اگر $\phi$ و $u$ شرط مرزی ... در آن صدق می‌کند و همگن باشند می‌توان از ... نسبت به $x$ مشتق گرفت:

$$c^2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\phi_n'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t)\,\phi_n(x)$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[c^2 a_n(t)\,\phi''(x) - a_n''(t)\,\phi_n + b_n(t)\,\phi_n(x)\right] = 0$$

برای $\phi$ داشتیم $\phi'' + \lambda_n^2\phi = 0 \longrightarrow \phi'' = -\lambda_n^2\phi \longrightarrow$ جای‌گذاری در معادله بالا

$$\begin{cases}\phi(0) = 0\\ \phi(h) = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[c^2 a_n(t)(-\lambda_n^2\phi) - a_n''(t)\,\phi_n + b_n(t)\,\phi_n(x)\right] = 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[+a_n''(t) + c^2\lambda_n^2 a_n(t) - b_n\right]\phi_n = 0$$

بایستی کمیت داخل کروشه صفر شود:

$$a_n''(t) + c^2\lambda_n^2 a_n(t) = b_n(t)$$

$$a_n(t) = \underset{\text{همگن}}{a_n(t)_h} + \underset{\text{خصوصی}}{a_n(t)_p} \qquad a_n(t)_h = A_1\underbrace{\sin c\lambda_n t}_{a_1(t)} + A_2\underbrace{\cos c\lambda_n t}_{a_2(t)}$$

از روش تغییر پارامترها استفاده می‌کنیم

$$a_n(t)_p = v_1 a_1(t) + v_2 a_2(t) \qquad \xrightarrow{\text{رونسکین}} W = \begin{vmatrix}\sin c\lambda_n t & \cos c\lambda_n t\\ c\lambda_n\cos c\lambda_n t & -c\lambda_n\sin c\lambda_n t\end{vmatrix} = -c\lambda_n$$

$$v_1' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix}0 & \cos c\lambda_n t\\ b_n(t) & -c\lambda_n\sin c\lambda_n t\end{vmatrix} \rightarrow v_1 = -\frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t -b_n(t)\cos c\lambda_n \tau\, d\tau$$

$$v_2' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix}\sin c\lambda_n t & 0\\ c\lambda_n\cos c\lambda_n t & b_t\end{vmatrix} \rightarrow v_2(t) = -\frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t b_n(\tau)\sin c\lambda_n \tau\, d\tau$$

$$\to a_n(t)_p = \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t b_n(\tau)\cos c\lambda_n\tau \; \sin c\lambda_n t \; d\tau$$

$$-\frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t b_n(\tau)\sin c\lambda_n\tau \; \cos c\lambda_n t \; d\tau$$

$$\to a_n(t) = A_1 \sin c\lambda_n t + A_2\cos c\lambda_n t + \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t b_n(\tau)\sin c\lambda_n(t-\tau)\,d\tau$$

5) $$\to u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\phi_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_1\sin c\lambda_n t + A_2\cos c\lambda_n t + \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t b_n(\tau)\sin c\lambda_n(t-\tau)\,d\tau\right\}\phi_n(x)$$

$u(x,0)=f(x) \to$ $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_2\,\phi_n(x)$$ ( بسط f برحسب $\phi$ :یعنی

$\leftarrow A=A_n$

$$\longrightarrow A_2 = \frac{1}{N}\int_0^L f(x)\,\phi_n(x)\,dx$$

$u_t(x,0)=g(x)$ $$\longrightarrow A_1 = \frac{1}{N}\int_0^L g(x)\,\phi_n(x)\,dx$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{Nc\lambda_n}\int_0^L g(s)\phi_n(s)\,ds \cdot \sin c\lambda_n t + \frac{1}{N}\int_0^L f(s)\phi_n(s)\,ds\cdot\cos c\lambda_n t\right.$$
$$\left. + \frac{1}{c\lambda_n}\int_0^t \frac{1}{N}\int_0^L q(s,\tau)\phi_n(s)\,ds\,\sin c\lambda_n(t-\tau)\,d\tau\right\}\phi_n(x)$$

$$u = \int_0^L f(s)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\phi_n(s)\phi_n(x)\cos c\lambda_n t\right]ds + \int_0^L g(s)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N\cdot c\lambda_n}\phi_n(s)\phi_n(x)\sin c\lambda_n t\right]ds$$
$$+\int_0^t d\tau\int_0^L q(s,\tau)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N\cdot c\lambda_n}\phi_n(s)\phi_n(x)\sin c\lambda_n(t-\tau)\right]ds$$

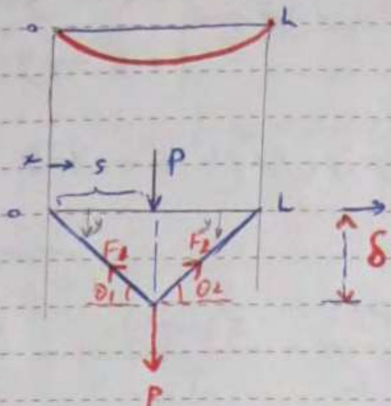


کامل‌ترین شکل جواب نهایی برای $u(x,t)$

• آشنایی با مفهوم تابع گرین (G) : (الاستاتیک و دینامیک)

در نخ مرتعش $f \ll T$

اگر $f \not\ll T$




منحنی تغییر مکان پیوسته است اما مشتق پذیر نخواهد بود.

($\delta$ : تغییر مکان زیر نقطه اعمال نیرو)

از تعادل استاتیکی:

$$\begin{cases} \text{افق}: & F_1 \cos\theta_1 = F_2 \cos\theta_2 \\ \text{عمود}: & F_2 \sin\theta_2 + F_1 \sin\theta_1 - P = 0 \end{cases} \qquad (F_1 = F_2 = T)$$

$$\longrightarrow \operatorname{tg}\theta_2 + \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{P}{T} \quad (\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{\delta}{L-s} \\ \operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{\delta}{s} \end{cases}$$

$$c^2 u_{xx} + \frac{f(x,t)}{\rho} = \cancel{u_{tt}}$$ (چون نخ در حال حرکت نیست)

به جز در $x=s$ نیروی خارجی ندارد

$$\longrightarrow u'' = 0 \qquad x \neq s \qquad\qquad u = u(x) \longleftarrow$$

$$(\mathrm{I}) \longrightarrow \frac{\delta}{L-s} + \frac{\delta}{s} = \frac{P}{T} \longrightarrow \delta s + \delta(L-s) = \frac{P}{T} s(L-s)$$

$$\longrightarrow \boxed{\delta = \frac{Ps(L-s)}{TL}} \qquad \begin{aligned} s=0 &\rightarrow \delta = 0 \\ s=L &\rightarrow \delta = 0 \end{aligned}$$

برای بدست آوردن تغییر مکان دیگر نقاط با استفاده از $\delta$ داریم:

$$\frac{y}{x} = \frac{\delta}{s} \longrightarrow y = \frac{x\delta}{s} \longrightarrow y_{(x,s)} = \frac{Px(L-s)}{TL} \qquad x<s$$

$$\frac{y}{L-x} = \frac{\delta}{L-s} \longrightarrow y = \frac{L-x}{L-s}\delta \longrightarrow y(x,s) = \frac{Ps(L-x)}{TL} \qquad s<x<L$$



تغییر مکان ایجاد شده در نقطه x در اثر اعمال نیروی در s = تغییر مکان ایجاد شده در نقطه s بر اثر تغییر مکان در نقطه x

تابع گرین

اگر $P=1$ ← $y(x,t) = g(x,s)$

شرط مرزی همگن مسئله را ارضا می‌کند ← $\begin{cases} x=0 \rightarrow g=0 \\ x=L \rightarrow g=0 \end{cases}$

تابع گرین در $x=s$ پیوسته است ⇐ تابع گرین از هر دو رابطه بدست می‌آید ← $x=s$

اگر مشتق از جواب را محاسبه کنیم،

مشتق سمت راست $\lim\limits_{x\to s^+} y(x,s)$ − مشتق سمت چپ $\lim\limits_{x\to s^-} y(x,s)$ $= \frac{-Ps}{TL} - \frac{P(L-s)}{TL} = -\frac{PL}{TL} = -\frac{P}{T}$

← مشتق دوم برای این کمیت تعریف نمی‌شود. در $x=s$

$$\longrightarrow g''(x,s) = 0 \qquad (x \neq s)$$

$$\longrightarrow g''(x,s) = -\delta(x-s)$$

← به خاطر ترکیب مسئله

تابع گرین: پاسخ هر سیستم به ورودی واحد متمرکز می‌باشد

جلسه سیزدهم: 91/8/1

$y(x,s)$: تغییر مکان در نقطه $x$ در اثر اعمال بار در نقطه $s$ ی:

$$y(x,s) = \begin{cases} \dfrac{Px(L-s)}{TL} & x<s \\[2ex] \dfrac{Ps(L-x)}{TL} & x>s \end{cases}$$

