جزوه ریاضیات مهندسی پیشرفته

ارشد مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی

نویسنده : **امین آزادی**

استاد مربوطه : دکتر فرامرز طلعتی

دانشگاه تبریز

پاییز ۹۱

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۶	۵	۴	۳	۲	۱	
۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴
۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱
			۳۱	۳۰	۲۹	۲۸

جلسه اول - ریاضیات مهندسی پیشرفته (91,7/2)

Differential Equations and the calculus of variations - L. Elsgolts

I) Calculus Of Variations

(Elsgolts) (5-6)p

II) Linear PDE for Scientists & Engineers   Sharif (Mousavi)

(Tyn Myint u . L Debnath) (11-12)p

III) Vectors & Tensor Analysis

Hay (2-3) p

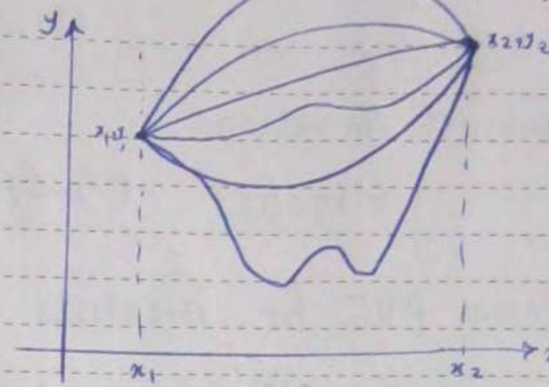
1. H.W تحویل

2- حضور و غیاب

3- موبایل !

4- امتحان میان ترم

مساحت محصور $A=\int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx$



مساحت محصور شده بین کدام منحنی و محور x؟ اکسترمم است؟ مقدار این وابسته به $y(x)$ است.

★ انواع functional :

برای تمام منحنی‌ها $\begin{cases} y(x_1)=y_1 \\ y(x_2)=y_2 \end{cases}$

عبارتی برای $F(x, y, y')$ تا مقدار $A[y(x)]$ ماکزیمم (اکسترمم شود)

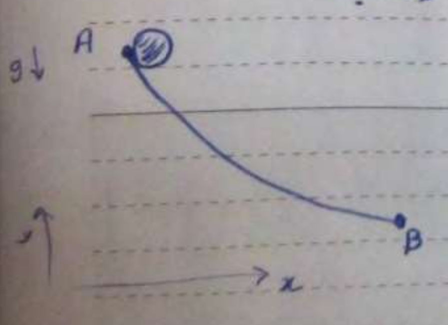
a) منحنی به طول l که از دو نقطه a و b عبور می‌کند. l چقدر باشد تا مساحت زیر منحنی اکسترمم شود (کمترین فاصله)

$l \longrightarrow A\uparrow$

★ منحنی‌های ژئودزی

★ b) کمترین زمان

معادله منحنی چه باید باشد تا ذره m در کمترین زمان ممکن به انتهای مسیر برسد (بدون اصطکاک، از حالت سکون و تحت وزن خود)



Brachisto chrone

Brachistos chronos

کوتاه‌ترین — زمان

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
		۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۲۸	۲۹	۳۰	۳۱			

* تفاوت ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌ایم و ریاضیاتی که خواهیم خواند

$\begin{cases} x \to x+\Delta x \\ z \to z+\Delta z \end{cases} \to$ تابع پیوسته است

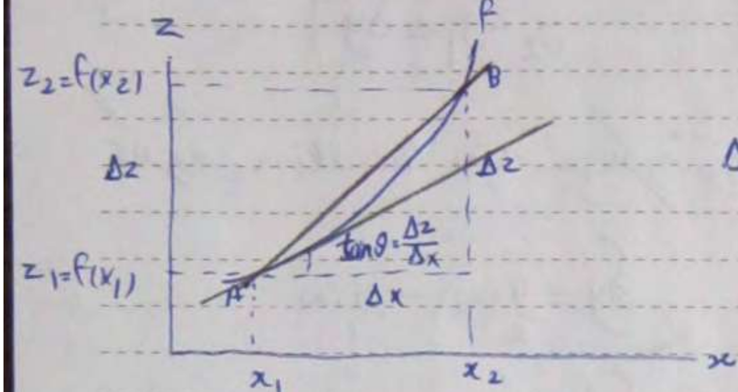
$f(x)=\frac{1}{x}$

$x=0.01 \to f=100$

$x=0.02 \to f=50$

$x \to 0$

تفاوت زیاد ← در نزدیکی صفر پیوسته نیست



$$\Delta f = f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$$
$$= A(x)\Delta x + B(x,\Delta x)\Delta x$$

$$\to \lim_{x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = A(x)=f'(x)$$ [تعریف مشتق تابع f(x)]

مثال $f(x)=x^2+4x-5 \longrightarrow f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)-5$

$$=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+4x+4\Delta x-5$$

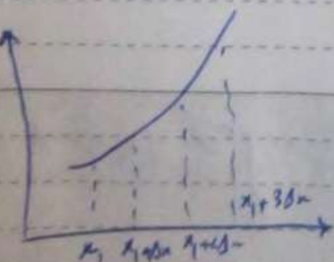
$$f(x+\Delta x)-f(x)=2x\Delta x+4\Delta x+(\Delta x)^2=\Delta x\,(\underbrace{2x+4}_{A}+\underbrace{\Delta x}_{B})$$

A ← به صورت خطی به x وابسته است

B ← به صورت غیر خطی به x وابسته است

حل مسئله بالا به روش جدید: ←

$f'(x)=0 \longrightarrow x=x_0$ (مقدار f اکسترمم می‌گردد)
(x_0 نقطهٔ اکسترمم تابع f(x))



اگر α عدد حقیقی باشد:

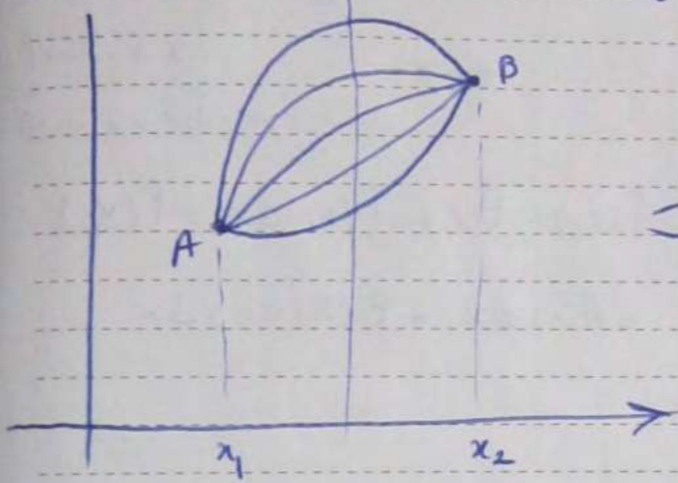
$$\boxed{\frac{d}{d\alpha}\left[f(x+\alpha\Delta x)\right]\Big|_{\alpha=0}=f'(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0}}$$

← مقدار x_0 که اکسترمم کننده است بدست می‌آید

$y_2 - y_1$ اختلاف دو تابع

$\Delta f = \underset{\text{تغییر تابع}}{\Delta z} = f(x_2) - f(x_1)$, $\Delta x = x_2 - x_1$ تغییرات تابع (Variation)

حال اگر برای منحنی های صفحه قبل بخواهیم بحث کنیم:



$$y_2 - y_1 = \delta y$$

عملگر این Variation دقیقاً شبیه عملگر مشتق است

$$\delta y = y_2(x) - y_1(x)$$ اختلاف منحنی

$$\delta y' = y_2'(x) - y_1'(x)$$ اختلاف شیب ها

(مشتق Variation) به خاطر خطی بودن عمل مشتق $= \frac{d}{dx}\left[\underbrace{y_2(x) - y_1(x)}_{\delta y}\right]$

$$\boxed{\delta y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}(\delta y)}$$

: $\delta(y^2) = 2y\,\delta y$

$\star\ \delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2$

$\star\ \delta(F_1 F_2) = F_2\,\delta F_1 + F_1\,\delta F_2$

$\star\ \delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{F_2\,\delta F_1 - F_1\,\delta F_2}{F_2^{\,2}}$

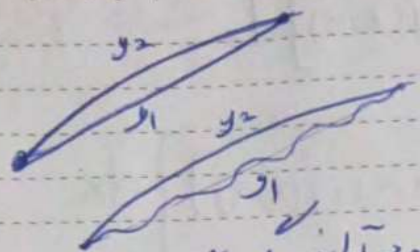
★ تعریف: گوییم دو تابع از رتبه صفر به هم نزدیکند اگر

$|\delta y| = |y_2 - y_1| < \varepsilon$

گوییم تابع به صورت رتبه اول به هم نزدیکند اگر

$|\delta y'| = |y_2' - y_1'| < \varepsilon$

★ در نقاط ابتدایی مقادیر برابرند اما مشتق ها نابرابرند



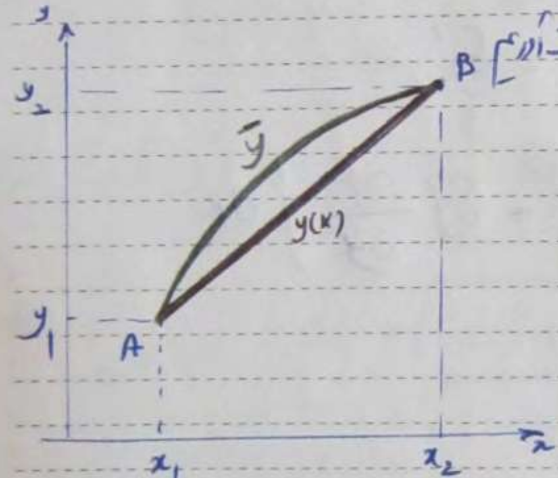
اگر این مطلب را به مشتق رتبه k ام تعمیم دهیم آن گاه می توانیم بگوییم:

$$|\delta y^{(n)}| = |y_2^{(n)} - y_1^{(n)}| < \varepsilon$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, k$$

آن گاه گوییم دو منحنی از رتبه k به هم نزدیک هستند.

★ می خواهیم مقدار کمینه یا بیشینه این انتگرال $I[y(x)]$ را بدست آوریم



$$\boxed{I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx}$$

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

می خواهیم F را به گونه ای تعیین کنیم تا مقدار انتگرال اکسترمم شود

$\delta y = \bar{y} - y$

$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\,\delta y$ تعریف

به ازای α های متفاوت، منحنی های متفاوتی خواهیم داشت با این شرط که همگی از نقاط A و B عبور می کنند.

اگر از y جدید استفاده کنیم، I وابسته به α خواهد بود:

$$\boxed{I[y(x,\alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)]\,dx}$$

شرط اکسترمم برای I $\longrightarrow$ $\left.\dfrac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

$$\left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_1}^{x_2} F\left[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{ f\left[x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\right]\right\} dx$$

$$\left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right\} dx$$

(y و y' وابسته به x و α هستند.)

