)$$

$\dot{x} = Ax+Bf$ یک معادله دیفرانسیل درجه اول ماتریسی

$$\dot{x} = Ax+Bf \rightarrow sx_{(s)} = Ax_{(s)}+Bf_{(s)} \rightarrow x_{(s)} = [sI-A]^{-1}BF_{(s)}$$

$x(t) = h^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}BF_{(s)}\right\}$ لا پلاس معکوس دو تابع وقتی به فضای زمان می اید، می شود انتگرال کانولوشن

$$h^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=\varphi(t)$$

$$x(t)=\int_0^t \varphi(\lambda \; t)Bf(\lambda)\,d\lambda$$

$$\varphi.B=g$$

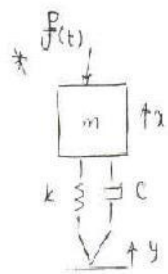
$$sx_{(s)}-x_{(0)}-Ax_{(s)}+BF_{(s)}$$

$$(sI-A)x_{(s)}-x_{(0)}+BF_{(s)}$$

$$x_{(s)}-(SI-A)^{-1}x(0)+(SI-A)^{-1}BF(s)$$

$$x(t)=h^{-1}\left[(SI-A)^{-1}\right]X_{(0)}+h^{-1}\left[(SI-A)^{-1}BF_{(0)}\right]$$

$$X(t)-\varphi(t)X_{(0)}-\int_0^t \varphi(\lambda-t)Bf(\lambda)\,d\lambda$$



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx-ky+c\dot{y}$$

$$x_1=x$$
$$\dot{x}_1-x_2$$
$$x_2-\dot{x}$$
$$\dot{x}_2=-\frac{c}{m}x_2-\frac{k}{m}x_1+\frac{k}{m}y+\frac{c}{m}\dot{y}$$

چون این دستگاه دارای $\dot{y}$ است حل مسئله را مشکل می کند. چون نمی توان مشتق ورودی یعنی $\dot{y}$ را به دست آورد.

اگر مشتق ورودی داشته باشیم بالاترین مشتق ها را یک طرف تساوی می بریم.

مشتق صفر شده

$$x_1=x$$
$$x_2=?=m\dot{x} \quad cy$$

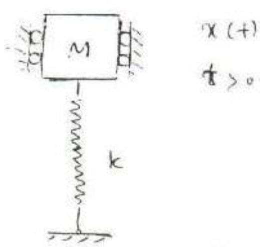
$m\ddot{x} \quad c\dot{y} = \quad c\dot{x} \quad kx + ky + f(t)$ انتگرال طرف چپ را برای برابر با متغیر دوم میگیریم.

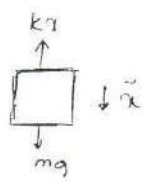
$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m}x_2 + \frac{c}{m}y$$

$$\dot{x}_2 = -c\left(\frac{1}{m}x_2 + \frac{c}{m}y\right) - kx_1 + ky - f(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{m}\\ -k & -\frac{c}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c/m\\ k - c^2/m\end{bmatrix}y$$

$$B \Rightarrow \begin{bmatrix}c/m & 0\\ k - c^2/m & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ f(t)\end{bmatrix}$$

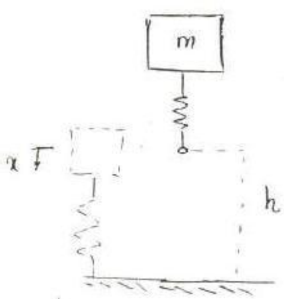




$$m\ddot{x} + kx = mgu(t)$$
$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = 0$$

$x(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos w_n t)$ جواب همان حل پله است.

$$m\ddot{x} + kx = mgu(t)$$
$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = \sqrt{2gh}$$

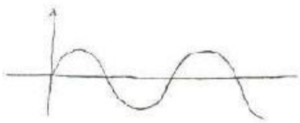


$: m\ddot{x} + kx = 0 \to x_1(t) = A\sin w_n t + B\cos w_n t \to x_1(t) = \frac{\sqrt{2gh}}{w_n}\sin w_n t$