$(P=1)$

در $x=s$ تابع $g$ پیوسته است

تابع گرین متقارن ← $y(x,s) = y(s,x) \rightarrow \frac{Px(L-s)}{TL} \,,\, \frac{Ps(L-x)}{TL}$

تابع گرین در شرط مرزی همگن مسئله صدق می‌کند

اگر $P=1$ → $\lim\limits_{x\to s^+} y - \lim\limits_{x\to s^-} y = -\frac{1}{T}$

$$Ty'' = -\delta(x-s) \xrightarrow{\text{انتگرال}} \underbrace{\int^{L} T y''\, dx}_{\text{در تمامی نقاط به جز در نزدیکی } x=s \text{ صفر است}} = -\underbrace{\int^{L} \delta(x-s)\, dx}_{=1}$$

$$\to Ty'\Big|_{s^-}^{s^+} = -1 \to$$ «همان رابطه صفحه قبل»

مثال:

$$y'' + k^2 y = 0 \qquad k \neq \frac{n\pi}{L} \qquad y(0)=0$$
$$0<x<L \qquad y(L)=0$$

اگر $k = \frac{n\pi}{L} \to y = \sin\frac{n\pi}{L}$

برای $\frac{n\pi}{L}$ حقیقی داشته باشیم:

$$y \Rightarrow f(\sin kx, \cos kx)$$

$$y(x,s) = \begin{cases} A_1 \sin kx + A_2 \cos kx & x<s \\ B_1 \sin kx + B_2 \cos kx & x>s \end{cases}$$

$$y(0,s)=0 \longrightarrow \boxed{A_2 = 0}$$

$$y(L,s)=0 \longrightarrow B_1 \sin kL + B_2 \cos kL = 0 \to B_2 = -B_1\, tg\, kL$$

$$\to y(x,s) = \begin{cases} A_1 \sin kx & x<s \\ B_1(\sin kx - tg\, kL \cos kx) = \dfrac{B_1 \sin(kL-kx)}{\cos kL} = C_1 \sin k(L-x) \end{cases}$$

در $x=s$ باید با هم برابر باشند ← $A_1 \sin ks = C_1 \sin k(L-s)$

$$\longrightarrow A_1 = C_1 \cdot \frac{\sin k(L-s)}{\sin ks}$$

$$\to y(x,s) = \begin{cases} C_1 \dfrac{\sin k(L-s)}{\sin ks} \sin kx & x<s \\ C_1 \sin k(L-x) & x>s \end{cases}$$

تفاضل مشتق‌ها : $-kC_1 \cos k(L-s) - kC_1 \dfrac{\sin k(L-s)}{\sin ks} = -1$

$$\rightarrow \frac{\sin ks \cos k(L-s) - }{\sin ks} =$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{\sin ks}{k \sin kL}$$

جای‌گذاری $C_1$ در رابطه :

$$\rightarrow y(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\sin k(L-s)}{k \cdot \sin kL} \sin kx & x < s \\ \dfrac{\sin k(L-x) \sin ks}{k \sin kL} & x > s \end{cases}$$

اگر جای x و s عوض شود ، تفاوتی نمی‌کند متقارن است

$$\xrightarrow{\text{جواب معادله}} y(x) = \int_0^x \frac{\sin k(L-x) \sin ks}{k \sin kL} ds + \int_x^L \frac{\sin k(L-s)}{k \cdot \sin kL} \sin kx \, ds$$

$x > s$ ، $x$ انتگرال نسبت به

$$\rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{k^2 \sin kL} \left[ \sin k(L-x) + \sin kx - \sin kL \right]}$$

اگر $x=0 \rightarrow y=0$ ✓

$x=L \rightarrow y=0$ ✓

اگر بخواهیم جواب برحسب s باشد ( جای حد انتگرال‌ها و نقطه‌ها را عوض می‌کنیم )

$$y(x) = \int_s^L \frac{\sin k(L-x) \sin kx}{k \sin kL} dx + \int_0^s \frac{\sin k(L-s)}{k \sin kL} dx$$

اگر $y'' + k^2 y = f$

$$\rightarrow y(x) = \int \underset{\downarrow \, f(s)}{f} \, \_\_\_\_ \, ds + \int \underset{\downarrow \, f(s)}{f} \, \_\_\_\_ \, ds$$



$f(x) \quad dx \quad f_0 \quad dx$

اگر

$\times G \quad y'' + k^2 y = f$

تابع گرین در رابطه معادله صدق می‌کند:

$\times y \quad G'' + k^2 G = -\delta(x-s)$

از هم کم می‌کنیم $\longrightarrow$ $Gy'' + \cancel{k^2Gy} - yG'' - \cancel{k^2Gy} = Gf + y\delta(x-s)$

می‌توانیم از طرفین معادله نسبت به متغیرهای $x$ یا $s$ (به دلخواه) انتگرال بگیریم

$$\underbrace{\int_0^L (Gy''-yG'')\,ds}_{\text{جزء به جزء}} = \int_0^L Gf\,ds + \underbrace{\int_0^L y\,\delta(x-s)\,ds}_{y(x)}$$

$$Gy'\Big|_0^L - \int_0^L G'y'\,ds + \int_0^L y'G'\,ds = \int_0^L Gf\,ds + y$$

با شرط مرزی

$$\longrightarrow y = -\int_0^L Gf\,ds$$

اگر شرایط مرزی به صورت بالا نباشد (ناهمگن باشد، معادله هم ناهمگن است):

$$\begin{cases} y(0) = y_1 \\ y(L) = y_2 \end{cases}$$

محاسبه راه ساده‌تر برای تعیین تابع گرین ($G$):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \longrightarrow G(x,s) = ? \qquad I:[a,b)$$

$y_1$ جواب همگن معادله که شرط مرزی سمت چپ را ارضا می‌کند. $\qquad y_1(x): \longleftarrow y(a)$

$y_2$ " " " " " راست " " . $\qquad y_2(x): \longleftarrow y(b)$

$$\longrightarrow G(x,s) = \begin{cases} C_1(s)\,y_1(x) & x<s \\ C_2(s)\,y_2(x) & x>s \end{cases}$$

★ از پیوستگی تابع گرین داریم:

$$G(x,s^{+}) = G(x,s^{-})$$

$$\longrightarrow C_2(s)\,y_2(s) = C_1(s)\,y_1(s)$$

$$\longrightarrow C_2(s)\,y_2(s) - C_1(s)\,y_1(s) = 0$$

شرط بعدی ★

$$\star\; G'_x(s^{+},s) - G'_x(s^{-},s) = -1 \longrightarrow$$ مرتبه بالاترین رتبه مشتق

$$\rightarrow C_2(s)\,y'_2(s) - C_1(s)\,y'_1(s) = -1$$

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y_2(s) & -y_1(s) \\ y'_2(s) & -y'_1(s) \end{bmatrix}}_{-y_2 y'_1 + y_1 y'_2 = W} \begin{bmatrix} C_2(s) \\ C_1(s) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\hookrightarrow C_2(s) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & -y_1(s) \\ -1 & -y'_1(s) \end{vmatrix} = -\frac{y_1(s)}{W}$$

$$C_1(s) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} y_2(s) & 0 \\ y'_2(s) & -1 \end{vmatrix} = -\frac{y_2(s)}{W}$$

$$\rightarrow G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{y_2(s)\,y_1(x)}{W} & x<s \\[2ex] -\dfrac{y_1(s)\,y_2(x)}{W} & x>s \end{cases}$$

$$\frac{r^2-x^2}{r^3}$$

$$\rightarrow y(x) = \int^{b} G(x,s)\,f(s)\,ds$$

ch7 : همه مسائل جز تا 15 آذر

13,14 19,20 36,37
9,10

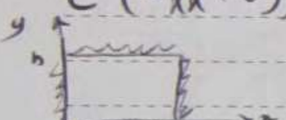
$$\longrightarrow y(x) = \int_a^x -f(s)\,\frac{y_1(s)y_2(x)}{W}\,ds + \int_x^b -f(s)\,\frac{y_2(s)y_1(x)}{W}\,ds$$

برای مثال قبلی داشتیم:

$$\begin{cases} y_1(x) = \sin kx \\ y_2(x) = \sin k(L-x) \end{cases}$$

$$\longrightarrow W = \begin{vmatrix} \sin kx & \sin k(L-x) \\ k\cos kx & -k\cos k(L-x) \end{vmatrix} = -k\sin kL$$

$$c^2(u_{xx}+u_{yy}) = u_{tt} \qquad \begin{matrix} 0<x<a \\ 0<y<b \end{matrix} \quad t>0$$