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\,\delta y \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = \delta y \\[2mm] \dfrac{\partial y'}{\partial \alpha} = \delta y' \end{array}\right.$$

$$y'(x,\alpha) = y'(x) + \alpha\,\delta y'$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\delta y\,\frac{\partial F}{\partial y} + \delta y'\,\frac{\partial F}{\partial y'}\right\} dx$$

$$\star\left\{\begin{array}{l} \left.\delta y\right|_{x_1} = 0 \\ \left.\delta y\right|_{x_2} = 0 \end{array}\right.$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء مشتق را از روی $\delta y'$ برمی‌داریم

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\,\underbrace{\delta y'}_{\frac{d}{dx}(\delta y)}\,dx = \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

$$\xrightarrow[\text{در اصل}]{\text{جایگذاری}} \left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}\delta y\, dx$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0}$$

معادله اویلر-لاگرانژ

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۶	۵	۴	۳	۲	۱	
۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴
۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱
		۳۱	۳۰	۲۹	۲۸	

معادله اویلر - لاگرانژ →

$$\boxed{F_y - F_{y'x} - y'F_{y'y} - y''F_{y'y'} = 0}$$

به شکل باز شده / به شکل دیگر

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'} - y'\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'} - y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$$

① $F = F(x)$ — یعنی: با یک مسئله تغییراتی مواجه نیستیم (یعنی یک مسیر بیشتر نداریم)

② $F = F(y) \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ — ممکن است جواب داشته باشد (در حالات استثنایی)

$\hookrightarrow I = \int_0^1 y^2\,dx$ — شرط: $y(0) = 0$

③ $F = F(y')$ — $\frac{\partial F}{\partial y}$, $F_{y'x}$, $F_{y'y}$, $F_{y'y'}$ $\longrightarrow \boxed{y'' = 0} \rightarrow y = ax + b$

★ برای منحنی واصل بین دو نقطه:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

$$\Rightarrow L[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx =$$

④ $F = M(x,y) + y'N(x,y)$ — F به صورت خطی به y' وابسته است

معادله لاگرانژ $\rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \longrightarrow M_y + y'N_y - \frac{d}{dx}(N) = 0$

با دو متغیر x و y

$$\rightarrow M_y + y'N_y - (N_x + y'N_y) = 0$$

$$\longrightarrow M_y - N_x = 0 \longrightarrow \boxed{M_y = N_x}$$

یعنی: جواب مستقل از مسیر است و مسئله تغییراتی نداریم

(5) $F = F(x, y') \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = c_1$

معادله در حالت کلی جواب ندارد ولی باید حل شود و دنبال جواب بگردیم

(6) $F = F(y, y')$ $\quad F_{y'x} = 0$

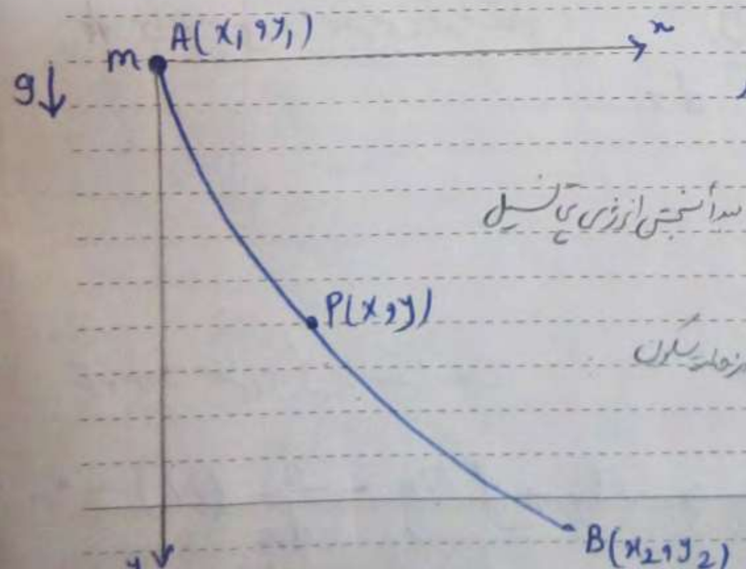
$$\longrightarrow F_y - y'F_{y'y} - y''F_{y'y'} = 0$$

اگر $\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = F_x + y'F_y + y''F_{y'} - y''F_{y'} - y'\left(F_{y'x} + y'F_{y'y} + y''F_{y'y'}\right)$

$$= y'\left(F_y - y'F_{y'y} + y''F_{y'y'}\right) = 0$$

$y' \neq 0 \xrightarrow{\text{اگر}} \boxed{F - y'F_{y'} = C}$ اتحاد برترامی

● حل مسئله کمترین زمان:



y(x) را طوری پیدا کنید که زمان رسیدن ذره به نقطه B مینیمم باشد

★ قانون بقای انرژی

★ P هر نقطه دلخواه

$E_A = E_P$ ← مبدأ سنجش انرژی پتانسیل

$KE_A + PE_A = KE_P + PE_P$

از حالت سکون

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

$$\rightarrow V = \sqrt{2gy} = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{dt}\,dx$$

حرکت ذره روی مسیر

$\rightarrow dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \rightarrow \int_0^T dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$

$\rightarrow T[y(x)]$

جلسه دوم - 91/7/4

تمرین های از فصل ۱ کتاب

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx \qquad F \rightarrow F(y, y') \rightarrow$ انتگرال - راه

$F - y' F_{y'} = c \rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y'\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = c$

$\rightarrow \frac{1+y'^2 - y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \longrightarrow \frac{1}{c_1^2 y^2} = 1 + y'^2 \rightarrow \frac{1}{c_1^2 y^2} - 1 = y'^2$

$\rightarrow \frac{\sqrt{1-c_1^2 y^2}}{c_1 y} = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{c_1 y\, dy}{\sqrt{1-c_1^2 y^2}} = dx$

$c_1 y = \sin\theta \rightarrow c_1 dy = \cos\theta\, d\theta \longrightarrow \frac{\sin\theta \times \frac{1}{c_1}\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = dx$

$\rightarrow -\frac{1}{c_1}\cos\theta = x + c_2 \rightarrow \cos\theta = c_3 - c_1 x$

$\xrightarrow{\theta \text{ حذف}} (c_3 - c_1 x)^2 + c_1^2 y^2 = 1$ (معادله دایره)

c_1, c_3 از شرایط مرزی بدست می آیند.

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

حل مسأله کمترین زمان به صورت کامل $\longleftarrow$

$T[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$

$\rightarrow F(y, y') \rightarrow$ مستقل از x $\rightarrow$ اتحاد بلترامی

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \times \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = c_1 \rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c_2$$

$$\rightarrow \frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{(y)(1+y'^2)}} = c_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{c_2^2 y}} = \sqrt{1+y'^2} \rightarrow \frac{1}{c_2^2 y} = 1+y'^2$$

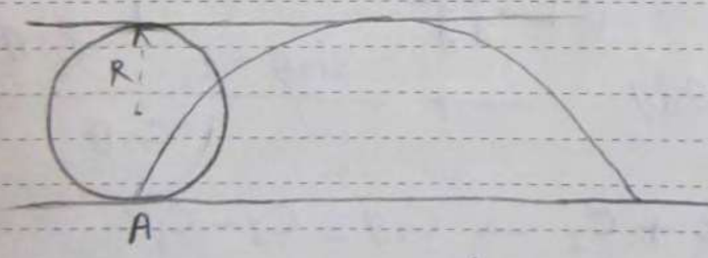
$$\rightarrow \frac{1-c_2^2 y}{c_2^2 y} = y'^2 \rightarrow \frac{\sqrt{1-c_2^2 y}}{\sqrt{c_2^2 y}} = \frac{dy}{dx} \rightarrow \sqrt{\frac{c_2^2 y}{1-c_2^2 y}}\, dy = dx$$

$$c_2^2 y = \sin^2\theta \rightarrow c_2^2\, dy = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{1}{c_2^2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} \times 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = dx$$

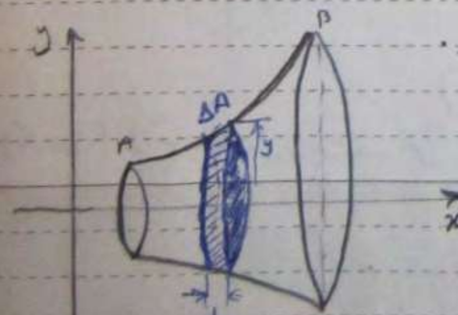
$$\rightarrow \frac{2}{c_2^2}\sin^2\theta\, d\theta = dx \rightarrow \frac{1}{c_2^2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta = dx$$

$$\rightarrow \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = c_2^2 x + c_3$$

(منحنی: سیکلوئید)



● معادله منحنی‌ای که باید باشد تا سطح حاصل از دوران کمینه باشد.



$$\Delta A = 2\pi y \cdot \Delta S$$

$$\rightarrow A[y(x)] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$\rightarrow F(y, y') \rightarrow$ اتحاد بلترامی $\quad F - y' F_{y'} = c_1$

C_2

$$\rightarrow 2\pi y\sqrt{1+y'^2} - y'\left(\frac{2\pi y y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = C_1$$

$$\frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_2 \rightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_2 \rightarrow \frac{y^2}{C_2^2} - 1 = y'^2$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{y^2 - C_2^2}}{C_2} = y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{C_2\, dy}{\sqrt{y^2 - C_2^2}} = dx \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} y = C_2 \cosh\theta \\ dy = C_2 \sinh\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{در رابطه}]{\text{جانشانی}} \frac{C_2^2 \sinh\theta\, d\theta}{C_2 \sinh\theta} = dx \rightarrow \theta = \frac{x}{C_2} + C_3$$

منحنی زنجیری

$$\rightarrow \cosh^{-1}\left(\frac{y}{C_2}\right) = \frac{x}{C_2} + C_3 \rightarrow \frac{y}{C_2} = \cosh\left(\frac{x}{C_2} + C_3\right)$$

$$\boxed{y = C_2 \cosh\left(\frac{x}{C_2} + C_3\right)}$$

★ اصل فرما: نور در یک محیط مسیر خود را طوری انتخاب می‌کند که کمترین زمان ممکن را صرف کند

● مسئله 2 از فصل 6:

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{(y^2 + 2xyy')}\, dx \qquad \begin{cases} y(x_1) = A \\ y(x_2) = B \end{cases}$$

چون به طور خطی به y' وابسته است

مستقل از مسیر خواهد بود

و مسئله تغییراتی نخواهیم داشت

$$\rightarrow 2y + 2xy' - \underbrace{\frac{d}{dx}(2xy)}_{2y+2xy'} = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$I[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2y')\, dx \qquad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

با وجودی که به صورت خطی به y' وابسته است

$$x + 2y - 4yy' - \underbrace{\frac{d}{dx}(-2y^2)}_{-4yy'} = 0 \rightarrow x + 2y = 0 \longrightarrow \boxed{y = \frac{-x}{2}}$$

شرایط را ارضا نمی‌کند و مسئله تغییراتی نداریم پس بی‌معنی است.