معادله بدون شرایط اولیه ← $x_2(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos w_n t)$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2gh}{w_n}\sin w_n t + \frac{mg}{k}}(1 - \cos w_n t)$$

اگر x_1 رابرای قسمت همگن بدست می آوریم و بعد $\frac{mg}{k}$ را به عنوان $x_2(t)$ انتخاب می کردیم اشتباه بود چون جواب خصوصی $\frac{mg}{k}$ نیست چون تحریک ثابت نبوده (mg) بلکه گذرا بوده $(mgu(t))$

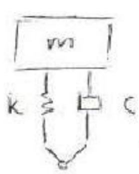


$$m\ddot{x}+kx=F_0 \sin w_n t \quad u(t)$$

مسئله بالا برای حالتی مطرح می شود که جسمی از ارتفاع می افتد. برای این کار باید شتاب max را پیدا کنیم و از روی آن نیروی max را پیدا می کنیم که ببینیم (مقاومت مصالح) جسم می شکند یا نه. اگر بخواهیم جسمی که به زمینی می خورد نشکند باید فنری به آن وصل کنیم که وقتی زمین خورد max شتابی که ایجاد می کند کمتر از شتاب max باشد که خود جسم به تنهایی می تواند تحمل کند .(طراحی بسته بندی)

مبحث طراحی بسته بندی دارای سه بخش است: ارتعاشات مقاومت طراحی

وقتی متری برای جسم طراحی می کنیم دمپر هم حتما خواهد داشتو



$$a\max \leq a\max$$

برای پیدا کردن max شتاب باید از $x(t)$ سه بار مشتق بگیریم. زمانی که $jerk$ صفر است (نقطه $pick$) را پیدا می کنیم و درون رابطه $\ddot{x}$ قرار می دهیم.

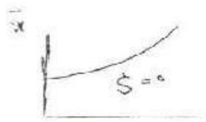
$$a - f\,(m,k,h)$$

$$\ddot{x} - \quad g\sqrt{\frac{2h}{\delta st}+1}$$

$$\delta st - \frac{mg}{k}$$

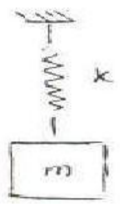
k □ › وقتی فنر خیلی ضعیف شود

δst □ › $\ddot{x} - \quad g$ شتاب min

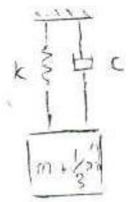


ضریب $damping$ هم موثر است ولی برای اینکه مساله سخت نشود در اینجا نیاوردیم.

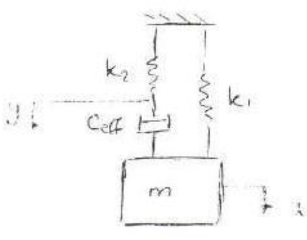
تکلیف: منحنی شتاب را برای ξ های مختلف رسم کنید.



فنر واقعی به جرم m' و دارای دمپر است.

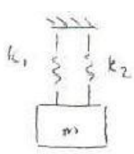


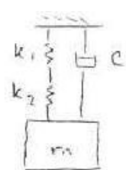
معمولا این سیستم سیستم معادل نیست.

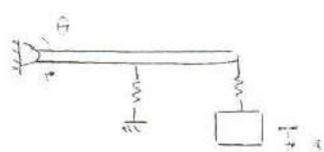


سیستم دو درجه ازادی

سیستم دو درجه ازادی



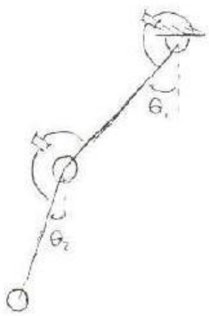


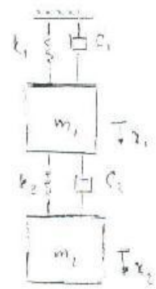


هردو یک درجه آزادی اند

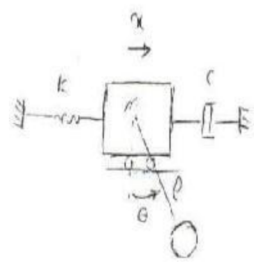
سیستم ساده دو درجه آزادی:

سیستم استاندارد دو درجه آزادی:

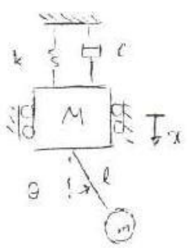




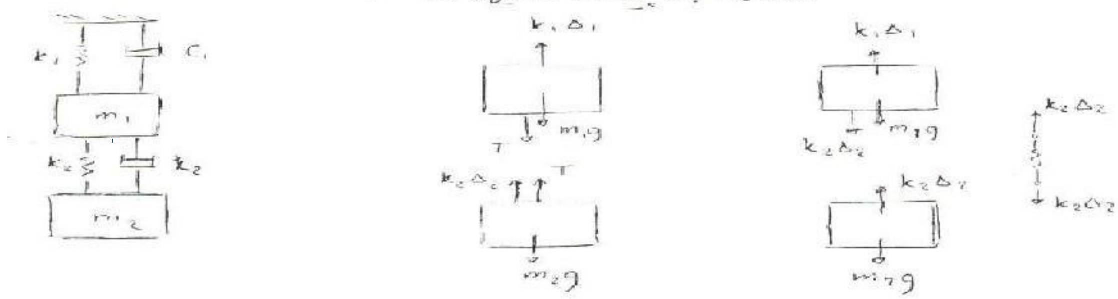
این حرکت قطعا دو درجه آزادی است:



ولی این سیستم ممکن است دو یا یک درجه ازادی باشد(یعنی میله به حالت قائم قرار گیرد) وجسم نوسان کند.



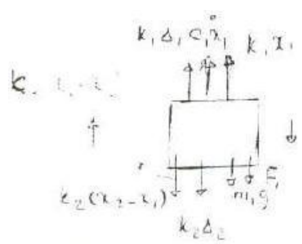
[illegible]



$$\begin{cases} k_1\Delta_1 - k_2\Delta_2 - m_1 g = 0 \\ k_2\Delta_2 - m_2 g = 0 \end{cases}$$

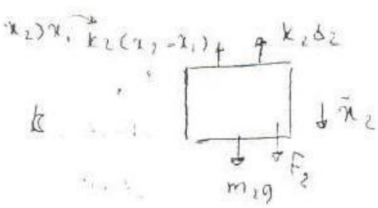
$$\Delta_2 = \frac{m_2 g}{k_2}$$

$$\Delta_1 = \frac{m_1 g + m_2 g}{k_1}$$



$$\ddot{x} + F - k_1\Delta_1 - k_1 x_1 + m_2 g - c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_2\Delta_2 = m_1\ddot{x}_1$$

دمپر ها هم مثل نیروی فنر در حالت دینامیکی وارد مسئله می شوند.



$$k_2\Delta_2 + m_2 g - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2\ddot{x}_2$$

پس وزن وارد مسئله نمی شود

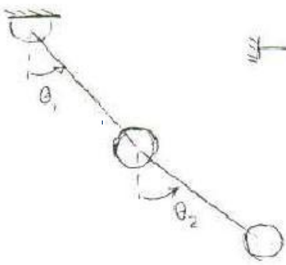
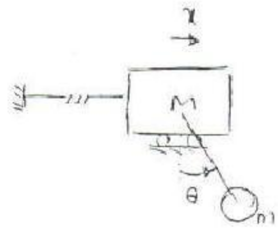
$$\rightarrow m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + c_1\dot{x}_1 - k_2 x_2 - c_2\dot{x}_2 + k_2 x_1 + c_2\dot{x}_1 = 0$$

$$\rightarrow m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2 x_2 - c_2\dot{x}_1 - k_2 x_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

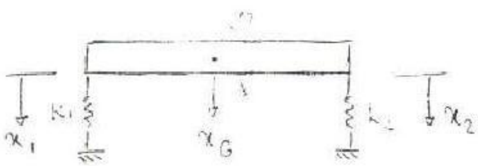
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

تمرین:.....

