$$\times r^{\frac{1}{2}} \rightarrow v_{rr} - \frac{1}{r}v_r + \frac{3}{4r^2}v + \frac{2}{r}\left(v_r - \frac{1}{2}v r^{-1}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial v}{\partial\mu}\right]$$

$$+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - \frac{1}{4r^2}v + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial v}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

با استفاده از جداسازی متغیرها داریم:

$$v(r,\mu,\phi,t) = M(r)N(\mu)P(\phi)Q(t)$$

$$\rightarrow M''NPQ + \frac{1}{r}M'NPQ - \frac{1}{4r^2}MNPQ + \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)MPQN'\right]$$

$$+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}MNQP'' = \frac{1}{c^2}MNPQ''$$

$$\rightarrow \frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} + \frac{-1}{4r^2} + \frac{1}{r^2N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{P''}{P} = \frac{Q''}{c^2Q} = -\lambda^2$$

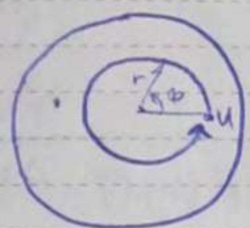
$$\text{I}\quad Q'' + c^2\lambda^2 Q = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = A_1\sin c\lambda t + A_2\cos c\lambda t$$

$$\frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} - \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{r^2N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{P''}{P} + \lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} + \frac{-1}{4r^2} + \frac{1}{r^2 N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \lambda^2\right\} r^2(1-\mu^2) = -\frac{P''}{P} = \nu^2$$

$$\text{II} \quad P'' + \nu^2 P = 0 \rightarrow P(\phi) = D_1 \sin \nu\phi + D_2 \cos \nu\phi$$



روی کره در صفحه xy

کمترین مقداری که ν می‌تواند داشته باشد یک است

ν عددی صحیح است. $(\nu = n)$

$$\rightarrow \left\{\frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} - \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{r^2 N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \lambda^2\right\} r^2(1-\mu^2) - \nu^2 = 0$$

$$\rightarrow \left\{\frac{M''}{M} + \frac{1}{r}\frac{M'}{M} - \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{r^2 N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \lambda^2\right\} - \frac{\nu^2}{r^2(1-\mu^2)} = 0$$

$$\rightarrow r^2\frac{M''}{M} + r\frac{M'}{M} - \frac{1}{4} + \frac{1}{N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)N'\right] + \lambda^2 r^2 - \frac{\nu^2}{(1-\mu^2)} = 0$$

$$\underbrace{r^2\frac{M''}{M} + r\frac{M'}{M} - \frac{1}{4} + \lambda^2 r^2}_{} = \underbrace{-\frac{1}{N}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dN}{d\mu}\right] + \frac{n^2}{1-\mu^2}}_{\text{شبیه معادله دیفرانسیل لژاندر}} = \gamma$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dN}{d\mu}\right] + \left(-\frac{n^2}{1-\mu^2} + \gamma\right)N = 0$$

جواب های این معادله لژاندر خواهد بود، بشرطی که $\text{II} \; P_n^m(\mu)$ و $Q_n^m(\mu) : \gamma = m(m+1)$

$$\rightarrow r^2\frac{M''}{M} + r\frac{M'}{M} - \frac{1}{4} + \lambda^2 r^2 = m^2 + m$$

$$(m+\tfrac{1}{2})^2$$

$$\rightarrow r^2 M'' + rM' + \left[\lambda^2 r^2 - \left(m^2+m+\tfrac{1}{4}\right)\right]M = 0$$

این معادله، معادله بسل از مرتبه $m+\frac{1}{2}$ می‌باشد.

توابع بسل استوانه‌ای $\rightarrow$ $J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)$, $Y_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ توابع بسل کروی

(IV) $\boxed{\; j_m(\lambda r) \qquad y_m(\lambda r) \;}$

$$m=0 \rightarrow J_{\frac{1}{2}}(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r \lambda}}\,\sin\lambda r$$

از فرمول رودریگز

$$\rightarrow \text{(II)} \begin{cases} P_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m}{d\mu^m} P_n(\mu) = \dfrac{(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \dfrac{d^{m+n}}{d\mu^{m+n}} (\mu^2-1)^n \\ Q_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m}{d\mu^m} Q_n(\mu) \end{cases}$$

در حل برخی مسائل به توابع زیر می‌رسیم:

$$P_n^{-m}(\mu) = (-1)^m P_n^m(\mu)$$

$$\times\times \longleftrightarrow \times\alpha$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(\mu) P_n(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

از کتاب - اگر برعکس نوشته شود

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(\mu) P_k^m(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1}\frac{(m+n)!}{(m-n)!}\delta_{kn}$$

در حل برخی از مسائل، توابعی را می‌شناسیم که بایستی ویژگی‌های این توابع را بدانیم

از جمله توابع خاص:
- تابع گاما
- تابع بتا
- تابع خطا
- تابع انتگرال نمایی

● تابع گاما

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

به ازای $n>0$ همگرا

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب می‌خواهیم تابع گاما را به شکل‌های مختلف بنویسیم:

① $x=\lambda y \longrightarrow \Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-\lambda y}(\lambda y)^{n-1}\lambda\,dy$

$$\boxed{\Gamma(n)=\lambda^n\int_0^\infty e^{-\lambda y}y^{n-1}\,dy}$$

② $e^{-x}=y$ $\quad \begin{cases} x\to\infty \longrightarrow y\to 0 \\ x=0 \longrightarrow y=1 \end{cases}$

$-x=\ln y$

$x=-\ln y=\ln\frac{1}{y}$

$$\rightarrow \boxed{\Gamma(n)=\int_1^0 y\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{n-1}\frac{-dy}{y}=\int_0^1\left[\ln\frac{1}{y}\right]^{n-1}dy}$$

③ $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}} \longrightarrow dx=\frac{1}{n}y^{\frac{1-n}{n}}\,dy$

$$\rightarrow \boxed{\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-\sqrt[n]{y}}\,y^{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}y^{\frac{1-n}{n}}\,dy=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-\sqrt[n]{y}}\,dy}$$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
				۱	۲	۳
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-y^2}dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

④ $x = u^2 \rightarrow dx = 2u\,du$

$$\rightarrow \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-u^2}(u^2)^{n-1}\,2u\,du =$$

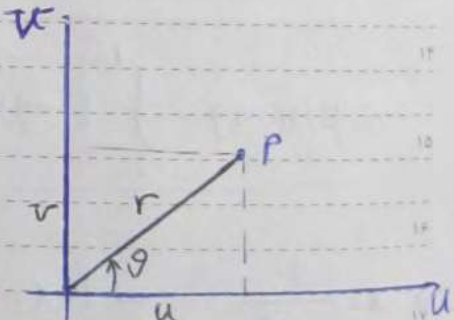
$$\Rightarrow \Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2n-1}\,du \quad ①$$

می‌توانیم بنویسیم $\Gamma(m) = 2\int_0^\infty e^{-v^2}v^{2m-1}\,dv \quad ②$

$$①,② \Rightarrow \Gamma(m)\,\Gamma(n) = 4\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2n-1}v^{2m-1}\,du\,dv \quad ③$$

با استفاده از دستگاه مختصات قطبی داریم

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}, \quad r^2 = u^2 + v^2$$



المان سطح: $du\,dv = r\,dr\,d\theta$

$$③ \Rightarrow \Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2n-1}(r\sin\theta)^{2m-1}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2m+2n-1}\cos^{2n-1}\theta\,\sin^{2m-1}\theta\,d\theta$$

$$= \underbrace{\left(2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2m+2n-1}\,dr\right)}_{\Gamma(m+n)}\underbrace{\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,d\theta\right)}_{\beta(m,n)}$$