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y'(1+x^3y')\,dx \to$ مستقل از y است

$F_y = 0 \to \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \to F_{y'} = C_1 \to 1+2x^3y' = C_1$

$\to 2x^3y' = C_1 - 1 = C_2 \to x^3y' = C_3 \to y' = \frac{C_3}{x^3} \to \boxed{y(x) = C_5 + \frac{C_4}{x^2}}$

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (xy' + y'^2)\,dx$

مانند قبلی $\to x + 2y' = C_1 \to y' = C_2 - \frac{x}{2} \to \boxed{y = C_2x - \frac{x^2}{4} + C_3}$

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\,dx \to F(y,y') \to$ اتحاد بلترامی

$\to y'^2 + \cancel{2yy'} - 16y^2 - y'(2y' + \cancel{2y}) = C_1 \to -16y^2 - y'^2 = C_1$

$y'^2 + 16y^2 = C_2 \to 2y'y'' + 32yy' = 0 \xrightarrow{y' \neq 0} y'' + 16y = 0$

$\to \boxed{y(x) = A_1 \sin 4x + A_2 \cos 4x}$

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1+y^2}{y'^2}\,dx \to$ اتحاد بلترامی

$\frac{1+y^2}{y'^2} - y'\left(\frac{-2(1+y^2)}{y'^3}\right) = C_1 \to \frac{1+y^2+2+2y^2}{y'^2} = C_1 \to \frac{3(1+y^2)}{y'^2} = C_1$

$\to \frac{1+y^2}{y'^2} = C_2 \to \sqrt{\frac{1}{C_2}(1+y^2)} = y' = \frac{dy}{dx}$

$\to \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_2}}\,dx = C_3\,dx \qquad \{\, y = \sinh\theta \to dy = \cosh\theta\,d\theta$

$\to \frac{\cosh\theta\,d\theta}{\sqrt{\cosh^2\theta}} = C_3\,dx \to \theta = C_3x + C_4$

$\boxed{\to y = \sinh(C_3x + C_4)}$

● افزایش مرتبه مشتقات ظاهر شده در $I[y(x)]$:

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})\,dx$$

باید طبق مشتقات تا مرتبه $n-1$ در نقاط x_1 و x_2 برابر باشند اما در مشتق n ام لزوماً نباید برابر باشند.

$$y^{(k)}(x_1) = A \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$
$$y^{(k)}(x_2) = B \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

راه حل:

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\,\delta y \quad , \quad y^{(k)}(x,\alpha) = y^{(k)}(x) + \alpha\,\delta y^{(k)} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

مشتق

برای مرتبه دوم می‌نویسیم:

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'')\,dx \qquad y(x_1) = A \;,\; y'(x_1) = C \qquad y(x_2) = B \;,\; y'(x_2) = D$$

جایگذاری $\longrightarrow$ $$I[y(x,\alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha), y''(x,\alpha))\,dx$$

شرط اکسترمم شدن: $$\frac{dI}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \Big[\frac{\partial F}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}_{\delta y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \underbrace{\frac{\partial y'}{\partial \alpha}}_{\delta y'} + \frac{\partial F}{\partial y''} \underbrace{\frac{\partial y''}{\partial \alpha}}_{\delta y''} \Big] dx$$

علامت مشتق را از روی δy ها برمی‌داریم: $-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ قبلاً داشتیم

$$* \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\,\delta y''\,dx \qquad * \;\delta y'' = \frac{d^2}{dx^2}(\delta y) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(\delta y)\right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y''}}_{u} \underbrace{\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(\delta y)\right] dx}_{dv} = \delta y' \frac{\partial F}{\partial y''}\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}(\delta y)\, \overbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)}^{u} dx$$

δy ها برابر

$$= -\left\{ \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) dx \right\}$$

جایگذاری $\longrightarrow$ $$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \right] \delta y\,dx}$$

n تعمیم: $\longrightarrow \boxed{\dfrac{\partial F}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dfrac{d^k}{dx^k}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right) = 0}$

مثال‌ها: مسئله ۹ فصل ۶

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (16y^2 - y''^2 + x^2)\,dx$$

(1) $F_y - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0 \rightarrow 32y + 0 + \dfrac{d^2}{dx^2}(-2y'') = 0$

(2) $32y - 2y^{(4)} = 0 \rightarrow y^{(4)} - 16y = 0$

$$\rightarrow y(x) = A_1 \sin 2x + A_2 \cos 2x + A_3 e^{2x} + A_4 e^{-2x}$$

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (2xy + y'''^2)\,dx$$

$$\rightarrow 2x - \frac{d^3}{dx^3}(2y''') = 0 \rightarrow y^{(6)} = x \Rightarrow y = \frac{x^7}{7!}$$

• جلسه بعد $I[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', y_3', \dots, y_n')\,dx$

ج: جلسه سوم - ۹۱/۷/۹

$$I(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\,dx$$

$$\begin{cases} y_k(x_1) = A \\ y_k(x) = B \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

از خاصیت جمع آثار استفاده می‌کنند [با ثابت نگه داشتن همه و تغییر کردن یکی و ادامه برای همه] تا به دستگاه معادلات زیر برسیم

y تغییر k: $\dfrac{\partial F}{\partial y_k} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y_k'}\right) = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$

اگر مشتقات مرتبه بالاتر ظاهر شوند نیز به همین صورت عمل خواهد شد.

مشتق مراتب بالاتر $\longrightarrow \quad \dfrac{\partial F}{\partial y_k} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \dfrac{d^j}{dx^j}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y_k^{(j)}}\right) = 0$

* مثال از کتاب :

$$I[y(x), z(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left[2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2\right] dx$$

* $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \rightarrow 2z - 4y - 2y'' = 0 \longrightarrow z - 2y - y'' = 0$ ①

* $\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0 \rightarrow 2y + 2z'' = 0 \longrightarrow y + z'' = 0$ ②

$y = -z'' \xrightarrow{\text{با جایگذاری در ①}} z - 2(-z'') - (-z^{(4)}) = 0 \rightarrow z^{(4)} + 2z'' + z = 0$

$z = e^{mx}$ معادله مشخصه $m^4 + 2m^2 + 1 = 0 \rightarrow (m^2+1)^2 = 0 \rightarrow m = \pm i$ تکراری

$\longrightarrow z(x) = (c_1 + c_2 x)\sin x + (c_3 + c_4 x)\cos x$

$\longrightarrow y = -z''$

* $$I[x(t), y(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(2xy + \dot{y}^2 + (-\dot{x}^2)\right) dt$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \rightarrow 2y - \dfrac{d}{dt}(-2\dot{x}) = 0 \rightarrow y + \ddot{x} = 0$ ① y ثابت، x متغیر

$\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \rightarrow 2x - \dfrac{d}{dt}(2\dot{y}) = 0 \rightarrow x - \ddot{y} = 0$ ② x ثابت، y متغیر

② $\rightarrow x = \ddot{y} \xrightarrow{\text{①در}} y + y^{(4)} = 0$ معادله مشخصه $m^4 + 1 = 0 \rightarrow m^4 = -1 = e^{\pi i}$

$m_0 = e^{\pi i/4}, \; m_1 = e^{\frac{3\pi i}{4}}, \; m_2 = e^{5\pi i/4}, \; m_3 = e^{7\pi i/4} \longrightarrow m_k = e^{\frac{\pi i + 2k\pi i}{4}}; \quad k = 0,1,2,3$

$y = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{m_k t}, \qquad x = \ddot{y}$

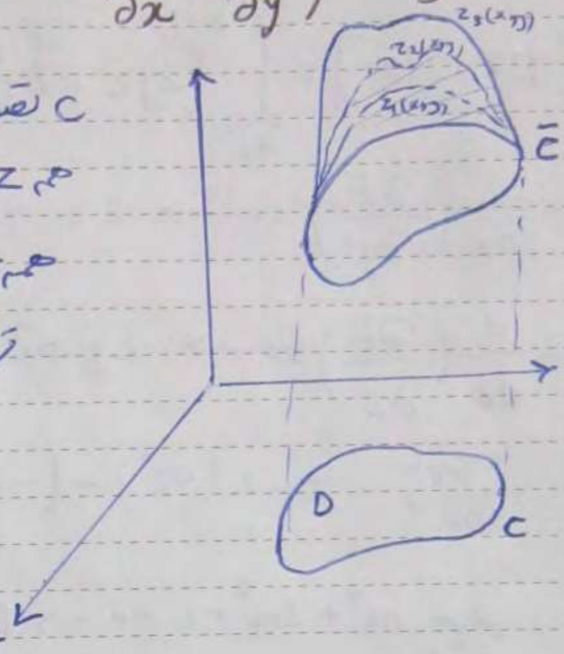
★ حالتی که y وابسته به بیش از یک متغیر باشد.

$$I[z(x,y)] = \iint_D F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy$$

c تصویر $\bar{c}$ در صفحه xy می‌باشد.

همه zها در منحنی $\bar{c}$ مشترک هستند.

همه منحنی‌ها باید در استوانه سطح مقطع زده شده قرار بگیرند.



