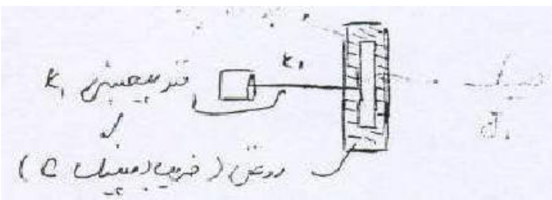
ولی اگر نسبت $\sqrt{k_2/m_2}$ فقط کمی از wبیشتر یا کمتر شود، ممکن است به تشدید برسد(پس خطرناک است)

برای سیستم های خطی نمی توان به جای فنر k_2، دمپر گذاشت چون در صورت پایین رفتن به بالا بر نمی گردد.

ولی در سیستم های دوار، می توان از دمپر و جرم m_2 استفاده کرد.

برای حل چنین مسئله ای، مسئله کلی زیر را حل می کنیم و k_2و c_2 را صفر قرار می دهیم.



برای حل چنین مسئله ای، روش عادی قابل استفاده نیست و باید از روش نمایی استفاده کرد.

$$F = F_0 e^{jwt}$$

$$x_1 = x_1 e^{j(wt-\varphi_1)} = x_1 e^{-j\varphi_1} e^{jwt} = \bar{x}_1 e^{jwt} \quad |\bar{x}_1| = x_1 \quad \angle\bar{x}_1 = \varphi_1$$

$$x_2 = x_2 e^{j(wt-\varphi_2)} = x_2 e^{-j\varphi_2} e^{jwt} = \bar{x}_2 e^{jwt} \quad |\bar{x}_2| = x_2 \quad \angle\bar{x}_2 = \varphi_2$$

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{jwt}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1 w^2 + jw(c_1+c_2) + k_1 + k_2 & -c_2 jw - k_2 \\ -c_2 jw - k_2 & -m_2 w^2 + jc_2 w + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{F_0(k_2 - m_2 w^2 + jwc_2)}{k_1 k_2 - m_2 k_1 w^2 - k_2 m_2 w^2 - k_2 m_1 w^2 - m_1 m_2 w^4 - w^2 c_1 c_2}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{F_0(k_2 - jwc_2)}{k_1 k_2 - m_2 k_1 w^2 - k_2 m_2 w^2 - k_2 m_1 w^2 + m_1 m_2 w^4 - w^2 c_1 c_2}$$

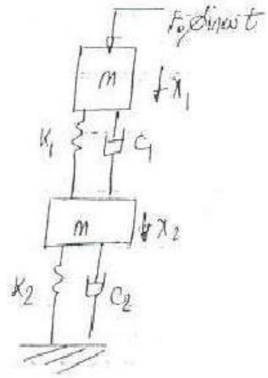
$$x_1 = |\bar{x}_1| = \frac{F_0\sqrt{(-m_2 w^2 + k_2)^2 + (c_2 w)^2}}{D} \quad x_2 = |\bar{x}_2| = \frac{F_0\sqrt{k_2^2 + (c_2 w^2)^2}}{D}$$

$$\frac{x_1}{F_0/k_2} = \frac{1}{A}\sqrt{(\Omega_r^2 - \Omega^2)^2 + a(\xi_2 \Omega \Omega r)^2}$$

$$\frac{x_2}{F_0/k_2} = \frac{1}{A}\sqrt{(\Omega_r^4 - 4(\xi_2 \Omega \Omega r)^2}$$

سیستم های دو درجه ازادی:

روابطش را به صورت کامل به دست آوردیم:

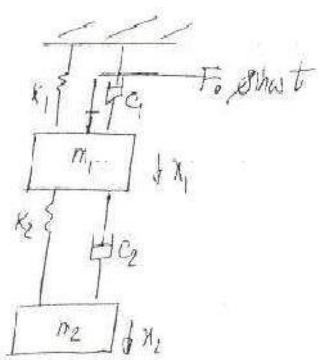


$$|\bar{x}_1| - x_1 - \frac{F_0\sqrt{(-m_2 w^2 + k_2) - (c_2 w)^2}}{D}$$

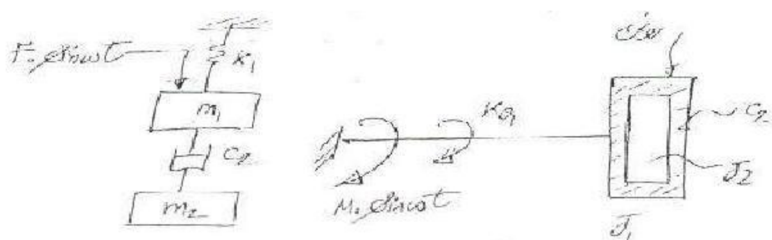
$$|\bar{x}_2| - x_2 - \frac{F_0\sqrt{k_2^2 - (c_2 w)^2}}{D}$$

$$D^2 = \left[m_1 m_2 w^4 - (m_1 k_2^2 + m_2 k_1 + c_1 c_2 + m_2 k_2) w^2 + k_1 k_2\right]^2 + \left[(m_1 c_2 - m_2 c_1 - m_2 c_2) w^3 - (k_1 c_2 - k_2 c_1) w\right]^2$$

در حالت خاص جای قبلی قرار می گیرد...



این سیستم خطی نمی تواند ارتعاش کند ولی سیستم دورانی می تواند.



در این حالت ممکن است.

