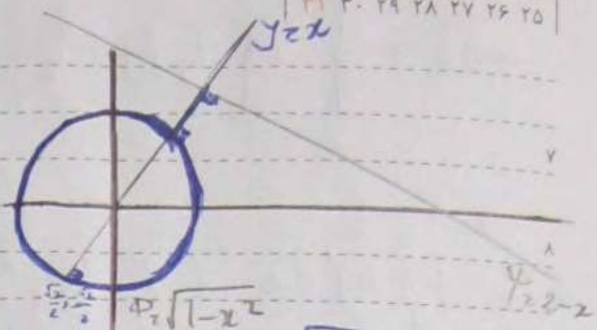
معادله منحنی را بدست آورید که منحنی های φ و ψ را بهم وصل کند و دارای کمترین طول باشد.



$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$y = c_1 x + c_2$$

$$\begin{cases} \varphi' y' = -1 \longrightarrow \text{y بایستی از مرکز بگذرد} \longrightarrow \boxed{c_2 = 0} \\ \psi' y' = -1 \quad \psi' = -1 \longrightarrow y' = 1 \longrightarrow \boxed{c_1 = 1} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{y = x}$$

φ $\quad$ ψ

$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$

y را با φ و ψ تلاقی می دهیم و نقاط برخورد را بدست می آوریم

جلسه هفتم 91/7/23

$$I\left[y(x), z(x)\right] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z')\, dx$$

$F(x,y,z,y',z')$ با مرزهای متحرک

حل هر کدام دو ثابت انتگرال گیری لازم دارد

دو تا از شرط ها در x_1 و x_2 داده می شود

قبلا گفتیم

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(x_1) \\ z(x_1) \end{cases} \quad \begin{cases} y(x_2) \\ z(x_2) \end{cases}$$

ابتدا فرض می کنیم مرز سمت چپ متحرک باشد.

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\, dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z')\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z') - F(x, y, z, y', z') \right\} dx + \int_{x_2}^{x_2+\delta x_2} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'$$

$$F(x, y, z, y', z')\Big|_{x_2} \delta x_2$$

اگر F پیوسته باشد: $\delta x \to 0 \quad \begin{cases} \delta y \\ \delta z \\ \delta y' \\ \delta z' \end{cases} \Longrightarrow 0$

حمل اول بسط

$$\rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[F_y \delta y + F_z \delta z + F_{y'} \delta y' + F_{z'} \delta z' \right] dx + F(x, y, z, y', z')\Big|_{x_2} \delta x_2$$

حال بایستی علامت مشتق را از روی $\delta y'$ و $\delta z'$ برداریم

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y'} \delta y' dx = F_{y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{z'} \delta z' dx = F_{z'} \delta z \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta z \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) dx$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری}} \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\Big\{ \overbrace{F_y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}^{\text{اولر لاگرانژ}} \Big\} \delta y + \Big\{ \overbrace{F_z - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)}^{\text{اولر لاگرانژ}} \Big\} \delta z \right] dx$$

$$+ F_{y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + F_{z'} \delta z \Big|_{x_1}^{x_2} + F(x, y, z, y', z')\Big|_{x_2} \delta x_2$$

$$\begin{cases} \delta y\big|^{x_2} = \delta y_2 - y'(x_2)\,\delta x_2 \\ \delta z\big|^{x_2} = \delta z_2 - z'(x_2)\,\delta x_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \delta I = F\Big|^{x_2} \delta x_2 + F_{y'} \left\{ \delta y_2 - y'(x_2)\,\delta x_2 \right\} + F_{z'} \left\{ \delta z_2 - z'(x_2)\,\delta x_2 \right\} = 0$$

$$= \left(F - y' F_{y'} - z' F_{z'} \right)\Big|^{x_2} \delta x_2 + F_{y'} \delta y_2 + F_{z'} \delta z_2 = 0$$

کمیت های مستقل از هم معادل صفر هستند پس بایستی داشته باشیم $\left\{ \begin{array}{l} \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta z_2 \end{array} \right.$

$$\left(F - y'F_{y'} - z'F_{z'}\right)\Big|^{x_2} = 0$$

$$\begin{cases} F_{y'} = 0 \\ F_{z'} = 0 \end{cases}$$ شرط‌های ترزیابلیتی

حالتی را در نظر بگیریم که x_2 روی $\begin{cases} y = \phi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$ حرکت کند

غلط

$$\rightarrow \left[F + \underbrace{(\phi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}}_{=0}\right\}\delta x = 0$$

شرط تقاطع

حالت دوم $x_2 \longrightarrow z = \phi(x, y)$

$$\delta z = \frac{\partial \phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\delta y$$

پس از جاگذاری $\rightarrow \left(F - y'F_{y'} - z'F_{z'}\right)\Big|_{x_2}\delta x_2 + F_{y'}\delta y_2 + F_{z'}\left\{\phi_x \delta x + \phi_y \delta y\right\} = 0$

$$\rightarrow \Big[\underbrace{F + (\phi_x - z')F_{z'} - y'F_{y'}}_{=0}\Big]\delta x + \Big(\underbrace{F_{y'} + \phi_y F_{z'}}_{=0}\Big)\delta y = 0$$

اگر $\begin{cases} F_{y'} = 0 \\ F_{z'} = 0 \end{cases}$

$$I=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \qquad \begin{cases} y(x_1)=A \\ y(x_2)=B \end{cases} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دو $\longrightarrow c_1, c_2$

اگر معادله دیفرانسیل داده شود می توان شکل تغییراتی آن را بدست آورد؟ (مسئله برعکس)

① Sturm - Liouville

در اینجا گونه خاصی از معادلات را بررسی می کنیم:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[P(x)\,y'\right]+\left[q(x)+\lambda\, r(x)\right]y=0}$$ (معادله اشتورم - لیوویل)

p, q, r توابع حقیقی هستند، در این بازه $P\neq 0$ و همچنین P و r کمیت های مثبت هستند

$a\leq x\leq b$

$r(x)$ تابع وزنی، λ حقیقی.

معادله کمی شبیه معادله اویلر - لاگرانژ می باشد.

طرفین معادله را در y ضرب کرده و روی بازه a تا b انتگرال گیری می کنیم:

$$\int_a^b y\left\{\frac{d}{dx}(py')+(q+\lambda r)y\right\}dx=0$$

$$\rightarrow \lambda\int_a^b ry^2\,dx=-\int_a^b\left[qy^2-y\frac{d}{dx}(py')\right]dx \quad (2)$$

معادله دیفرانسیل ① خطی و همگن ← اگر y جواب از معادله ① باشد حاصل ضرب هر c در y هم جواب معادله است

می خواهیم c را طوری تعیین کنیم که $\int_a^b ry^2dx=1$ (نرمالیزه کردن)

$$\int_a^b ry^2dx=1 \quad (3)$$

$$\lambda=\frac{-\int_a^b\left[qy^2-\ \right]}{\int_a^b ry^2}$$

[illegible] λ [illegible]

(*) $I = -\int_a^b \Big[q y^2 - \overset{v}{y} \overbrace{\frac{d}{dx}(p y')}^{du} \Big] dx = \int_a^b (-q y^2 - p y'^2)\, dx + p y' y \Big|_a^b$

① $\begin{cases} y(a)=0 \\ y(b)=0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} y'(a)=0 \\ y'(b)=0 \end{cases}$

$\rightarrow I = \int_a^b (\underbrace{q y^2 + p y'^2}_{F})\, dx \rightarrow$ شبیه یک Functional

$J = \int_a^b r y^2\, dx = 1$ همراه قید

$\rightarrow F^* = F + \lambda J$

حالا اگر شرایط ① و ② (مرزی) طبق حالت گفته شده نباشد، چه باید بکنیم؟ ③ شرط مرزی عمومی

(نامعلوم) (نامعلوم)

شرط سوم ③ $a_1 p(a) y'(a) + a_2 y(a) = 0$

$b_1 p(b) y'(b) + b_2 y(b) = 0 \longrightarrow a_1 b_1 \neq 0$

$\div a_1$, $\div b_1 \longrightarrow$ $p(a) y'(a) + \overset{h}{\frac{a_2}{a_1}} y(a) = 0$

$p(b) y'(b) + \underset{k}{\frac{b_2}{b_1}} y(b) = 0$

$(*) \rightarrow I = -\int_a^b (q y^2 + p y'^2)\, dx + \overbrace{p(b) y'(b) y(b)}^{-k y(b)} - \overbrace{p(a) y'(a) y(a)}^{-h y(a)}$

$= -\Big\{ \int_a^b (q y^2 + p y'^2)\, dx + k y^2(b) - h y^2(a) \Big\}$

$\begin{cases} g(a) = h \\ g(b) = k \end{cases}$ g(x) را در تعریف می‌گیریم که ← می‌خواهیم کم کردن جملات معلوم را داخل انتگرال ببریم

$$= -\left\{ \int_a^b qy^2 + py'^2 + \frac{d}{dx}\left[g(x)y^2\right] \right\} dx$$

شرط $y'(c_1)=0$ و شیب خط مماس بر منحنی در c_1 برابر صفر ولی مقدار تابع هر مقدار دلخواهی داشته باشد یعنی در c_1 نقطه متحرک داریم. (مرز متحرک)

$$\Longrightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a,b} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2py' + 2gy \Big|_{x=a,b} = 0$$

$$\rightarrow py' + gy \Big|_{x=a} = 0 \xrightarrow{③} g(a) = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\rightarrow py' + gy \Big|_{x=b} = 0 \longrightarrow g(b) = \frac{b_2}{b_1}$$

اگر معادله داده شده در حالت کلی باشد (به صورت اشتورم لیوویل نباشد):

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \Phi$$

بایستی معادله را به شکل ① [اشتورم لیوویل] بازسازی کنیم

$$\rightarrow y'' + \frac{a_1}{a_0}y' + \frac{a_2}{a_0}y = W \qquad \left[py'' + p'y' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0\right)$$

$$p\left(y'' + \frac{a_1}{a_0}y' + \frac{a_2}{a_0}y\right) = p \cdot W \rightarrow py'' + p\frac{a_1}{a_0}y' + p\frac{a_2}{a_0}y = Wp$$

$$p\frac{a_1}{a_0} = p' \longrightarrow \frac{p'}{p} = \frac{a_1}{a_0} \rightarrow \boxed{p = e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx}}$$