مقایسه با ①

$$\Rightarrow \boxed{\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}}$$

تابع بتا

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

اگر $x=\sin^2\theta$ انتگرال صفحه‌ی قبل ظاهر می‌شود

$$\beta(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{m-1}(\cos^2\theta)^{n-1}\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

جلسه هجدهم 91/8/30

بیان تابع گاما به شکل های مختلف

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

1) $1-x=y \rightarrow x=1-y$

$\begin{cases} x=0 \rightarrow y=1 \\ x=1 \rightarrow y=0 \end{cases}$ $\quad -dx=dy$

از منفی در انتگرال اثری نکرد $\quad dx=\frac{-dy}{(1+y)^2}$

$$\boxed{\rightarrow \beta(m,n)=\int_0^1 (1-y)^{m-1}y^{n-1}\,dy}$$

تابع β یک تابع متقارن نسبت به متغیرهایش می‌باشد

2) $x=\frac{y}{1+y} \rightarrow 1-x=\frac{1}{1+y}$ $\quad x=0 \quad y=0$, $\quad x\rightarrow 1 \quad y\rightarrow\infty$

$$\longrightarrow \beta(m,n)=\int_0^\infty\left(\frac{y}{1+y}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{n-1}\frac{dy}{(1+y)^2}=\boxed{\int_0^\infty\frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy} \quad (*)$$

(*) $y=\frac{ax}{b} \rightarrow \beta(m,n)=\int_0^\infty \frac{\left(\frac{ax}{b}\right)^{m-1}}{\left(\frac{ax+b}{b}\right)^{m+n}}\frac{a}{b}\,dx$

$$\longrightarrow \beta(m,n)=a^m b^n\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(ax+b)^{m+n}}\,dx$$

(★)

$$\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy = \int_0^1 \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy + \underbrace{\int_1^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy}$$

$y=\frac{1}{x}$ $\quad \begin{cases} y=1 & x=1 \\ y=\infty & x=0 \end{cases}$

$$\int_1^0 \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1}}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{m+n}}\left(\frac{-dx}{x^2}\right)$$

$$=\int_0^1 \frac{x^{m+n}}{x^{m-1}\,x^2\,(x+1)^{m+n}}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^{m+n}}{x^{m+1}\,(x+1)^{m+n}}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta(m,n) = \int_0^1 \frac{y^{m-1}+y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy}$$

② $\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

$x=\sin^2\theta$ $\quad \begin{cases} x=0 & \theta=0 \\ x=1 & \theta=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\quad \to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2}\theta \cos^{2n-2}\theta\,(2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\frac{1}{2}\beta(m,n) = \boxed{\to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}}$$

③ $\begin{cases} 2m-1=p \\ 2n-1=q \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m=\frac{p+1}{2} \\ n=\frac{q+1}{2} \end{cases} \to \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\theta\cos^q\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$

$p,q>-1$

$$p=0 \longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^q \theta \, d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2})}{2\Gamma(\frac{q+2}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{q+1}{2})}{2\Gamma(\frac{q+2}{2})}$$

$$\rightarrow \beta(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}{2\Gamma(1)} \longrightarrow \Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

$$q=0 \longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p \theta \, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{p+1}{2})}{2\Gamma(\frac{p+2}{2})}$$

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

اگر $m=n$ داریم:

$$\Rightarrow \beta(m,m)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{m-1}\,dx = \frac{[\Gamma(m)]^2}{\Gamma(2m)}$$

حال اگر $m \rightarrow 2m$ داریم:

$$\beta(m,m)=\int_0^1 [x(1-x)]^{m-1}\,dx$$

$$x=\frac{1+t}{2} \quad \begin{cases} x=0 & t=-1 \\ x=1 & t=1 \end{cases}$$

$$2\,\frac{1}{2^{2m-1}}\int_0^1 (1-t^2)^{m-1}\,dt$$

$$\rightarrow \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{1-t}{2}\right)\right]^{m-1}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2^{2m-1}}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{m-1}\,dt = \frac{1}{2^{2m-1}}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{m-1}\,dt$$

$$t^2=z \rightarrow 2t\,dt=dz$$

$$\rightarrow \frac{1}{2^{2m-2}}\int_0^1 (1-z)^{m-1}\frac{dz}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2^{2m-1}}\underbrace{\int_0^1 (1-z)^{m-1}\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}}}_{\beta(m,\frac{1}{2})}$$

W. W. BELL
special functions
for scientists and engineers
1968

$$\longrightarrow \beta(m,m) = \frac{1}{2^{2m-1}}\,\beta\left(m,\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2m-1}} \times \frac{\Gamma(m)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\longrightarrow \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(2m)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \times \frac{1}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \longrightarrow \boxed{\Gamma(2m) = \frac{2^{2m-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(m)\,\Gamma\left(m+\tfrac{1}{2}\right)}$$

Dublication of Legender فرمول

• مثال:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{tg\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\theta \cos^{-\frac{1}{2}}\theta\, d\theta$$

$$\begin{cases} 2m-1 = \frac{1}{2} \\ 2n-1 = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ n = \frac{1}{4} \end{cases} \quad = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{2}\,\pi$$

$$\boxed{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}}$$

• مثال:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \qquad x^3 = t \quad \begin{cases} x=0 & t=0 \\ x=1 & t=1 \end{cases}$$

$$3x^2\,dx = dt \longrightarrow dx = \frac{dt}{3x^2} = \frac{dt}{3t^{\frac{2}{3}}}$$

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{1}{3}\,\frac{t^{-\frac{2}{3}}\,dt}{(1-t)^{1/3}} = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{3}}\, t^{-\frac{2}{3}}\, dt = \frac{1}{3}\,\beta\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\begin{cases} m-1 = -\frac{2}{3} \rightarrow m = \frac{1}{3} \\ n-1 = \frac{-1}{3} \rightarrow n = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{3}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\int_0^\infty t^{-3/2}(1-e^{-t})\,dt$$

$$=\int_0^\infty \underbrace{(1-e^{-t})}_{u}\underbrace{t^{-\frac{3}{2}}\,dt}_{dv} = -2t^{-\frac{1}{2}}(1-e^{-t})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-2t^{-\frac{1}{2}})(e^{-t}dt)$$

$$= \frac{-2(1-e^{-t})}{\sqrt{t}}\Big|_0^\infty + 2\underbrace{\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,dt}_{\Gamma(\frac{1}{2})} = (0-0) + 2\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}$$

Incomplete Gamma Funcition

- $\gamma(n,x)=\int_0^x e^{-t}t^{n-1}\,dt$

تابع گامای غیرکامل مکمل

$\Gamma(n,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{n-1}\,dt$

$$\boxed{\Gamma(n)=\gamma(n,x)+\Gamma(n,x)}$$

$$\gamma(n,x)=\int_0^x \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{t^k}{k!}t^{n-1}\,dt$$

$$=\int_0^x \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{t^{k+n-1}}{k!}\,dt$$

$$=\sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{x^{k+n}}{k!\,(n+k)}$$

$$= x^n\sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{x^k}{k!\,(n+k)}$$

- $\beta(m,n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt$

غیرکامل $\beta_x(m,n)=\int_0^x t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt$

تابع انتگرال نمایی (exp. In. Func)