$\begin{cases} k_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$ حالت خاص این مسئله

$$x_1 = \frac{F_0\sqrt{(m_2 w^2)^2 + (cw)^2}}{\sqrt{\left[m_2 w^2 (k_1 - m_1 w^2)\right]^2 + (cw)^2\left[m_2 w^2 - (k_1 - m_1 w^2)\right]^2}}$$

$$x_2 = \frac{+F_0 cw}{\sqrt{\left[m_2 w^2 (k_1 - m_1 w^2)\right]^2 + (cw)^2\left[m_2 w^2 - (k_1 - m_1 w^2)\right]^2}}$$

بی بعد کردن:

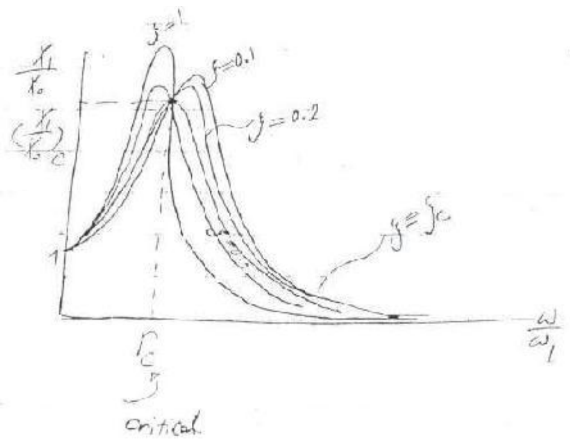
$$x_1 = \frac{x_0\sqrt{\mu^2 r^2 - 4\xi^2}}{\sqrt{\mu^2 r^2 (1-r^2)^2 + 4\xi^2\left[\mu r^2 - (1-r^2)\right]^2}}$$

$$x_0 = \frac{F_0}{K_1} \qquad \xi = \frac{c}{2m_1 w_1} \qquad r = \frac{w}{w_1}$$

$$w_1^2 = \frac{k_1}{m_1} \qquad \mu = \frac{m_2}{m_1}$$

x_1 را در حالت خاص بدست می آوریم:

نمودار ها را در ξ مختلف رسم می کنیم. **فرض $\mu = 1$**



در نمودار های بالا سیستم به صورت ۲درجه آزادی تحمل نمی کند(نمودار ۲تا *pick* نباشد) چون در ستاست ۲تا جرم داریم ولی فقط یک فنر داریم

تمام منحنی ها از یک نقطه ی ثابت می گذرند:

$\left(\frac{x_1}{x_{0c}}\right), r_r$

نموداری (به ازای یک مقدار ξ خاص) وجود دارد که این نقطه $pick$ نمودارش باشد(جاذب ارتعاشی برای جذب ارتعاش جرم m_1 قرار داده شده است) (جاذب ها اگر دمپر نداشته باشد هر جایی به بی نهایت می رسد)

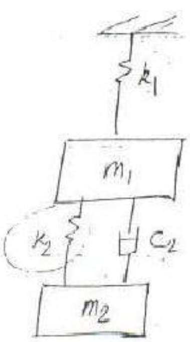
مقادیر $ceritical$ فقط به μ بستگی دارند:

$$\xi_c = \frac{\mu}{\sqrt{2(1+\mu)(2+\mu)}}$$
$$r_c = \sqrt{\frac{2}{2-\mu}}$$

این جاذب ارتعاشی برای سیستم های دوار قابل استفاده است. برای سیستم های خطی، یک فنر هم کنار c_2 باید باشد.

تمرین:

این حالت را نمودارهایش بر ۱ رسم کنیم. (با توجه به همان معادلات ماشین)



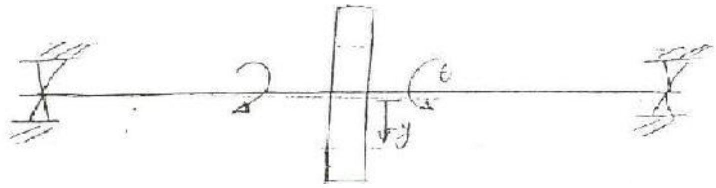
این مطالب تا الان سیستم ۲ درجه آزادی نوع اول (تحت تحریک $F_0 \sin wt$) بود.

نوع دوم، سیستم ۲ درجه آزادی با جرم نا متعادل است. کاربرد آن در نمودار های دورانی است:

مدل کردن این مسئله ی واقعی به سیستم شده قابل تحلیل ریاضی مهم است.

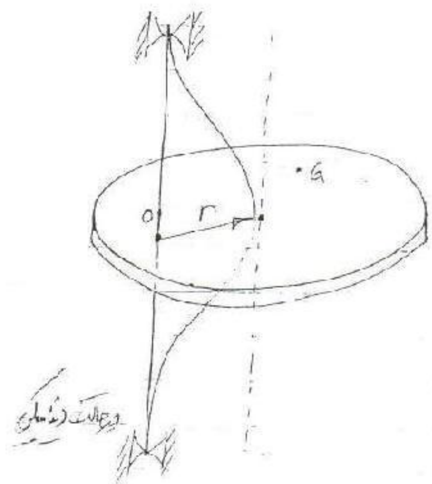
جرم را در مرکز متمرکز می کنیم و آن را با یک دیسک نشان می دهیم:

این دیسک وسط یک جرم نا متعادل می شود و.....