$m\ddot{x} + kx = 0$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & \\ 0 & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix}$$



$\left.\begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right\}$ در این نقطه هیچ کوپل استاتیکی وجود ندارد

بی نهایت دستگاه **مختصات عمومی داریم.**

$\left.\begin{matrix} \theta \\ x_G \end{matrix}\right\}$ طبیعی natural $\qquad$ $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_G \end{matrix}\right\}$ عمومی

$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\}$ عمومی $\qquad$ $\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_E \end{matrix}\right\}$ عمومی

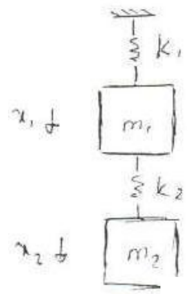
$\left.\begin{matrix} x_1 \\ \theta \end{matrix}\right\}$ عمومی $\qquad$ $\left.\begin{matrix} x_B \\ x_C \end{matrix}\right\}$ عمومی

$\left.\begin{matrix} x_2 \\ \theta \end{matrix}\right\}$ عمومی $\qquad$ $\left.\begin{matrix} x_C \\ \theta \end{matrix}\right\}$ عمومی

اگر محور مختصات نقلی را پیدا کنیم کار بسیار ساده می شود ولی پیدا کردن آن ها گاهی ساده نیست.

مثلا اگر $k_2 = k_1$ باشد، محورهای نقلی در مرکز جرم می شود.

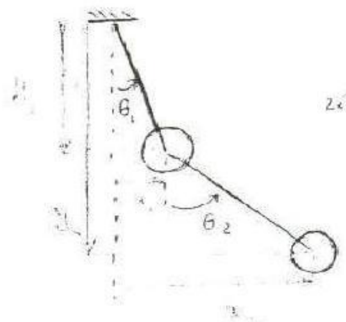
$$x^* = x^*(x_c, x_B)$$
$$y^* - y^*(x_c, x_B)$$



نرمال $\left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right.$ $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_2 - x_1 \end{matrix}\right\}$

نقلی $\Big\{$ یکی از حالت های $\begin{matrix} x - cx_1 + dx_2 \\ y = ax_1 + bx_2 \end{matrix}$

$$\underbrace{M}_{2\times2}\underbrace{\ddot{X}}_{2\times1} + \underbrace{C}_{2\times2}\underbrace{\dot{X}}_{2\times1} + \underbrace{K}_{2\times2}\underbrace{X}_{2\times1} = \underbrace{F}_{2\times1}$$



در قدم اول F و $c\dot{x}$ را کنار می گذاریم و *Undamped Natoual Frequencies* را پیدا می کنیم.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$w_{n1}$$
$$w_{n2}$$

سیستم ما در این حالت بسته به شرایط اولیه با مخلوطی از این دو فرکانس نوسان می کند.

$$x_1(t) = x_{11}\sin(w_{n1}t + \varphi_{11}) + x_{12}\sin(w_{n2}t + \varphi_{12})$$
$$x_2(t) = x_{21}\sin(w_{n1}t + \varphi_{21}) + x_{22}\sin(w_{n2}t + \varphi_{22})$$

ما می توانیم شرایط اولیه ای به سیستم بدهیم که فقط با یکی از دو w_n نوسان کند.

مثلا:

$$\begin{cases} x_1(t) - x_1 \sin w_{n1} t \\ x_2(t) - x_2 \sin w_{n1} t \end{cases}$$

به صورت طبیعی سیستم ها با w طبیعی نوسان می کنند مگر اینکه ما به حالت دیگری مجبورشان کنیم.

$$\begin{cases} x_1(t) = x_3 \sin w_{n2} t \\ x_2(t) = x_4 \sin w_{n2} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1 \sin w_n t \\ x_2(t) - x_2 \sin w_n t \end{cases}$$

برای پیدا کردن فرکانس طبیعی، باید ابتدا ماتریس m,k را پیدا کنیم، سپس در معادله های دیفرانسیلی که داریم، x_2, x_1 را به صورت مد نرمال قرار دهیم.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} m_1 w_n^2 x_1 \sin w_n t + (k_1 + k_2) x_1 \sin w_n t \quad k_2 x_2 \sin w_n t = 0 \\ m_2 w_n^2 x_2 \sin w_n t \quad (k_2 + x_2) \sin w_n t \quad k_2 x_1 \sin w_n t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 - k_2 - m_1 w_n^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 w_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \sin w_n t - 0$$

سه حالت وجود دارد:

یا ماتریس اولی صفر باشد که غیر ممکن است (چون k هیچگاه صفر نمی شود)

یا ماتریس دوم صفر است که اصلا حرکت نخواهیم داشت

یا $\sin w_n t$ صفر باشد که در واقع w_n های خاصی به ما خواهد داد که ما حالت خاص نمی خواهیم.