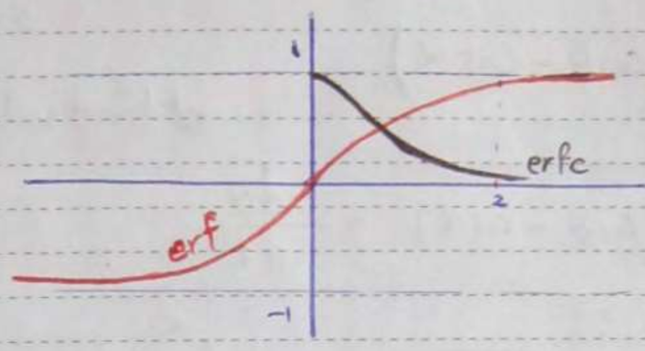
$$E_1(x)=-\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt=-\Gamma(0,x)$$

را هم می‌توان به شکل سری نوشت مثل $\beta(m,n)$

تابع خطا

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

تابع خطای مکمل - $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt$



رابطه تابع خطا با توابع گاما با استفاده از تغییر متغیر مناسب :

$$t^2 = y \rightarrow 2t\,dt = dy \longrightarrow t = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \qquad \begin{cases} t=0 & y=0 \\ t=x & y=x^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} e^{-y} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$\boxed{erf(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right)}$$

$$\boxed{\rightarrow erfc(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right)}$$

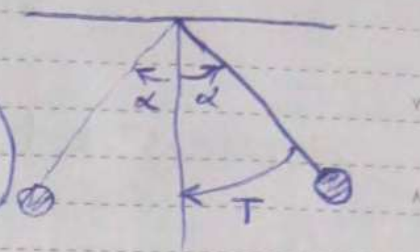
معادله حاکم بر حرکت پاندول

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

$$\rightarrow \dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \dot{\theta} \sin\theta \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{l} \cos\theta\right)$$

$$\rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + C_1$$

$$\rightarrow 0 = \frac{2g}{l}\cos\alpha + C_1 \rightarrow \boxed{C_1 = \frac{-2g}{l}\cos\alpha}$$



$$\rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}\left(\cos\theta - \cos\alpha\right)$$

$\theta = \alpha \rightarrow$ سرعت زاویه ای $= 0$

دوره تناوب کامل $= 4T$

$$\rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}\left(\cos\theta - \cos\alpha\right)} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt \rightarrow \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \int_0 \sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt$$

$$\rightarrow T\sqrt{\frac{2g}{l}} = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

$$\cos\theta - \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} - \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\left[1 - \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right]$$

$$= \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta/2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2}}$$

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = x \rightarrow \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sin\frac{\alpha}{2}} = dx \rightarrow d\theta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\,dx}{\cos\frac{\theta}{2}} \quad \begin{cases} \theta = 0 & x = 0 \\ \theta = \alpha & x = 1 \end{cases}$$

$$= \int \frac{\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\theta/2}\,dx}{\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

انتگرال های بیضوی (لژاندر)

$$= \int_0^1 2 \frac{dx}{\sqrt{2(1-x^2)}\sqrt{1-x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

نوع اول $\int_0^{\theta} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = F(k,\theta)$ $\boxed{0<k<1}$

نوع دوم $\int_0^{\theta} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\, d\phi = E(k,\theta)$

$0<k<1$

Ch8 : all / 9, 23, 24

Ch9 : all / 3, 7

(تا آخر فصل ۹ - میان‌ترم دوم) 5 یا 6 دی ماه

جلسه ۱۹ - 91/9/12

IT : تبدیلات انتگرالی

استفاده از IT در حل PDE

I : بازه

$f(t)$

$k(s,t)$

s : پارامتر تبدیل

$k(s,t)$: هسته تبدیل (کرنل تبدیل)

$$F(s) = I[f(t)] = \int_a^b k(s,t) f(t)\, dt$$

تبدیل معکوس $\longrightarrow f(t) = I^{-1}[F(s)] = \int_c^d F(s)\, k^{-1}(s,t)\, ds$

بر حسب k ها و F های متفاوت تبدیلات انتگرالی متفاوتی خواهیم داشت

نام تبدیل	(a,b)	$k(s,t)$	(c,d)	$k^{-1}(s,t)$
لاپلاس	$(0,\infty)$	e^{-st}	$(\gamma-i\infty, \gamma+i\infty)$	$\frac{1}{2\pi i}e^{st}$
فوریه	$(-\infty,+\infty)$	e^{-ist} / $\frac{e^{-ist}}{\sqrt{2\pi}}$	$(-\infty,+\infty)$	$\frac{1}{2\pi}e^{ist}$ / $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ist}$
سینوسی فوریه	$(0,\infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin st$	$(0,\infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(st)$
کسینوسی فوریه	$(0,\infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st)$	$(0,\infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st)$

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s)\, ds$$

$$F_s(s) = \mathcal{F}_s[f(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin st\, dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}[F_s(s)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_s(s)\sin st\, ds$$

$$F_c(s) = \mathcal{F}_c[f(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos st\, dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}[F_c(s)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(s)\cos st\, ds$$

تبدیل فوریه وقتی سیستم مختصات محوری باشد به تبدیل هانکل تبدیل می‌شود

هانکل	$(0,\infty)$	$tJ_n(s,t)$	$(0,\infty)$	$tJ_n(s,t)$

مرتبه ← n

$$H_n[f(t)] = \int_0^\infty tJ_n(s,t)\, f(t)\, dt = H_n(s)$$

$$f(t) = \int_0^\infty H_n(s)\, tJ_n(s,t)\, ds$$ (تبدیل وارون هنکل)

در حالت خاص و با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب به تبدیل ملین می‌رسیم:

ملین	$(0,\infty)$	t^{s-1}	$\begin{pmatrix}\gamma-i\infty\\ \gamma+i\infty\end{pmatrix}$	$\frac{1}{2\pi i}t^{-s}$

$$M[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, t^{s-1}\, dt = M(s)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M(s)\, t^{-s}\, ds$$

در ادامه به نحوه بدست آوردن این تبدیلات (سرمنشأ: تبدیل فوریه) اشاره می‌کنیم و سپس به ویژگی‌ها و نحوه کاربرد این تبدیلات می‌رسیم.

محیط یا دامنه مسئله:
- ← محدود (a,b)
- ← نیمه محدود $(0,\infty)$ $(-\infty,b)$ →
  - $x=0$ →
    - $u=0$ → تبدیل سینوسی فوریه
    - $u_x=0$ → " کسینوسی فوریه
    - $u_x+Hu=0$ → تبدیل استاندارد فوریه
  - $x\to\infty$
- ← نامحدود $(-\infty,+\infty)$ → (تابع کراندار) $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) < \infty$
  (فوریه)

محدود:

$x=0$	$x=L$	
$u=0$	$u=0$	→ تبدیل محدود سینوسی فوریه
$u_x=0$	$u_x=0$	→ " کسینوسی فوریه

ترکیب شرایط بالا → تبدیل فوریه

معادله گرما

$$c^2 u_{xx} = u_t \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

از تبدیل محدود سینوسی فوریه استفاده می کنیم:

کران، محدود

$$\bar{U}_s(n,t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

اگر f فرد بود $\longrightarrow$ $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = F_s(n)$$

$$\longrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_s(n,t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\longrightarrow \frac{2c^2}{L}\int_0^L u_{xx}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L u_t\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big[\underbrace{\frac{2}{L}\int_0^L u\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx}_{\bar{U}}\Big]$$

$$\longrightarrow \frac{2c^2}{L}\int_0^L u_{xx}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{\partial \bar{U}_s(n,t)}{\partial t}$$

سمت چپ را از جزء به جزء حساب می کنیم

کران

$$\int_0^L u_{xx}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = u_x\sin\frac{n\pi}{L}x\Big|_0^L - \frac{n\pi}{L}\int_0^L u_x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