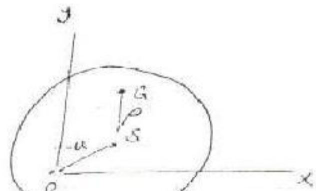


برای مدل کردن: به دو صورت می توان مدل کرد:۱ . ساده ۲ . کامل

در حالتی مقداری از دیگ خم شده:



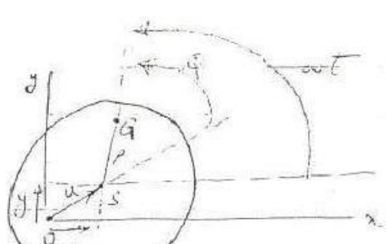
تصویر از بالا:



مرکز هندسی:S

مرکز جرم:G

فاصله مرکز جرم تا مرکز هندسی:



$$\sum Fx - \mathrm{max}$$
$$\sum Fy = may$$

φدر اثر چرخش دیسک در ایجاد شده است.

در حالت معمولی G و S و O هم خط هستند.

$$\sum Fx = \max$$

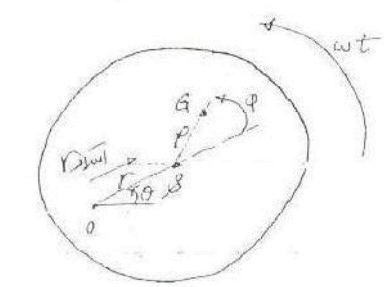
$$\rightarrow -kx - c\dot{x} = m\frac{d^2}{dt^2}(x - p\cos wt)$$

$$\sum fy = may \rightarrow -ky - c\dot{y} = m\frac{d^2}{dt^2}(y + p\cos t)$$

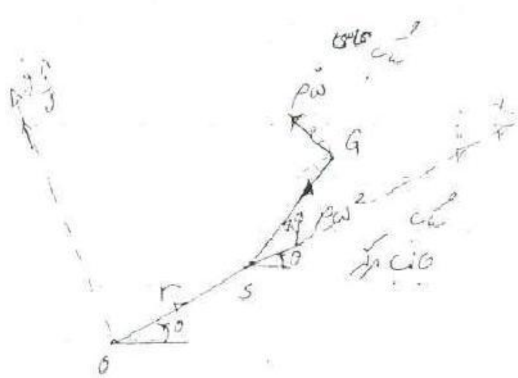
$$\rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mpw^2 \sin wt \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = mpw^2 \sin wt \end{cases}$$ سیستم ۲ درجه ازادی با جرم نا متعادل

۲ معادله با هم کوپل نیستند ما تاثیر x و y روی هم را در نظر نگرفتیم این مدل سازی ساده است.

مدل سازی کامل:



$$\vec{a_G} = \vec{a_S} + \vec{a_{G/S}}$$



$$a\vec{s} = (\ddot{r} - r\dot{\theta})\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$a\vec{G} = \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - pw^2\sin(wt - \theta)\right] + \left[(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) - pw^2\sin(wt - \varphi)\right]\hat{j}$$

این ها را هم داریم ولی $\ddot{\theta}$ را در نظر نمی گیریم در این مسئله تقریب زده ایم.$(+p\ddot{\theta}\sin(wt-\theta)\hat{j} + p\ddot{\theta}\cos(wt-\theta)\hat{j})$

$$\begin{cases} kr - c\dot{r} = ma_r \\ -cr\dot{\theta} = ma_\theta \end{cases}$$ میله در جهتی که خم می شود، جهت r است (x و y دیگر اینجا نداریم)

Ar همان شتاب در جهت $\hat{j}$ و $a\theta$ همان شتاب در جهت $\hat{j}$ است.

معادلات دیفرانسیل در مدل سازی کامل: (معادلات دیفرانسیل کامل جفت های دورانی در حالت نا متعادل)

$$\begin{cases} \Rightarrow -kr - c\dot{r} = m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - pw^2\cos(wt - \theta) + p\ddot{\theta}\sin(wt - \theta)\right] \\ \Rightarrow -k_\theta\theta - cr\dot{\theta} = m\left[r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - pw^2\sin(wt - \theta) + p\ddot{\theta}\cos(wt - \theta)\right] \end{cases}$$

۲ درجه آزادی r و θ است.

$$\rightarrow \begin{cases} m\ddot{r} - c\dot{r} + kr - mp\ddot{\theta}\sin(wt - \theta) - mp\dot{\theta}^2\cos(wt - \theta) - mr\dot{\theta}^2 = 0 \\ mr\ddot{\theta} + cr\dot{\theta} + k_\theta\theta + 2m\dot{r}\dot{\theta} - mp\dot{\theta}^2\sin(wt - \theta) + mp\ddot{\theta}\cos(wt - \theta) = 0 \end{cases}$$

۲ معادله دیفرانسیل در هم کوپل هستند. معادلات دیفرانسیل درجه ۲ هستند. دستگاه معادله غیر خطی است. Sin و cos ها $\dot{\theta}^2$ یا $\dot{r}\dot{\theta}$ ، $r\ddot{\theta}$ و... عوامل غیر خطی هستند. از روش های عددی و تقریبی حل می شود.

سنکرون حالتی است که دیسک یکنواخت بچرخد، در شرایط *steady* ، $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ نداریم، $\ddot{\theta}$ نداریم. (دوران یکنواخت است، r کم و زیاد نمی شود)

$$\dot{r} = 0$$
$$\ddot{r} = 0$$
$$\ddot{\theta} = 0$$

ساده کردن معادلات در این حالت:

$$\begin{cases} kr - mrw^2 - mpw^2\cos(wt - \theta) = 0 \\ cr\dot{\theta} - k_\theta\theta - mpw^2\sin(wt - \theta) = 0 \end{cases}$$

برای خطی کردن معادله دیفرانسیل غیر خطی:

در روش های عددی:

$$\dot{x} = \frac{x(k-1)-x(k)}{t}$$

$$\dot{r} = \frac{r(k+1)-r(k)}{t}$$

$$\ddot{r} = \frac{\dot{r}(k-1)-\dot{r}(k)}{t} = \frac{\frac{r(k+2)-(r(k+1)}{t} - \frac{r(k-1)-r(k)}{t}}{t}$$

$$\ddot{r} = \frac{r(k+2)-2r(k+1)+r(k)}{t^2}$$

$\dot{r}$و $\ddot{r}$و $\dot{\theta}$و $\ddot{\theta}$ را در معادله جایگذاری می کنیم.

step هایی که بر می داریم تا تابع پیوسته را *descrete* کنیم.

$$m\left(\frac{r(k-2)-2r(k-1)+r(k)}{T^2}\right)-c\left[\frac{r(kH)-r(k)}{T}\right]$$

$$+k(r(k))+mp\left[\frac{\theta(k+2)-2\theta(kH)+\theta(k)}{T^2}\right]\sin(wt-\theta)$$

با شرایط اولیه، r_1 و θ_1 و بعد r_2 و θ_2 و ... را حساب می کنیم.

سیستم های n درجه آزادی:

N فرکانس طبیعی *Damping Ratio* داریم.

$$M\ddot{x}+kx=0$$

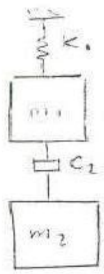
فرض *Normal* mode *vibration*: صرنی المان ها با یکی از فرکانس های طبیعی ارتعاش می کند.

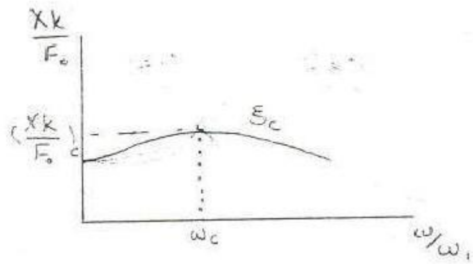
$$x_i = X_i \sin w_n t$$

$$\begin{bmatrix} \text{```````````} \\ \text{```````````} \\ \text{```````````} \\ \text{```````````} \\ \text{```````````} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sin wt = 0$$

$$\det(\ldots) = 0 \rightarrow \left[w_n^2\right]^n \quad \left[w_n^2\right]^{n-1} + \ldots$$

N ۲ ریشه دارد که n تایش مهم است.

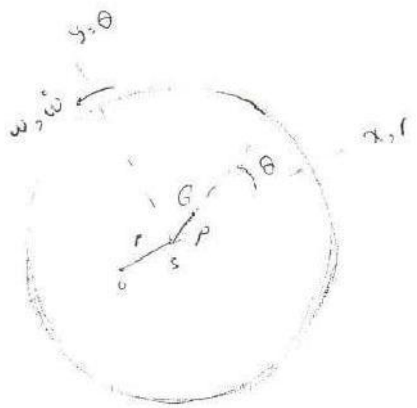


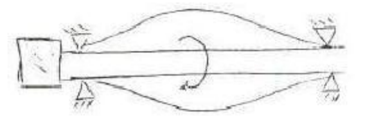


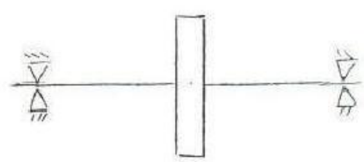
این سیستم حداقل تشدید ندارد.

برای سیستم های خطی رفت و برگشتی ممکن است قابل استفاده نباشد. بیشتر در سیستم های دورانی کاربرد دارد.

دوران سنکرون: سقف مدام خم می شود تا به جایی می رسد که نیروی گریز از مرکز با فنریت میله به تعادل می رسد.







$$a_G = a_s + a_{G/S}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_r = m a_r \\ \sum F_\theta = m a_\theta \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_g \\ m \\ p \\ k_e \end{array}\right| \begin{array}{l} r(t) \\ \theta(t) \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} \dot{\theta} = c \\ \ddot{\theta} = 0 \\ \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \end{array}\right\}$$ دوران سنکرون

۱ درجه ازادی $w_{n1}, w_{n2}, (\frac{x_1}{x_2})_1, (\frac{x_1}{x_2})_2$

۲ درجه ازادی $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

N درجه آزادی $w_{n1}, \dots, w_{n_n}$

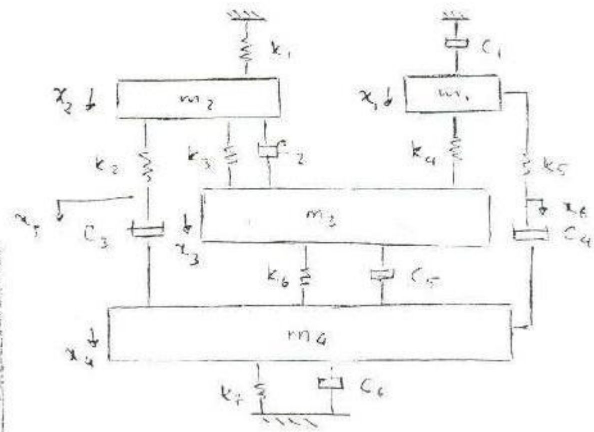
∞ درجه آزادی

سیستم n درجه آزادی: $\vec{n}$ ، w دارد. ولی دیگر مثل حالت دو درجه آزادی نمی توان نسبت بین دامنه ها نوشت چون دو تا نیست که بشود مقایسه کرد.

چون تعداد درجه آزادی زیاد شده، دیگر n تا پیکره آزاد نمی کشیم!