تا 15 آبان فرصت داریم

برای ارائه — استدراکها

اگر فرض کنیم از اعمال معادله اویلر لاگرانژ بدست آمده است داریم:

$$\longrightarrow \frac{d}{dx}(py') + q(x)y - w(x) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = q(x)y - w(x) \longrightarrow F = \frac{1}{2}qy^2 - wy + u(x, y')$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y'} = py' \longrightarrow F = -\frac{p}{2}y'^2 + v(x, y)$$

$$\Uparrow$$

$$\left(-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) = \frac{d}{dx}(py')$$

$$F = \frac{q}{2}y^2 - \frac{p}{2}y'^2 - wy$$

← F بدست می آید:

جلسه هشتم 91/7/25

تبدیل معادلات دیفرانسیل به مسائل تغییراتی

$$y'' - y = 0 \qquad \begin{cases} y(0) = \sinh(1) \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(y')$$

$$\frac{d}{dx}(py') + (q + \lambda r)y = 0 \qquad \begin{cases} p = 1 \\ q = -1 \\ r = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

شرط ؟

$$\rightarrow I = \int_{-1}^{0} (y'^2 + y^2)\, dx \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{-1} = 0 \quad , y(0) = \sinh(1)$$

شرط مرزی متحرک نخواهیم داشت.

$$x^2y'' + 2xy' + 3y = 1 \qquad \begin{matrix} y(a) = k_1 \\ y(b) = k_2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}(x^2y') + 3y = 1 \qquad \begin{matrix} p(x) = x^2 \\ q(x) = 3 \\ r(x) = 0 \\ w(x) = 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow I = -\int_a^b \left[\left(\frac{x^2}{2}y'^2\right) - \frac{3}{2}y^2 + y\right] dx \longrightarrow \begin{matrix} y(a) = k_1 \\ y(b) = k_2 \end{matrix}$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$$p = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

$$e^{-2x}y'' - 2e^{-2x}y' + 2e^{-2x}y = 0 \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}y'\right) + 2e^{-2x}y = 0$$

$$F = \frac{1}{2}qy^2 - wy + \left(-\frac{p}{2}y'^2\right) \qquad \begin{cases} p(x) = e^{-2x} \\ r(x) = 0 \\ Q(x) = 2e^{-2x} \end{cases}$$

$$\longrightarrow I = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}e^{-2x}y'^2 - e^{-2x}y^2\right)dx \qquad \begin{matrix} y(0) = 1 \\ y(2) = 0 \end{matrix}$$

$$\underbrace{x^3y'' + 3x^2y'} + y = x \qquad \begin{matrix} y(1) = 1 \\ y'(2) = 0 \end{matrix} \longrightarrow \text{مرز آزاد}$$

$$\frac{d}{dx}(x^3y') + y = x \qquad \begin{matrix} p(x) = x^3 \\ q(x) = 1 \\ r(x) = 0 \\ w(x) = x \end{matrix}$$

$$\longrightarrow I = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{2}y'^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy\right)dx \qquad \begin{matrix} y(1) = 1 \\ \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=2} = 0 \end{matrix}$$

V.IR

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
PDE

فصل ۹ کتاب Myint

* طبقه بندی
* توسعه معادلات
* روش های حل معادلات

مطالعه یک پدیده فیزیکی → (زبان ریاضی) معادله ریاضی

$L(u) = f$ شکل شده

← یک عملگر ریاضی

← کمیت مورد نظر

L: { عملگر دیفرانسیلی ← تمرکز روی این قسمت

یا

عملگر انتگرالی (ادغام تغییرات) نمونه هایی دیدیم

* عملگر دیفرانسیلی - بسته به تعداد پارامترهای موثر (متغیر مستقل)
  - تعداد پارامتر = 1 → عملگر به صورت مشتق معمولی → معادلات دیفرانسیل معمولی
  - تعداد پارامترها > 1 → عملگر به صورت مشتق جزئی → معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

متغیرها (در این درس):
- مستقل: $(x, y, z, t, \Phi, \Psi, \ldots)$
- وابسته: $(U, V, W, \Phi, \Psi, \ldots)$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه ۲:

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU = G$$

• اگر ضرایب A تا F مقادیر ثابت یا توابعی از xy باشند معادله دیفرانسیل را خطی می نامند

همگن ← اگر $G = 0$

ناهمگن ← $G \neq 0$

دیدگاه بررسی:
- ۱- فیزیکی
  - مسائل وابسته به زمان (زمانمند) Marching P (Forwarding P)
  - مسائل مستقل از زمان [مسائل تعادل - مسائل قضاوت (داوری) Equilibrium P, Jurry P
- ۲- ریاضی

← ۳ ریاضی } ۱- هذلولوی Hyperbolic } ← زمانمند
با توجه به شباهت به مقاطع مخروطی
۲- سهموی Parabolic
۳- بیضوی Elliptic ← مستقل از زمان

مقاطع مخروطی * $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

حل { دوران مختصات ← صفر کردن علامت a یا b ← دکارتی ثابت می ماند
مقادیر ویژه

← برای PDE ها هم از این روش استفاده می کنیم فقط این تفاوت که در این جا ممکن است انحنای صفحات تغییر کند.

فرض: دنبال دستگاه مختصاتی مانند ϕ یا ψ هستیم که متغیرهای x و y را انتقال دهد

$$(x,y) \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} (\phi,\psi) \rightarrow J(\text{تبدیل}) = \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \phi_x & \psi_x \\ \phi_y & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$
«شرط»

$$= \phi_x \psi_y - \psi_x \phi_y \neq 0$$

ϕ و ψ را توابع ثابت و مشتق پذیر از x و y فرض می کنیم (و برعکس)

$$\begin{cases} x = x(\phi,\psi) \\ y = y(\phi,\psi) \end{cases} \quad \text{و برعکس} \quad \begin{cases} \phi = \phi(x,y) \\ \psi = \psi(x,y) \end{cases}$$

* در فضای ϕ و ψ معادله به شکل جدید در می آید.

انتقال مشتق ها از x و y به ϕ و ψ

$$\boxed{u_x = u_\phi \phi_x + u_\psi \psi_x}$$
$$\boxed{u_y = u_\phi \phi_y + u_\psi \psi_y}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_\phi \phi_x + u_\psi \psi_x\right)$$

$$= u_\phi \phi_{xx} + u_\psi \psi_{xx} + \phi_x\left(u_{\phi\phi}\phi_x + u_{\phi\psi}\psi_x\right)$$

$$+ \psi_x\left(u_{\psi\phi}\phi_x + u_{\psi\psi}\psi_x\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{u_{xx} = u_{\phi\phi}\phi_x^2 + u_{\psi\psi}\psi_x^2 + 2u_{\phi\psi}\phi_x\psi_x + u_\phi\phi_{xx} + u_\psi\psi_{xx}}$$

$$\longrightarrow \boxed{u_{yy} = u_{\phi\phi}\phi_y^2 + u_{\psi\psi}\psi_y^2 + 2u_{\phi\psi}\phi_y\psi_y + u_\phi\phi_{yy} + u_\psi\psi_{yy}}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(u_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_\phi\phi_x + u_\psi\psi_x\right)$$

$$= u_\phi\phi_{xy} + u_\psi\psi_{xy} + \phi_x\left(u_{\phi\phi}\phi_y + u_{\phi\psi}\psi_y\right)$$

$$+ \psi_x\left(u_{\phi\psi}\phi_y + u_{\psi\psi}\psi_y\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{u_{xy} = u_{\phi\phi}\phi_x\phi_y + u_{\psi\psi}\psi_x\psi_y + u_{\phi\psi}\left(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x\right) + u_\phi\phi_{xy} + u_\psi\psi_{xy}}$$

پس از جاگذاری در معادله اصلی

$$\longrightarrow A^* u_{\phi\phi} + B^* u_{\phi\psi} + C^* u_{\psi\psi} + D^* u_\phi + E^* u_\psi + F^* u = G^*$$

$$A^* = A\phi_x^2 + C\phi_y^2 + \overset{B?}{D}\phi_x\phi_y$$

$$C^* = A\psi_y^2 + C\psi_y^2 + D\psi_x\psi_y$$

$$B^* = 2A\phi_x\psi_x + 2C\phi_y\psi_y + B(\phi_x\psi_y + \psi_x\phi_y)$$

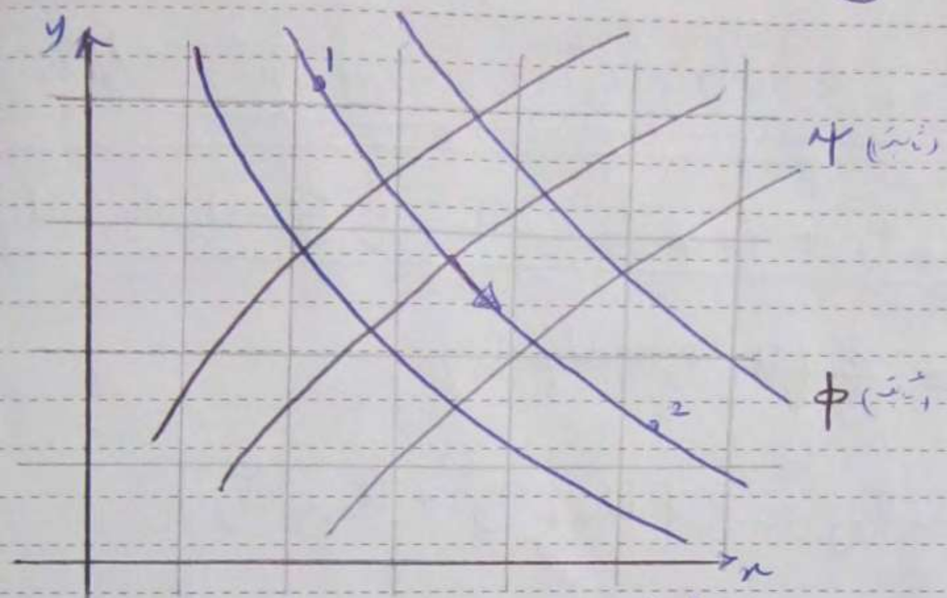
$$D^* = A\phi_{xx} + C\phi_{yy} + B\phi_{xy} + D\phi_x + E\phi_y$$

$$E^* = A\phi_{xx} + C\phi_{yy} + B\phi_{xy} + D\phi_x + E\phi_y$$

$$E = A\psi_{xx} + C\psi_{yy} + B\psi_{xy} + E\psi_y + D\psi_x$$

$$B^{*2} - 4A^*C^* = J^2(\underline{B^2 - 4AC})$$ تحول > 0

← در این تبدیلات مشخصات نوع معادلات عوض نمی‌شود و با تبدیل یک شده سازگار خواهد بود