پس حالت چهارم درست است که دترمینان صفر باشد.

$$\Rightarrow ad - bc - 0 \rightarrow (k_1 + k_2) k_2 - m_1 m_2 w_n^4 + w_n^2 \left[-m_1 k_2 - m_2 k_1 - m_2 k_2 \right] - k_2 - 0$$

$$w_n^2 - \frac{m_1 k_2 \quad m_2 k_1 + m_2 k_2}{2 m_1 m_2} \pm \frac{\sqrt{(m_1 k_2 + m_2 k_1 m_2 k_2)^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}}{2 m_1 m_2}$$

$m_1 = 2m \qquad k_1 = 2k$

$m_2 = m \qquad k_2 = k$

$$w_n^2 = \frac{2mk + 2mk + mk}{4m^2} \pm \frac{\sqrt{(5mk)^2 - 16m^2k^2}}{4m^2} = \frac{5}{4}\frac{k}{m} \pm \frac{3}{4}\frac{k}{m} \Rightarrow \begin{cases} 2\frac{k}{m} \\ \frac{k}{2m} \end{cases}$$

$$w_{n1} = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$w_{n2} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

آن چیزی که کوچکتر است همیشه ۱ است و به ترتیب بزرگ می شود. در واقع w_{n2} دو برابر w_{n1} است.

$$\left\{(k_1 + k_2 - mw_n^2)x_1 - k_2x_2\right\}\sin w_n t = 0$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - mw_n^2} = \frac{k}{2k + k - 2mw_n^2} = \frac{k}{3k - 2mw_n^2}$$

$$(\frac{x_1}{x_2})_1 = \frac{k}{3k - k} = \frac{1}{2}$$

$$(\frac{x_1}{x_2})_2 = \frac{k}{3k - 4k} = 1$$

می خواهیم از نظر ریاضی اثبات کنیم که چه شرایط اولیه ای به سیستم بدهیم تا با مد اول و چه شرایطی بدهیم تا با مد دوم نوسان کند.

$$x_1 = x_{11}\sin(w_{n1}t - \varphi_{11}) + x_{12}\sin(w_{n2}t - \varphi_{12})$$

$$x_2 = x_{21}\sin(w_{n1}t - \varphi_{21}) + x_{22}\sin(w_{n2}t - \varphi_{22})$$

$$(\frac{x_{11}}{x_{21}}) = (\frac{x_1}{x_2})_{w_{n1}} \quad (\frac{x_{12}}{x_{22}}) = (\frac{x_1}{x_2})_{w_{n2}}$$

$$x_1(0) \quad \dot{x}_1(0)$$

$$x_2(0) \quad \dot{x}_2(0)$$

2مجهول ‹ $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)$ 6مجهول ‹ $w_{n1}, w_{n2}, (\frac{x_1}{x_2})_1, (\frac{x_1}{x_2})_2$ 10مجهول

در سیستمی که میرایی ندارد، باید حالت مد اول و دوم بر قرار شود. برای این کار، باید:

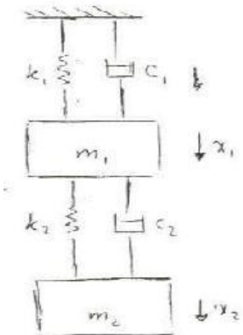
$$\varphi_{11} = \varphi_{21}$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{22}$$

میرایی همیشه باعث می شود دو سیستم غیر هم باز شوند ولی اگر میرایی نباشد در سیستم با ترکیبی از w_n ها نوسان می کنند.