همانند قبل $\delta z = \bar{z}(x,y) - z(x,y)$

$$z(x,y,\alpha) = z(x,y) + \alpha\,\delta z$$

در صفحه xy $\leftarrow$ $\delta z = 0$ ارتفاع نداریم

$$\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial x} = z_x + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\,\delta z) = z_x + \alpha\frac{\partial}{\partial x}(\delta z)$$

$$\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial y} = z_y + \alpha\frac{\partial}{\partial y}(\delta z)$$

حال از جایگذاری در رابطه اصلی داریم:

$$I[z(y,x,\alpha)] = \iint_D F\left(x,y,z(x,y,\alpha),\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial x},\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial y}\right) dx\,dy$$

شرط اکسترمم شدن

$$\left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \iint_D \left\{ \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}_{\frac{\partial}{\partial x}(\delta z)} + \frac{\partial F}{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial}{\partial y}(\delta z)} \right\} dx\,dy$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = p \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = q \end{cases}$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \iint_D \left\{ \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}(\delta z) + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial}{\partial y}(\delta z) \right\} dx\,dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\delta z) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial p}\delta z\right] - \delta z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\delta z) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial q}\delta z\right] - \delta z\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)$$

از جانشانی در رابطه اصلی

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \iint_D \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]\delta z + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\delta z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\delta z\right)\right]}_{J_1} \right\} dx\,dy$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C M\,dx + N\,dy$$

قضیهٔ گرین از ریاضی ۲

چون روی C، $\delta z = 0$ است:

$$J_1 = \int_C \frac{\partial F}{\partial p}\delta z\,dy + \frac{\partial F}{\partial q}\delta z\,dx = 0$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 = \iint_D \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]\delta z\,dx\,dy \right.$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0}$$

معادله اویلر-لاگرانژ برای تابع دو متغیره: $Z(X,Y)$

• مثال:

$$I[z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z f(x,y)\right] dx\,dy$$

$$\rightarrow -2f(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x,y) = 0$$ (معادله پواسون)

شرایط اعمال شده روی Functional ضعیف‌تر از شرایط اعمال شده روی معادله دیفرانسیل است

بیان ضعیف مسئله (Weak Formulation)

* اگر مسئله تغییراتی داشته باشیم که بتوانیم معادله دیفرانسیل را بدست آوریم: در برعکس لزوم اعمال شرایط خاص هستیم × [مشتق مرتبه دوم را نمی‌توانیم]

محاسبه سطح جانبی یک رویه $S = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$ → H3R.pdf (Page 166)

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

جانشانی در معادله: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right) = 0$$

$$I\left[z(x,y)\right] = \iint_D F(x, y, z, \overset{p}{z_x}, \overset{q}{z_y}, \overset{r}{z_{xx}}, \overset{s}{z_{yy}}, \overset{t}{z_{xy}})\, dx\, dy \quad \bigstar$$

$$z(x,y,\alpha) = z(x,y) + \alpha\,\delta z$$

$$z_{xx} = z_{xx} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial (z_{xx})} \cdot \underbrace{\frac{\partial (z_{xx})}{\partial \alpha}}_{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta z)\right]}$$

اعمال عکس را روی δz که می‌خواهیم بدهیم

$$\frac{\partial F}{\partial (z_{xx})} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta z) = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\delta z)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\delta z)$$

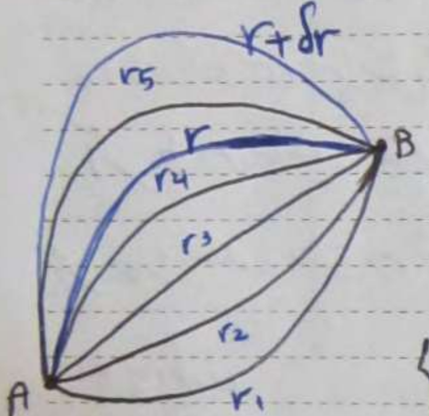
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \delta z \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right\} - \delta z \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0$$

این معادلات سبب بدست آوردن معادلات حرکت سیستم می‌شوند در صورتی z و x, y روابط فیزیکی حاکم بر حرکت ذره باشند.

(روابط همیلتون)



★ متحرکی در لحظه t_1 از A وارد روی یکی از مسیرها حرکت کرده در لحظه t_2 به نقطه B می‌رسد.

$$\begin{cases} \delta r\big|_{t_1} = 0 \\ \delta r\big|_{t_2} = 0 \end{cases}$$

قانون دوم نیوتن در حرکت $\quad f = m\ddot{r} \longrightarrow f - m\ddot{r} = 0$ (اصل دالامبر)

$$\rightarrow (\vec{f} - m\ddot{\vec{r}})\,\delta\vec{r} \doteq 0 \qquad \rightarrow \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} (\vec{f} - m\ddot{\vec{r}})\,d\vec{r}\,dt = 0}_{\text{شکل خام اصل همیلتون}}$$

★ $\vec{f} \cdot \delta\vec{r} = \delta w$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[f\delta r - m\ddot{r} \cdot \delta r \right] dt = 0$$

اگر $\delta r \ll 1$ که مسیرهای r در حالت جزئی مماس بر هم خواهند شد.

$\int \ddot{r}\, \delta r\, dt \quad \begin{cases} \ddot{r}\, dt = du \\ \delta r = v \end{cases}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \ddot{r}\,\delta r\,dt = \dot{r}\,\delta r\Big|_{t_1}^{t_2} - \int \dot{r}\,\underbrace{\frac{d}{dt}(\delta r)}_{\delta\dot{r}}\,dt$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\frac{1}{2}\delta(\dot{r}^2)}$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[f\,\delta r + m\,\tfrac{1}{2}\,\delta(\dot{r}^2) \right] dt = 0$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[F\cdot dr + \delta T \right] dt = 0$$ اصل همیلتون

از میان مسیرهای مختلف از A به B آن مسیری دارای کمترین زمان است که این انتگرال به ازای آن مسیر تغییراتش صفر شود.

اگر f ناشی از پتانسیل باشد،

$$f = \nabla \phi$$ (پتانسیل نیرو)

اگر در جهات مختلف مشتق گرفته شود:

مشتق کلی در راستای r $\rightarrow \nabla\vec{\phi}\cdot\delta\vec{r} = \delta\phi$

ϕ پتانسیل نیرو

$-\phi$ انرژی پتانسیل

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V)\,dt = 0 \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta(\underbrace{T - V}_{L})\,dt = 0$$

L لاگرانژین (تفاوت انرژی جنبشی و پتانسیل)

(f باید در میدان پایستار باشد) ← تفاوت با اصل همیلتون

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0}$$

* مثال: سیستم جرم و فنر در غیاب اصطکاک،

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad , \quad V = \tfrac{1}{2} k x^2$$

لاگرانژی $\rightarrow L = \tfrac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2)$

معادله اویلر لاگرانژ $\rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\rightarrow -kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \rightarrow kx + m\ddot{x} = 0$$

برای یک سیستم

★ کافی است انرژی های جنبشی و پتانسیل را بتوانیم بدست آوریم.

جلسه چهارم 91/7/11

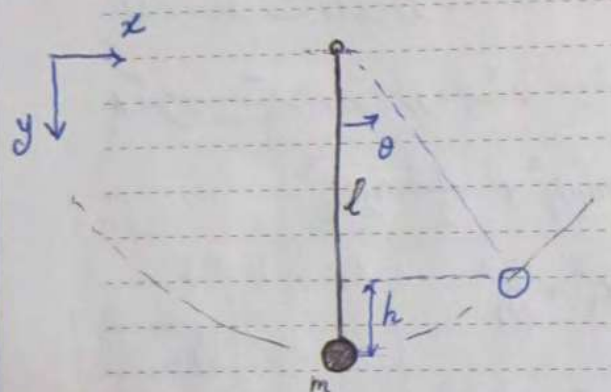
خلاصه روابط جلسه قبل

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt \qquad L = T - V$$

(KE) (PE)

تابع مختصات + مشتق اول آن نسبت به زمان — تابع مختصات

• سیستم زیر را در نظر بگیرید (نخ بدون جرم - نقطه O لولا شده)



x و y وابسته : $x^2 + y^2 = l^2$

n : درجه آزادی: حداقل تعداد متغیرهای لازم برای توصیف یک سیستم (مستقل)

θ : متغیر مستقل

↓

q متغیرهای تعمیم یافته (ممکن است دارای بعد طول یا سرعت نباشند)

اگر سیستم به مقدار θ منحرف شود:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad , \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$\begin{aligned} x &= l\sin\theta \\ y &= l\cos\theta \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= l\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} &= -l\sin\theta\,\dot{\theta} \end{aligned} \rightarrow v^2 = l^2\dot{\theta}^2$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = mgl(1-\cos\theta)$$

مبدأ سنجش: نقطه تعادل استاتیکی ذره

$$\rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\rightarrow \delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 0$$

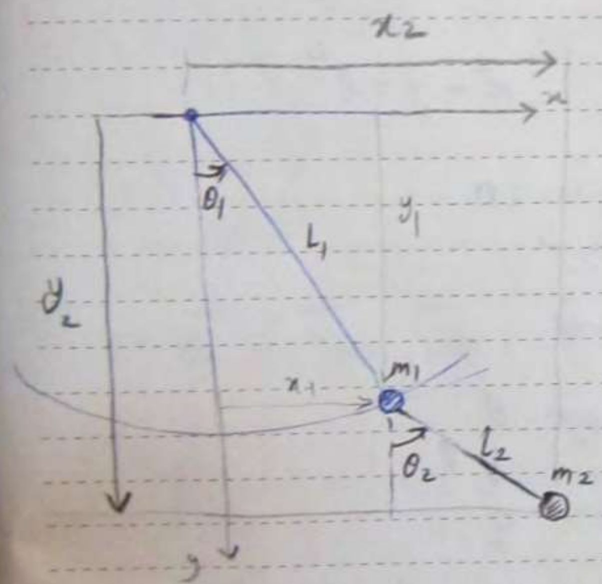
$$\Rightarrow -Lmg\sin\theta - \frac{d}{dt}\left(mL^2\dot\theta\right) = 0 \rightarrow l\ddot\theta + g\sin\theta = 0$$

معادله حرکت سیستم (یک معادله غیرخطی) : $\rightarrow \boxed{\ddot\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

$\theta \leqslant 6^\circ \rightarrow \sin\theta \simeq \theta \xrightarrow{\text{خطی شدن معادله دیفرانسیل}} \ddot\theta + \frac{g}{l}\theta = 0$

* اگر به جای نخ میله ای به جرم m' داشتیم، باز هم تفاوتی نمی کرد و بایستی مقدار T و V مربوط به میله را نیز در معادلات وارد نمود.

* اگر سیستم به صورت زیر باشد :



$$T = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$$

$$V_1^2 = \dot x_1^2 + \dot y_1^2 \qquad \begin{cases} x_1 = L_1\sin\theta_1 \\ y_1 = L_1\cos\theta_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow V_1^2 = L_1^2\dot\theta_1^2$$

$$\rightarrow V_2^2 = \dot x_2^2 + \dot y_2^2 \qquad \left\{ x_2 = \right.$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + L_2\sin\theta_2 = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2 \\ \dot x_2 = L_1\cos\theta_1\,\dot\theta_1 + L_2\cos\theta_2\,\dot\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + L_2\cos\theta_2 = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2 \\ \dot y_2 = -L_1\sin\theta_1\,\dot\theta_1 - L_2\sin\theta_2\,\dot\theta_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow V_2^2 = L_1^2\dot\theta_1^2 + L_2^2\dot\theta_2^2 + 2L_1L_2\underbrace{\left(\cos\theta_1\dot\theta_1 + \cos\theta_2\dot\theta_2 + \sin\theta_1\dot\theta_1 + \sin\theta_2\dot\theta_2\right)}$$

علوا $\leftarrow \dot\theta_1(\sin\theta_1 + \cos\theta_2) + \dot\theta_2(\sin\theta_2 + \cos\theta_1$

$$+ 2L_1L_2\dot\theta_1\dot\theta_2\left[\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

$V_1 = -m_1 g y_1$

$V_2 = -m_2 g y_2$

$L = T - V = 0$

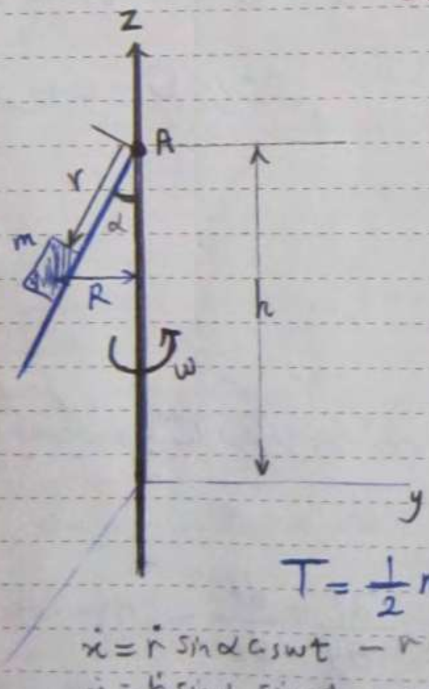
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}\right) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta_2}\right) = 0 \end{cases}$$

مثال: میله ای در حالت قائم که میله ای تحت زاویه α به آن جوش شده است.