N درجه آزادی نه به تعداد فنر هاست نه به تعداد جرم ها چون هر جسم به طور آزاد ۶ درجه آزادی دارد.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & 0 \\ & m_2 & & & & \\ & & m_3 & & & \\ & & & m_4 & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

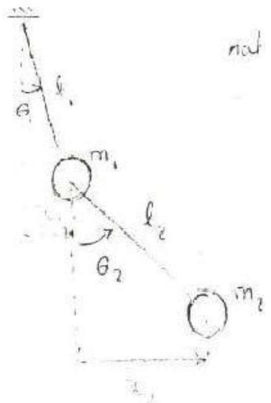


$$K = \begin{bmatrix} k_4+k_5 & 0 & -k_4 & 0 & 0 & -k_5 \\ 0 & (k_1+k_2+k_3) & -k_3 & 0 & -k_2 & 0 \\ -k_4 & -k_5 & (k_3+k_4+k_6) & -k_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_6 & (k_7+k_6) & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن ماتریس ها، روش خاصی به نام جمع آثار هم وجود دارد. این روش خصوصا برای سیستم های چندین جرمه ی خطی مناسب است. ماتریس M ماتریس قطری است. که المان های روی قطرش جرم های موجود اند.

برای ماتریس k، ابتدا درجه آزادی اول را حرکت می دهیم و بسته درجه آزادی ها را ساکن نگه می داریم، فنرهایی که تحریک می شوند را در آرایه k_{11} می نویسیم و به همین ترتیب همه ی آرایه های قطری آن را می نویسیم. برای آرایه k_{12} ←فنر بین درجه ازادی ۱ و ۲ را می نویسیم (و به همین ترتیب...)(با علامت منفی)

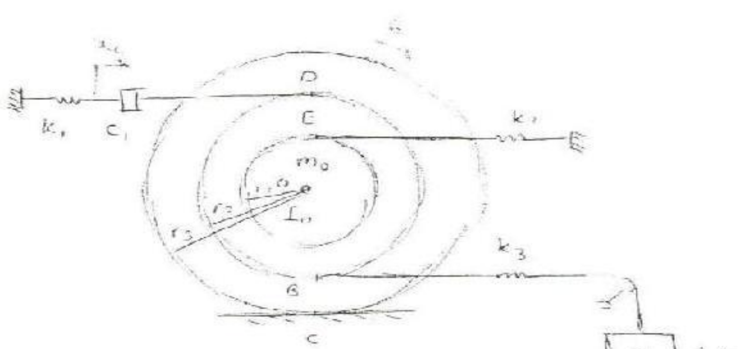
$$C=\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & C_2+C_5 & -C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_5 & (C_3+C_4+C_5+C_6) & -C_3 & -C_4 \\ 0 & 0 & 0 & -C_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_4 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$$



$$natwral \rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad I=[\cdots] \quad K_\theta=[\cdots]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad M=\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \qquad k=\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$$

در این روش اگر مثلا m_2 را نگه داریم، نمی توان m_1 را حرکت داد! پس روش جمع آثار برای چنین مسائلی قابل استفاده نیست.



چون درجه های آزادی به هم کوپل نشده اند، اینرسی بین درجه های آزادی ۰ است.

$$\begin{bmatrix} \theta \\ x_{.} \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_c & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المان های k نمی تواند فقط k باشد، باید المان های k وقتی در θ ضرب می شوند، ممان بدهند. پس باید k در فاصله به توان ۲ ضرب شود.

$$k = \begin{bmatrix} k_3(r_3 - r_2)^2 + k_2(r_3 + r_1)^2 & -k_3(r_3 - r_2) & 0 \\ -k_3(r_3 - r_2) & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix}$$

چون معادله اولی معان است، مولفه های سطر اول k باید در θ که ضرب می شوند ممان شود ولی سطر دومی و سوم نیرو شدند.

$$c = \begin{bmatrix} c_1(r_3 + r_2)^2 & 0 & c_1(r_3 + r_2)^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_1(r_3 \quad r_2) & 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

$T + U = W$

انرژی تابعی موقعیت هم هست (در مسائل ویژه)

$$U = U(x_1, x_2, \ldots, \theta_1, \theta_2, \ldots)$$
$$T - T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, x_1, x_2, \theta_1, \theta_2, \ldots)$$
$$W - w(x_1, x_2, \ldots, \theta_1, \theta_2, \ldots)$$

واریانس= تغییرات جزئی δ

$$\delta T - \delta U = \delta W$$

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} d\dot{x}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} d\dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} d\dot{\theta}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} d\dot{\theta}_2 + \dots$$

$$+ \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial T}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \dots$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \dots$$

$$\delta W = \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial w}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \dots$$

$$(\cdots)dx_1 + (\cdots)dx_2 + \dots + (\cdots)d\theta_1 + (\cdots)d\theta_2 + \dots = 0$$

شرط اینکه جمع جملات بالا صفر شوند این است که تک تک آن ها صفر باشند(چون ترم های dx_1، dx_2 ... به هم ارتباطی ندارند)

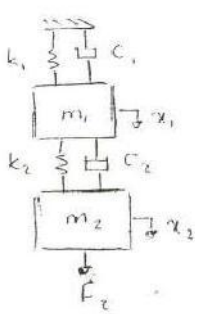
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} d\dot{x}_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} d\left[\frac{dx_1}{dt}\right] = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \frac{d}{dt}(dx_1) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} dx_1\right] - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) dx_1$$

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial w}{\partial q_i}$$

مثال:



$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$
$$U = \frac{1}{2} k_1 (x_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2$$

کار دمپر همیشه منفی است نسبت به کار F

$$W = F_2 x_2 - c_1 \dot{x}_1 x_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(x_1 - x_2)$$