$dx = 0$
$dy = 0$ روی خطوط ثابت

روی یکی از منحنی‌ها: اگر از نقطه ۱ ← 2 حرکت کنیم $d\phi = 0$

$$\phi(x,y) = C_1 \rightarrow d\phi = 0 \rightarrow \phi_x d_x + \phi_y d_y = 0$$

$$\psi(x,y) = C_2 \rightarrow d\psi = 0 \rightarrow \psi_x d_x + \psi_y d_y = 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_x}{\phi_y} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y}$$

منحنی‌های ϕ و ψ اختیاری را طوری انتخاب می‌کنیم که A^* و C^* برابر صفر گردند

$$A^* = 0 \rightarrow A\left(\frac{\phi_x}{\phi_y}\right)^2 + B\left(\frac{\phi_x}{\phi_y}\right) + C = 0$$

$$C^* = 0 \rightarrow A\left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)^2 + B\left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) + C = 0$$

شبیه هم

معادلات مشخصه

← از حل این معادلات، $\underbrace{\text{منحنی‌های } \phi \text{ و } \psi}$ ثابت به دست می‌آیند

((منحنی‌های مشخصه))

$\frac{dy}{dx}$ حاصل از $\longrightarrow A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B\left(-\frac{dy}{dx}\right) + C = 0$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

حل معادلات مشخصه $\longleftarrow$ $\begin{cases} \phi(x,y) = c_1 \\ \psi(x,y) = c_2 \end{cases}$

$$A^*, C^* = 0 \longrightarrow E^* U_{\phi\psi} + D^* U_\phi + E^* U_\psi + F^* U = G^*$$

$$E^* \neq 0 \longrightarrow \boxed{U_{\phi\psi} = H_1(\phi, \psi, u, u_\phi, u_\psi)}$$ شکل کانونی اول معادلات هذلولوی

تعریف دو متغیر جدید $\begin{cases} \alpha = \phi + \psi \\ \beta = \phi - \psi \end{cases} \longrightarrow \boxed{U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)}$ شکل کانونی دوم معادلات هذلولوی

* معادله موج را در نظر می‌گیریم:

$$c^2 U_{xx} - U_{tt} = 0 \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = c^2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow B^2 - 4AC = 0 - 4(-1)c^2 = 4c^2 > 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0 \pm \sqrt{4c^2}}{-2} = \mp c$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -c \to x = -ct + k_1 \quad k_1 = \phi \\ \frac{dx}{dt} = c \to x = ct + k_2 \quad k_2 = \psi \end{cases}$$

$$U_x = U_\phi \phi_x + U_\psi \psi_x = U_\phi + U_\psi$$

$$\cancel{U_{xx} = U_{\phi\phi} + U_{\psi\psi} + 2U_{\phi\psi}}$$

$$U_t = U_\phi \phi_t + U_\psi \psi_t = c(U_\phi - U_\psi)$$

$$U_{tt} = c^2 U_{\phi\phi} + c^2 U_{\psi\psi} + (-2c^2 U_{\phi\psi})$$

جای گذاری $\longrightarrow$ در رابطه اولیه

$$c^2\left(\cancel{u_{\phi\phi}}+\cancel{u_{\psi\psi}}+2u_{\phi\psi}\right)-\cancel{c\,u_{\phi\phi}}-\cancel{c\,u_{\psi\psi}}+2c^2u_{\phi\psi}=0$$

$$\longrightarrow 4c^2u_{\phi\psi}=0\longrightarrow\boxed{u_{\phi\psi}=0}$$ شکل کانونی اول هذلولی

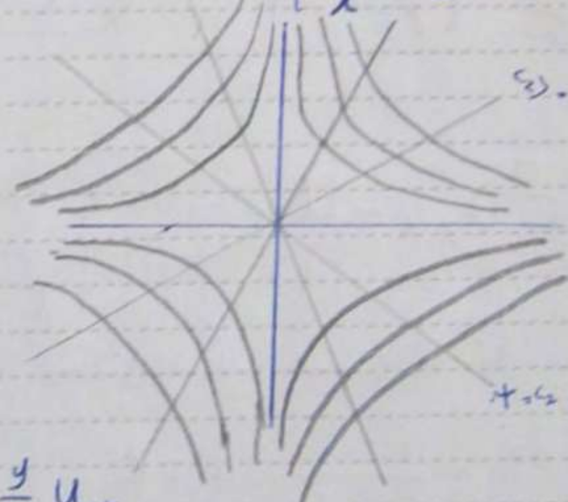
جلسه نهم

$$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-u_x-1-2y^2=0 \qquad x\neq 0\,,\,y\neq 0$$

$$\begin{cases}A=x^2\\ B=0\\ C=-y^2\end{cases}\qquad B^2-4AC=0-4x^2(-y^2)>0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0\pm 2xy}{2x^2}=\pm\frac{y}{x}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\longrightarrow\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}\\[2ex] \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}\longrightarrow\dfrac{dy}{y}=\dfrac{-dx}{x}\end{cases}\qquad\begin{cases}xy=c_1=\phi\\[1ex] \dfrac{y}{x}=c_2=\psi\end{cases}$$



$$u_x=u_\phi\phi_x+u_\psi\psi_x=y\,u_\phi-\frac{y}{x^2}u_\psi$$

$$u_{xx}=u_{\phi\phi}\phi_x^2+u_{\psi\psi}\psi_x^2+u_\phi\phi_{xx}+u_\psi\psi_{xx}+2u_{\phi\psi}\phi_x\psi_x$$

$$=y^2u_{\phi\phi}+\frac{y^2}{x^4}u_{\psi\psi}+(0)\,u_\phi+\frac{2y}{x^3}u_\psi+2(-y)\left(-\frac{y}{x^2}\right)u_{\phi\psi}$$

$$u_{yy}=u_{\phi\phi}\phi_y^2+u_{\psi\psi}\psi_y^2+u_\phi\phi_{yy}+u_\psi\psi_{yy}+2u_{\phi\psi}\phi_y\psi_y$$

$$=x^2u_{\phi\phi}+\frac{1}{x^2}u_{\psi\psi}+(0)\,u_\phi+(0)\,u_\psi+2(x)\left(\frac{1}{x}\right)u_{\phi\psi}$$

جاهای تکراری در معادله وارد شده

$$\cancel{x^2y^2u_{\phi\phi}} + \cancel{\frac{y^2}{x^2}u_{\psi\psi}} + \frac{2y}{x}u_\psi - 2y^2u_{\phi\psi} - \cancel{x^2y^2u_{\phi\phi}} - \cancel{\frac{y^2}{x^2}u_{\psi\psi}}$$

$$-4y^2u_{\phi\psi} - yu_\phi + u_\psi\left(\frac{2y}{x} + \frac{y}{x^2}\right) - 1 - 2y^2 = 0$$

$$-2y^2u_{\phi\psi} - yu_\phi + \frac{y}{x^2}u_\psi - 1 - 2y^2 = 0$$

باید y و x های ظاهر شده را حذف کنیم

$$\begin{cases} xy = \phi \\ \frac{y}{x} = \psi \end{cases} \rightarrow y = \sqrt{\phi\psi}$$

$$\rightarrow x = \frac{y}{\psi} = \frac{\sqrt{\phi\psi}}{\psi} = \sqrt{\frac{\phi}{\psi}}$$

$$\longrightarrow -4\phi\psi u_{\phi\psi} - \sqrt{\frac{\phi}{\psi}}u_\phi + u_\psi\left(2\psi + \psi\sqrt{\frac{\psi}{\phi}}\right) - 1 - 2\phi\psi = 0$$

طرفین طرفین را بر ضریب بالاترین مرتبه مشتق تقسیم کنیم آن گاه فرم کانونی اول معادله بدست می‌آید

$$\longrightarrow \boxed{u_{\phi\psi} = H_1(\phi, \psi, u, u_\phi, u_\psi)}$$

$$4y^2u_{xx} + 9xyu_{xy} + 5x^2u_{yy} = 0 \qquad \begin{cases} A = 4y^2 \\ B = 9xy \\ C = 5x^2 \end{cases}$$

$$B^2 - 4AC = 81x^2y^2 - 4(4y^2)(5x^2) = x^2y^2$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{+9xy \pm xy}{8y^2} \longrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{10xy}{8y^2} = \frac{5x}{4y} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{8xy}{8y^2} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y\,dy = 5x\,dx \rightarrow 2y^2 = \frac{5}{2}x^2 + k_1 \\ y\,dy = x\,dx \rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + k_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - \frac{5}{4}x^2 = C_1 = \phi \\ y^2 - x^2 - C_2 = \psi \end{cases}$$

$\phi_x = -\frac{5}{2}x$ $\quad \phi_y = 2y$

$\psi_x = -2x$ $\quad \psi_y = 2y$

$$* \; U_{xx} = U_{\phi\phi}\phi_x^2 + U_{\psi\psi}\psi_x^2 + U_\phi \phi_{xx} + U_\psi \psi_{xx} + 2U_{\phi\psi}\phi_x\psi_x$$

$$= \frac{25}{4}x^2 U_{\phi\phi} + 4x^2 U_{\psi\psi} - \frac{5}{2}U_\phi - 2U_\psi + 10x^2 U_{\phi\psi}$$

$$* \; U_{yy} = U_{\phi\phi}\phi_y^2 + U_{\psi\psi}\psi_y^2 + U_\phi \phi_{yy} + U_\psi \psi_{yy} + 2U_{\phi\psi}\phi_y\psi_y$$

$$4y^2 U_{\phi\phi} + 4y^2 U_{\psi\psi} + 2U_\phi + 2U_\psi + 8y^2 U_{\phi\psi}$$

$$* \; U_{xy} = U_{\phi\phi}\phi_x\phi_y + U_{\psi\psi}\psi_x\psi_y + U_\phi\phi_{xy} + U_\psi\psi_{xy} + U_{\phi\psi}(\phi_x\psi_y + \psi_x\phi_y)$$

$$= -5xy\,U_{\phi\phi} - 4xy\,U_{\psi\psi} + 0 + 0 + (-5xy - 4xy)U_{\phi\psi}$$

ثابت $\longrightarrow$ $\cancel{25x^2y^2U_{\phi\phi}} + 16x^2y^2U_{\psi\psi} - 10y^2U_\phi - 8y^2U_\psi + \cancel{40x^2y^2U_{\phi\psi}}$