معادله موج دو بعدی

غشا به شکل مستطیل تغییر مکان روی محیط صفر است

حال این غشا روی محیط دایره‌ای شکل قرار می‌دهیم. روی محیط تغییر مکان صفر است

معادله را برای حالت یک بعدی که تغییر مکان وابسته به شعاع باشد.

$$c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) = u_{tt}$$

$u(x,y,t) \longrightarrow u(r,t)$ ← در اینجا مختصات جدید داریم:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \phi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

در حالت تقارن $u_\phi = 0$

$$u_x = u_r r_x + \cancel{u_\phi \phi_x} \Rightarrow \frac{x}{r}u_r$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(u_r)\frac{x}{r} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)u_x$$

$$= u_{rr}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + u_r\left[\frac{r - x r_x}{r^2}\right]$$

$$\frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$$

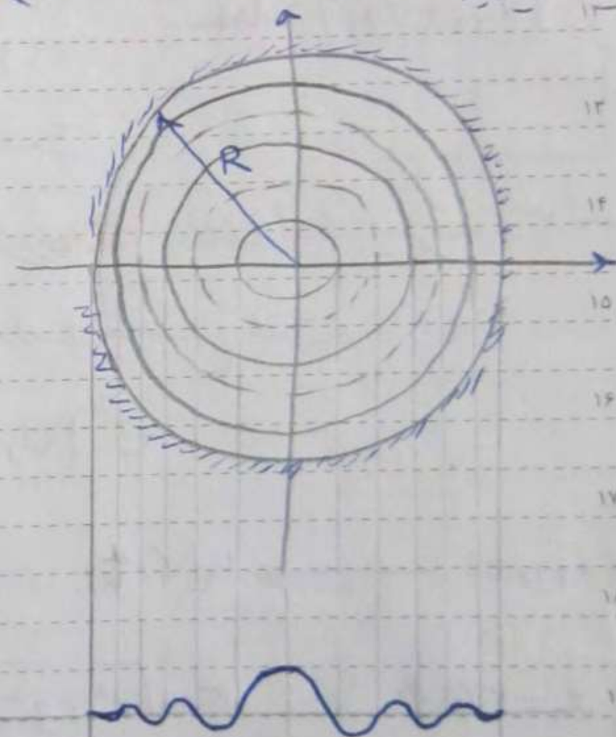
مانند بالا $\longrightarrow U_{yy} = \left(\frac{y}{r}\right)^2 U_{rr} + \left(\frac{r^2-y^2}{r^3}\right) U_r$

$$U_{xx}+U_{yy} = U_{rr}\underbrace{\left(\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)}_{1} + U_r\underbrace{\left(\frac{r^2-x^2+r^2-y^2}{r^3}\right)}_{1/r}$$

$$\bigstar \; \boxed{U_{rr} + \frac{1}{r}U_r = \frac{1}{c^2}U_{tt}} \qquad \begin{cases} 0<r<R \\ t>0 \end{cases}$$

شرط مرزی $\begin{cases} U(R,t)=0 \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0,t)=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{r\to 0}|u(r,t)|<\infty \end{cases}$

بیشترین یا کمترین تغییر مکان در مرکز اتفاق می‌افتد




شرط اولیه $\begin{cases} U(r,0)=f(r) \\ U_t(r,0)=g(r) \end{cases}$

* با جداسازی متغیرها شروع می‌کنیم ؛

$$U(r,t) = \Phi(r)\,\Psi(t)$$

$$\to \Phi''\Psi + \frac{1}{r}\Phi'\Psi = \frac{1}{c^2}\Phi\Psi''$$

$$\to \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{1}{r}\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{\Psi''}{c^2\Psi} = \lambda$$

$$\begin{cases} \Psi'' - \lambda c^2\Psi = 0 \\ \Phi'' + \frac{1}{r}\Phi' - \lambda\Phi = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r^2\Phi'' + r\Phi' - \lambda r^2\Phi = 0 \quad (\bigstar) \\ \Phi(0)<\infty \quad \text{یا} \quad \Phi'(0)=0 \\ \Phi(R)=0 \end{cases}$$

$(\star) \to \frac{d}{dr}(r\phi') - \lambda r \phi = 0$ (مسئله اشتورم لیوویل نامنظم)

$(\star\star)$ (حالت خاص) از $x^2y'' + xy' + (\beta^2x^2 - \nu^2)y = 0$

جلسه چهاردهم 91/8/16

معادله (معادلات بسل) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\nu > -\frac{1}{2})$

شکل استاندارد معادله درجه دو بسل ←

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)} y' + \underbrace{\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)}_{b(x)} y = 0$$

$x=0$ نقطه تکین منتظم این معادله است

$\begin{cases} a(x) & x=0 \\ b(x) & x=0 \end{cases}$ $(x=0)$ R.S.P

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} (x-0)\,a(x) = 1 \\ \lim_{x\to 0} (x-0)^2\, b(x) = -\nu^2 \end{cases}$$

روش فروبنیوس: $(x-x_0)^r \sum a_k (x-x_0)^k$ : جواب

برای این معادله $x_0 = 0$

جواب فرض $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$

جایگذاری در معادله →

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)a_k x^{k+r}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0$$

$k \longrightarrow k-2$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)a_k x^{k+r} + \left(\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}\, x^{k+r}\right) - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

$$\to r(r-1)a_0x^r + ra_0x^r - \nu^2 a_0 x^r + (1+r)ra_1x^{1+r} + (1+r)a_1x^{1+r}$$

$$-\nu^2 a_1 x^{1+r} + \sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[(k+r)(k+r-1)+(k+r)-\nu^2\right]a_k + a_{k-2}\right\}x^{k+r}=0$$

$$x^r:\ (r^2-r+r-\nu^2)a_0=0 \qquad \begin{cases} r_1=\nu \\ r_2=-\nu \end{cases}$$

با انتخاب $r=r_1=\nu$ مسئله را حل می‌کنیم:

$$x^{1+r}=x^{1+\nu}:\ \left[(1+\nu)\nu+\underbrace{1+\nu}_{-\nu^2}\right]a_1=0 \to (2\nu+1)a_1=0 \xrightarrow{\nu\neq-\frac{1}{2}\ \text{شرط}} \boxed{a_1=0}$$

$$\to \sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[\underbrace{\underbrace{(k+\nu)(k+\nu-1)+(k+\nu)}_{\substack{(k+\nu)[k+\nu+1-1] \\ (k+\nu)^2}}-\nu^2}_{k^2+2k\nu}\right]a_k + a_{k-2}\right\}x^{k+r}=0$$

$$\to a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)} \qquad k=2 \to a_2=\frac{-a_0}{2(2+2\nu)}=-\frac{a_0}{2^2(1+\nu)}$$

جملات دارای اندیس فرد همگی صفر می‌شوند $\Leftarrow$ $k=3 \to a_3=0$

$$k=4 \to a_4=-\frac{a_2}{4(4+2\nu)}=\frac{a_0}{2^4\cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$k=6 \to a_6=-\frac{a_4}{6(6+2\nu)}=-\frac{a_0}{2^6\cdot 2\cdot 3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$$

$$k=8 \longrightarrow a_8 = -\frac{a_6}{8(8+2\nu)} = \frac{a_0}{2^8 \cdot 2\cdot 3\cdot 4\,(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)(4+\nu)}$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \boxed{a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0 \times 2^{\nu}}{2^{2m+\nu}\cdot m!\,(1+\nu)(2+\nu)\cdots(m+\nu)}}$$

اگر ν عدد صحیح مثبت باشد: از انتگرال توسیع یافته فاکتوریل (گاما) داریم:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

برای $x>0$ همگراست

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, \overbrace{t^{x}}^{u}\, dt = -e^{-t} t^{x}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

$dv$

$$\Rightarrow \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

$\Gamma(x)$ در $x=0$ تعریف نمی‌شود

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = \text{—}$$

در $x=0$، $x=-1$ تعریف نمی‌شود

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+3)}{x(x+1)(x+2)}$$

$\vdots$

m عدد صحیح مثبت

$$\Rightarrow \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+m)}{x(x+1)\cdots(x+m-1)}$$

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x!}$$

موقعی که x عدد صحیح مثبت باشد،

$$\to a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0 \cdot 2^{\nu} \cdot \Gamma(1+\nu)}{2^{2m+\nu} \cdot m! \times \Gamma(1+\nu)\,(1+\nu)(2+\nu)\cdots(m+\nu)}$$

$$\to a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0\, 2^{\nu}\, \Gamma(1+\nu)}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(m+\nu+1)}$$