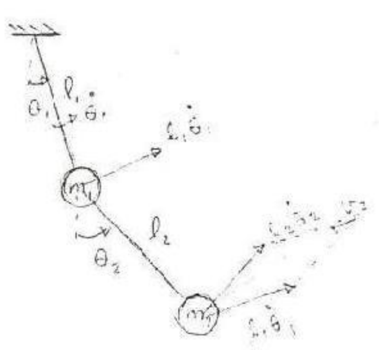
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2)$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = -k_2 (x_1 - x_2)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = -c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \qquad \frac{\partial w}{\partial x_2} = F_2 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) + c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 = F_2 \end{cases}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

مثال (اونگ):



$$T = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + \ldots = \frac{1}{2} m_1 (L_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (u_2^2)$$

در این مسئله انرژی جنبشی تابعی از موقعیت هم هست! پس اگر شرط زاویه کوچک را اعمال نکنیم، باید مشتق T نسبت به θ_1, θ_2 را هم بگیریم!!

$$v_2^2 = (L_1\dot{\theta}_1)^2 + (L_2\dot{\theta}_2)^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \underbrace{\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

$$U = m_1 g l_1(1-\cos\theta_1) + m_2 g\left[l_1(1-\cos\theta_1) + l_2(1-\cos\theta_2)\right]$$ مبدا انرژی پتانسیل را حالت استاتیکی در نظر می گیریم

چون mg را در انرژی پتانسیل لحاظ کرده ایم پس در کار نمی آوریمش. برای جلوگیری از غیر خطی شدن، شرط زوایای کوچک را قبل از ورود به معادله لاگرانژ اعمال می کنیم. (در انرژی جنبشی)

ولی در انرژی پتانسیل، شرط زاویه کوچک را بعد از ورود به معادله لاگرانژ اعمال می کنیم.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1 + m_2\ell_1^2\dot{\theta}_1 + \ell_1\ell_2 m_2\dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = m_1 g\ell_1 \sin\theta_1 + m_2 g\ell_1 \sin\theta_1$$

$$m_1\ell_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_1^2\ddot{\theta}_1 + \ell_1\ell_2 m_2\ddot{\theta}_2 + m_1 g\ell_1\theta_1 + m_2 g\ell_1\theta_1 = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2 + \ell_1\ell_1\dot{\theta}_1 m_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = m_2 g\ell_2 \sin\theta_2$$

$$m_2\ell_2^2\ddot{\theta}_2 + \ell_1\ell_2\ddot{\theta}_2 + \ell_1\ell_2\ddot{\theta}_1 m_2 + m_2 g\ell_2\theta_2 = 0$$

کوپل در اینجا از نوع دینامیکی است.

$$\begin{bmatrix} m_1\ell_1^2 + m_2\ell_1^2 & \ell_1\ell_2 m_2 \\ \ell_1\ell_2 m_2 & m_2\ell_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 g\ell_1 + m_2 g\ell_1 & 0 \\ 0 & m_2 g\ell_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix} = 0$$

برای اونگ سه گانه، فقط کافی است به انرژی پتانسیل ، جنبشی، یک ترم اضافه شود.

$$\underset{n\times n}{M}\,\underset{n\times 1}{\ddot{X}} + \overset{n\times n}{C}\,\overset{n\times 1}{\dot{X}} + \overset{n\times n}{K}\,\underset{n\times 1}{X} = \underset{n\times 1}{F}$$

این معادله در حالتی برقرار است که m و k ماتریس معکوس داشته باشد.

$$M\ddot{x} - kx = 0$$
$$M^{-1}M\ddot{x} + M^{-1}kx = 0$$
$$I\ddot{x} + Ax = 0$$

$$x = x \sin wt$$
$$\ddot{x} = -x w_n^2 \sin w_n t$$
$$\ddot{x} = -w_n^2 x$$
$$w_n^2 = \lambda$$

مقادیر ویژه (Eigen value)

$$\ddot{x} = -\lambda x$$
$$\ddot{x} = -\lambda X$$

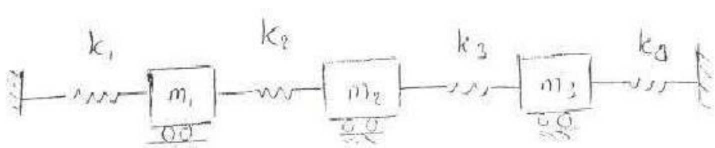
معادله مسئله ویژه:

$$-\lambda I x + A x = 0 \rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$
$$\rightarrow |A - \lambda I| = 0 \rightarrow \lambda_i$$

$$i = 1 \text{ to } n$$

$$\rightarrow (A - \lambda I)\varphi = 0$$
$$\varphi_i = Adj\left[A - \lambda I\right]_{\lambda_i}$$

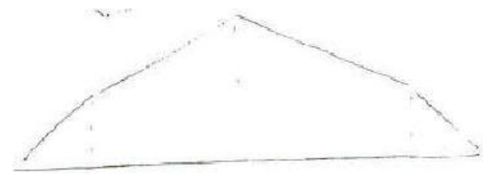
چون چند درجه آزادی داریم، شکل مد ها در واقع نسبت دامنه ها نیستند.



ما انواع و اقسام شکل مد ها را می توانیم داشته باشیم (در هر فرکانسی)ولی ما در واقع شکل مد ها را در فرکانس های طبیعی می خواهیم پیدا کردن شکل مد ها به ما اسکان می دهد تا مسئله را در فضای modal حل کنیم. در این فضا مختصات ما همواره نرمال است (نقلی) ماتریس M ، k قطری (decuple) است.