$\cancel{-45x^2y^2U_{\phi\phi}} - 36x^2y^2U_{\psi\psi} - 81x^2y^2U_{\phi\psi}$

$+ \cancel{20x^2y^2U_{\phi\phi}} + 20x^2y^2U_{\phi\psi} + 10x^2U_\phi + 10x^2U_\psi + \cancel{40x^2y^2U_{\phi\psi}} = 0$

$$\Rightarrow -x^2y^2U_{\phi\psi} + 10U_\phi(x^2 - y^2) + U_\psi(10x^2 - 8y^2) = 0$$

ب) ★ $\Delta = B^2 - 4AC = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{B}{2A} \longrightarrow \Phi \text{ یا } \Psi$$

$$\Delta = 0 \longrightarrow B^2 = 4AC \Rightarrow 2\sqrt{AC} = B \quad ، \quad \frac{B}{A} = \frac{2\sqrt{AC}}{A} = 2\sqrt{\frac{C}{A}}$$

$$A^* = A\Phi_x^2 + C\Phi_y^2 + 2B\Phi_x\Phi_y$$

$$B^* = A\Phi_x\Psi_x + C\Phi_y\Psi_y + B(\Phi_x\Psi_y + \Psi_x\Phi_y)$$

می‌توانیم منحنی های Φ و Ψ را طوری انتخاب کنیم که A^* برابر صفر شود.

$$A^* = 0 \longrightarrow A\Phi_x^2 + C\Phi_y^2 + B\Phi_x\Phi_y = 0$$

$$(\sqrt{A}\Phi_x)^2 + (\sqrt{C}\Phi_y)^2 + \sqrt{AC}\,\Phi_x\Phi_y = 0 \rightarrow (\sqrt{A}\Phi_x + \sqrt{C}\Phi_y)^2 = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{A}\Phi_x + \sqrt{C}\Phi_y = 0$$

$\sqrt{A}\Psi_x + \sqrt{C}\Psi_y = 0$ همین ترتیب برای C^* داریم.

برای B^* داریم: (جوابش خود به خود صفر می‌شود)

$$B^* = A\left[\Phi_x\Psi_x + \frac{C}{A}\Phi_y\Psi_y + \frac{B}{A}(\Phi_x\Psi_y + \Psi_x\Phi_y)\right]$$

$$= (\sqrt{A})^2\left[\Phi_x\Psi_x + \left(\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^2\Phi_y\Psi_y + 2\sqrt{\frac{C}{A}}(\Phi_x\Psi_y + \Psi_x\Phi_y)\right] = 0$$

$$= (\sqrt{A})^2\Phi_x\Psi_x + (\sqrt{C})^2\Phi_y\Psi_y + 2\sqrt{AC}(\Phi_x\Psi_y + \Psi_x\Phi_y) = 0$$

$$(\sqrt{A}\Phi_x + \sqrt{C}\Phi_y)(\sqrt{A}\Psi_x + \sqrt{C}\Psi_y) = (0)(\sqrt{A}\Psi_x + \sqrt{C}\Psi_y) = 0$$

شکل کانونی معادلات سهموی

$$C \longrightarrow \quad \boxed{u_{\psi\psi} = H_2(\phi, \psi, u, u_\phi, u_\psi)}$$

برای معادلات هذلولوی دو شکل داشتیم اما برای معادلات سهموی و بیضوی فقط یک فرم داریم

★ مثال:

$$x^2y^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + u_y = 0 \qquad \begin{cases} A = x^2y^2 \\ B = 2xy \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2x^2y^2} = \frac{1}{xy} \rightarrow y\,dy = \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln x + c_1$$

$$\rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln x + \ln k_1 = \ln k_1 x \longrightarrow k_1 x = e^{\frac{y^2}{2}} \rightarrow \boxed{k_1 = \frac{1}{x} e^{\frac{y^2}{2}} = \phi}$$

منحنی ψ اختیاری خواهد بود با این شرط که ژاکوبین تبدیل مخالف صفر باشد.

فرض $\boxed{\psi = x}$

$$J = \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x^2} e^{\frac{y^2}{2}} & \frac{y}{x} e^{\frac{y^2}{2}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \checkmark$$

$$\star\ u_{xx} = u_{\phi\phi}\phi_x^2 + u_{\psi\psi}\psi_x^2 + u_\phi \phi_{xx} + u_\psi \psi_{xx} + 2u_{\phi\psi}\phi_x\psi_x$$

$$= \frac{1}{x^2} e^{y^2} u_{\phi\phi} + u_{\psi\psi} + \frac{2}{x^3} e^{y^2/2} u_\phi + 0 + \left(-\frac{2}{x^2} e^{\frac{y^2}{2}}\right) u_{\phi\psi}$$

$$\star\ u_{yy} = u_{\phi\phi}\phi_y^2 + u_{\psi\psi}\psi_y^2 + u_\phi \phi_{yy} + u_\psi \psi_{yy} + 2u_{\phi\psi}\phi_y\psi_y$$

$$\frac{y^2}{x^2} e^{y^2} u_{\phi\phi} + 0 + \left(\frac{1}{x} e^{y^2/2} + \frac{y^2}{x} e^{y^2/2}\right) u_\phi + 0 + 0$$

$$u_{xy} = u_{\phi\phi}\phi_x\phi_y + u_{\psi\psi}\psi_x\psi_y + u_{\phi\psi}(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + u_\phi \phi_{xy} + u_\psi \psi_{xy}$$

$$= -\frac{1}{x^3} e^{y^2} u_{\phi\phi} + 0 + \frac{-y}{x^2} e^{y^2/2} u_\phi + 0 + \frac{y}{x} e^{y^2/2} u_{\phi\psi}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{y^2}{x^2} e^{y^2} U_{\varphi\varphi}} + x^2y^2 U_{\psi\psi} + \cancel{\frac{2y^2}{x} e^{y^2/2} U_{\varphi}} \cancel{-2y^2 e^{y^2/2} U_{\varphi\psi}}$$

$$\cancel{+\frac{-2y^2}{x^2} e^{y^2} U_{\varphi\varphi}} + \cancel{\frac{-2y^2}{x} e^{y^2/2} U_{\varphi}} \cancel{+ 2y^2 e^{y^2/2} U_{\varphi\psi}}$$

$$\cancel{+ \frac{y^2}{x^2} e^{y^2} U_{\varphi\varphi}} + \left(\frac{1}{x} e^{y^2/2} + \frac{y^2}{x} e^{\frac{y^2}{2}}\right) U_{\varphi} = 0$$

$$x^2y^2 U_{\psi\psi} + \left(\frac{1}{x} e^{\frac{y^2}{2}} + \frac{y^2}{x} e^{y^2/2}\right) U_{\varphi} = 0$$

(3) $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ برای معادلات مشخصه جواب حقیقی نخواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{B \pm \sqrt{-(4AC - B^2)}}{2A} = \frac{B \pm \sqrt{i^2(4AC-B^2)}}{2A} = \frac{B \pm i\sqrt{4AC-B^2}}{2A}$$

$$\begin{cases} \varphi = \alpha + i\beta \\ \psi = \alpha - i\beta \end{cases}$$

α و β توابع حقیقی از متغیرهای حقیقی x و y هستند

ممکن است ؟ $U_{\varphi\psi} = H(\quad)$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \\ \beta = \frac{1}{2i}(\varphi - \psi) \end{cases} \rightarrow \boxed{U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = H_5(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)}$$

$$U_{xx} + yU_{yy} + 4yU_x + \frac{1}{2}U_y = 0 \ , \quad (\text{همواره } y>0)$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0 - 4y \xrightarrow{y>0} \Delta < 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{-4y}}{2} = \frac{\pm 2i\sqrt{y}}{2} = \pm i\sqrt{y}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm i\,dx \rightarrow 2\sqrt{y} = ix + c_1$$
$$2\sqrt{y} = -ix + c_2$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{y} - ix = c_1 = \varphi \\ 2\sqrt{y} + ix = c_2 = \psi \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \alpha = 2\sqrt{y} \\ \beta = x \end{matrix}}$$

$$u_{xx} = \cancel{u_{\alpha\alpha}\alpha_x^2} + u_{\beta\beta}\beta_x^2 + \cancel{u_\alpha \alpha_{xx}} + \cancel{u_\beta \beta_{xx}} + \cancel{2u_{\alpha\beta}\alpha_x\beta_x}$$
$$= u_{\beta\beta}$$

$$u_{yy} = u_{\alpha\alpha}\alpha_y^2 + \cancel{u_{\beta\beta}\beta_y^2} + u_\alpha \alpha_{yy} + \cancel{u_\beta \beta_{yy}} + \cancel{2u_{\alpha\beta}\alpha_y\beta_y}$$
$$= \frac{1}{y}u_{\alpha\alpha} - \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}u_\alpha$$

$$u_x = \cancel{u_\alpha \alpha_x} + u_\beta \beta_x = u_\beta$$

$$u_y = u_\alpha \alpha_y + \cancel{u_\beta \beta_y} = \frac{1}{\sqrt{y}}u_\alpha$$

جایگذاری: $u_{\beta\beta} + u_{\alpha\alpha} - \cancel{\frac{1}{2\sqrt{y}}u_\alpha} + 4y\,u_\beta + \cancel{\frac{1}{2\sqrt{y}}u_\alpha} = 0$

$$\Rightarrow u_{\beta\beta} + u_{\alpha\alpha} = -4y\,u_\beta$$

$$u_{\beta\beta} + u_{\alpha\alpha} = \frac{-4\alpha^2}{4}u_\beta \rightarrow \boxed{u_{\beta\beta} + u_{\alpha\alpha} = -\alpha^2 u_\beta}$$

شبیه معادله لاپلاس

جلسه دهم 91/8/12

توسعه معادلات { پتانسیل / گرما / موج

ابتدا معادله حاکم بر مسائل را با توجه به قوانین فیزیک بدست می‌آوریم.