ذره ای به جرم m بدون اصطکاک روی بازو ایستاده است.

میله قائم تحت سرعت زاویه ای ω در حال چرخش است.

معادله حاکم بر حرکت ذره را بدست آورید.

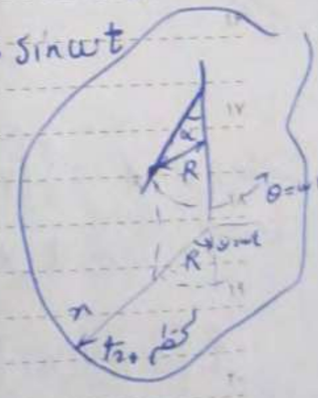


$R = r\sin\alpha$

$x = R\cos\theta = r\sin\alpha \cdot \cos\omega t$

$y = R\sin\theta = r\sin\alpha \cdot \sin\omega t$

$Z = h - r\cos\alpha$



$$T = \frac{1}{2} m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$$

$\dot x = \dot r \sin\alpha\cos\omega t - r\omega\sin\alpha\sin\omega t$

$\dot y = \dot r\sin\alpha\sin\omega t + r\omega\sin\alpha\cos\omega t$

$\dot z = -\dot r\cos\alpha$

r و ωt نسبت به زمان متغیر، α ثابت.

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} m\left\{\dot r^2\sin^2\alpha + r^2\omega^2\sin^2\alpha + \dot r^2\cos^2\alpha\right\} = \frac{1}{2} m\left\{\dot r^2 + r^2\omega^2\sin^2\alpha\right\}$$

$V = mgz = mg(h - r\cos\alpha)$

نسبت به صفحه xy

$v_\omega = R\omega \qquad v_r = \dot r$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2\omega^2 + \frac{1}{2} m\dot r^2$$

r: تنها متغیر مسئله

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \{ \dot{r}^2 + r^2 w^2 \sin^2\alpha \} - mg(h - r\cos\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = mrw^2\sin^2\alpha + mg\cos\alpha \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \end{cases}$$

$$\rightarrow mrw^2\sin^2\alpha + mg\cos\alpha - m\ddot{r} = 0 \longrightarrow \boxed{\ddot{r} - rw^2\sin^2\alpha = g\cos\alpha}$$

$$\rightarrow r(t) = A_1 e^{(w\sin\alpha)t} + A_2 e^{-(w\sin\alpha)t} - \frac{g\cos\alpha}{w^2\sin^2\alpha}$$

A_1, A_2 از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

در این مسئله α ثابت بود. حال اگر α متغیر باشد.

* در ریاضیات قبل داشتیم

$$f(x,y,z) = 0 \xrightarrow[\text{اکسترمم شود}]{} \text{قید } \phi(x,y,z) = 0$$

قید اعمال می‌کنیم $\longrightarrow h = f + \lambda\phi$

λ: ضریب لاگرانژ

f یک تابع یکنواخت و پیوسته در کل فضا است که در آن روی ... شود.

* ابتدا از حالت دو بعدی: $f(x,y) = 0$

قید $\phi(x,y) = 0$ ، $y = g(x)$

$$f[x, g(x)] = 0 \qquad \frac{df}{dx} = f_x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dg}{dx} = 0 \quad (1) \qquad dg = dy$$

معادله قید $\left\{ \phi[x, g(x)] = 0 \right.$

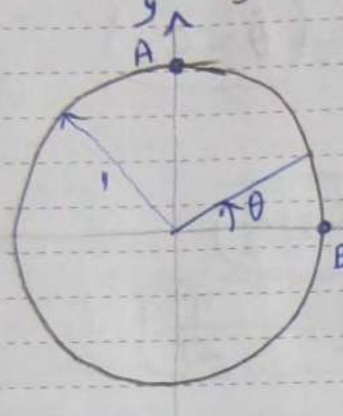
$$\frac{d\phi}{dx} = \phi_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{dg}{dx} = 0 \quad (2)$$

$$(2)\ \frac{dg}{dx} = -\frac{\phi_x}{\phi_y} \xrightarrow{\text{در (1) می‌گذاریم}} f_x + f_y\left(-\frac{\phi_x}{\phi_y}\right) = 0$$

$$\rightarrow f_x + \left(-\frac{f_y}{\phi_y}\right)\phi_x = 0$$

(تابعی از x یا تابعی از y نبوده و صرفاً ثابت) $\lambda \longrightarrow f_x + \lambda\phi_x = 0 = h_x$

• مثال: ذره‌ای به جرم m روی دایره‌ی واحد از نقطه $A(0,1)$ تا نقطه $B(1,0)$ در مدت زمان T طوری حرکت می‌کند که انتگرال انرژی جنبشی آن کمینه است. معادلات حرکت را تعیین کنید.



ذره مقید به حرکت روی دایره است: قید مسئله $x^2+y^2=1$

$$(KE)\,T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$I=\int_0^T \underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}_{F(x,y,\dot{y},\dot{x},t)}\,dt$$

$$I^*=\int_0^T \underbrace{\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\lambda(x^2+y^2-1)\right]}_{F^*}dt$$

معادله اویلر لاگرانژ برای F^* جدید

$$\frac{\partial F^*}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)=0 \qquad 2\lambda x-\frac{d}{dt}(m\dot{x})=0$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{y}}\right)=0 \longrightarrow 2\lambda y-\frac{d}{dt}(m\dot{y})=0$$

$$\begin{cases} 2\dfrac{\lambda}{m}x-\ddot{x}=0 \quad (*) \\ 2\dfrac{\lambda}{m}y-\ddot{y}=0 \end{cases} \longrightarrow \frac{\ddot{x}}{x}=\frac{\ddot{y}}{y}=2\frac{\lambda}{m}$$

$$x=R\cos\theta \longrightarrow \dot{x}=-R\sin\theta\,\dot{\theta}$$
$$y=R\sin\theta \longrightarrow \dot{y}=R\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$\frac{\ddot{x}}{x}=\frac{\ddot{y}}{y} \longrightarrow \ddot{x}y-x\ddot{y}=0 \qquad =\frac{d}{dt}(\dot{x}y-x\dot{y})=0$$

$$\ddot{x}y \to \frac{d}{dt}(\dot{x}y)-\dot{x}\dot{y} \qquad x\ddot{y} \to \frac{d}{dt}(x\dot{y})-\dot{x}\dot{y}$$

$$\rightarrow \dot{x}y - x\dot{y} = C_1 \rightarrow (-R\sin\theta\,\dot\theta)(R\sin\theta) - (R\cos\theta)(+R\cos\theta\,\dot\theta) = C_1$$

$$= -R^2\sin^2\theta\,\dot\theta - R^2\cos^2\theta\,\dot\theta = C_1$$

$$\rightarrow R^2(-1)\dot\theta = C_1 \longrightarrow \boxed{\dot\theta = C_2}$$

$$\rightarrow \boxed{\theta = C_2 t + C_3}$$

$$A(0,1) \rightarrow \frac{\pi}{2} = 0 + C_3 \longrightarrow \boxed{C_3 = \frac{\pi}{2}}$$

$$T \rightarrow B(1,0) \rightarrow 0 = C_2 T + \frac{\pi}{2} \longrightarrow \boxed{C_2 = -\frac{\pi}{2T}}$$

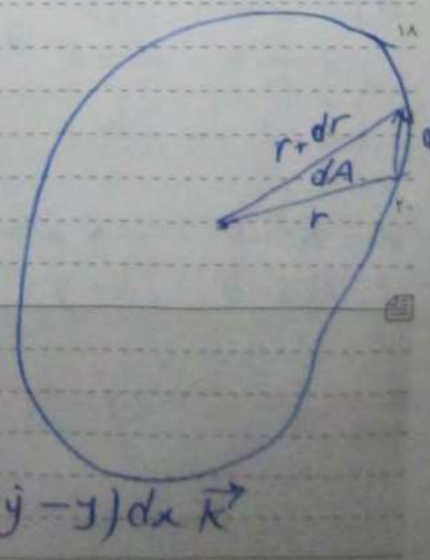
$$\longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)} \quad \longrightarrow x, y$$

معادله * برای حرکت آور

* منحنی بسته ساده به طول L که می‌توانیم شکل‌های مختلفی ایجاد کنیم - به ازای چه منحنی (با طول ثابت L) معادله ای را بدست آوریم که مساحت محصور شده توسط آن حداکثر باشد.