جزء به جزء

$$= -\frac{n\pi}{L}\Big[u_x\cos\frac{n\pi}{L}\Big|_0^L + \frac{n\pi}{L}\int_0^L u\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\Big]$$

جا گذاری $\Rightarrow$ $-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}\bar{U}_s(n,t) = \frac{\partial \bar{U}_s(n,t)}{\partial t}$ $\rightarrow$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$\longrightarrow \bar{U}_s(n,t) = A_1 e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$\bar{U}_s(n,0) = A_1 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\rightarrow \bar{U}_s(n,t) = \left[\frac{2}{L}\int_0^L f(x')\sin\frac{n\pi}{L}x'\,dx'\right] e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_s(n,t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

حل معادله گرما در محیط نامحدود ⇐

$$c^2 u_{xx} = u_t \qquad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) < \infty$$

نماد تبدیل

$$\mathcal{F}[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-isx}\,dx = \bar{U}(s,t)$$

$$\xrightarrow{e^{-isx},\int} c^2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}e^{-isx}\,dx}_{\text{با استفاده از خواص تبدیل فوریه}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-isx}\,dx = \frac{\partial \bar{U}(s,t)}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right] = (is)^n\mathcal{F}[f(x)]$$

$$\rightarrow -c^2 s^2\,\bar{U}(s,t) = \frac{\partial \bar{U}(s,t)}{\partial t} \longrightarrow \bar{U}(s,t) = A_1 e^{-c^2 s^2 t}$$

$$\bar{U}(s,0) = A_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-isx}\,dx = F(s)$$

$$\rightarrow \bar{U}(s,t) = F(s)e^{-c^2 s^2 t}$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{U}(s,t)e^{isx}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{-c^2 s^2 t}e^{isx}\,ds$$

$F(s)$ جایگذاری $\longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')e^{-isx'}dx'\right\} e^{-c^2s^2t}e^{isx}ds$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-c^2s^2t}e^{-is(x'-x)}ds\right]}_{G(x,t|s,0)}dx'$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\overset{a^2}{c^2s^2t}+\overset{2ab}{is(x'-x)}]}ds \qquad , \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$$

انتگرال گاوسی

$$\begin{cases} c^2s^2t = a^2 \rightarrow a = cs\sqrt{t} \\ is(x'-x) = 2ab = 2cs\sqrt{t}\,b \rightarrow b = \frac{i(x'-x)}{2c\sqrt{t}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\underbrace{c^2s^2t + is(x'-x) + \frac{i^2(x'-x)^2}{4c^2t}}_{\left(cs\sqrt{t}+\frac{i(x'-x)}{2c\sqrt{t}}\right)^2} - \frac{i^2(x'-x)^2}{4c^2t}\right]}ds$$

$$= \frac{e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(cs\sqrt{t}+\frac{i(x'-x)}{2c\sqrt{t}}\right)^2}ds}_{\frac{\sqrt{\pi}}{c\sqrt{t}}}$$

$cs\sqrt{t} + \frac{i(x'-x)}{2c\sqrt{t}} = u$

$\longrightarrow ds = \frac{du}{c\sqrt{t}}$

$s \to -\infty \quad u \to -\infty$

$s \to +\infty \quad u \to +\infty$

$$\rightarrow u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\frac{e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}}{\underbrace{2c\sqrt{\pi t}}}dx'$$

Fundamental Solution جواب اساسی معادله گرما

در $t=0$ تعریف نمی شود

جواب را به ازای حالت خاصی از f می توان بدست آورد

فرض $f(x) = u_0 \rightarrow u(x,t) = \frac{u_0}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}dx'$

$$\rightarrow u(x,t) = \frac{u_0}{2c\sqrt{\pi t}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}\, dx' + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4c^2t}}\, dx' \right\}$$

انتگرال اول $\quad \frac{x'-x}{2c\sqrt{t}} = -z \quad \rightarrow dx' = -2c\sqrt{t}\, dz$

$$\rightarrow = \frac{u_0}{2c\sqrt{\pi t}} \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{x}{2c\sqrt{t}}} e^{-z^2} (-2c\sqrt{t}\, dz) \right.$$

انتگرال دوم $\quad \frac{x'-x}{2c\sqrt{t}} = w$

$$\left. + \int_{\frac{-x}{2c\sqrt{t}}\, e^{-v}}^{\infty} e^{-w^2} (2c\sqrt{t})\, dw \right\}$$

$dx' = 2c\sqrt{t}\, dw$

$$= \frac{2u_0}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\frac{x}{2c\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-w^2} dw + \int_{\frac{x}{2c\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \right\}$$

$$\star \ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-w^2} dw = \operatorname{erfc}(x)$$

$$= \frac{u_0}{2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{-x}{2c\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right) \right]$$

★ در مورد کمیت مهم این جواب ٤
[illegible] سرعت انتشار گرما [illegible] سرعت
انتشار [illegible]

● معادله موج در حالت نامحدود $-\infty < x < \infty$

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}$$

$u(x,0) = f(x) \qquad \lim_{|x|\to\infty} u < \infty \qquad$ (تبدیل فوریه)

$u_t(x,0) = 0$

$$\bar{U}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-isx}\, dx$$

$y = -x - 1$ $-1 = -1$ $y' = x - y$ $y(-1) = -1$

$$\rightarrow -c^2 s^2\, \bar{U}(s,t) = \frac{\partial^2 \bar{U}(s,t)}{\partial t^2}$$ → (جوابها sinها و cs هستند)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{U}(s,t)}{\partial t^2} + c^2 s^2\, \bar{U}(s,t) = 0$$

$$\rightarrow \bar{U}(s,t) = A_1 \sin cst + A_2 \cos cst$$

$$\bar{U}_t(s,0)\big|_{t=0} = 0 \longrightarrow \boxed{A_1 = 0}$$

$$\longrightarrow \bar{U}(s,t) = A_2 \cos cst \qquad \rightarrow \bar{U}(s,0) = A_2 = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-isx}\, dx$$

$$\rightarrow \bar{U}(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\, e^{-isx'}\, dx' \cdot \cos cst$$

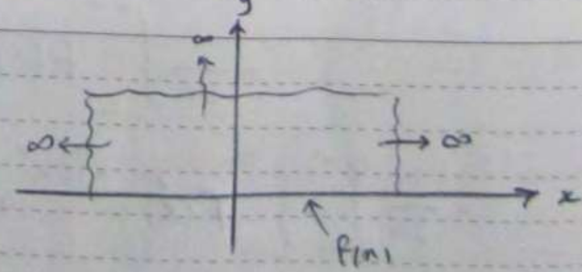
$$\rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(s,t)\, e^{isx}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, e^{-is(x'-x)}\, \underbrace{\cos cst}_{\frac{e^{isct} + e^{-isct}}{2}}\, dx'\, ds$$ $\cdot\ F(x+ct) + F(x-ct)$

جلسه 20 - 91/9/14

معادله پتانسیل (دوبعدی) را در نیم صفحه بالایی در نظر می‌گیریم. (مسئله دیریکله برای نیم صفحه بالایی)
در جهت y و شرط مرزی می‌توانیم بنویسیم

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$



$$\begin{cases} \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x,y) < \infty \\ \lim u(x,y) < \infty \end{cases} \qquad u(x,0) = f(x)$$

اگر به جای $u(x,0)$ ، $u_x(x,0)$ را داده بودند به مسئله نیومان تبدیل می‌شود

در ترکیب حالات بالا به مسئله روبین را داراشتیم.