$$w_{n1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_1 \quad w_{n2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \leftarrow undamped\,(\xi=0)\begin{cases} w_{n1},\xi_1 \\ w_{n2},\xi_2 \end{cases}$$

$$0<\xi<1\begin{cases} wd_1 = w_{n1}\sqrt{1-\xi_1^2} \\ wd_2 - w_{n2}\sqrt{1-\xi_2^2} \end{cases}$$



$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$M - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad k - \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad c - \begin{bmatrix} c_1-c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$w_{n1} = w_{n1}(m_1, m_2, k_1, k_2) \qquad w_{n2} = w_{n2}(m_1, m_2, k_1, k_2)$$

$$\xi_1 - \xi_1(m_1, m_2, k_1, k_2, c_1, c_2) \qquad \xi_2 - \xi_2(m_1, m_2, k_1, k_2, c_1, c_2)$$

اگر جواب را به طور کلی $x(t) - xe^{rt}$ در نظر بگیریم، بسته به مقدار r، همه حالت های جواب x را دربر می گیرد. در این جا فرض می کنیم هر دو مد بایک فرکانس نوسان می کنند و یک ξ پس هر دو با یک مد نوسان می کنند.

$$x_1(t) - x_1 e^{\xi_1 w_{n1} t} \sin w_{d1} t \qquad x_2(t) - x_2 e^{\xi w_{n1} t} \sin w_{d1} t$$

r حقیقی $\xi > 1$

r حقیقی خاص $\xi = 1$

r مختلط $0 < \xi < 1$

r موهومی $\xi = 0$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$mD^2 + cD + k = 0$$

$$D = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$x = xe^{rt} \Rightarrow mxr^2e^{rt} + cxre^{rt} + kxe^{rt} = 0 \Rightarrow mr^2 + cr + k = 0$ به این روش حل، روش حل نمایی می گویند

$$x_1 = x_1e^{rt}$$

$$x_2 = x_2e^{rt}$$

$$m_1x_1r^2e^{rt} - (c_1 + c_2)x_1re^{rt} - (k_1 - k_2)x_1e^{rt} - c_2x_2re^{rt} - k_2x_2e^{rt} = 0$$

$$m_2x_2r^2e^{rt} - (-c_2)x_1re^{rt} - c_2x_2re^{rt} - k_2x_1e^{rt} + k_2x_2e^{rt} = 0$$

$\begin{bmatrix} m_1r^2 + (c_1 + c_2)r + k_1 + k_2 & -c_2r - k_2 \\ -c_2r - k_2 & m_2r^2 + c_2r + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} e^{rt} = 0 \Rightarrow$ دترمینان برابر با صفر

$$a_4r^4 + a_3r^2 + a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0$$

$$r_1 = \alpha_1 = -\xi_1 w_{n1} + w_{n1}\sqrt{\xi_1^2 - 1}$$

$$r_2 = \alpha_2 = -\xi_1 w_{n1} - w_{n1}\sqrt{\xi_1^2 - 1}$$

$$r_3 = \alpha_3 = -\xi_2 w_{n2} - w_{n2}\sqrt{\xi_2^2 - 1}$$

$$r_4 = \alpha_4 = -\xi_2 w_{n2} - w_{n2}\sqrt{\xi_2^2 - 1}$$

$$r_1 = \alpha_1 + jB_1$$

$$r_2 = \alpha_1 - jB_1$$

$$r_3 = \alpha_2 + jB_2$$

$$r_4 = \alpha_2 - jB_2$$

برای پیدا کردن ξ ها و w_n ها، ابتدا باید جفت هر کدام از α ها را پیدا کنیم، سپس از جمع و تفریق آن ها معادله های قابل حل به دست می آید.

چون باید همه جفت باشد: یا هر ۴ تا مختلط اند یا هر ۴ تا حقیقی اند یا ۲ تا حقیقی و ۴ تا مختلط اند.

برای پیدا کردن ریشه های r در معادله درجه ۴، می توان در جدولی مقادیر تغییر علامت جواب r را پیدا کرد، و بعد ریشه های موهولی را یافت.

ولی قسمت سخت کار وقتی است که هر ۴ جواب معادله مختلط باشد.