قید: $L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

$$dA = \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r}$$



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy$$

$$\rightarrow d\vec{A} = \frac{1}{2}(x\vec{i} + y\vec{j}) \times (\vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy)$$

$$= \frac{1}{2}(x\,dy\,\vec{k} - y\,dx\,\vec{k})$$

$$= \frac{1}{2}(x\dot{y} - y)\,dx\,\vec{k}$$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۲۸	۲۹	۳۰	۳۱			

$$\longrightarrow A = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} (xy' - y)\,dx \qquad L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$\longrightarrow I^* = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{2}(xy'-y) + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right] dx = 0$$

جلسه پنجم - 91/7/16

$$\xrightarrow[\text{لاگرانژ برای } I^*]{\text{معادله اویلر}} \frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2} + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = -1 \longrightarrow \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1 - x \longrightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} = \frac{\lambda}{c_1 - x}$$

$$\longrightarrow \frac{1+y'^2}{y'^2} = \left(\frac{\lambda}{c_1-x}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{y'^2} = \left(\frac{\lambda}{c_1-x}\right)^2 - 1 \longrightarrow y'^2 = \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{c_1-x}\right)^2 - 1}$$

$$\longrightarrow y'^2 = \frac{(c_1-x)^2}{\lambda^2 - (c_1-x)^2} \longrightarrow y' = \frac{(c_1-x)}{\sqrt{\lambda^2-(c_1-x)^2}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\longrightarrow (y+c_2)^2 = \lambda^2 - (c_1-x)^2 \longrightarrow \boxed{(x-c_1)^2 + (y+c_2)^2 = \lambda^2}$$

معادله یک دایره

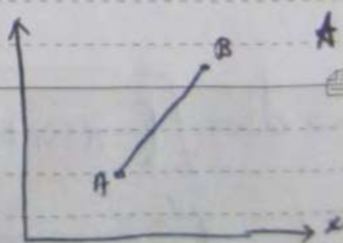
رابطه λ با محیط:

$L = 2\pi\lambda$

محیط دایره

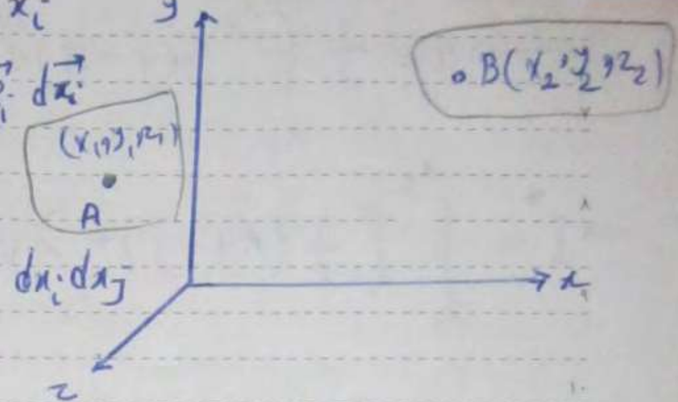
$\longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{L}{2\pi}}$

(ژئودزی را در حالت سه بعدی حل می‌کنیم!)



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \longrightarrow \vec{r} = \vec{e}_i x_i$

$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz \qquad d\vec{r} = \vec{e}_i\, d\vec{x}_i$



$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$

$= (\vec{e}_i\, dx_i) \cdot (\vec{e}_j\, dx_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\, dx_i\, dx_j$

$= \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j = dx_i\, dx_i$

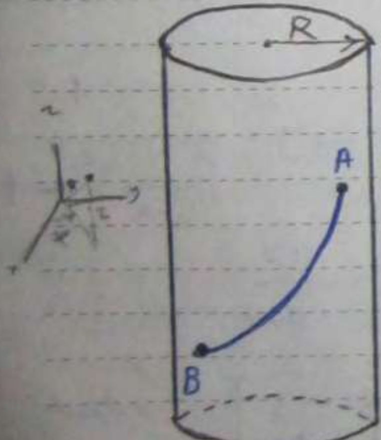
$= \sum_{k=1}^{3} (dx_k)^2 \longrightarrow ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

ممکن است x، y و z تابعی از پارامتری مانند t باشند:

$\rightarrow ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$

فرض کنید دو نقطه روی استوانه‌ای به شعاع R داریم،

کوتاه‌ترین فاصله روی استوانه بین نقاط A و B؟



ابتدا ارتباط بین دستگاه استوانه‌ای و مختصات:

مختصات استوانه‌ای
$$\begin{cases} x = R\cos\phi & \rightarrow dx = \cos\phi\, dR - R\sin\phi\, d\phi \\ y = R\sin\phi & \rightarrow dy = \sin\phi\, dR + R\cos\phi\, d\phi \\ z = z & \rightarrow dz = dz \end{cases}$$

R ثابت
$$\rightarrow \begin{aligned} dx &= -R\sin\phi\, d\phi & \rightarrow \dot{x} &= -R\sin\phi\, \dot{\phi} \\ dy &= R\cos\phi\, d\phi & \rightarrow \dot{y} &= R\cos\phi\, \dot{\phi} \\ dz &= dz & \rightarrow \dot{z} &= \dot{z} \end{aligned}$$

$$\rightarrow ds = \sqrt{[-R\sin\phi\,\dot{\phi}]^2 + (R\cos\phi\,\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2}\, dt = \sqrt{R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}\, dt \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \phi} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \dot z} = C_1 & \longrightarrow \dfrac{\dot z}{\sqrt{R^2\dot\phi^2+\dot z^2}} = C_1 \rightarrow \dfrac{\dot z}{C_1} = \sqrt{} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot\phi} = C_2 & \longrightarrow \dfrac{R^2\dot\phi}{\sqrt{R^2\dot\phi^2+\dot z^2}} = C_2 \rightarrow \dfrac{R^2\dot\phi}{C_2} = \sqrt{} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\dot z}{C_1} = \frac{R^2\dot\phi}{C_2} \rightarrow \frac{\dot z}{\dot\phi} = \frac{R^2 C_1}{C_2} = C_3 \longrightarrow \boxed{Z = C_3\phi + C_4}$$

$^*F$

$$ds = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt$$

■ صفحه ای را در فضا در نظر می گیریم:

فرض کنید این صفحه با کره ای به شعاع $\underset{R}{a}$ قطع شده است

صفحه و کره به چه صورت همدیگر را قطع کنند تا کمان حاصل شده

دارای بیشترین طول باشد؟

بایستی صفحه از مرکز کره بگذرد.

معادله قید در حالت کلی $G(x,y,z)=0$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left[\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2} + \lambda G\right]}_{F^*} dt$$

برای حالت کلی

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot x}\right) = 0 \rightarrow \lambda G_x - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x}{F}\right) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x}{F}\right)}{G_x}$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot y}\right) = 0 \rightarrow \lambda G_y - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{F}\right) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{F}\right)}{G_y}$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot z}\right) = 0 \rightarrow \lambda G_z - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot z}{F}\right) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot z}{F}\right)}{G_z}$$

حل این مثال

$$G: x^2+y^2+z^2-R^2 = 0 \rightarrow \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x}{F}\right)}{2x} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{F}\right)}{2y} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot z}{F}\right)}{2z} = \lambda$$

$$\longrightarrow \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{F}\right)}{x} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{F}\right)}{y} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{F}\right)}{z} = 2\lambda$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{\ddot{x}F - \dot{x}\dot{F}}{xF^2}}_{(I)} = \underbrace{\frac{\ddot{y}F - \dot{y}\dot{F}}{yF^2}}_{(II)} = \frac{\ddot{z}F - \dot{z}\dot{F}}{zF^2} = 2\lambda$$

$$\xrightarrow{I,II} \frac{\ddot{x}F - \dot{x}\dot{F}}{xF^2} = \frac{\ddot{y}F - \dot{y}\dot{F}}{yF^2} \longrightarrow y(\ddot{x}F - \dot{x}\dot{F}) = x(\ddot{y}F - \dot{y}\dot{F})$$

$$\longrightarrow F(y\ddot{x} - x\ddot{y}) = \dot{F}(y\dot{x} - x\dot{y}) \rightarrow \frac{\dot{F}}{F} = \frac{y\ddot{x} - x\ddot{y}}{y\dot{x} - x\dot{y}} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{II,III} z(\ddot{y}F - \dot{y}\dot{F}) = y(\ddot{z}F - \dot{z}\dot{F})$$

$$\rightarrow F(z\ddot{y} - y\ddot{z}) = \dot{F}(z\dot{y} - y\dot{z}) \longrightarrow \frac{\dot{F}}{F} = \frac{z\ddot{y} - y\ddot{z}}{z\dot{y} - y\dot{z}} \quad (2)$$

$$(1),(2) \longrightarrow \frac{y\ddot{x} - x\ddot{y}}{y\dot{x} - x\dot{y}} = \frac{z\ddot{y} - y\ddot{z}}{z\dot{y} - y\dot{z}}$$

$d(y\dot{x} - x\dot{y}) = y\ddot{x} - x\ddot{y}$

$d(z\dot{y} - y\dot{z}) = z\ddot{y} - y\ddot{z}$

$$\rightarrow \frac{d(y\dot{x} - x\dot{y})}{y\dot{x} - x\dot{y}} = \frac{d(z\dot{y} - y\dot{z})}{z\dot{y} - y\dot{z}} \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} y\dot{x} - x\dot{y} = c_1(z\dot{y} - y\dot{z})$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کردن}} y(\dot{x} + c_1\dot{z}) = \dot{y}(x + c_1 z) \rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{x} + c_1\dot{z}}{x + c_1 z}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} y = c_2(x + c_1 z) \longrightarrow \boxed{y = c_2 x + c_3 z}$$

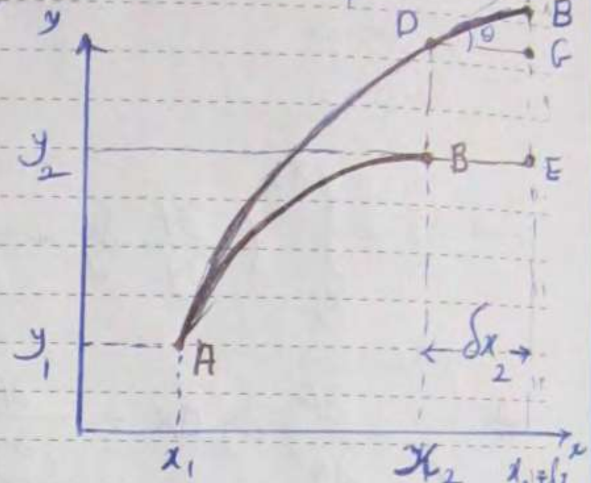
معادله صفحه‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد و [illegible]
دایره عظیمه بدست می‌آید

• بررسی Functional هایی که در آنها نقاط ابتدایی (یکی - یا هر دو) متغیر (متحرک) باشند.

B A

فرض می‌کنیم نقطه سمت چپ ثابت و نقطه سمت راست متحرک باشد.