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



هر ستون از ماتریس $Adj\,[A-\lambda I]_{n\times n}$ را که برای پیدا کردن φ_i انتخاب کنیم باید برای (از ۱ تا n) مقتدیر λ را در همان ستون قرار دهیم.

فرمول لاگرانژ:

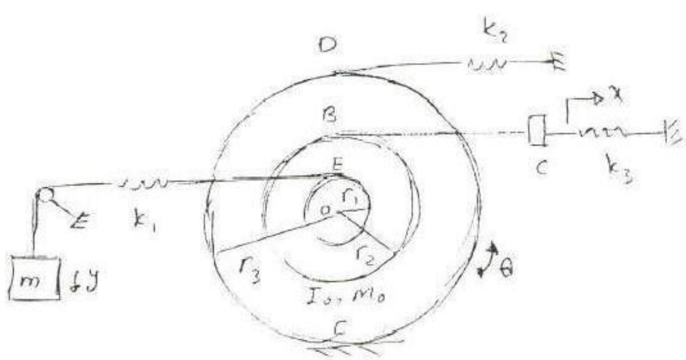
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial w}{\partial q_i}$$

$$q_i \begin{cases} x, y, z \\ \varphi, \theta, \psi \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 - \ldots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\delta \dot{q}_1 + \ldots$$

$$\delta\left[\frac{d}{dt}[\ ]\right] - \frac{d}{dt}\left[\delta[\ ]\right]$$

$$\partial\left[\frac{d}{dt}(\ )\right] = \frac{d}{dt}\left[\partial(\ )\right]$$



$\theta - q_1$

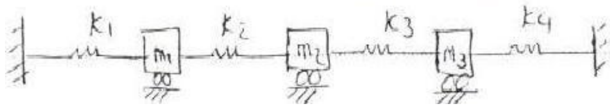
$x - q_2$

$y = q_3$

$T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{q}_1^2$

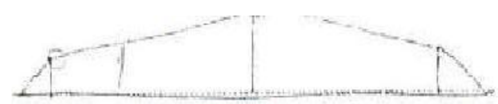
$U = \frac{1}{2} k_3 x^2 + \frac{1}{2} k_2 (2r_3\theta)^2 + \frac{1}{2} k_1 (y - (r_1 - r_3)\theta)^2$

$w - m\theta - c(\dot{x} - (r_2 + r_3)\dot{\theta})(x - (r_2 + r_3)\theta)$



$\varphi_1 - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$

$\varphi_2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



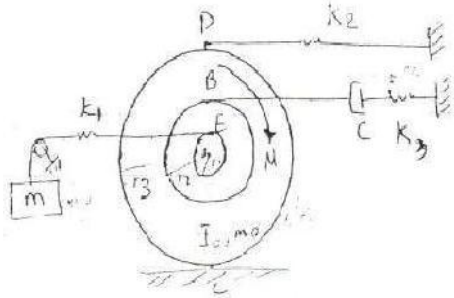
هر کدام از ستون های ماتریس $n \times n$ را برای φ_i انتخاب کردیم، برای همه φ ها همان را انتخاب می کنیم.

در هر فرکانسی انواع و اقسام شکل مد ها را می توانیم داشته باشیم، ولی در واقع شکل مد ها را در فرکانس های طبیعی می خواهیم. پیدا کردن شکل مد ها به ما امکان می دهد تا مسئله را در فضای modal حل کنیم. در این فضا مختصات ما همواره نرمال است. (نقلی)

یعنی ماتریس M ، k قطری (decouple) است.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=\frac{\partial w}{\partial q_i}$$

$$q_i\begin{cases} m, y, z \\ \varphi, \theta, \psi, \ldots \end{cases}$$



$$\theta = q_1$$
$$n = q_2$$
$$y = q_3$$

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{2} m\dot{q}_3^2 + \tfrac{1}{2} I_c \dot{q}_1^2$$
$$U = \tfrac{1}{2} k_3 x^2 + \tfrac{1}{2} k_2 (2r_3\theta)^2 + \tfrac{1}{2} k_1 (y - (r_1 - r_3)\theta)^2$$

در معادلات لاگرانژ بر خلاف نیوتن-اویلر جهت مطرح نیست.

$$w = M\theta - c(\dot{x} - (r_2+r_3)\dot{\theta})(x-(r_2+r_3)\theta)$$

در سیستم n درجه آزادی به جای نسبت دامنه ها، n شکل مد خواهیم داشت. هر شکل مد که ماتریس $n\times 1$ است که نشان می دهد در آن فرکانس، شکل سیستم چگونه است.

$\lambda = w_n^2$ مقدار ویژه

φ بردار ویژه Eigen veeton

$\lambda_i \to \varphi_i$

اگر مختصات طبیعی انتخاب کرده باشیم، ماتریس های M, K قرینه هستند و $M^T = M$

$K^T = k$

معادله مشخصه سیستم $I\ddot{x} + Ax = 0$

$$\varphi_i = \alpha \quad column\left\{Adj\left[A-\lambda I\right]_{\lambda i}\right\}$$

$$p = \left[\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n\right]_{n \times n} \rightarrow Modal \quad Matrix$$