از تبدیل فوریه برای حل این معادله استفاده می‌کنیم:

$$\bar{u}(s,y) = \mathcal{F}[u(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{-isx}\, dx$$

$$\rightarrow \mathcal{F}[u_{xx}] + \mathcal{F}[u_{yy}] = 0 \qquad \leftarrow \text{ویژگی خطی تبدیلات فوریه}$$

ویژگی دیگر: $\mathcal{F}[u_{xx}] = (is)^2\, \mathcal{F}[u]$

$$\rightarrow -s^2\,\bar{u}(s,y) + \frac{\partial^2 \bar{u}(s,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{معادله دیفرانسیل مرتبه } 2$$

$$\rightarrow \bar{u}(s,y) = A_1 e^{sy} + A_2 e^{-sy}$$

$$\rightarrow u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(s,y)\, e^{isx}\, ds$$

A_1 و A_2 ممکن است توابعی از s باشند.

$$\bar{u}(s,y) = A_3\, e^{-|s|y}$$

$A_3 = A_2 \leftarrow s>0$

$A_3 = A_1 \leftarrow s<0$

جهت برآورده‌سازی شرط کرانداری

$$\bar{u}(s,0) = A_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-isx}\, dx = F(s)$$

$$\Rightarrow \bar{u}(s,y) = F(s)\, e^{-|s|y} \longrightarrow u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(s,y)\, e^{-isx}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\, e^{-|s|y}\, e^{isx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x')\, e^{-isx'}\, dx'\, e^{-|s|y}\, e^{isx}\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x'-x)-|s|y} \, ds \right\} dx'$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x'-x)-|s|y} \, ds = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{s(y-i(x'-x))} ds + \int_{0}^{\infty} e^{-s[y+i(x'-x)]} ds \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{e^{s(y-i(x'-x))}}{y-i(x'-x)} \Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-s[y+i(x'-x)]}}{-[y+i(x'-x)]} \Bigg|_{0}^{\infty} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{y-i(x'-x)} + \frac{1}{y+i(x'-x)} \right\}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2y}{y^2+(x'-x)^2} \right\} = \frac{y}{\pi[y^2+(x'-x)^2]}$$

انتگرال پواسون برای نیم صفحه بالایی :

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')\, dx'}{y^2+(x'-x)^2}}$$

if $f(x')=1 \rightarrow u \neq tg^{-1}$

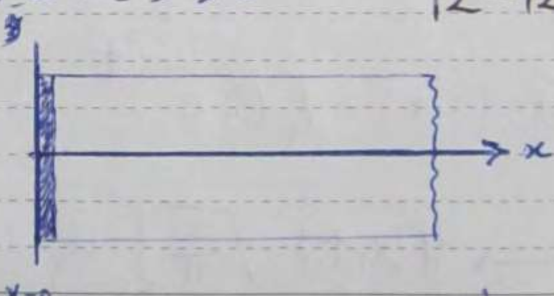
مسئله 12-12 معادله انتقال حرارت در یک میله با طول نیم محدود

$u_{xx} = u_t \qquad x>0 \,,\, t>0$

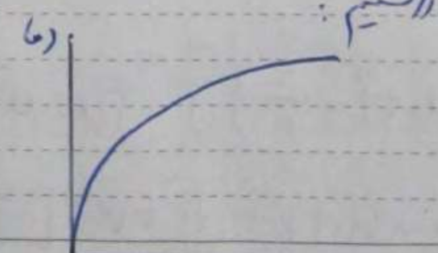
$u(0,t)=0 \rightarrow$ دما در $x=0$ $=0$

$u(x,0)=f(x)$

و جواب در حالت خاص: ثابت $= f(x)$



در انتقال حرارت داشتیم :



این مسئله را به سه طریق حل خواهیم کرد

۱- تبدیل سینوسی فوریه

2- " لاپلاس

سری های توانی

انتگرال گیری در صفحه z

$\eta = \frac{x}{2\sqrt{kt}}$

$$\bar{u}_s(s,t) = \underset{s}{\mathcal{F}}\left[u(x,t)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x,t) \sin(sx)\, dx$$

از طرفین معادله نسبت به x تبدیل سینوسی فوریه می‌گیریم:

$$\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_{xx} \sin(sx)\, dx = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} \sin(sx)\, dx}_{\frac{\partial \bar{u}_s(s,t)}{\partial t}}$$

$$* \int_0^\infty u_{xx} \sin(sx)\, dx = u_x \sin(sx)\Big|_0^\infty - s\int_0^\infty u_x \cos sx\, dx$$

$u_x = 0$ کران بالا

$\sin(sx) = 0$ کران پایین

$$= -s\left\{\left[u \cos sx\Big|_0^\infty\right] + s\int_0^\infty u \sin(sx)\, dx\right\}$$

$$= -s^2 \int_0^\infty u \sin(sx)\, dx$$

اعمال ضرب

$$* \; -s^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u \sin(sx)\, dx = -s^2 \bar{u}_s(s,t)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله اصلی}} \frac{\partial \bar{u}_s(s,t)}{\partial t} = -s^2 \bar{u}_s(s,t) \xrightarrow{\text{جواب معادله}} u_s(s,t) = A_1 e^{-s^2 t}$$

شرط اولیه

$$\bar{u}_s(s,0) = A_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(sx)\, dx = \underset{s}{F}(s)$$

$$\Rightarrow \bar{u}_s(s,t) = \underset{s}{F}(s)\, e^{-s^2 t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x') \sin(sx')\, dx'\, e^{-s^2 t}$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{u}_s(s,t) \sin(sx)\, ds$$

در رابطه انتگرال $f(x)$: $x \rightarrow x'$

$$\rightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x')\, e^{-s^2 t} \sin(sx') \sin(sx)\, dx'\, ds$$

$$\rightarrow u(x,t) = \int_0^\infty f(x') \underbrace{\left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-s^2 t} \cdot \sin(sx') \sin(sx)\right]}_{G(x,t|s,0)} dx'$$

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-s^2 t}\sin(sx')\sin(sx)\,ds$$

$$\sin(sx')\sin(sx) = \frac{1}{2}\left[\cos s(x'-x) - \cos s(x'+x)\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-s^2 t}\left[\cos s(x'-x) - \cos s(x'+x)\right] ds$$ [شکل توان ۲]

*انتگرال‌ها را حل می‌کنیم :

$$J = \int_0^\infty e^{-s^2 t}\cos s(x'-x)\,ds$$

$$\begin{cases} e^{-s^2 t} = w \longrightarrow -2st\, e^{-s^2 t}\,ds = dw \\ \cos s(x'-x)\,ds = dv \longrightarrow \frac{1}{x'-x}\sin s(x'-x) = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = \frac{e^{-s^2 t}}{x'-x}\sin s(x'-x)\Big|_0^\infty + \frac{2t}{x'-x}\int_0^\infty e^{-s^2 t}\sin s(x'-x)\,ds$$

$$J(t, x'-x) = \int_0^\infty e^{-s^2 t}\cos s(x'-x)\,ds$$

در این انتگرال می‌توانیم نسبت به t یا x'-x مشتق بگیریم :

$$\frac{\partial J(t, x'-x)}{\partial(x'-x)} = \int_0^\infty -s e^{-s^2 t}\sin s(x'-x)\,ds$$

$$\begin{cases} -s e^{-s^2 t}\,ds = dv \\ \sin s(x'-x) = w \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2t}e^{-s^2 t} = v \\ (x'-x)\cos s(x'-x)\,ds = dw \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2t}\underbrace{e^{-s^2 t}}_{\text{صفر}}\sin s(x'-x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{x'-x}{2t}e^{-s^2 t}\cos s(x'-x)\,ds$$

$$\frac{\partial J(t, x'-x)}{\partial (x'-x)} = -\frac{x'-x}{2t} J \rightarrow \frac{\partial J}{J} = -\frac{x'-x}{2t}\, \partial(x'-x)$$

$$\longrightarrow \ln J = -\frac{(x'-x)^2}{4t} + k_1 \quad \rightarrow J = k_2\, e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}}$$

$$k_2 = ? \quad J(t,0) = k_2 = \int_0^\infty e^{-s^2 t}\, ds \quad \left[\overset{z = s\sqrt{t}}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{t}} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \left[\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$$

$$\longrightarrow k_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$$

$$\longrightarrow J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}}$$

$$\longrightarrow I = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x'+x)^2}{4t}} \right]$$

$$\longrightarrow u(x,t) = \int_0^\infty f(x') \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x'+x)^2}{4t}} \right] dx'$$