$L(u)=f$

عملگر انتگرالی — عملگر دیفرانسیلی

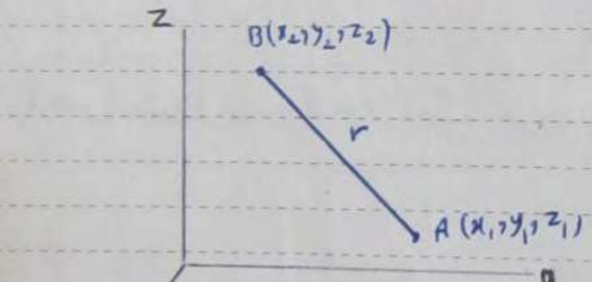
عملگر دیفرانسیلی:

تعداد متغیرهای مستقل $=1 \leftarrow \frac{d}{dx}$ (مشتق معمولی)

" " " $1< \;\leftarrow \frac{\partial}{\partial x_i}$ (مشتق جزئی)

$x, y, z, t, r, \theta, \phi$ — I.V (متغیرهای مستقل)

u, v, w, Φ, Ψ — D.V (متغیرهای وابسته)



معادله پتانسیل:

اگر در نقاط A و B دو ذره مادی داشته باشیم طبق قانون جاذبه نیوتن نیروی وارده بر هر ذره از طرف ذره دیگر برابر است با:

$$r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

$$\vec{F}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{e}_r$$ (به شکل برداری)

اگر زمین یکی از جرم‌ها باشد

$$\begin{cases} m_1=M \\ m_2=1 \end{cases} \rightarrow \vec{F}=G\frac{M}{r^2}=\vec{g}$$

$$\longrightarrow F = \frac{GMm_2}{r^2} = \frac{k}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k}{r}\right)$$

$\frac{k}{r} = u \rightarrow$ تابع پتانسیل

اگر از u در جهات مختلف مشتق گرفته شود باید مولفه های نیرو را در آن جهت بدست آورد.

$$F_r = -\frac{\partial u}{\partial r}$$

فرض کنید نقطه A ثابت و نقطه B را به موازات محور x ها حرکت دهیم:

$F\updownarrow \leftarrow r\updownarrow$ ، اگر بخواهیم این تغییرات را برای تابع u حساب کنیم داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial r}}_{-F_r}\cdot\underbrace{\frac{(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}}_{\cos\alpha} = -F_r\cos\alpha$$

α زاویه ای که $\vec{r}$ با جهت مثبت محور x می سازد (تصویر $\vec{r}$ روی محور x)

$$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -F_x$$

با همین استدلال اگر B به موازات محورهای y و z نیز حرکت کند داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -F_y \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -F_z \end{cases}$$

حال فرض کنید نقطه A ثابت و r ثابت و B در هر جهت دلخواه حرکت کند ← تغییر نیرو صفر خواهد بود

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 \qquad \longrightarrow \underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{دیورژانس}}\cdot\vec{F} = 0$$

$$\longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u = \nabla^2 u = 0$$

لاپلاسین

معادله پتانسیل $\boxed{\nabla^2 u = 0}$

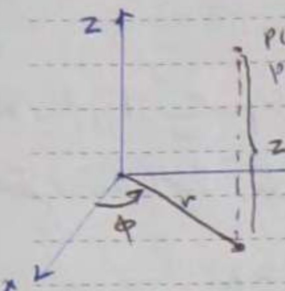
دل دو

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

در مختصات های استوانه ای و کروی داریم:

استوانه ای

$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{\partial u^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0}$$



$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

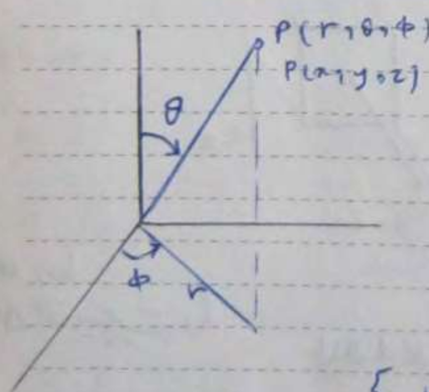
$-\infty < x,y,z < +\infty$

حدود تغییرات x,y,z

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ x > 0 \\ a < x < b \end{cases} \qquad \begin{cases} r > 0 \\ a < r < b \\ 0 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

کروی

$$\boxed{\frac{\partial u^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0}$$



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \phi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

ϕ زاویه محیطی

θ زاویه سمت

$$\begin{cases} r > 0 \\ a < r < b \quad \text{کره توخالی} \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

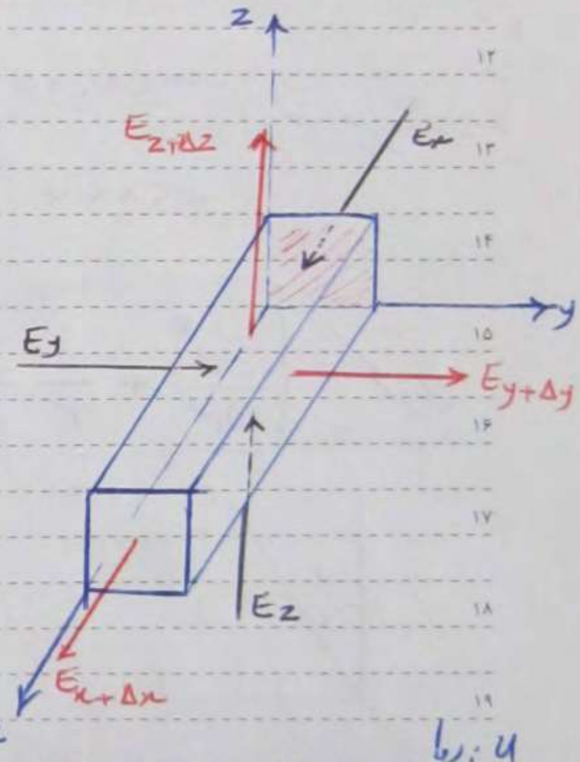
در دستگاه xy داریم : $U_{xx}+U_{yy}=0$

$$B^2-4AC<0 \longrightarrow \text{معادلات بیضوی}$$

$$U_{xx}+U_{yy}=f(x,y) \longrightarrow \text{معادلهٔ پواسون}$$

* المان حجمی از یک جسم جامد به ابعاد Δx ، Δy و Δz که در یک نقطه از فضا ثابت است را در نظر می‌گیریم. فرض کنید دمای اولیهٔ این جسم صفر باشد. (دما به عنوان انرژی ذخیره شده گرمایی در نظر گرفته می‌شود.)

فرض کنید از سه جهت x و y و z انرژی به این سیستم وارد شود (ذخیره شدن انرژی در سیستم) و مقداری از انرژی هم بیرون می‌آید. اگر قانون بقای انرژی را برای این سیستم بنویسیم داریم:



$$\sum E_{in}-\sum E_{out}+E_g=\Delta E$$

$\Delta E = m\cdot c\cdot \Delta u$

u : دما

Δu : تغییرات دما

قانون فوریه $Q=-kA\Delta u$

$E_g = g\ \Delta V\ \Delta t$

g : آهنگ تولید انرژی $\frac{W}{m^3}$ ، ΔV : حجم ، Δt : زمان

$E_x = Q_x\,\Delta t = -k\,\Delta y\,\Delta z\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta t$

$E_{x+\Delta x}=E_x+\Delta E_x$ (امکانیت پیوسته)

$E_{in}=E_x+E_y+E_z$

$E_{x+\Delta x}=E_x+\frac{\partial}{\partial x}(E_x)\,\Delta x$ (بسط تیلور ←)

برای $E_{y+\Delta y}$ و $E_{z+\Delta z}$ هم به همین صورت عمل می‌کنیم. با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(E_x)\Delta x-\frac{\partial}{\partial y}(E_y)\Delta y-\frac{\partial}{\partial z}(E_z)\Delta z+g\,\Delta V\,\Delta t=\rho c\,\Delta V.\Delta u$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[-k\,\Delta y\,\Delta z\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta t\right]\Delta x-\frac{\partial}{\partial y}\left(-k\,\Delta x\,\Delta z\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta t\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(-k\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial u}{\partial z}\,\Delta t\right)+g\,\Delta V\,\Delta t=\rho c\,\Delta V.\Delta u$$

با فاکتورگیری از $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ و Δt داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\Delta V.\Delta t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta V.\Delta t+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Delta V.\Delta t+g\,\Delta V\,\Delta t=\rho c\,\Delta V.\Delta u$$

$$\to\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+g=\frac{\rho c\,\Delta u}{\Delta t}=\rho c\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{\nabla}\cdot(k\nabla\vec{u})+g=\rho c\frac{\partial u}{\partial t}}$$ معادله گرما

k: رسانایی گرمایی می‌تواند تابع مکان، زمان و یا دما باشد

اگر جسم همگن و دارای خواص ترموفیزیکی ثابت باشد داریم:

معادله فوریه-بیو $\quad \nabla^2 u+\frac{g}{k}=\frac{\rho c}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$