$a_0$ ضریب اختیاری است و طوری انتخاب می‌کنیم $\quad a_0\Gamma(1+\nu)2^{\nu} = 1$

$$\to a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(m+\nu+1)}$$

$$\to y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\nu} \to y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+\nu}$$

تابع بسل نوع اول از مرتبه $\nu$ $= \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} = J_{\nu}(x)}$

برای $r_2 = -\nu$ به همین ترتیب داریم:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}$$

$$\nu \notin \mathbb{Z} \longrightarrow y(x) = c_1 J_{\nu}(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

اگر فرض کنیم $\begin{cases} c_1 = \cot \nu\pi \\ c_2 = -\csc \nu\pi \end{cases}$



$\nu \notin \mathbb{Z}$

$$\longrightarrow y(x) = \frac{\cos \nu\pi \, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

ولی اگر $\nu \in Z$ داریم: $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$ و $J_\nu$ و $J_{-\nu}$ استقلال خطی ندارند)

$$\longrightarrow y(x) = \frac{0}{0}$$

با استفاده از هوپیتال داریم:

← جمله ln جدا می‌شود در نتیجه مقدار $Y_\nu$ را از کنار $x=0$ جهت $\infty$ میل می‌کند

$Y_\nu(x)$ : تابع بسل نوع دوم

$$\lim_{x \to 0} Y_\nu(x) = -\infty$$

ترکیب مختلط توابع بسل نوع اول و نوع دوم به تابع بسل نوع سوم معروف است:

$$\boxed{\begin{array}{ll} H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i\,Y_\nu(x) & \text{تابع هنکل نوع اول} \\ \hline H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i\,Y_\nu(x) & \text{تابع هنکل نوع دوم} \end{array}}$$

توابع بسل ارتباط تنگاتنگ با توابع مثلثاتی دارند:

تابع مولد توابع بسل: $e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$

Generating Function

$$e^{\frac{x}{2}t} \cdot e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^k}{(k!)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x}{2t}\right)^m}{m!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{k+m}}{k!\, m!}\, t^{k-m}$$

$m=0 \quad n=k \rightarrow \Big|_0^{\infty}$

$k=0 \quad n=-m \quad \Big|_{-\infty}^{0}$

اگر $k-m=n$ تغییرات $n$ از $-\infty$ تا $+\infty$ خواهد بود

تولید تابع بسل

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+n)!} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{m!} \right] t^n$$

اگر $t = e^{i\theta} \longrightarrow t - \frac{1}{t} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \Rightarrow e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, e^{in\theta}$$

$$\longrightarrow \cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\left[\cos n\theta + i\sin n\theta\right]$$

$$\begin{cases} Real = Real \\ Im = Im \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \cos(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\cos n\theta & \mathrm{I} \\ \sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\sin n\theta & \mathrm{II} \end{cases}$$

به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$ : $\cos n\theta = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k-1 \quad (\text{فرد}) \\ \pm 1 & n = 2k \quad (\text{زوج}) \end{cases}$

$$\sin\frac{n\pi}{2} \begin{cases} 0 & n = 2k \quad (\text{زوج}) \\ \pm 1 & n = 2k-1 \quad (\text{فرد}) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{2}} \cos x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{2n}(x)(-1)^n = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x)$$

$$\sin x = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)(-1)^{n+1}$$

$$\cos m\theta \times \cos(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\cos n\theta \times \cos m\theta \quad \leftarrow \mathrm{I}$$

$$\sin m\theta \times \sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\sin n\theta \times \sin m\theta \quad \leftarrow \mathrm{II}$$

$$① \rightarrow \int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta)\cos m\theta\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta\, d\theta$$

$$② \quad \int_0^{2\pi} \sin(x\sin\theta)\sin m\theta\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta\, d\theta$$

$$\star \int_0^{2\pi} \underset{\cos}{\sin m\theta}\ \underset{\cos}{\sin n\theta}\, d\theta = \pi\,\delta_{mn}$$

جمع ① و ②
$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos[x\sin\theta - n\theta]\, d\theta = J_n(x)}$$
تعریف انتگرالی تابع بسل

$$n=0 \rightarrow J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta)\, d\theta \xrightarrow{x=0} J_0(0) = 1$$

$$J_n(0) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\geq 1 \end{cases}$$

تمامی توابع بسل به جز (n=0) از مبدأ مختصات عبور می‌کنند

$$\lim_{x\to 0} J_n(x) = 0 \qquad n\geq 1$$

---

$$\lim_{x\to\infty} J_n(x) = ?$$

رفتار توابع بسل وقتی $x\to\infty$

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0 \longrightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

شکل استاندارد معادله درجه دو: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f$

برای حل این معادله $y = uv$

$$y' = u'v + uv'$$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} u''v + 2u'v' + uv'' + p[u'v + uv'] + q(uv) = f$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌سازی}} uv'' + v'(2u'+pu) + v(u''+pu'+qu) = f$$

اگر $u$ یکی از جواب‌های معادله همگن باشد: $u''+pu'+qu = 0$ ← روش کاهش مرتبه $v' = w$

ولی اگر $u$ طوری انتخاب شود که ضریب $v'$ صفر شود:

$$v'' + v\left(\frac{u''+pu'+qu}{u}\right) = f$$

$$2u'+pu = 0 \longrightarrow 2\frac{u'}{u} + p = 0 \longrightarrow \frac{u'}{u} = -\frac{p}{2} \longrightarrow \boxed{u = e^{\int -\frac{p}{2}dx}}$$

معادله اصل $p = \frac{1}{x} \longrightarrow e^{-\int \frac{p}{2}dx} = e^{\int -\frac{1}{2x}dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} y = \frac{v}{\sqrt{x}} = vx^{-\frac{1}{2}} \qquad \begin{cases} y' = v'x^{-\frac12} - \frac{1}{2}vx^{-\frac32} \\ y'' = v''x^{-\frac12} - v'x^{-\frac32} + \frac{3}{4}x^{-5/2}v \end{cases}$$

جایگذاری در معادله

$$\longrightarrow v''x^{-\frac12} - v'x^{-\frac32} + \frac34 x^{-5/2}v + v'x^{-\frac32} - \frac12 vx^{-\frac52} + vx^{-\frac12} - n^2vx^{-\frac52} = 0$$

$$x\,x^{\frac{1}{2}} \to v'' - \cancel{v' x^{-1}} + \frac{3}{4}x^{-2}v + \cancel{v' x^{-1}} - \frac{1}{2}v x^{-2} + v - n^2 v x^{-2} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \Rightarrow v'' + \Big(\underbrace{\frac{1}{4x^2} - \frac{n^2}{x^2}}_{=0} + 1\Big)v = 0 \quad \to v'' + v = 0 \quad \begin{cases}\sin x\\ \cos x\end{cases}$$

← رفتار تابع بسل در $\infty$ شبیه دو تابع $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ , $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ خواهد بود

← در نقاطی که $\sin x$ و $\cos x$ صفر می‌شوند تابع بسل هم صفر می‌شود.

با این تفاوت که فاصله صفرهای $\sin$ و $\cos$ ثابت است اما فاصله صفرهای تابع بسل
از هم در ... کمتر و کمتر می‌شوند.

$$\begin{cases} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x \end{cases}$$

★ $$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(mx)\right) = ?$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{mx}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\right] = \frac{d}{dx}\left[x^{\nu}\sum_{k=0}(-1)^k\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{2k+\nu}x^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{m}{2}\right)^{2k+\nu}x^{2k+2\nu-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}(2)(k+\nu)\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{m}{2}\right)^{2k+\nu}x^{\nu+2k-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\,2(k+\nu)\right]$$

$$= \left[ x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\dfrac{m^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu-1}} \cdot x^{\nu+2k-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu)} \right]$$

$$= m\left[ x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\dfrac{m^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu-1}}\, x^{\nu+2k-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu)} \right]$$

$$J_{\nu-1}(mx)$$

$$= m x^{\nu} J_{\nu-1}(mx)$$

$$\int x^{\nu} J_{\nu-1}(mx) = \frac{x^{\nu}}{m} J_{\nu}(mx) + C$$

$$\int x^3 J_2(x)\, dx = x^3 J_3(x) + C$$

$$\int x^5 J_2(x)\, dx = \int \underbrace{x^2}\, \underbrace{x^3 J_2(x)\, dx}_{\text{جزء به جزء}}$$

$\int x^p J_q(x)\, dx$ قابل محاسبه است به شرطی که $p+q>0$

فرد ← به توابع بسل می‌رسیم
زوج ← به توابع بسل مرتبه صفر می‌رسیم

Bessel Functions and Applications
300 pm Korenev

کتاب دانشگاه
۹۰۰ صفحه

| ش | ی | د | س | چ | پ | ج |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
| ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ |
| ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ |
| ۲۰ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۶ |
| ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | | | |

جلسه یازدهم 91/8/

$$x^2y'' + xy' + (\beta^2x^2 - \nu^2)y = 0$$

$$J_\nu(\beta x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\beta x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \quad (*)$$

حالتی که $\frac{\beta}{2} < 0$ باشد:

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0$$

معادله دیفرانسیل پیراسته بسل

$$x^2y'' + xy' + (i^2x^2 - \nu^2)y = 0$$

جواب با استفاده از $(*)$:

$$\rightarrow J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{ix}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$\star\ i^{2k+\nu} = i^\nu \underbrace{i^{2k}}_{(-1)^k} =$$

$$\rightarrow J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} i^{\nu} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$i^{-\nu} J_\nu(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}}_{I_\nu(x)}$$

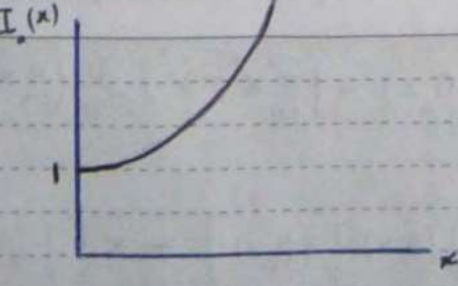
تابع پیراسته بسل نوع اول

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \cdots$$

سری همگراست

$$x = 0 \rightarrow I_0(0) = 1$$

$I_0(x)$ صفر نمی‌شود
صفر ندارد




تابعی را بر حسب تابع پیراسته بسل نوع اول نمی‌توان



بسط داد

اگر معادله ای از نوع پیراسته بسل داشتیم در آن جهت شرط مرزی حتمی نمی توانیم داشته باشیم!

$$x^2y'' + xy' + (\beta^2x^2 - \nu^2)y = 0$$

$$\underbrace{xy'' + y'} + \left(\beta^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0$$

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(\beta^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0$$

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + \left(q(x) + \lambda r(x)\right)y = 0$$ مقایسه با صورت کلی اشتورم لیوویل

اشتورم لیوویل نتیجه: $\begin{cases} p = x \\ r = x \\ q = -\dfrac{\nu^2}{x} \end{cases}$

$$\int_a^b r y_i(x) y_j(x)\, dx = 0 \quad i \neq j$$

$$\int_a^b r y^2(x)\, dx = N$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k y_k(x) \quad , \quad C_k = \frac{\int_a^b r f(x) y_k(x)\, dx}{\int_a^b r y_k^2(x)\, dx}$$

برای معادله بسل می‌نویسیم $\longrightarrow$ $$\int_a^b x J_\nu(\beta_m x) J_\nu(\beta_n x)\, dx = 0 \qquad m \neq n$$

برای اثبات این رابطه داریم:

$$x^2y'' + xy' + (\beta^2x^2 - \nu^2)y = 0$$

$xJ_\nu(\beta_n x)$ $\begin{cases} x^2 J_\nu''(\beta_m x) + xJ_\nu'(\beta_m x) + (\beta_m^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\beta_m x) = 0 & \text{برای } \beta_m: \\ x^2 J_\nu''(\beta_n x) + xJ_\nu'(\beta_n x) + (\beta_n^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\beta_n x) = 0 & \text{برای } \beta_n \end{cases}$ $xJ_\nu(\beta_m x)$

$\xrightarrow{1-2}$ $$x^2\left[J_\nu(\beta_n x)J_\nu''(\beta_m x) - J_\nu(\beta_m x)J_\nu''(\beta_n x)\right] + x\left[J_\nu(\beta_n x)J_\nu'(\beta_m x) - J_\nu(\beta_m x)J_\nu'(\beta_n x)\right]$$

$$\Rightarrow +x^2(\beta_m^2-\beta_n^2)J_\nu(\beta_m x)J_\nu(\beta_n x)=0$$

$$\rightarrow x\underbrace{[\qquad\qquad]+[\qquad\qquad]}\qquad +x(\qquad\qquad)=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(J_\nu(\beta_n x)J_\nu'(\beta_m x)-J_\nu(\beta_m x)J_\nu'(\beta_n x)\right)\right]=(\beta_n^2-\beta_m^2)\,x\,J_\nu(\beta_n x)J_\nu(\beta_m x)$$

از طرفین این رابطه در بازه $[a,b]$ نسبت به $x$ انتگرال می‌گیریم.

$$(**)\quad \left[x\left(J_\nu(\beta_n x)J_\nu'(\beta_m x)-J_\nu(\beta_m x)J_\nu'(\beta_n x)\right)\right]_a^b=(\beta_n^2-\beta_m^2)\int_a^b xJ_\nu(\beta_n x)J_\nu(\beta_m x)\,dx$$

شرط مرزی (I) نوع اول

$$x=a,\ x=b \Rightarrow \quad J_\nu(\beta_m a)=0 \quad J_\nu(\beta_m b)=0$$
$$J_\nu(\beta_n a)=0 \quad J_\nu(\beta_n b)=0$$

سمت چپ $=0$

شرط مرزی (II) نوع دوم

$$J_\nu'(\beta_m a)=0 \quad J_\nu'(\beta_m b)=0$$
$$J_\nu'(\beta_n a)=0 \quad J_\nu'(\beta_n b)=0$$

سمت چپ $=0$

شرط مرزی عمومی در انتقال حرارت

شرط مرزی (III) نوع سوم

$$a_1 y(a)+a_2 y'(a)=0 \rightarrow y(a)+H_1 y'(a)=0$$
$$y(b)+H_2 y'(b)=0$$

$$\rightarrow J_\nu(\beta_m a)+H_1J_\nu'(\beta_m a)=0 \quad (1), \qquad J_\nu(\beta_n a)+H_1J_\nu'(\beta_n a)=0$$
$$J_\nu(\beta_m b)+H_2J_\nu'(\beta_m b)=0 \quad (2), \qquad J_\nu(\beta_n b)+H_2J_\nu'(\beta_n b)=0$$

$$① \rightarrow J_\nu(\beta_m a) = -H_1 J'_\nu(\beta_m a)$$

$$② \rightarrow J_\nu(\beta_m b) = -H_2 J'_\nu(\beta_m b)$$

$$(**) \rightarrow -H_2 J'_\nu(\beta_n b) J'_\nu(\beta_m b) - \{-H_2 J'_\nu(\beta_m b) J'_\nu(\beta_n b)\} = 0$$

← خاصیت تعامد توابع بسل

$$\frac{\left[x\left(J_\nu(\beta_n x) J'_\nu(\beta_m x) - J_\nu(\beta_m x) J'_\nu(\beta_n x)\right)\right]}{\beta_n^2 - \beta_m^2} = \int_a^b x J_\nu(\beta_n x) J_\nu(\beta_m x)\, dx$$

Rec

$$x^2 \underbrace{J''_\nu(\beta_m x)}_{u''} + x \underbrace{J'_\nu(\beta_m x)}_{u'} + (\beta_m^2 x^2 - \nu^2) \underbrace{J_\nu(\beta_m x)}_{u} = 0$$

$$\rightarrow x^2 u'' + x u' + (\beta_m^2 x^2 - \nu^2) u = 0$$

$$\rightarrow x u'' + u' + \left(\beta_m^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) u = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}[x u'] + \left(\beta_m^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) u = 0 \qquad \times 2xu'$$

$$\underbrace{2xu' \frac{d}{dx}[xu']}_{\frac{d}{dx}\left[(xu')^2\right]} + \beta_m^2 x^2 \underbrace{(2uu')}_{\frac{d}{dx}(u^2)} - \nu^2 \underbrace{(2uu')}_{\frac{d}{dx}(u^2)} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} (x^2 u'^2 - \nu^2 u^2)\Big|_a^b + \beta_m^2 \int_a^b x^2 \frac{d}{dx}(u^2)\, dx = 0$$



جزء به جزء

$$\int_a^b x^2 \frac{d}{dx}(u^2)\,dx = x^2u^2 \Big|_a^b - 2\int_a^b x u^2\,dx$$

$$\rightarrow \left[x^2u'^2 + (\beta_m^2 x^2 - \nu^2)u^2\right]_a^b = 2\beta_m^2 \int_a^b x u^2\,dx$$

$$\rightarrow \underbrace{\int_a^b x J_\nu^2(\beta_m x)\,dx}_{N} = \frac{1}{2\beta_m^2}\Big[\beta_m^2 x^2 J_\nu'^2(\beta_m x) + (\beta_m^2 x^2 - \nu^2) J_\nu^2(\beta_m x)\Big]_a^b$$

برای شرایط مرزی مختلف داریم :

I) $J_\nu(\beta_m a) = 0$ و $J_\nu(\beta_m b) = 0$

$$\longrightarrow N = \frac{1}{2}\left[x^2 J_\nu'^2(\beta_m x)\right]_a^b$$

II) $J_\nu'(\beta_m a) = 0$

$J_\nu'(\beta_m b) = 0$

III)

* برای بدست آوردن نرم تابع بسل و بسط دادن هر تابع برحسب توابع بسل داریم :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_\nu(\beta_k x)$$

$$\longrightarrow \int_a^b x J_\nu(\beta_m x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b x J_\nu(\beta_m x) J_\nu(\beta_k x)\,dx$$

$m \neq k \rightarrow 0$

$m = k \rightarrow N$

$$\boxed{\longrightarrow c_k = \frac{1}{N}\int_a^b x f(x) J_\nu(\beta_k x)\,dx}$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, I_\nu(\beta_k x) \quad *$$ سری بسل

چون تابع را برحسب صفرهای تابع بسل بسط دهیم.