حل معادله برای حالت خاص $\boxed{f(x) = u_0}$

$$\longrightarrow \frac{u(x,t)}{u_0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x'+x)^2}{4t}} \right\} dx'$$

$$\left.\begin{array}{l} * \ \dfrac{x'-x}{2\sqrt{t}} = z \\[2ex] * \ \dfrac{x'+x}{2\sqrt{t}} = v \end{array}\right\} \rightarrow \frac{u}{u_0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left[\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-z^2} 2\sqrt{t}\, dz - \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-v^2} 2\sqrt{t}\, dv \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-z^2} dz + \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-v^2} dv \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2}\, dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2}\, dz$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u}{u_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)}$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx}\, dx \rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{isx}\, ds$$

می‌خواهیم از تبدیل فوریه به تبدیل لاپلاس برسیم.

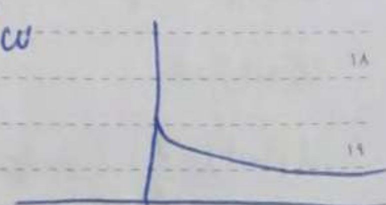
به جای متغیر s می‌توانیم از متغیر دیگری مانند w استفاده کنیم

تعریف $\quad \Phi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-\gamma x} f(x) & x \geq 0 \end{cases}$

تبدیل فوریه $\Phi(x)$: $\quad \Phi(w) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} f(x) e^{-iwx}\, dx = \int_0^{\infty} f(x) e^{-(\gamma + iw)x}\, dx$

$$\rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(w) e^{iwx}\, dw = e^{-\gamma x} f(x)$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(w) e^{(\gamma + iw)x}\, dw$$



اگر $\gamma + iw = s \longrightarrow dw = \frac{ds}{i}$

$$\rightarrow \Phi(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx}\, dz$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Phi(s) e^{sx}\, ds$$

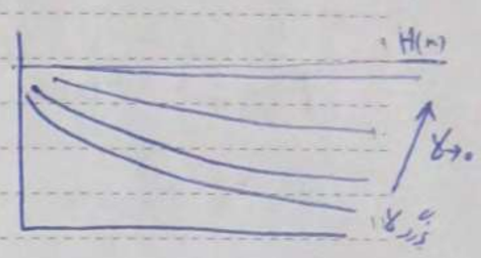
از نظر هندسی γ چه معنایی دارد

تبدیل فوریه این تابع را پیدا می‌کنیم:

فرض $f(x)=H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$

$$\rightarrow \int_0^\infty e^{-i\omega x}\,dx = \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\Big|_0^\infty \quad (\text{بی‌معنی})$$

ترفند: $H(x)=\lim_{\gamma\to 0} e^{-\gamma x}H(x)$



$$\rightarrow \int_0^\infty e^{-(\gamma+i\omega)x}\,dx = \frac{e^{-(\gamma+i\omega)x}}{-(\gamma+i\omega)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\gamma+i\omega}$$

γ: طول همگرایی

کوچک γ که باعث می‌شود انتگرال تبدیل لاپلاس همگرا شود.

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma+i\omega}=\frac{1}{i\omega} \quad (\text{بامعنی})$$

جلسه -21- 91/9/

(شرط مرزی همگن - معادله گرمای یک بعدی)

$c^2u_{xx}=u_t \qquad 0<x<L,\ t>0$

این معادله را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل می‌کنیم.

$u(0,t)=0$

$u(L,t)=0$ حل تفکیک متغیرها

$u(x,0)=f(x) \quad \rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{L}$

$A_n=\frac{2}{L}$

$\rightarrow \bar{u}$

$$\rightarrow c^2\frac{\partial^2 \bar{u}(x,s)}{\partial x^2} = s\bar{u}(x,s)-u(x,0)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \bar{u}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{c^2}\bar{u}(x,s) = -\frac{f(x)}{c^2}$$ (معادله مرتبه دو خطی ناهمگن)

$$\rightarrow \bar{u}_h = A_1 e^{\frac{x}{c}\sqrt{s}} + A_2 e^{-\frac{x}{c}\sqrt{s}}$$

$$\text{or} \quad B_1 \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x + B_2\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x$$

از روش تغییر پارامترها برای بدست آوردن جواب خصوصی استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} u_1 = \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x \\ u_2 = \cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x \end{cases} \rightarrow W = \begin{vmatrix} \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x & \cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x \\ \frac{\sqrt{s}}{c}\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x & \frac{\sqrt{s}}{c}\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{s}}{c}$$

$$\bar{u}_p(x,s) = V_1u_1 + u_2V_2 \cancel{=}$$

$$V_1' = -\frac{c}{\sqrt{s}}\begin{vmatrix} 0 & \cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x \\ \frac{-f(x)}{c^2} & \frac{\sqrt{s}}{c}\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x \end{vmatrix} = -\frac{1}{c\sqrt{s}}f(x)\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x$$

$$\rightarrow V_1 = \int_0^x -\frac{1}{c\sqrt{s}}f(x')\cosh\frac{\sqrt{s}}{x'}dx'$$

$$V_2' = -\frac{c}{\sqrt{s}}\begin{vmatrix} \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x & 0 \\ \frac{\sqrt{s}}{c}\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x & f(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{c\sqrt{s}}f(x)\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x$$

$$\rightarrow V_2 = \int_0^x \frac{1}{c\sqrt{s}}f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x'\,dx'$$

$$\rightarrow \bar{u}_g(x,s) = B_1\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x + B_2\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x - \frac{1}{c\sqrt{s}}\int_0^x f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x'\,dx'$$

$$+\frac{1}{c\sqrt{s}}\int_0^x f(x')\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x'\,dx'$$

$$\rightarrow \bar{U}_g(x,s) = B_1 \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x + B_2\cosh\frac{\sqrt{s}}{c}x + \frac{1}{c\sqrt{s}}\int_0^x f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}(x'-x)\,dx'$$

$$\bar{U}_g(0,s)=0 \longrightarrow \boxed{B_2=0}$$

$$\bar{U}_g(L,s)=0 \longrightarrow B_1\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}L + \frac{1}{c\sqrt{s}}\int_0^L f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}(x'-L)\,dx' = 0$$

$$\rightarrow \boxed{B_1 = -\frac{1}{c\sqrt{s}\,\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}L}\int_0^L f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}(x'-L)\,dx'}$$

$$\rightarrow \bar{U}_g(x,s) = \frac{1}{c\sqrt{s}}\int_0^x f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}(x'-x)\,dx' - \left(\frac{1}{c\sqrt{s}}\frac{\int_0^L f(x')\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}(x'-L)\,dx'}{\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}L}\right)\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x$$

$$\rightarrow u(x,t) = L^{-1}\left[\bar{U}_g(x,s)\right]$$

فرض $G(s) = \dfrac{\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x}{\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}L} \longrightarrow g(t)=?$