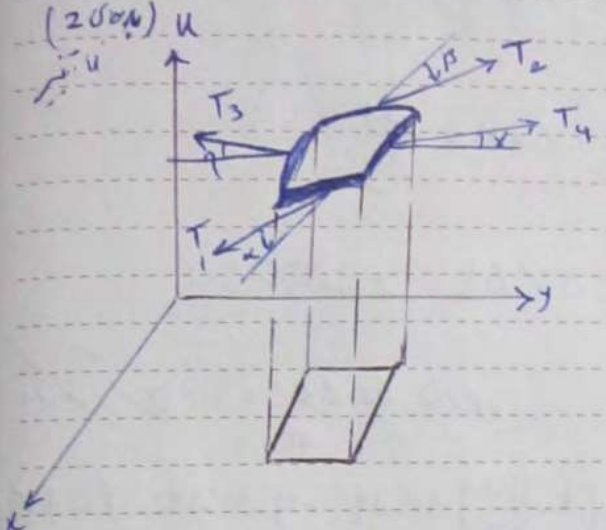
$g=0\to$ معادله فوریه : $\quad \frac{k}{\rho c}=\alpha : C^2 = a^2$

u مستقل از زمان و $g\neq 0$ $\longrightarrow$ معادله پواسون

از چاشنی قند مگو هیچ و ز شکر — زانرو که مرا از لب شیرین تو کام است — تا گنج غمت در دل ویرانه مقیم است — همواره مرا کوی خرابات مقام است

u مستقل از زمان $g=0$ $\longrightarrow$ معادله لاپلاس

$$\boxed{c^2 \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}}$$



معادلهٔ موج:

u: تغییر مکان

غشایی به ابعاد Δx و Δy که تصویر آن در صفحه xy یک ربع مستطیل می‌شود. در دو جهت x و y به آن نیروی کشش t وارد می‌شود. بنابراین در ابتدا کاملاً به صورت صاف و تخت قرار دارد

اگر F برآیند نیروهای خارجی وارد شده به ازای واحد سطح وارد شود (نیروی وزن هم لحاظ شده است)

$$F = F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \Delta x \Delta y$$

ρ: چگالی سطحی (kg/m^2)

T: نیروی کشش سطحی به ازای واحد طول (N/m) و همواره مماس بر محور طولی

α و β و δ و γ زوایایی که نیروها با جهت افق می‌سازند

★ از قانون دوم نیوتون در حرکت برای به دست آوردن معادلهٔ حاکم بر سیستم استفاده می‌کنیم

حرکت نقطه در راستای عمود بر صفحهٔ غشاء تغییر مکان خواهد داد.

$$\vec{f} = m\vec{a} \qquad \begin{cases} f_H = m a_H \longrightarrow a_H = 0 \Rightarrow \sum f_H = 0 \\ f_V = m a_V \end{cases}$$

H: افق
V: قائم

$$\sum f_H = 0 \rightarrow \begin{cases} \sum f_x = 0 \\ \sum f_y = 0 \end{cases}$$

$$\sum f_x = 0 \rightarrow T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T_x$$

$$\sum f_y = 0 \rightarrow T_3 \cos\eta = T_4 \cos\gamma = T_y$$

→ تا عنکبوت در جهت x حرکت نکند

$T_x = T_y$ → تا در جهت x و y حرکت نکند

$$\rightarrow T_x = T_y = T$$

$$\star \sum f_v = m a_v \longrightarrow \Delta y\left(T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\beta\right) + \left(T_4 \sin\gamma - T_3 \sin\eta\right)\Delta x$$

$$+ F\,\Delta x \Delta y = \rho\, \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

طرفین رابطه را بر T تقسیم می‌کنیم.

$$\Delta y(\quad \alpha - \quad \beta) + \Delta x(\quad \gamma - \quad \eta) + \frac{F}{T}\Delta x \Delta y = \frac{\rho}{T}\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Delta y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}\right) + \Delta y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y+\Delta y} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y}\right)\Delta x + \frac{F}{T}\Delta x \Delta y = \frac{\rho}{T}\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\div \frac{1}{\Delta x \Delta y} \rightarrow \underbrace{\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}\right)} + \frac{1}{\Delta y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y+\Delta y} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y}\right) + \frac{F}{T} = \frac{\rho}{T} u_{tt}$$

از طرفین رابطه وقتی $\begin{cases} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{cases}$ ⟸

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{F}{T} = \frac{\rho}{T} u_{tt}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{F}{T} = \frac{\rho}{T} u_{tt}}$$

معادلهٔ موج در حالت دو بعدی

$$\to c^2\nabla^2 u + \frac{F}{T} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

طبقه بندی

$$\begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=1 \end{cases} \longrightarrow B^2-4AC<0$$

شتره $\begin{cases} t \\ x \\ y \end{cases}$ ← نقش اپ کاراکتر

$$\to \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{C}+\frac{F}{T}-\underbrace{\frac{\rho}{T}}_{A}u_{tt}=0$$

→ معادلات هذلولوی

جلسه یازدهم 91/8/7

ch3 (13-14-21)
ch4 All Problems } تا آخر آبان
ch5 ch6 قبلاً خوانده‌ایم
ch7: Separation of Varsutions
ch8: Special function + Green's Function

* گفتیم نوع معادله با تغییر دستگاه مختصات تغییر نمی‌کند:

$$A^* u_{\phi\phi} + B^* u_{\phi\psi} + C^* u_{\psi\psi} + D^* u_\phi + E^* u_\psi + F^* u = G^*$$

فرض کنیم معادله تبدیل یافته در دستگاه جدید را باز به دستگاه xoy برگردانده‌ایم و ضریب B و ( ) را صفر کرده‌ایم:

$$Au_{xx} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

در ابتدا حالت همگن را بررسی می‌کنیم: $(G=0)$

$A=C$: بیضوی (elliptic)

$A=-C$ هذلولی (hyperbolic)

$A=0$ یا $C=0$ سهموی (Parabolic)

* اگر معادله همگن و خطی باشد روش جداسازی متغیرها برای حل مسئله به کار می‌رود (برنولی پیشنهاد کرده و اثبات ریاضی ندارد)

فرض $U(x,y) = \Phi(x)\Psi(y)$

مشتقات را محاسبه می‌کنیم

$$\Rightarrow A\Phi''\Psi + C\Phi\Psi'' + D\Phi'\Psi + E\Phi\Psi' + F\Phi\Psi = 0$$

اگر ضرایب A تا F مقادیر ثابتی باشند با تقسیم بر $\Phi\Psi$ می‌توانیم معادله را به راحتی حل کنیم

اما در حالت کلی ضرایب توابعی از x و y هستند. پس داریم:

$\mu \neq 0$ و مشتق‌پذیر تا حداقل از مرتبه دو — فرض $\mu(x,y)$

$$\frac{\text{معادله بالا}}{\mu} \rightarrow \cancel{\left[A_1(x)+B_1(y)\right]\Phi\Psi}$$

$$\left[A_1(x)\Phi'' + A_2(x)\Phi' + A_3(x)\Phi\right]\Psi$$

$$+\left[B_1(y)\Psi'' + B_2(y)\Psi' + B_3(y)\Psi\right]\Phi = 0$$

اگر طرفین این معادله را بر حاصل‌ضرب $\Phi\Psi$ تقسیم کنیم:

$$\rightarrow \underbrace{\left[A_1(x)\Phi'' + A_2(x)\Phi' + A_3(x)\Phi\right]\frac{1}{\Phi}}_{\text{وابسته به } x} + \overbrace{\left[B_1(y)\Psi'' + B_2(y)\Psi' + B_3(y)\Psi\right]\frac{1}{\Psi}}^{\text{وابسته به } y} = 0$$

ضرایب A_1 تا A_3 فقط وابسته به x و Φ هم وابسته به x

" B_1 تا B_3 " " " " و Ψ " " " y

$$\rightarrow \left[A_1(x)\Phi'' + A_2(x)\Phi' + A_3(x)\Phi\right]\frac{1}{\Phi} = -\left[B_1(y)\Psi'' + B_2(y)\Psi' + B_3(y)\Psi\right]\frac{1}{\Psi} = \lambda$$

$$\begin{cases} A_1\Phi'' + A_2\Phi' + A_3\Phi - \lambda\Phi = 0 \\ B_1\Psi'' + B_2\Psi' + B_3\Psi + \lambda\Psi = 0 \end{cases}$$

هر دو معادله شکل ظاهری شبیه به هم دارند. اگر یکی را بررسی کنیم دیگری هم بررسی شده است.

$\frac{d}{dx}(py')+(q+\lambda r)y=0$. می‌خواهیم این معادلات را شبیه به معادلات اویلر-لاگرانژ بنویسیم.

$$\to \frac{1}{A_1(x)}\, e^{\int \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx}$$

معادله اول را در عبارت بالا ضرب می‌کنیم

$$\to \underbrace{\phi'' e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx} + \frac{A_2}{A_1}\phi' e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx}} + \Big(\underbrace{\frac{A_3}{A_1} e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx}}_{q} - \underbrace{\frac{\lambda}{A_1} e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx}}_{r}\Big)\phi = 0$$

$$\to \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx}}_{p\ (\text{تابع})}\phi'\Big) + \Big(\frac{A_3}{A_1} e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx} - \lambda\Big(\frac{1}{A_1} e^{\int \frac{A_2}{A_1}dx}\Big)\Big)\phi = 0$$

λ کمیتی مستقل از متغیرهای x و y است:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[p(x)y'\right] + \left[q(x)+\lambda r(x)\right]y = 0 \qquad I,\ a<x<b$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

ثابت‌های a_1 و a_2 و b_1 و b_2 به طور همزمان صفر نمی‌شوند

توابع p و q و r فعلاً کمیت‌های حقیقی هستند

مسئله اشتورم لیوویل منظم $\Rightarrow$ $p>0$ و
- در بازه I تابع r پیوسته و مشتق‌پذیر و $r>0$
- q " " + یک بار مشتق‌پذیر
- p " " + مشتق‌پذیر حداقل تا مرتبه دو

به دنبال λ ای هستیم که معادله بالا (به اضافه شرایط گفته شده) جواب غیر بدیهی داشته باشد

$\leftarrow$
- λ : مقدار ویژه — Eigenvalue
- y : تابع ویژه — Eigenfunction

$p(a)=p(b)$

$y(a)=y(b)$

و مشتقات برابر $y'(a)=y'(b)$ } اگر این حالت برقرار باشد ← گوییم مسئله اشتورم لیوویل تناوبی است

(1)

★ خواص مقدار ویژه

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\dots<\lambda_n<\dots$

$\lim_{n\to\infty}\lambda_n =$ تعریف نمی‌شود

(این λ ها در ارتعاشات همان فرکانس ها هستند)

این مقدار ویژه کمترین مقداری است که λ می تواند داشته باشد (در مسائل تیر اینرسی λ، I را $\min$ ...)