## حل معادله پتانسیل در دستگاه مختصات کروی

$$\nabla^2 u=0 \longrightarrow U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=0$$ در دستگاه مختصات قائم

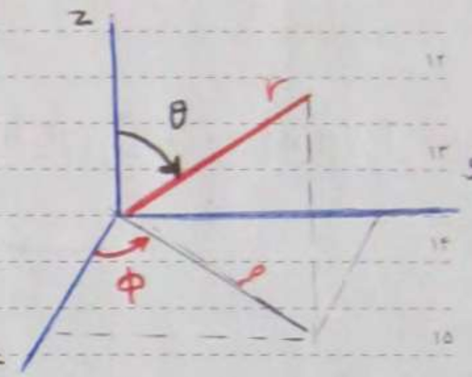
در مختصات کروی داریم:

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0$$

اگر شرایط مرزی تابع طوری باشد که بتوانیم با استفاده از روش جداسازی متغیرها مسأله را حل کنیم داریم:

$0<\theta<\pi$

$0<\phi<2\pi$




$$u(r,\theta,\phi)=M(r)N(\theta)P(\phi)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} M''NP+\frac{2}{r}M'NP+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\cdot MN'P)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}MNP''=0$$

$$\rightarrow \frac{M''}{M}+\frac{2}{r}\frac{M'}{M}+\frac{1}{Nr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta N')+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{P''}{P}=0$$

$$\left\{\frac{M''}{M}+\frac{2}{r}\frac{M'}{M}+\frac{1}{Nr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta N')\right\}r^2\sin^2\theta=-\frac{P''}{P}=m^2$$

$$\rightarrow \boxed{P''+m^2P=0} \quad \text{I} \quad \sin-\cos,\ e$$

$$\rightarrow \left\{\frac{M''}{M}+\frac{2}{r}\frac{M'}{M}+\frac{1}{Nr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(N'\sin\theta)\right\}r^2\sin^2\theta-m^2=0$$

$$\rightarrow \left\{ \frac{r^2 M''}{M} + 2r\frac{M'}{M} + \frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(N'\sin\theta\right) \right\} \sin^2\theta - m^2 = 0$$

$$\rightarrow \left\{ \frac{r^2 M''}{M} + 2r\frac{M'}{M} + \frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(N'\sin\theta\right) \right\} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0$$

$$\rightarrow \frac{r^2 M''}{M} + 2r\frac{M'}{M} = -\left\{ \frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(N'\sin\theta\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right\} = \lambda$$

$$\rightarrow \boxed{r^2 M'' + 2rM' - \lambda M = 0} \quad (\mathrm{II}) \rightarrow$$ معادله کوشی - اویلر

$$\boxed{\frac{d}{d\theta}\left(N'\sin\theta\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) N\sin\theta = 0} \quad (\mathrm{III})$$

$(\mathrm{II})$ $M(r) = r^k \rightarrow \left[k(k-1) + 2k - \lambda\right] r^k = 0 \rightarrow k^2 + k - \lambda = 0$

$$\rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2} \quad \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda} \\ k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda} \end{cases}$$

$$\rightarrow M(r) = A_1 r^{k_1} + A_2 r^{k_2} \quad (\square)$$

از معادلات درجه ۲ : $k_1 k_2 = -\lambda$

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda} = \beta \quad \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda} = -\beta$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda} = -\beta - 1 = k_2$

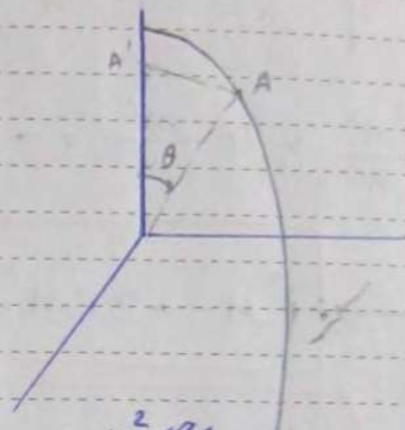
$$\begin{cases} k_1 = \beta \\ -(\beta+1) = k_2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow k_1 k_2 = -\lambda = \left[-\beta(\beta+1)\right] \Rightarrow \beta(\beta+1) = \lambda$$

$$(\text{II}) \longrightarrow M(r) = c_1 r^{\beta} + c_2 r^{-(\beta+1)}$$

$$(\text{III}) \longrightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dN}{d\theta}\right) + \left[\beta(\beta+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] N \sin\theta = 0$$

$$r=1 \longrightarrow \cancel{x}\ z = \cos\theta \rightarrow dz = -\sin\theta\, d\theta$$



$$\frac{dN}{d\theta} = \frac{dN}{dz}\,\frac{dz}{d\theta} = -\sin\theta \frac{dN}{dz}$$

$$\rightarrow -\sin\theta \frac{d}{dz}\left[\sin\theta\left(-\sin\theta \frac{dN}{dz}\right)\right] + \left[\beta(\beta+1) - \frac{m^2 \cancel{\sin\theta}}{\sin^2\theta}\right] N \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \neq 0 \longrightarrow \frac{d}{dz}\left[\sin^2\theta \frac{dN}{dz}\right] + \left[\beta(\beta+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] N = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dN}{dz}\right] + \left[\beta(\beta+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right] N = 0$$

$$\begin{cases} z \longrightarrow x \\ N \longrightarrow y \end{cases} \quad \rightarrow \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'\right] + \left[\beta(\beta+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0$$

$(m=0 \longrightarrow$ معادله دیفرانسیل لژاندر)

$(m \neq 0 \longrightarrow$ معادله دیفرانسیل وابسته لژاندر)

$$m=0 \begin{cases} P_n(x) & \text{چند جمله‌ای‌های لژاندر} \\ Q_n(x) & \text{توابع لژاندر} \end{cases}$$

نوع اول وابسته

$$m \neq 0 \begin{cases} P_n^m(x) & \text{چند جمله‌ای لژاندر از درجه } n \text{ از مرتبه } m \\ & \text{توابع نوع اول وابسته لژاندر} \end{cases}$$



$m \leq n$

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$$Q_n^m(x) =$$

$\boxed{16}$ جلسه شانزدهم 91/8/23

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \beta(\beta+1)y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'\right] + \beta(\beta+1)y = 0 \quad \left\{\begin{array}{l} p = 1-x^2 \\ q = 0 \\ r = 1 \end{array}\right. , \ \lambda = \beta(\beta+1)$$

حول $x=0$ می‌خواهیم این معادله را به روش سری توانی حل کنیم.

$$\rightarrow y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$\alpha = \beta(\beta+1)$

$$\longrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

(یکسان‌سازی توان‌ها) $k \rightarrow k+2$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)a_{k+2} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

یکسان‌سازی حدود $\rightarrow 2a_2 x^0 + 6a_3 x - 2a_1 x + \alpha a_0 x^0 + \alpha a_1 x$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ (k+1)(k+2)a_{k+2} + \underbrace{\left[-k(k-1) - 2k + \alpha\right]}_{-k^2+k-2k+\alpha} a_k \right\} x^k = 0$$

$$= -k^2 - k + \beta^2 + \beta$$

$$= (\beta^2 - k^2) + (\beta - k)$$

$$= (\beta - k)(\beta + k + 1)$$

$x^0: \ 2a_2 + \alpha a_0 = 0 \qquad a_2 = -\frac{\alpha}{2} a_0 = \frac{-\beta(\beta+1)}{2} a_0$

$x^1: \ 6a_3 + (\alpha - 2)a_1 = 0 \qquad a_3 = -\frac{\alpha-2}{6} a_1 = -\frac{\beta^2+\beta-2}{6} a_1$

$$= -\frac{(\beta+2)(\beta-1)}{6} a_1$$

$$\longrightarrow a_{k+2} = -\frac{(\beta-k)(\beta+k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k$$