دنبال مقادیری هستیم که به ازای آن ها تابع تعریف نمی شود

$$\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}L = 0 \rightarrow i\sin\frac{i\sqrt{s}}{c}L = 0 \Longrightarrow \sin n\pi$$

$$\rightarrow i\frac{\sqrt{s}}{c}L = n\pi \rightarrow \sqrt{s} = \frac{cn\pi}{Li}$$

$$\rightarrow s = -\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2$$

$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{m=1}^{n} Res\left[f(z)\right]\Big|_{z=z_m}$$

[B.V.P] by: Powers

Boundary Value Problems

$$\sinh(ix) = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = i\sin x$$

$$\sinh\left(-\frac{cn\pi i}{cL}\right)x = -i\underbrace{\sin\frac{n\pi}{L}x}_{\text{همان تابع ویژه}}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

مسئله را در حالتی حل می‌کنیم که تابع $f(x)$ مقدار ثابتی باشد. , $x>0$

$$c^2 u_{xx} = u_t \qquad x>0 \quad , t>0$$

$u(0,t)=0$

$u(x,0)=u_0$

$$\underline{\bar{u}(x,s)} = L[u(x,t)] = \int_0^\infty u(x,t)e^{-st}\,dt$$

$$\longrightarrow c^2\frac{\partial^2 \bar{u}(x,s)}{\partial x^2} = s\bar{u}(x,s) - u_0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \bar{u}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{c^2}\bar{u}(x,s) = -\frac{u_0}{c^2}$$

$$\rightarrow \bar{u}(x,s) = A_1 e^{\frac{x}{c}\sqrt{s}} + A_2 e^{-\frac{x}{c}\sqrt{s}} + \frac{u_0}{s}$$

شرط کراندار بودن $\bar{u}$ وقتی ... : $\lim_{x\to\infty} \bar{u}(x,s) < \infty \longrightarrow \boxed{A_1 = 0}$

شرط مرزی $\bar{u}(0,s) = 0 = A_2 + \frac{u_0}{s} \longrightarrow A_2 = -\frac{u_0}{s}$

$$\longrightarrow \bar{u}(x,s) = \frac{u_0}{s}\left(1 - e^{-\frac{x}{c}\sqrt{s}}\right)$$

$$L^{-1}\left[\frac{U_0}{s}\right]=U_0$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{-\frac{x}{c}\sqrt{s}}\right]=?$$

$$\frac{x}{c}=K \longrightarrow G(s)=\frac{1}{s}e^{-K\sqrt{s}} \longrightarrow g(t)=?$$

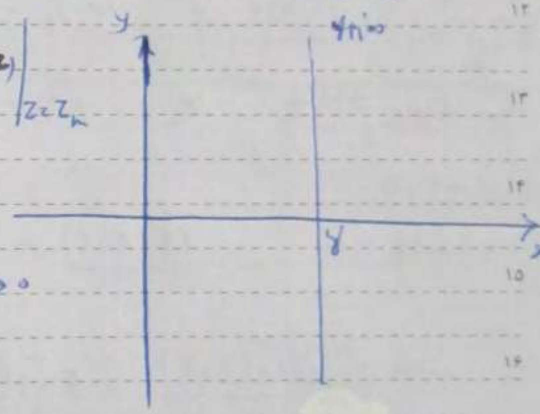
$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\underbrace{\frac{1}{s}e^{-K\sqrt{s}}e^{st}}_{F(z)}\,ds$$

$$s=\gamma+i\omega$$

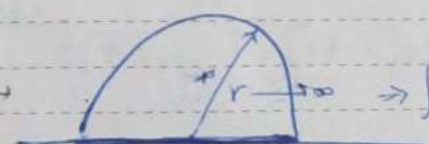
$\gamma=0 \longrightarrow$ تبدیل فوریه

$\omega=0 \longrightarrow$ تبدیل لاپلاس

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\oint_c f(z)dz=2\pi i\sum_{m=1}^{n}\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=z_n}$$



قوانین دایره‌ها



$\Rightarrow \int f \to 0$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c F(z)dz$$

نیم صفحه بالا $0<\theta<\pi$

$$e^{-K\sqrt{z}} \to x+iy, \quad x-iy$$

$$z=re^{i\theta}$$

$$\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} \longrightarrow \sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\pi}{2}}=i\sqrt{r}$$

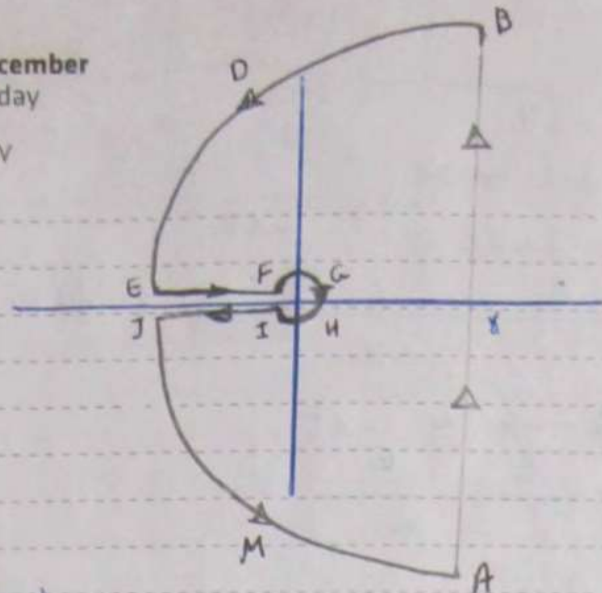
پایینی $\sqrt{z}=-i\sqrt{r}$

خط $x=0$ برای $\sqrt{z}$ خط برش می‌باشد. در $\theta=\pi$

$s=0$ برای تابع $G(z)$ یک نقطه تکین می‌باشد.

یا

$(z=0)$



$$\rightarrow \frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_c F(z)\,dz\right\}=0$$

$$C:\ \overline{AB}+\widehat{BDE}+\overline{EF}+\widehat{FGHI}+\overline{IJ}+\widehat{JMA}$$

$$\rightarrow \int_A^B+\int_{BDE}+\int_{EF}+\int_{FGHI}+\int_{IJ}+\int_{JMA}=0$$

✓ ✓ ✓

BDE + JMA $\qquad S=Re^{i\theta}$

$$G(s)=\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{s}=\frac{e^{-k\sqrt{R}\,e^{i\theta/2}}}{Re^{i\theta}} \qquad R\to\infty \rightarrow G(s)=0$$

← روی حاصل جمع دو منحنی انتگرال صفر باشد.