λ_1: فرکانس (هارمونیک) اول

(2) if $\underbrace{\lambda_i,\lambda_j}_{\text{مقادیر مجزا}} \xrightarrow{(\neq)} \phi_i,\phi_j \qquad \int_a^b \underbrace{r}_{\text{تابع وزنی}}\phi_i\phi_j\,dx = 0 \quad i\neq j$

«تعامد نسبت به تابع وزنی r»

این ϕ و ψ از قسمت جداسازی شده است

$$i=j \to \int_a^b r\phi_i^2(x)\,dx = N \quad (N: \text{Norm})$$

در حالت کلی $\Longrightarrow \int_a^b r\phi_i\phi_j\,dx = N\delta_{ij}$

$$\to \frac{1}{N}\int_a^b r\phi_i\phi_j\,dx = \delta_{ij}$$

یا $\int_a^b r\left(\frac{\phi_i}{\sqrt{N}}\right)\left(\frac{\phi_j}{\sqrt{N}}\right)dx = \delta_{ij}$

(متعامد) Orthogonal : ϕ

(متعامد یکه) Orthonormal : ψ } ←

تفاوت در این توابع ψ $(N=1)$ $\int_a^b r\psi_i\psi_j\,dx = \delta_{ij}$

③ هر تابع دلخواه را که در شرایط خاص صدق می‌کند را می‌توانیم برحسب این توابع ویژه بسط دهیم.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) \quad ,$$

$$c_k = \frac{\int_a^b r \phi_k \phi_m \, dx}{\int_a^b r \phi_k^2 \, dx}$$

← در ارتباط با λ است

← (نُرم) ۱

④ $\lambda \Rightarrow$ Real

λ ها همگی حقیقی هستند

⑤ اگر ϕ_i و ϕ_j در بازه (c,d) صفر مشترک داشته باشند

به این معنی است که ϕ_i و ϕ_j وابسته خطی هستند ← $(\phi_i = k\phi_j)$

⑥ اگر در بازه I، ϕ_i دو تا صفر داشته باشد، بین دو صفر ϕ_i حتماً یک صفر برای ϕ_j وجود دارد و برعکس.

((حالات 2 و 3 و 4 بررسی می‌شوند))

تعریف عملگر اشتورم لیوویل

$$L = \frac{d}{dx}\left(p \frac{d}{dx}\right) + q$$

$$\longrightarrow L[y] + \lambda r(x) y = 0$$

★ برای اثبات خاصیت ② از رابطه بالا استفاده می‌کنیم

$$L[\phi_i] + \lambda_i r \phi_i = 0 \quad \times \phi_j \quad \mathrm{I}$$

$$L[\phi_j] + \lambda_j r \phi_j = 0 \quad \times \phi_i \quad \mathrm{II}$$

$$\longrightarrow \mathrm{I} - \mathrm{II} = ?$$

$\rightarrow \phi_j L[\phi_i] - \phi_i L[\phi_j] + (\lambda_i - \lambda_j) r \phi_i \phi_j = 0$

$$\begin{cases} L[\phi_i] = \frac{d}{dx}[p\phi_i'] + q\phi_i \\ \phi_j L[\phi_i] = \phi_j \frac{d}{dx}[p\phi_i'] + q\phi_i\phi_j \end{cases}$$

به همین ترتیب $\phi_i L[\phi_j] = \phi_i \frac{d}{dx}[p\phi_j'] + q\phi_i\phi_j$

$\xrightarrow[\text{از معادله *}]{\text{جایگذاری}} = \phi_j \frac{d}{dx}[p\phi_i'] - \phi_i \frac{d}{dx}[p\phi_j']$

$$\phi_j \frac{d}{dx}[p\phi_i'] = \frac{d}{dx}[p\phi_i'\phi_j] - p\phi_i'\phi_j'$$

$$\phi_i \frac{d}{dx}[p\phi_j'] = \frac{d}{dx}[p\phi_j'\phi_i] - p\phi_j'\phi_i'$$

$$= \frac{d}{dx}[p\phi_i'\phi_j - p\phi_j'\phi_i] + (\lambda_i - \lambda_j) r\phi_i\phi_j = 0$$

$$\frac{d}{dx}[p(\phi_i'\phi_j - \phi_j'\phi_i)] + (\lambda_i - \lambda_j) r\phi_i\phi_j = 0$$

$$\frac{d}{dx}[p(\phi_i'\phi_j - \phi_j'\phi_i)] = (\lambda_j - \lambda_i) r\phi_i\phi_j$$

با استفاده از شرایط مرزی !

از a تا b نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$\rightarrow p[\phi_i'\phi_j - \phi_j'\phi_i]\Big|_a^b = \overbrace{\int_a^b r\phi_i\phi_j\,dx}^{(\lambda_j - \lambda_i)} - \int_a^b r\phi_i\phi_j\,dx = 0$$

شرط مرزی نوع اول (I) $\phi(a) = 0 \quad \phi(b) = 0 \quad \rightarrow \phi_i(a) = \phi_j(a) = 0$, $\phi_i(b) = \phi_j(b) = 0$

$\rightarrow 0 = 0$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 0 \\ a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

شرط مرزی نوع دوم

$$\phi'(a)=0 \qquad \begin{cases} a_1=0 \\ b_2=1 \end{cases} \qquad b_1=0$$

$$\phi'(b)=0 \qquad\qquad\qquad\qquad a_2=0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{0=0}}$$

$$\rightarrow a_1\phi_i(a)+a_2\phi_i'(a)=0 \quad 1$$

$$b_1\phi_i(b)+b_2\phi_i'(b)=0 \quad 2$$

$$a_1\phi_j(a)+a_2\phi_j'(a)=0 \quad 3$$

$$b_1\phi_j(b)+b_2\phi_j'(b)=0 \quad 4$$

$$\begin{array}{l} 1\times\phi_j(a) \\ 2\times\phi_i(a) \end{array}\begin{cases} a_1\phi_i(a)\phi_j(a)+a_2\phi_i'(a)\phi_j(a)=0 \\ b_1\phi_i(b)\phi_i(a)+b_2\phi_i'(b)\phi_i(a)=0 \end{cases} \rightarrow \phi_i'\phi_j-\phi_j'\phi_i\Big|_a=0$$

$$\begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array}\Big\} \qquad \rightarrow \phi_i'\phi_j-\phi_j'\phi_i\Big|^b=0$$

$$\rightarrow \int r\phi_i\phi_j\,dx=0$$

α بررسی خاصیت لزوم :

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k(x)$$

$$\rightarrow r f(x)\phi_m(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k r\phi_k\phi_m$$

$$\int_a^b r f(x)\phi_m(x)\,dx=\int_a^b\sum_{k=1}^{\infty} c_k r\phi_m\phi_k\,dx$$

$$\rightarrow \int_a^b r f(x)\,\phi_m(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b r\,\phi_k\,\phi_m\,dx$$

$m=k \rightarrow$ غیرصفر
$m\neq k \rightarrow$ صفر

$$= \begin{cases} 0 & k\neq m \\ N & k=m \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_a^b r f(x)\,\phi_m\,dx = c_m N \qquad (c_m = c_k)$$

$$\rightarrow c_k = \frac{1}{N}\int_a^b r f\,\phi_k\,dx$$

④ بررسی خاصیت چهارم:
اگر جواب مختلطی داشته باشیم مزدوج آن هم جواب خواهد بود

$$\lambda = \alpha + i\beta$$
$$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

$\longrightarrow$ توابع ویژه مختلط $\begin{cases} \phi = u + iv \\ \bar{\phi} = u - iv \end{cases}$

$$\rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})\int_a^b r\,\phi\,\bar{\phi}\,dx = 0$$

$$\rightarrow 2i\beta \int_a^b r(u^2+v^2)\,dx = 0$$

$r>0$, u و v توابع حقیقی

$\rightarrow \boxed{\beta = 0} \rightarrow$ λ یک کمیت حقیقی است

بررسی معادله موج یک بعدی

$$c^2 u_{xx} = u_{tt} \qquad 0<x<L,\quad t>0$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 & 0\leq x\leq L \\ u(L,t)=0 & 0\leq x\leq L \end{cases} \qquad u(x,0)=f(x) \quad t\geq 0 \qquad u_t(x,0)=g(x) \quad t\geq 0$$

$$u(x,t)=\phi(x)\psi(t) \longrightarrow c^2\phi''\psi = \phi\psi''$$

$$\rightarrow \frac{\phi''}{\phi}=\frac{\psi''}{c^2\psi}=\lambda \longrightarrow \begin{cases} \phi''-\lambda\phi=0 \\ \phi(0)=0 \\ \phi(L)=0 \end{cases}$$

مقایسه با مسئله اشتورم لیوویل

$$\begin{cases} p=1 \\ q=0 \\ r=1 \\ \lambda=? \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1=1 \\ a_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1=1 \\ b_2=0 \end{cases}$$

• اگر $\lambda>0$ در نظر گرفته شود:

$$\rightarrow \phi(x)=A_1 e^{\sqrt{\lambda}x}+A_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$\phi(0)=0 \longrightarrow A_1+A_2=0$$

$$\phi(L)=0 \longrightarrow A_1 e^{\sqrt{\lambda}L}+A_2 e^{-\sqrt{\lambda}L}=0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}L} & e^{-\sqrt{\lambda}L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

شرط جواب $|\;|$ ~~صفر~~ جواب باشد $\leftarrow$ $A_1=A_2=0$ $\leftarrow$ مقدار ویژه ای نمی دهد

بودن ها $|\;|\neq 0$

• اگر $\lambda=0$ در نظر گرفته شود

$$\lambda=0 \longrightarrow \Phi(x) = A_1 + A_2 x$$

$$\Phi(0)=0 \rightarrow A_1=0$$

$$\Phi(L)=0 \longrightarrow A_2=0$$

$\longrightarrow$ $\lambda=0$ در شرایط مسئله صدق نمی‌کند

• اگر $\lambda>0$ در نظر گرفته شود:

$$\longrightarrow \Phi(x) = A_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x + A_2 \cos\sqrt{\lambda}\, x$$