$k \geq 2$

$$k=2 \rightarrow a_4 = -\frac{(\beta-2)(\beta+3)}{3\times 4} a_2 = \frac{\beta(\beta-2)(\beta+1)(\beta+3)}{4!} a_0$$

$$k=3 \rightarrow a_5 = -\frac{(\beta-3)(\beta+4)}{4\times 5} a_3 = \frac{(\beta-1)(\beta-3)(\beta+2)(\beta+4)}{5!} a_1$$

$$k=4 \rightarrow a_6 = \frac{-(\beta-4)(\beta+5)}{5\times 6} a_4 = \frac{-\beta(\beta-2)(\beta-4)(\beta+1)(\beta+3)(\beta+5)}{6!} a_0$$

$$k=5 \rightarrow a_7 = -\frac{(\beta-5)(\beta+6)}{6\times 7} a_5 = -\frac{(\beta-1)(\beta-3)(\beta-5)(\beta+2)(\beta+4)(\beta+6)}{7!} a_1$$

ترم های زوج ← { $a_0$ ← اندیس های زوج
ترم های فرد ← { $a_1$ ← فرد

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

$$= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\beta(\beta-2)(\beta-4)\cdots(\beta-2m+2)(\beta+1)(\beta+3)\cdots(\beta+2m-1)}{(2m)!} \times x^{2m}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(\beta-1)(\beta-3)(\beta-5)\cdots(\beta-2m+1)(\beta+2)(\beta+4)\cdots(\beta+2m)}{(2m+1)!} \times x^{2m+1}$$

اگر $\beta=2$ تمامی اندیس ها صفر بر | اگر $\beta=1$ از $a_5$ به بعد صفر

اگر $\beta=4$ | اگر $\beta=3$

به ازای $\beta$ های صحیح به چند جمله ای با تعداد محدودی از جملات تبدیل می شود.

if $\beta = 0 \quad \{ \; y_1(x) = a_0$

$\beta = 1 \longrightarrow y_2(x) = a_1 x$

$\beta = 2 \longrightarrow y_1(x) = (1 - 3x^2) a_0$

$\beta = 3 \longrightarrow y_2(x) = (x - \frac{5}{3}x^3) a_1$

اگر $y_1$ و $y_2$ جواب های معادله باشند هر ضریبی از آنها هم جواب معادله خواهد بود

اگر $a_0$ و $a_1$ را طوری انتخاب کنیم که هر دو از $x=1$ بگذرند و مقدارشان یک باشد چند

جمله های لژاندر را خواهیم داشت

$$\left. \begin{matrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{matrix} \right|_{x=1} = 1 \longrightarrow P_n(x)$$

$\beta = 0 \Rightarrow P_0(x) = 1$

$\beta = 1 \longrightarrow P_1(x) = x$

$\beta = 2 \longrightarrow a_0(1 - 3x^2)\big|_{x=1} = 1 \longrightarrow -2a_0 = 1 \rightarrow a_0 = -\frac{1}{2} \longrightarrow P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$\beta = 3 \rightarrow (1 - \frac{5}{3}) a_1 = 1 \rightarrow a_1 = -\frac{3}{2} \longrightarrow P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

هرکدام از چند جمله ای های لژاندر به ازای درجه شان ($n$) در بازه $(1, 0)$، $n$ صفر خواهند داشت

$P_{n} \leftarrow$ تعداد صفر

فرمول رودریگز rodriguez $\longrightarrow \boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n}$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

$P_n(x)$ یکی از جواب‌های معادله دیفرانسیل است.

دو جواب معادله باید باهم استقلال خطی داشته باشند (خارج قسمت آنها باید ثابت نباشد)

$$y_1(x) = P_n(x) \quad , \quad y_2(x) = ?$$

$$\frac{y_2}{y_1} = u$$

$$\Rightarrow y_2(x) = u \cdot P_n \longrightarrow y_2' = u'P_n + uP_n'$$

$$\longrightarrow y_2'' = u''P_n + 2u'P_n' + uP_n''$$

باید در معادله صدق کند

$$\to (1-x^2)\left[u''P_n + 2u'P_n' + uP_n''\right] - 2x\left[u'P_n + uP_n'\right] + n(n+1)uP_n = 0$$

معادله را برحسب مشتقات u مرتب می‌کنیم:

$$\to P_n(1-x^2)u'' + \left[2(1-x^2)P_n' - 2xP_n\right]u' + \Big[\underbrace{(1-x^2)P_n'' + 2xP_n' + n(n+1)P_n}_{=0}\Big]u = 0$$

$$\to P_n(1-x^2)u'' + \left[2(1-x^2)P_n' - 2xP_n\right]u' = 0$$

$$\to u'' + \left[\frac{2P_n'}{P_n} - \frac{2x}{1-x^2}\right]u' = 0$$

$$u' = Z \longrightarrow Z' + \left[\frac{2P'}{P} - \frac{2x}{1-x^2}\right]Z = 0$$

$$: e^{\int\left(\frac{2P'}{P} - \frac{2x}{1-x^2}\right)dx} = e^{2\ln P + \ln(1-x^2)} = e^{\ln P^2(1-x^2)} = P_n^2(1-x^2)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left[Z \cdot P_n^2 (1-x^2)\right] = 0 \rightarrow Z \cdot P_n^2 (1-x^2) = C_1$$

$$\rightarrow u' = \frac{C_1}{P_n^2(x)(1-x^2)} \longrightarrow u = \int \frac{C_1}{P_n^2(x)(1-x^2)}\,dx$$

$$\longrightarrow y_2(x) = Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{C_1}{[P_n(x)]^2 (1-x^2)}\,dx$$

تابع لژاندر: در $x=\pm 1$
تعریف نمی‌شود (ناسره است)

$$\longrightarrow y(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$$

* اگر $x$ شامل $\pm 1$ شود ضریب $C_2$ را صفر در نظر می‌گیریم.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\,dx = 0 \qquad m \neq n \qquad (\star)$$

$$x = \cos\theta \longrightarrow \int_0^{\pi} P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = 0$$

$dx = -\sin\theta\, d\theta$
در حدود انتگرال [illegible]
اثری نشو

$$(\star) \quad \begin{cases} \xrightarrow{\times P_n} (1-x^2)P_m''(x) - 2x P_m'(x) + m(m+1)P_m = 0 \\ \times P_m \quad (1-x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) + n(n+1) P_n = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (1-x^2)\underbrace{\left[P_m'' P_n - P_n'' P_m\right]}_{W''} - 2x \underbrace{\left[P_m' P_n - P_n' P_m\right]}_{W} + \left[m(m+1) - n(n+1)\right] P_m P_n = 0$$



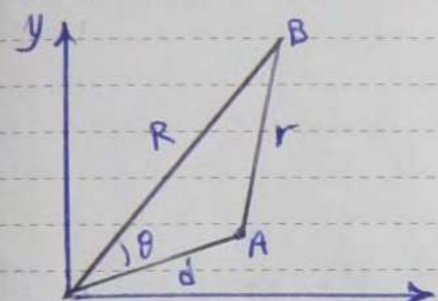
روز سکین حباب ها

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)W\right] dx}_{\Downarrow} = \left[n(n+1)-m(m+1)\right]\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx$$

$$\rightarrow (1-x^2)W\Big|_{-1}^{1} = 0 \rightarrow \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x) = 0$$

“

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{mn} \qquad (**)$$



گرانش : $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

$$= \frac{k}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k}{r}\right) = -k\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$r^2 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta \rightarrow r = \sqrt{d^2+R^2-2dR\cos\theta}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{d^2+R^2-2Rd\cos\theta}} = \frac{1}{R\sqrt{\left(\frac{d}{R}\right)^2+1-2\left(\frac{d}{R}\right)\cos\theta}}, \quad \frac{d}{R}\to t, \quad \cos\theta \to x$$

$$= \frac{1}{R\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n$$

تابع مولد چند جمله ای های لژاندر

$$x=1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \longrightarrow P_n(1)=1$$

$t<1$
سری هندسی

$$x=-1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+t)^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \longrightarrow P_n(-1)=(-1)^n$$

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = [\underbrace{1}_{a} + (\underbrace{t^2-2xt}_{b})]^{-\frac{1}{2}}$$

باید ثابت کنیم

$$\int_{-1}^{1} [P_m(x)]^2 dx = \frac{2}{2m+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \longrightarrow \frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_m(x) P_n(x) t^{m+n}$$