گر برای پیدا کردن جواب ماشین حساب نداشتیم، اول چک می کنیم که حقیقی است یا نه، بعد معادله را به صورت $(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)-0$ می نویسیم و مقادیر r_1 تا r_4 را می یابیم.

$$k_1 = 2k_2 = 2k$$
$$c_1 = 2c_2 = 2c$$
$$m_1 = 2m_2 = 2m$$
$$\Rightarrow 2m^2r^4 + (5mc)r^3 + (7mk - 2c^2)r^2 + (4kc)r - 2k^2 = 0$$

$$m = 2kg$$
$$k - 10 N/m \qquad\qquad 8r^4 + 100r^3 + 340r^2 + 400r + 200 - 0$$
$$c = 10\frac{Ns}{m}$$

چون $\frac{c}{2\sqrt{km}}$ تقریبا بزرگتر از ۱ است، حداقل دو ریشه حقیقی اند.

$$\begin{cases} r_1 - \;\; 3.04 \\ r_2 = -7.85 \end{cases}$$ معادله را به $(r-r_2)(r-r_1)$ تقسیم می کنیم

$$8r^2 + 12.9r + 8.4 - 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_3 - -0.8 - j\,0.63 \\ r_4 - -0.8 + j\,0.63 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 w_{n1} \;\; w_{n1}\sqrt{\xi_1^2 \;\; 1} &= \;\; 7.85 \\ -\xi_1 w_{n1} - w_{n1}\sqrt{\xi_1^2 - 1} &- -3.04 \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} \rightarrow -2\xi_1 w_{n1} &= -10.89 \\ -2^{w_{n1}}\sqrt{\xi_1^2 - 1} &- -4.81 \end{aligned}\right\} - D$$

$$-\xi_2 w_{n2} \pm j w_{n2}\sqrt{-\xi_2^2 - 1} = -0.8 \mp j\,0.63$$

$$x_1(t) = x_{11}e^{r_1 t} + x_{12}e^{r_2 t} + x_{13}e^{\;\;\xi_2 w_{n2} t}\sin(w_{n2}\sqrt{1 \;\; \xi_2^2}\,t)$$
$$x_2(t) - x_{21}e^{r_1 t} + x_{22}e^{r_2 t} + x_{23}e^{\;\;\xi_2 w_{n2} t}\sin(w_{n2}\sqrt{1 - \xi_2^2}\,t)$$

$(\frac{x_{11}}{x_{21}})_{r1}$

$(\frac{x_{12}}{x_{23}})_{r2}$ $\qquad (4r^2+30r+30)x_1-(10r+10)x_2=0 \qquad \frac{x_1}{x_2}=\frac{10r+10}{4r^2+30r+30}$

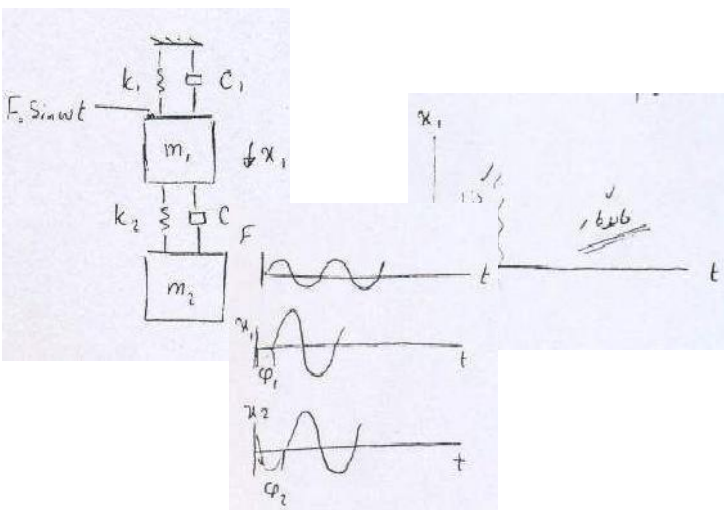
$(\frac{x_{13}}{x_{23}})_{r3,r4}$

$(\frac{x_1}{x_2})_{r1}=\frac{1}{1.187}=0.9 \qquad (\frac{x_1}{x_2})_{r2}=\frac{1}{-0.6}=-1.6 \qquad (\frac{x_1}{x_2})_{r3,r4}=0.2$

$$x_{1(t)}=A_1e^{-3.04t}+B_1e^{-7.8t}+e^{-0.8t}(c_1\cos 0.63t-c_2\sin 0.63t)$$

$$x_{2(t)}=A_1\times 1.18e^{-3.04t}-0.6B_1e^{-7.95t}-5.0e^{-0.8t}(c_1\cos 0.63t-c_2\sin 0.63t)$$