$\lambda>0$

$$\Phi(0)=0 \longrightarrow A_2=0$$

$$\Phi(L)=0 \longrightarrow A_1 \sin\sqrt{\lambda}\, L=0$$

$A_1=0 \longrightarrow X$ جواب بدیهی

یا

$\sin\sqrt{\lambda}\, L=0$ ✓

مقادیر خاصی از λ وجود دارد که $\sin\sqrt{\lambda}\, L=0$

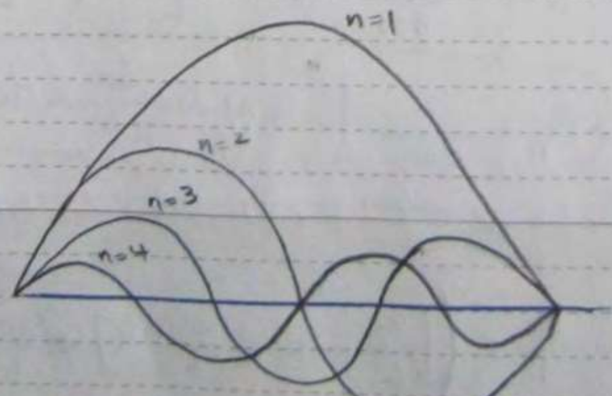
$$\longrightarrow \sin\sqrt{\lambda}\, L = \sin n\pi \longrightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \qquad (n=1,\ldots,\infty)$$

$$\longrightarrow \boxed{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \longrightarrow$$ تابع ویژه $\boxed{\Phi(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x}$

- λ_0 تعریف نمی‌شود
- $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots<\lambda_n<\cdots$

* خواص تابع ویژه بدست آمده

- جز در نقاط ابتدایی و انتهایی هر تابع ویژه Φ_n
- تعداد $n-1$ صفر دارد



n	تعداد صفر (Φ)
1	0
2	1
3	2
4	3

بین دو صفر متوالی Φ_n یک صفر از Φ_{n-1} وجود دارد

به ازای هر n برای u یک جواب داریم

$$\longrightarrow u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{L}x\left(k_1\sin\frac{cn\pi}{L}t + k_2\cos\frac{cn\pi}{L}t\right)$$

$$\psi'' - c^2\lambda\psi = 0 \longrightarrow$$

معادله دیفرانسیل خطی و همگن است پس ترکیب خطی جواب های بدست آمده نیز جواب معادله خواهد بود.

$$\longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)$$

جلسه دوازدهم: ۹۱/۸/۹

$$c^2u_{xx} = u_{tt}$$

$u(0,t)=0$

$u(L,t)=0$

$u(x,0)=f(x)$

$u_t(x,0)=g(x)$

از صفحه بعد $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}$

$$\longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)$$

$$u(x,0)=f(x) \longrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\longrightarrow \int_0^L f(x)\phi_m(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^L \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = N\delta_{mn}$$

$$\longrightarrow A_n = \frac{\int_0^L r f(x)\phi_n(x)\,dx}{\int_0^L r\phi_n^2(x)\,dx} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$u_t(x,0) = g(x) \longrightarrow g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x\left(\frac{cn\pi}{L}\right)$$

$$\longrightarrow B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

اگر f و g توابعی باشند و بتوان انتگرال ها را محاسبه کرد با جایگذاری در $u(x,t)$ می توان جواب را بدست آورد

$$\longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x\left(\left[\frac{2}{L}\int_0^L f(s)\sin\frac{n\pi}{L}s\,ds\right]\cos\frac{cn\pi}{L}t + \left[\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(s)\sin\frac{n\pi}{L}s\,ds\right]\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)$$

تابع جادویی : Majic Function

معلول

تابع تاثیر (تابع گرین)

$G(x,t\,|\,\underset{\text{علت}}{s,0})$

تفسیر حاصل اعمال انتگرال و جمع

$$\int_0^L f(s)\underbrace{\left[\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x\,\sin\frac{n\pi}{L}s\,\cos\frac{cn\pi}{L}t\right]}_{G(x,t|s,0)}ds$$

توزیع مکان اولیه ↓ مولد علت

$$+\int_0^L \underset{\text{سرعت اولیه}}{g(s)}\underbrace{\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{cn\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\,\sin\frac{n\pi}{L}s\,\sin\frac{cn\pi}{L}t\right]}_{G_1(x,t|s,0)}ds$$

S Source Point

نقطه منبع

$G(x,t\,|\,s,\tau)\qquad t<\tau\rightarrow G=0$ (اصل علیت)

$[t>\tau]$

$$\rightarrow u(x,t)=\int_0^L f(s)\,G(x,t|s,0)\,ds+\int_0^L g(s)\,G_1(x,t|s,0)\,ds$$

← معادله دیفرانسیل به معادله انتگرال تبدیل شد.

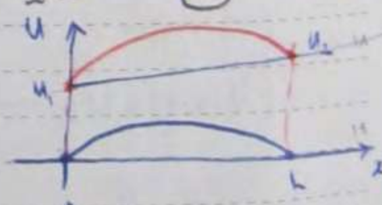
اگر معادله ناهمگن باشد مقداری جملات گرین اضافی به معادله انتگرالی اخیر اضافه خواهند شد.

• معادله موج با شرایط مرزی ناهمگن

$c^2u_{xx}=u_{tt}$

$u(0,t)=u_1 \qquad u(x,0)=f(x)$

$u(L,t)=u_2 \qquad u_t(x,0)=g(x)$



که مستقل از زمان دارند مکان

فرض $\boxed{u(x,t)=\underset{\text{جواب سمت همگن}}{w(x,t)}+\underset{\text{جواب خصوصی}}{v(x)}}$

$c^2w_{xx}+c^2v''=w_{tt}$

$\rightarrow c^2(w_{xx}+v'')=w_{tt}\ \rightarrow v''=0\ \rightarrow\ v=a+bx$

تغییر متغیر به این صورت مستقل از زمان

$\rightarrow\begin{cases}u_1=a\\ u_2=u_1+bL\end{cases}\rightarrow b=\frac{u_2-u_1}{L}\ \rightarrow\ \boxed{v(x)=u_1+\frac{u_2-u_1}{L}x}$

اگر کمیات را در راستای این خط راست قرار دهیم تغییر مکان های اولیه صفر خواهد بود

$\longrightarrow W = U - V$

$W(0,t) = U(0,t) - V(0) = U_1 - U_1 = 0$

$W(L,t) = U(L,t) - V(L) = U_2 - U_2 = 0$

$W(x,0) = U(x,0) - V(x) = f(x) - V(x) = f_1(x)$

به جای $f(x)$ در معادله انتگرال بدست آمده قرار داده می‌شود

$W_t(x,0) = U_t(x,0) = g(x)$

$c^2 U_{xx} + q(x) = U_{tt}$

$U(x,t) = W(x,t) + V(x)$

جانشانی $\longrightarrow c^2 (W_{xx} + V'') + q(x) = W_{tt}$ (جواب $W = 0$)

اگر این شرط برقرار بود $\longrightarrow c^2 V'' + q(x) = 0$

$$\longrightarrow V(x) = \underbrace{\frac{1}{c^2} \iint -q(x)(dx)^2}_{H(x)} + a + bx$$

$$\begin{cases} U(0,t) = U_1 \rightarrow \checkmark \\ U(L,t) = U_2 \rightarrow \checkmark \end{cases} \longrightarrow V(x) = \checkmark$$

و بقیه مراحل مانند روند حالت قبل خواهد بود.

$c^2 U_{xx} + q(x,t) = U_{tt}$ $\quad \begin{cases} U(0,t) = 0 \\ U(L,t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U(x,0) = f(x) \\ U_t(x,0) = g(x) \end{cases}$

نیروی محرک خارجی اعمال شده

بسط U برحسب تابع ویژه

$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x)$

$q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x)$

$$\begin{cases} a_n(t) = \frac{1}{N} \int_0^L u(x,t) \phi_n(x)\, dx \\ b_n(t) = \frac{1}{N} \int_0^L q(x,t) \phi_n(x)\, dx \end{cases}$$

اگر Φ و u شرط مرزی، در آن صدق می کنند بیان و همین باشند می توان از [illegible] نسبت به x مشتق گرفت:

$$c^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\phi_n'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t)\,\phi_n(x)$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[c^2 a_n(t)\,\phi''(x) - a_n''(t)\,\phi_n + b_n(t)\,\phi_n(x)\right] = 0$$

برای Φ داشتیم $\phi'' + \lambda_n^2 \phi = 0 \longrightarrow \phi'' = -\lambda_n^2 \phi \longrightarrow$ جایگذاری در معادله بالا

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0 \\ \Phi(h) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[c^2 a_n(t)\left(-\lambda_n^2 \phi\right) - a_n''(t)\,\phi_n + b_n(t)\,\phi_n(x)\right] = 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[+a_n''(t) + c^2\lambda_n^2 a_n(t) - b_n\right]\phi_n = 0$$

بایستی کمیت داخل کروشه صفر شود:

$$a_n''(t) + c^2\lambda_n^2 a_n(t) = b_n(t)$$

$$a_n(t) = \underset{\text{عمومی}}{a_n(t)_h} + \underset{\text{خصوصی}}{a_n(t)_p} \qquad \Bigg\}\; a_n(t)_h = A_1 \underbrace{\sin c\lambda_n t}_{a_1(t)} + A_2 \underbrace{\cos c\lambda_n t}_{a_2(t)}$$

← از روش تغییر پارامترها استفاده می کنیم

$$a_n(t)_p = v_1 a_1(t) + v_2 a_2(t) \qquad \xrightarrow[\text{رونسکین}]{} W = \begin{vmatrix} \sin c\lambda_n t & \cos c\lambda_n t \\ c\lambda_n \cos c\lambda_n t & -c\lambda_n \sin c\lambda_n t \end{vmatrix} = -c\lambda_n$$

$$v_1' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & \cos c\lambda_n t \\ b_n(t) & -c\lambda_n \sin c\lambda_n t \end{vmatrix} \quad v_1 = -\frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t -b_n(t)\cos c\lambda_n \tau \, d\tau$$

$$v_2' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \sin c\lambda_n t & 0 \\ c\lambda_n \cos c\lambda_n t & b_t \end{vmatrix} \rightarrow v_2(t) = -\frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t b_n(\tau)\sin c\lambda_n \tau \, d\tau$$