برای $m \neq n$ بدست آوریم

برای $m=n$ داریم

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xt+t^2} = -\frac{1}{2t} \int \frac{-2t\,dx}{1-2xt+t^2} = \frac{-1}{2t} \ln(1-2xt+t^2) \Big|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2t} \left[ \ln(\underbrace{1-2t+t^2}_{(1-t)^2}) - \ln(\underbrace{1+2t+t^2}_{(1+t)^2}) \right]$$

$$= -\frac{1}{t} \ln \frac{1-t}{1+t} = -\frac{1}{t} [\ln(1-t) - \ln(1+t)]$$

$$\ln(1+t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x} = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\left[ -\frac{1}{t} \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n+1} \right]$$

$$\ln(1-t) = -\int_0^t \frac{dx}{1-x} = -\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\left[ -\frac{1}{t} \ln(1-t) \right.$$

$$= -\frac{1}{t} \left[ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 1 + (-1)^n \right] \frac{t^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2t^{2n}}{2n+1}$$

حال می‌توانیم یک تابع را برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر بسط دهیم.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m(x)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) \, dx = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \underbrace{\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \, dx}_{\frac{2}{2n+1}}$$

$$\rightarrow \boxed{A_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) \, dx}$$

معادله ارتعاش یک جسم کروی در سه حالت

جلسه هفدهم ۹۱/۸/۲۸

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

توپر ① $0<r<b$

توخالی ② $a<r<b \quad 0<\theta<\pi$

مقداری بیرون از کره ③ $a<r<\infty \quad t>0$

① $u(b,\theta,t) = f(\theta) = \underline{\underline{0}}$ تغییرمکان در سطح بیرون صفر

$|u(0,\theta,t)| < \infty$

$$\begin{cases} u(r,\theta,0) = f_1(r,\theta) \\ u_t(r,\theta,0) = f_2(r,\theta) \end{cases}$$

شرط مرزی مسئله همگن است از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم.

$$u(r,\theta,t) = M(r)N(\theta)P(t)$$

$$M''NP + \frac{2}{r}M'NP + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\, MPN') = \frac{1}{c^2}MNP''$$

$$\frac{M''}{M} + \frac{2}{r}\frac{M'}{M} + \frac{1}{Nr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\, N') = \frac{P''}{c^2 P} = -\lambda^2$$

①

$$\to P'' + c^2\lambda^2 P = 0 \longrightarrow \boxed{P(t) = A_1 \sin c\lambda t + A_2 \cos c\lambda t}$$

$$\to \frac{M''}{M} + \frac{2}{r}\frac{M'}{M} + \frac{1}{Nr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\, N') + \lambda^2 = 0$$

$$r^2\frac{M''}{M} + \frac{2r^2}{r}\frac{M'}{M} + \frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\, N') + \lambda^2 r^2 = 0$$

$$r^2\frac{M''}{M} + 2r\frac{M'}{M} + \lambda^2 r^2 = -\frac{1}{N\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\, N') = \gamma$$

(2)

$$\begin{cases} r^2 M'' + 2r M' + (\lambda^2 r^2 - \gamma) M = 0 \\ \dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta N'\right) + \gamma N \sin\theta = 0 \end{cases}$$

(3)

$$\cos\theta = \mu \longrightarrow N' = \frac{dN}{d\theta} = \frac{dN}{d\mu}\frac{d\mu}{d\theta} = -\sin\theta \frac{dN}{d\mu}$$

$$(3) \Rightarrow -\sin\theta \frac{d}{d\mu}\left(\sin\theta\left(-\sin\theta \frac{dN}{d\mu}\right)\right) + \gamma N \sin\theta = 0$$

معادله لژاندر $\longrightarrow \dfrac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\dfrac{d\mu}{dN}\right] + \gamma N = 0$

$$\gamma = n(n+1) \Rightarrow \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\mu}{dN}\right] + n(n+1)N = 0$$

$$\longrightarrow N(\mu) = \begin{cases} P_n(\mu) \\ Q_n(\mu) \end{cases}$$

(2) معادله (2) هم به فرم معادله بسل قابل حل خواهد بود.

$Z_\gamma(\lambda r)$ که همه نوع تابع بسل

با توجه به تغییر متغیر مناسب به تابع بسل از مرتبه $n+\frac{1}{2}$ می‌رسیم

$$\begin{cases} J_{n+\frac{1}{2}}(r) \\ Y_{n+\frac{1}{2}}(r) \end{cases}$$

$$\rightarrow u(r,\theta,t) = \left(A_1 \sin c\lambda t + A_2 \cos c\lambda t\right)\left(B_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + B_2 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)\right)$$
$$\left(D_1 P_n(\cos\theta) + D_2 Q_n(\cos\theta)\right)$$

$u$ ← باید کران‌دار باشد.

حالت اول: کره توپر: $Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ در $r=0$ تعریف نمی‌شود ⟵ $\boxed{B_2=0}$

$Q_n(\cos\theta)$ در $\pm 1$ تعریف نمی‌شود ⟵ $\boxed{D_2=0}$

از ادغام ضرایب باقیمانده $\rightarrow u(r,\theta,t) = (A_1^* \sin c\lambda t + A_2^* \cos c\lambda t)\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)\, P_n(\cos\theta)$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda b) = 0 \rightarrow J_{n+\frac{1}{2}}(\beta_m)$$

$\beta_m$: صفرهای تابع $J$ از مرتبه $n+\frac{1}{2}$

مقدار ویژه مربوط به بسل $\rightarrow \lambda_m = \frac{\beta_m}{b}$

اگر ترکیب خطی همه جواب‌ها را در نظر بگیریم داریم:

$$u(r,\theta,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\, P_n(\cos\theta)\left(A_{mn}\cos c\lambda_m t + B_{mn}\sin c\lambda_m t\right)$$

$$f_1(r,\theta) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\, P_n(\cos\theta)$$

با توجه به روابط در مسائل اشتورم لیوویل $\rightarrow$

$$A_{mn} = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{b} r f_1(r,\theta)\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\, P_n(\cos\theta)\sin\theta\, dr\, d\theta}{\int_0^{\pi}\int_0^{b} r J^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\left[P_n(\cos\theta)\right]^2 \sin\theta\, dr\, d\theta}$$

برای $B_{mn}$ با استفاده از شرط $f_2(r,\theta)$ داریم:

$$B_{mn} = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{b} r f_2(r,\theta)\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\, P_n(\cos\theta)\sin\theta\, dr\, d\theta}{c\lambda_m \int_0^{\pi}\int_0^{b} r J^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m r)\left[P_n(\cos\theta)\right]^2 \sin\theta\, dr\, d\theta}$$

حالت دوم: ضریب $Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ ها مخالف صفر خواهد بود

تنها تفاوت با حالت اول این است که

حالت سوم: شبیه حالت دوم خواهد بود.

حال بررسی می‌کنیم که چرا J ها از مرتبهٔ $n+\frac{1}{2}$ بدست آمده اند.

در حالت کلی (که مستقل از $\phi$ نیست) معادله اولیه را داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

تغییر متغیر $\mu=\cos\theta \longrightarrow d\mu=-\sin\theta\, d\theta$

$$-\sin\theta\frac{d}{d\mu}\left[\sin\theta\left(-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)\right]$$

حال معادله اصلی را اصلاح می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

تعویض متغیر دوم:

$$u=\frac{v}{\sqrt{r}}=v r^{-\frac{1}{2}}$$

$$u_r=v_r r^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}v r^{-\frac{3}{2}}$$

$$u_{rr}=v_{rr} r^{-\frac{1}{2}}-v_r r^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}v r^{-\frac{5}{2}}$$

جایگذاری در معادله بالا داریم:

$$v_{rr} r^{-\frac{1}{2}}-v_r r^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}v r^{-\frac{5}{2}}+\frac{2}{r}\left(v_r r^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}v r^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial v}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}=\frac{r^{-\frac{1}{2}}}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\times r^{\frac{1}{2}} \rightarrow v_{rr} - \frac{1}{r} v_r + \frac{3}{4r^2} v + \frac{2}{r}\left(v_r - \frac{1}{2} v r^{-1}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial v}{\partial \mu}\right]$$

$$+ \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - \frac{1}{4r^2} v + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial v}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

با استفاده از جداسازی متغیرها داریم:

$$v(r, \mu, \phi, t) = M(r)\,N(\mu)\,P(\phi)\,Q(t)$$

$$\rightarrow M''NPQ + \frac{1}{r}M'NPQ - \frac{1}{4r^2}MNPQ + \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)MPQN'\right]$$

$$+ \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}MNQP'' = \frac{1}{c^2}MNPQ''$$

$$\rightarrow \frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} + \frac{-1}{4r^2} + \frac{1}{r^2 N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{P''}{P} = \frac{Q''}{c^2 Q} = -\lambda^2$$

$$\text{I} \quad Q'' + c^2\lambda^2 Q = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = A_1 \sin c\lambda t + A_2 \cos c\lambda t$$

$$\frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} - \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{r^2 N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{P''}{P} + \lambda^2 = 0$$