اگر نقطه B به اندازه δx_2 تغییر مکان داشته باشد



(از نقطه A منحنی های بیشماری می‌توانیم بگذرانیم که انتهای آن آزاد داشته باشند (قلم منحنی → اصطلاحاً)

$B(x_2, y_2)$

$D(x_2, y_2+\delta y|^{x_2})$

$E(x_2+\delta x_2, y_2)$

$B'(x_2+\delta x_2, y_2+\delta y_2)$

$\to y_2 \longrightarrow y$

قبلاً داشتیم

$$I_1=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \longrightarrow I_2=\int_{x_1}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx$$

$$\to \delta I=\int_{x_1}^{x_2+\delta x_2} F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\,dx-\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\,dx+\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\,dx-\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx$$

$$\Rightarrow \delta I=\int_{x_1}^{x_2}\Big[\underbrace{F(x,y+\delta y,y'+\delta y')}_{\cancel{F}+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'}-\cancel{F(x,y,y')}\Big]dx+\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\,dx$$

$$\rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right) dx + \underbrace{\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\, dx}$$

با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین $\Leftarrow \displaystyle\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} dx \; F(x,y,y')\Big|_{x_2}$ ← مقدار با خطا که در حالت حدی خطا به صفر می‌گراید

مساحت سطح

$$\rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right) dx + F(x,y,y')\Big|_{x_2} \delta x_2$$

* باید مشتق از روی $\delta y'$ برداشته شود، پس داریم:

$$* \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\, dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

$$\rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \delta y\, dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + F(x,y,y')\Big|_{x_2} \times \delta x_2$$

$$\rightarrow \delta I = F(x,y,y')\Big|^{x_2} \delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|^{x_2} - \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}$$

جمع بستن‌ها در x_1 به هم می‌رسند

$$* \; \delta y\Big|^{x_2} = BD = EG \qquad\qquad * \; \delta y\Big|^{x_2+\delta x_2} = EB'$$

با توجه به شکل

$$= EB' - GB'$$

$$\tan\theta = \frac{GB'}{\delta x_2}, \quad GB' = y'(x_2)\cdot \delta x_2$$

در حالت حدی

$$\rightarrow \delta y\Big|^{x_2} = \delta y\Big|^{x_2+\delta x_2} - y'(x_2)\,\delta x_2$$

جایگذاری در رابطه δI

$$\delta I = F(x,y,y')\Big|^{x_2}\delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial y'}\left\{\delta y\Big|^{x_2+\delta x_2} - y'\delta x_2\right\}$$

$$= \left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Big|^{x_2}\delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|^{x_2+\delta x_2} = 0$$

ضرایب δx و δy بایستی صفر باشند :

$$\rightarrow \left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Big|^{x_2} = 0 \qquad (\delta x \neq 0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|^{x_2} = 0 \qquad (\delta y \neq 0)$$

در حالت کلی حرکت نقطه B

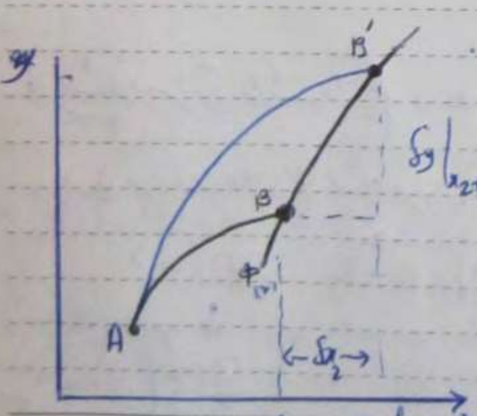
شرایط خاص

① اگر نقاط روی سمتی قائم حرکت کنند $\delta x = 0 \longrightarrow$ « $\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|^{x_2} = 0$ » $\leftrightarrow$ شرط مرزی طبیعی

② اگر انتهای ستی ها روی خط افقی حرکت کنند $\delta y = 0 \longrightarrow$ « $F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|^{x_2} = 0$ »

شرط ترانسورسالی

اگر نقطه ابتدایی و انتهایی روی منحنی های ϕ حرکت کنند.



$$\delta y\Big|_{x_2+\delta x_2} = \phi(x_2+\delta x_2) - \phi(x_2)$$

$$\text{بسط تیلور} = \phi'(x_2)\,\delta x_2$$

$$\delta I \rightarrow 0 = \left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Big|^{x_2}\delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(\phi'(x_2)\,\delta x_2\right)$$

[illegible]

$$\boxed{\left[F + (\phi' - y')F_{y'}\right]\delta x_2 = 0} \quad \text{شرط تقاطع}$$

$\uparrow\downarrow \; \delta x = 0,\ \delta y \neq 0$ $\qquad \leftrightarrow \; \delta y = 0,\ \delta x \neq 0$

□ جلسه ششم - 91/7/18

$x_2 : F + (\Phi' - y')F_{y'} = 0$ شرط تقاطع ۱

$x_1 : F + (\Psi' - y')F_{y'} = 0$ اگر ابتدا روی Ψ حرکت کند

مثال:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad f(x,y) \neq 0$$

$\xrightarrow{\text{اعمال شرایط}}$ $x_2 : f\sqrt{1+y'^2} + (\Phi' - y')f\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$ ①

$x_1 : f\sqrt{1+y'^2} + (\Psi' - y')f\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$ ②

$$① \longrightarrow \frac{f(1+y'^2) + y'f(\Phi' - y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \;,\; f \neq 0 \rightarrow \frac{1+y'^2 + y'(\Phi' - y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

$$\longrightarrow 1 + \Phi' y' = 0 \longrightarrow \boxed{\Phi' y' = -1}$$

y' شیب خم‌های اکسترمم و Φ' ... Φ } ← حاصل ضرب $= -1$ ← دو شیب بر هم عمودند

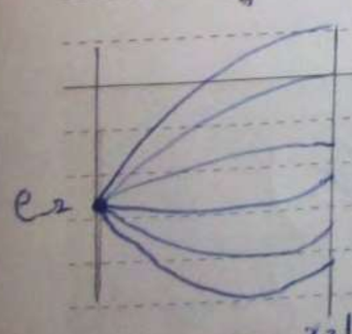
به همین ترتیب برای x_1 : $\boxed{\Psi' y' = -1}$

اگر مسئله تغییراتی داشته باشیم و Φ و Ψ را دارا باشند و یا بخواهیم بدست بیاوریم از حل معادله لاگرانژ روابط مربوط به Φ و Ψ مشخص می‌شوند.

$$I(y(x)) = \int_0^1 e^{3x}(y'^2 - 2y^2)\,dx \qquad y(0) = e-2 \qquad y(1) = ?$$

$$\downarrow$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=1} = 0$$



اولر-لاگرانژ $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

$$-4ye^{3x} - \frac{d}{dx}(2y'e^{3x}) = 0$$

نقطه راست روی خط قائم حرکت می‌کند. پس داریم

$\rightarrow \left.\partial F/\partial y'\right|_{x=1} = 0$

$\rightarrow (-4y - 2y'' - 6y')e^{3x} = 0 \rightarrow y'' + 3y' + 2y = 0$

$\rightarrow y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

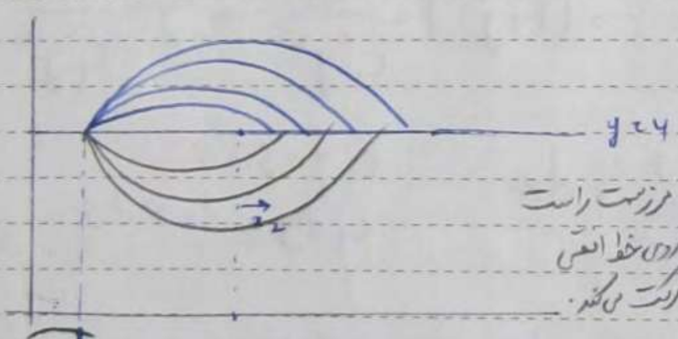
$y(0) = e-2 \rightarrow e-2 = c_1 + c_2$ (I)

$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=1} = 0 \rightarrow 2y'e^{3} = 0 \rightarrow y'(1) = 0$

$y'(x) = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}$ $\quad y'(1) = 0 \rightarrow -c_1 e^{-1} - 2c_2 e^{-2} = 0$ (II)

(I), (II) $\rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = e \end{cases}$

$I(y(x)) = \int_1^{x_2} \left(2y + \frac{y'^2}{2}\right) dx \qquad \begin{cases} y(1) = 4 \\ y(x_2) = 4 , \quad x_2 > 4 \end{cases}$



اویلر لاگرانژ : $2 - \frac{d}{dx}(y') = 0$

مرز سمت راست روی خط افقی حرکت می‌کند. $\rightarrow y'' = 2$

$y' = 2x + c_1$

$y = x^2 + c_1 x + c_2$

$[x>4]$

$y(1) = 4 \rightarrow 4 = 1 + c_1 + c_2 \rightarrow \underline{c_1 + c_2 = 3}$ (I)

$(F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_2} = 0 \rightarrow 2y + \frac{y'^2}{2} - y'^2 = 0 \rightarrow 2y - \frac{1}{2}y'^2 = 0 \rightarrow 4y - y'^2 = 0$

$(x_2 > 4)$

$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری } y} 4(x_2^2 + c_1 x_2 + c_2) - (2x_2 + c_1)^2 = 0$ (II)

$y(x_2) = 4 \rightarrow 4 = x_2^2 + c_1 x_2 + c_2$ (III)

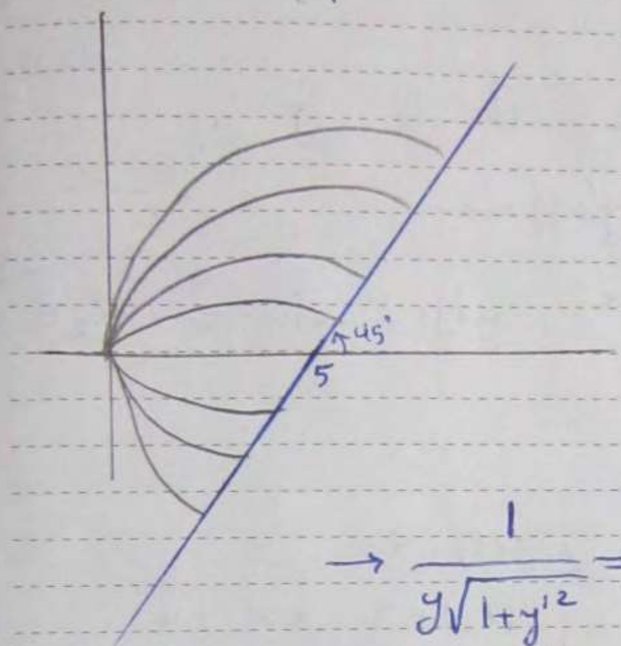
$\begin{cases} x_2 = 5 \\ c_1 = -6 \\ c_2 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 1 \\ c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$ غ ق ق $\quad x_2 > 4$

$\rightarrow y = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow \boxed{y = (x-3)^2}$

$1+\phi' y' = 0 \leftarrow \int f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ حالت عمومی

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = \quad \rightarrow \phi(x) = x-5$$

$$y(0) = 0$$



$$-y' F_{y'} + F = c_1$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y' \times \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

$$\frac{1+y'^2 - y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

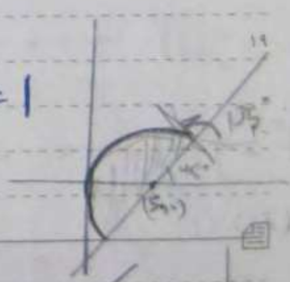
$$\rightarrow \frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \rightarrow y\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{c_1}$$

$$\rightarrow y^2(1+y'^2) = \frac{1}{c_1^2} \rightarrow (1+y'^2) = \frac{1}{c_1^2 y^2} \rightarrow y'^2 = \frac{1}{c_1^2 y^2} - 1$$

$$\rightarrow y' = \sqrt{\frac{1-c_1^2 y^2}{c_1^2 y^2}} \qquad \frac{c_1 y\,dy}{\sqrt{1-c_1^2 y^2}} = dx \qquad c_1 y = \sin\theta, \quad c_1 dy = \cos\theta\, d\theta$$

$$\rightarrow \frac{\cos\theta\, d\theta \cdot \frac{1}{c_1}\sin\theta}{\cos\theta} = dx \rightarrow -\frac{1}{c_1}\cos\theta = x + c_2$$

$$\rightarrow \cos\theta = c_3 - c_1 x \rightarrow c_1^2 y^2 + (c_3 - c_1 x)^2 = 1$$



$$y(0) = 0 \rightarrow 0 + c_3^2 = 1 \rightarrow c_3 = \pm 1$$

$$c_1^2 y^2 + (\pm 1 - c_1 x)^2 = 1 \longrightarrow$$ مرکز دایره روی محور x ها قرار خواهد گرفت