بررسی سیستم ماندگار:



$F=F_0\sin wt$

$x_1=x_1\sin(wt-\varphi_1)$

$x_2=x_2\sin(wt-\varphi_2)$

چون حل این مسئله دشوار است، در مرحله اول برای سیستم بدون میرایی مسئله را حل می کنیم.

$c_1=c_2=0$

سیستمی که میرایی ندارد، عکس العمل با تحریک هم فازند.

$\Rightarrow$

$x_1=x_1\sin wt$

$x_2=x_2\sin wt$

$M\ddot{x}+kx=F$

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2-m_1w^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-m_2w^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\sin wt=\begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}\sin wt$$

کافی است معکوس ماتریس اولی را در طرف دوم تساوی ضرب کنیم $\Delta = (k_1 + k_2 - m_1 w^2)(k_2 - m_2 w^2) - k_2^2$

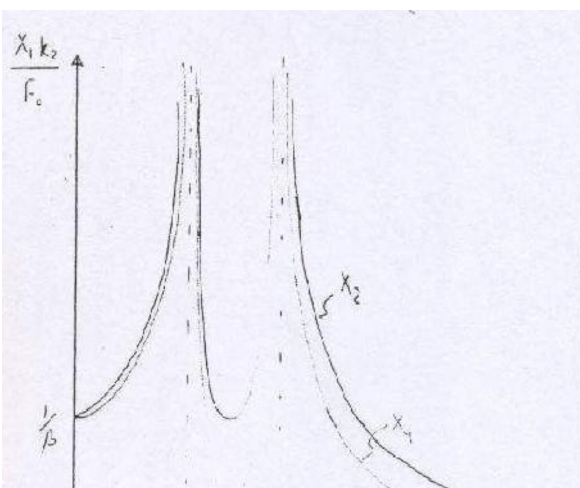
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{k_2 - m_2 w^2}{\Delta} & \dfrac{k_2}{\Delta} \\ \dfrac{k_2}{\Delta} & \dfrac{k_2 + k_2 - m_1 w^2}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{F_0 (k_2 - m_2 w^2)}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{k_2 F_0}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{\frac{1}{k_2}(1 - \frac{m_2}{k_2} w^2) F_0}{(\frac{k_1 + k_2}{k_2} - \frac{m_1}{k_2} w^2)(1 - \frac{m_2}{k_2} w^2) - 1}$$

$$\frac{x_1 k_2}{F_0} = \frac{(1 - (\frac{w}{w_2})^2)}{(B + 1 - \mu(\frac{w}{w_2})^2)(1 - (\frac{w}{w_2})^2) - 1}$$

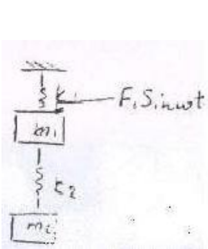
$$\frac{x_2 k_2}{F_0} = \frac{1}{(B + 1 - \mu(\frac{w}{w_2})^2)(1 - (\frac{w}{w_2})^2) - 1}$$



چون در این دو نقطه تشدید اتفاق افتاد $w_{n1} = 0.8 w_2$ ، $w_{n2} = 1.25 w_2$

$w^* = w_2 \rightarrow$ *zero frequency*

در این نوسان جرم m_1 نوسان نمی کند ولی جرم m_2 نوسان خواهد داشت. پس اگر جرمی داشته باشیم که نیروی هارمونیکی به آن وارد شود و بخواهیم آن جسم ساکن باقی بماند و نوسان نکند جرمی همراه فنری به آن متصل می کنیم به طوری که رابطه زیر برای جرم دوم و فنرش بر قرار باشد: $\sqrt{k_2 / m_2}$



چنین جسمی را جاذب ارتعاش یا حبس کننده ارتعاش می گویند.