دو بردار ویژه همواره بر هم عمودند ← اورتاگونال

البته از طریق ماتریس جرم یا سختی بر هم عمودند و نه به صورت مستقیم

$$\begin{matrix} \varphi_i^T M \varphi_j \\ \varphi_i^T k \varphi_j \end{matrix} = \begin{cases} 0 \quad i \neq j \\ M_i \\ k_i \quad i = j \end{cases}$$

$$pTM_p = \begin{bmatrix} \varphi_1^T M \varphi_1 & \varphi_1^T M \varphi_2 \ldots \\ \varphi_2^T M \varphi_1 & \varphi_2^T M \varphi_2 \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & 0 \\ & & M_3 & \\ 0 & & & \ddots M_n \end{bmatrix}$$

$$p^T k p = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & 0 \\ 0 & & \ddots k_n \end{bmatrix}$$

$$M\ddot{x} + kx = 0$$

$$x = p\Psi \qquad \Psi = p^{-1}x$$

$$Mp\ddot{\Psi} + kp\Psi$$
$$p^T Mp\ddot{\Psi} + p^T kp\Psi = 0$$

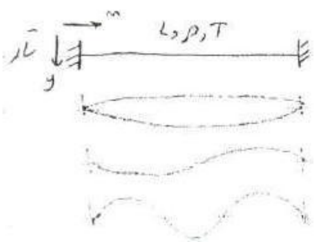
$M_G\ddot{\Psi} + k_G\Psi = 0$ (نرمال) چون ماتریس M_G, K_G قطری هستند، پس yمختصات نقلی است.

$$I\ddot{\Psi} + M_G^{-1}k_G\Psi = 0$$
$$I\ddot{\Psi} + \Lambda\Psi = 0$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \lambda_n \end{bmatrix}$$

در سیستم های n درجه آزادی n_o باید $finite$ باشد.

در سیستم های بی نهایت درجه آزادی n $in\ finite$ است. › سیستم های پیوسته سیستم های پیوسته:



صدای بم← فرکانس پایین←طول بیشتر

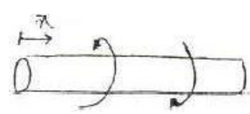
صدای زیر←فرکانس بالا←طول کمتر

معادله دیفرانسیل جزئی تار

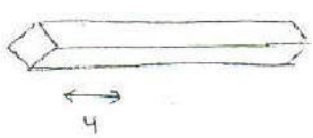
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$c = c(T, p)$$

$$B.C.\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(\ell,t) = 0 \end{cases}$$



$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$



ارتعاش طولی در میله به صورتی است که با حرکات موج،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

هر قسمت فشرده و سپس باز می شود. موج می رود و بر می گردد.

ارتعاشات خمشی تیر: (Beam)

۶ نوع شرط مرزی: ۱.دو سر آزاد ۲.دو سر گیر دار ۳.دو سر ساده

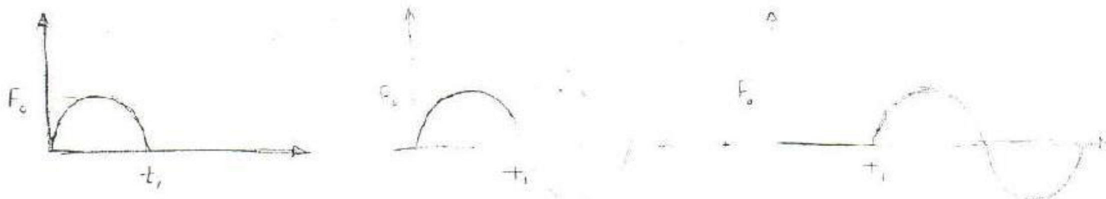
۴.یکسر گیردار ۵.یکسر گیردار یکسرساده ۶.یکسر آزاد یکسر ساده (نمی تواند وجود داشته باشد)

قیر نازک اویلر

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

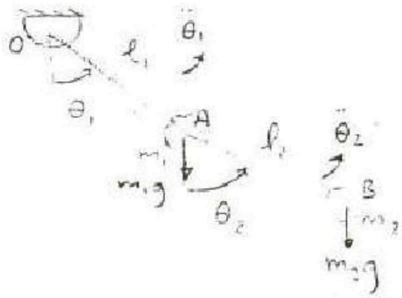
$$*\frac{d}{dx^2}\left[EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = p\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

یک سوال ۲۰ نمره ای در مورد تیر با شرایط مرزی، فرکانس های طبیعی و شکل مد ها را به دست آورید.



$$f_{(t)} = F_0 \sin wt$$

$$x_{(t)} = \int_0^t f(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t \frac{F_0 \sin w\lambda}{m w_n}\sin w_n(t-\lambda)d\lambda = \frac{F_0}{m w_n}\int_0^t \sin w\lambda \sin w_n(t-\lambda)d\lambda$$



$$\sum M_A = I_A\ddot{\theta}_2 \rightarrow -m_2 g\,\ell_2 \sin\theta_2 = I_A\ddot{\theta}_2$$

$$I_A = m_2\ell_2^2$$

$$\sin\theta_2 = \theta_2$$

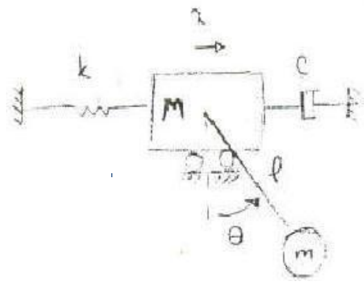
$$\ell_2\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0$$

$$\sum M_o = I_o\ddot{\theta}_1$$

$$-m_1 g\,\ell_1 \sin\theta_1 - m_2 g\,\ell_2 \sin\theta_2 = I_o\ddot{\theta}_1$$

$$I_o = m_1\ell_1^2$$

$$\ell_1\ddot{\theta}_1 + g\theta_1 + \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{\ell_2}{\ell_1}\theta_2 = 0$$



x
k
M
c
ℓ
θ
m