مرکز دایره خواهد بود $(5,0)$

$$\phi' y' = -1 \qquad \phi' = 1 \rightarrow y' = -1$$

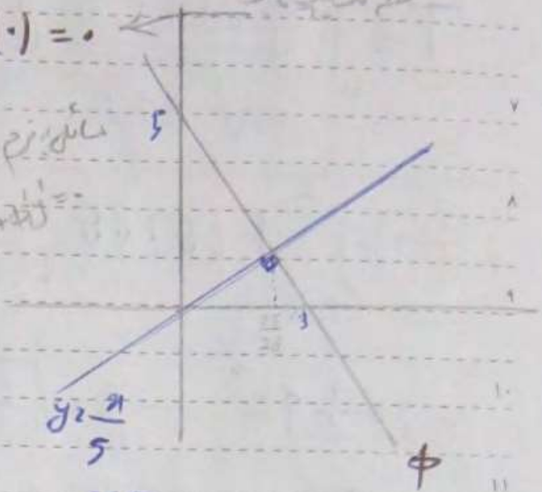
شرط تعامد

با توجه به شرط تعامد در نقطه برخورد تنها دایره‌ای که می‌تواند این شرط را ارضا کند دایره‌ای است که مرکزش $(5,0)$ باشد

تکلیف: کمترین طول منحنی که یک نقطه‌اش (۰،۰) باشد
و دیگری (نقطهٔ دیگر) روی $\Phi=15-5x$ محدود باشد.

$$\Phi(x) = 15-5x$$

$$I[y(x)] = \int_0^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad y(0)=0$$



$$\rightarrow y = c_1x + c_2 \xrightarrow{(0,0)} y = c_1 x$$

$$\Phi' y' = -1 \rightarrow -5c_1 = -1 \rightarrow c_1 = \frac{1}{5}$$

$$\longrightarrow \boxed{y = \frac{x}{5}}$$

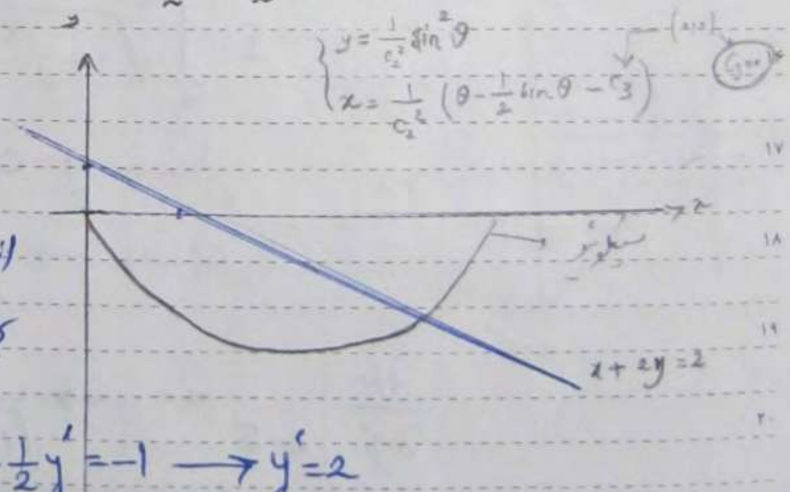
$$\frac{x}{5} = 15-5x \rightarrow \frac{26}{5}x = 15 \rightarrow \boxed{x = \frac{75}{26}} \longrightarrow x_2 = \frac{75}{26}$$

ذره‌ای از حالت سکون و از مبدأ مختصات روی منحنی حداقل زمان شروع به حرکت کرده و تا خط
$x+2y=2$ طی مسیر می‌کند. معادلهٔ منحنی حرکت و زمان حرکت را تعیین کنید. سپس مدت زمان
حرکت را با زمان سقوط آزاد ذره مقایسه کنید.

$y = k^2 \sin^2\theta$ شروع از مبدأ

$$\begin{cases} y = \frac{1}{c_2^2}\sin^2\theta \\ x = \frac{1}{c_2^2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta - c_3\right) \end{cases}$$

$$x = k^2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$



از شرط تقاطع در محل تلاقی می‌توانیم شیب مماس
بر منحنی حداقل زمان را تعیین کنیم

$$\Phi' y' = -1 \longrightarrow \Phi' = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}y' = -1 \longrightarrow y' = 2$$

از طرفی $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \Big/ \frac{dx}{d\theta}$ $\longrightarrow$ زاویه‌ی برخورد دو منحنی بدست می‌آید $\longrightarrow \theta = 26.56^\circ$ rad

(مقدار حقیقی دایره‌ای که هنوز مشخص نشده است)

$\hookrightarrow \begin{cases} x(\theta) \\ y(\theta) \end{cases} \rightarrow k^2$

$x(\theta)+2y(\theta)=2$

$$\begin{cases} x(\theta) \\ y(\theta) \end{cases} \xrightarrow{\Phi} x(\theta)+2y(\theta)=2 \longrightarrow k^2 =$$

$$T=\int_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx \qquad \begin{matrix} y(\theta) \\ x(\theta) \end{matrix} \longrightarrow T\ (\theta \text{ برحسب})$$

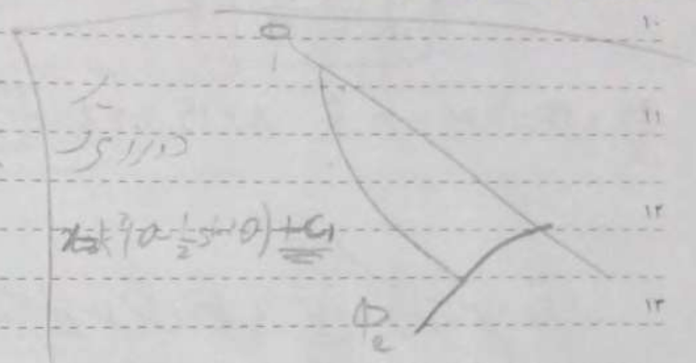
$$\rightarrow T=\int_{t_1}^{t_2}F(\theta)\,d\theta=\frac{2K}{\sqrt{g}}(\overset{26.56^\circ}{\theta_2}-\overset{(0)}{\theta_1})$$

مدت زمان حرکت از نقطه ① تا ②

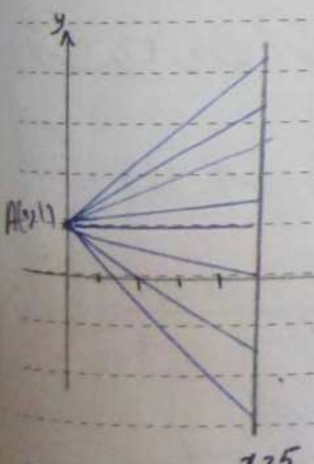
مدت زمان سقوط آزاد:

$$y=\frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow t=\sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$\begin{cases} T=0.4378\ s \\ t=0.4515\ s \end{cases} \longrightarrow t>T$$



مثال: کوتاه‌ترین مسیری که نقطه A را به خط $x=5$ وصل می‌کند را بدست آورید.



$$I=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad \text{(انتگرال مربوطه)}$$

$$\hookrightarrow y=c_1x+c_2$$

$$A(0,1)\longrightarrow c_2=1 \longrightarrow y=c_1x+1$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=5}=0 \longrightarrow \left.\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=5}=0 \longrightarrow y'=0 \longrightarrow \boxed{c_1=0}$$

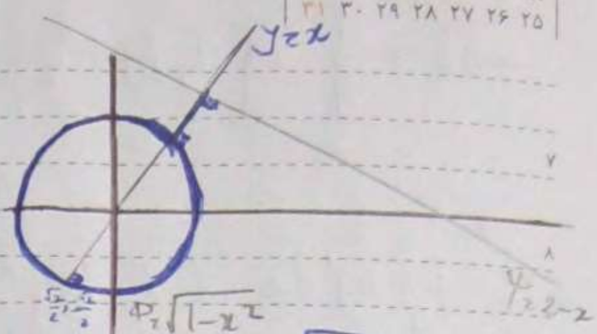
$$\rightarrow \boxed{y=1}$$

dx

$-\delta z,\ y, y', z, z'+\delta z')\,dx$

δx_2

معادله منحنی را بدست آورید که منحنی های φ و ψ را به هم وصل کند و دارای کمترین طول باشد.



$$I=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$y=c_1x+c_2$

$$\begin{cases}\varphi' y' = -1 \longrightarrow \text{باید از مرکز بگذرد } y \longrightarrow \boxed{c_2=0}\\ \psi' y' = -1 \quad \psi'=-1 \longrightarrow y'=1 \longrightarrow \boxed{c_1=1}\end{cases}$$

$\varphi \qquad \psi$

$$\longrightarrow \boxed{y=x}$$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2}\end{cases}\qquad\begin{cases}1\\1\end{cases}$$

y را با ψ و φ تلاقی می دهیم و نقاط برخورد را بدست می آوریم

جلسه هفتم 91/7/23

$$I\left[y(x),z(x)\right]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,z,y',z')\,dx$$

$F(x,y,z,y',z')$ با مرزهای متحرک

حل هر کدام دو ثابت انتگرال گیری لازم دارد

دو به شرط در x_1 و x_2 داده می شود

قبلا گفتیم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y(x_1)\\ z(x_1)\end{cases}\qquad\begin{cases}y(x_2)\\ z(x_2)\end{cases}$$

ابتدا فرض می کنیم مرز سمت چپ متحرک باشد.

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2+\delta x_2}F(x,y+\delta y,z+\delta z,y'+\delta y',z'+\delta z')\,dx-\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,z,y',z')\,dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left\{F(x,y+\delta y,z+\delta z,y'+\delta y',z'+\delta z')-F(x,y,z,y',z')\right\}dx+\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2}F(x,y+\delta y,z+\delta z,y'+\delta y',z'+\delta z')\,dx$$

$$F(x,y,z,y',z')\Big|_{x_2}\delta x_2$$

اگر F پیوسته باشد: $\delta x\rightarrow 0 \quad \begin{cases}\delta y\\ \delta z\\ \delta y'\\ \delta z'\end{cases}\Longrightarrow 0$