FGHI : $S=\varepsilon e^{i\theta}$ $\qquad \rightarrow \displaystyle\int \frac{e^{-k\sqrt{s}}}{s}e^{st}\,ds=\int_{+\pi}^{-\pi}\frac{e^{-k\sqrt{\varepsilon}\,e^{i\theta/2}}\,e^{\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\left(i\varepsilon e^{i\theta}\right)d\theta$

$$(\varepsilon\to 0)\Rightarrow \quad =\int_{+\pi}^{-\pi} i\,d\theta=i\theta\Big|_{\pi}^{-\pi}=-2\pi i$$

EF : $S=xe^{i\pi}=-x$ $\qquad S=-R=-x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad S=-\varepsilon=-x$

$$\int_R^{\varepsilon}\frac{e^{-k\sqrt{x}\,e^{i\pi/2}}\,e^{-xt}}{-x}(-dx)=\int_R^{\varepsilon}\frac{e^{-ki\sqrt{x}}\,e^{-xt}}{x}\,dx$$

IJ: $s = x e^{-i\pi} = -x$ $\quad (-i)$

$$\int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{-k\sqrt{x}\, e^{-i\pi/2}}\, e^{-xt}}{-x}\,(-dx)$$

$$= \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ki\sqrt{x}}\, e^{-xt}}{x}\, dx$$

$$EF + IJ = \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{-xt}}{x}\left(e^{ki\sqrt{x}} - e^{-ki\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= 2i \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{-xt}}{x}\left(\frac{e^{ki\sqrt{x}} - e^{-ki\sqrt{x}}}{2i}\right) dx$$

$$\begin{cases} \epsilon \to 0 \\ R \to \infty \end{cases} \quad = 2i \int_{0}^{\infty} \frac{\sin k\sqrt{x}}{x}\, e^{-xt}\, dx$$

$$\to \int_{A}^{B} + (-2\pi i) + 2i \int_{0}^{\infty} \frac{\sin k\sqrt{x}}{x}\, e^{-xt}\, dx = 0$$

$$\to \int_{A}^{B} = 2\pi i - 2i \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-xt}}{x} \sin k\sqrt{x}\, dx$$

$$\to \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} = 1 - \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-xt}}{x} \sin k\sqrt{x}\, dx}$$

$\sqrt{x} = z \to x = z^2$ $\quad \Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-z^2 t}}{z^2} \sin kz\,(2z\,dz)$

$$\begin{cases} x = 0 & z = 0 \\ x \to \infty & z \to \infty \end{cases}$$

$$\underbrace{\qquad}_{}^{J(k,t)} = 2\int_0^{\infty} \frac{e^{-z^2 t}}{z} \sin kz \, dz$$

$$\Rightarrow J(k,t) = 2\int_0^{\infty} \frac{e^{-z^2 t}}{z} \sin kz \, dz$$

$$\frac{\partial J}{\partial k} = 2\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-z^2 t} \cos kz \, dz}_{\text{را قبلاً محاسبه شده}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{4t}}\, e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

جلسه 22 - 91/91/

• تبدیل ملین: قابل استخراج از تبدیل فوریه

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-iw(t-x)}\, dt\, dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{+iwx} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-iwt}\, dt}_{G(w)}\, dw$$

تغییر متغیرها را در نظر می‌گیریم

$$e^t = u \rightarrow t = \ln u \qquad \begin{cases} t \to -\infty & u \to 0 \\ t \to +\infty & u \to +\infty \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \underbrace{\int_0^{\infty} g(\ln u)\, u^{-iw-1}\, du}_{G(w)}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \int_0^{\infty} g(\ln u)\, u^{-iw-1}\, \frac{u^{\gamma}}{u^{\gamma}}\, du\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \int_0^{\infty} g(\ln u)\, u^{+\gamma-iw-1}\, u^{-\gamma}\, du\, dw$$

$$e^x = y \rightarrow x = \ln y \qquad \rightarrow g(\ln y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y^{iw} \int_0^{\infty} g(\ln u)\, u^{\gamma-iw-1}\, u^{-\gamma}\, du\, dw$$

$$\gamma - iw = s \rightarrow dw = -\frac{s}{i}$$

$$\rightarrow g(\ln y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+i\infty}^{\gamma-i\infty} y^{iw}\int_0^\infty g(\ln u)\, u^{\gamma-iw-1}\, u^{-\gamma}\, du(-s)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} y^{iw}\int_0^\infty g(\ln u)\, u^{s-1}\, u^{-\gamma}\, du\,(ds)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} y^{-\gamma}\, y^{iw}\, y^{\gamma}\int_0^\infty g(\ln u)\, u^{s-1}\, u^{-\gamma}\, du\,(ds)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} y^{-s}\, y^{\gamma}\int_0^\infty g(\ln u)\, u^{s-1}\, u^{-\gamma}\, du\,(ds)$$

$$\underbrace{y^{-\gamma} g(\ln y)}_{f(y)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} y^{-s}\int_0^\infty g(\ln u)\, u^{s-1}\, u^{-\gamma}\, du\, ds$$

$$\rightarrow u^{-\alpha} g(\ln u) = f(u)$$

$$\rightarrow f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Big(\underbrace{\int_0^\infty f(u)\, u^{s-1}\, du}_{M[f(u)]} \Big)\, y^{-s}\, ds$$

$$\rightarrow M(s) = M[f(x)] = \int_0^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx$$

$$\rightarrow f(x) = M^{-1}[M(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M(s)\, x^{-s}\, ds$$

این تبدیل کاربرد چندانی در مسائل مهندسی ندارد.

$$\star\; M[e^{-x}] = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx = \Gamma(s)$$

$$\star\; M[\sin x] = \int_0^{\infty} x^{s-1} \sin x \, dx$$

$$\star\; M[\cos x] = \int_0^{\infty} x^{s-1} \cos x \, dx$$

$$\star\; M[\sin \omega x] = \int_0^{\infty} x^{s-1} \sin \omega x \, dx \qquad \star\; M[\cos \omega x]$$

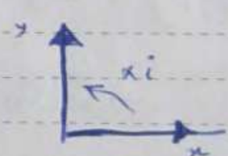
$$\star\; M[\cos \omega x + \sin \omega x] = \int_0^{\infty} x^{s-1} (\cos \omega x + \sin \omega x)\, dx$$

انتگرال بالا را با استفاده از قضیهٔ مانده‌ها حساب می‌کنیم

$$\begin{cases} \cos \omega x = \mathrm{Re}\,(e^{-i\omega x}) \\ \sin \omega x = \mathrm{Im}\,(e^{-i\omega x}) \end{cases}$$

اگر تبدیل ملین $e^{-i\omega x}$ را حساب کنیم، قسمت Re آن تبدیل ملین $\cos \omega x$ و قسمت Im آن تبدیل ملین $\sin \omega x$ خواهد بود.

$$M[e^{-i\omega x}] = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-i\omega x}\, dx$$



$$i\omega x = z \longrightarrow dx = \frac{dz}{i\omega}$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{z}{i\omega}\right)^{s-1} e^{-z} \frac{dz}{i\omega} = \frac{1}{(i\omega)^s} \underbrace{\int_0^{\infty} z^{s-1} e^{-z}\, dz}_{\Gamma(s)}$$

$$\rightarrow M[e^{-i\omega x}] = \frac{\Gamma(s)}{\omega^s i^s} \quad , \; i = e^{\frac{\pi i}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(s)}{\omega^s} e^{-\frac{\pi i s}{2}} = \frac{\Gamma(s)}{\omega^s}\left(\cos\frac{\pi s}{2} - i \sin \frac{\pi s}{2}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} M[\cos wx] = \dfrac{\Gamma(s)}{w^s} \cos \dfrac{\pi s}{2} \\ M[\sin wx] = \dfrac{\Gamma(s)}{w^s} \left(-\sin \dfrac{\pi s}{2}\right) \end{cases}$$

$$\star \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \longrightarrow M\left[\frac{1}{1+x}\right] = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}\, dx = \beta(s, 1-s)$$

$$= \Gamma(s)\,\Gamma(1-s)$$

● تبدیل هانکل

در صورتی که سیستم دارای تقارن دایره‌ای باشد.

هر فرایندی که بحث می‌شود مستقل از زاویهٔ محیط خواهد بود. (فقط وابسته به r خواهد بود)

تبدیل فوریهٔ یک تابع دو متغیره را در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-iw(u-x)}\, du\, dw$$

$$\mathcal{F}[g(x,y)] = G(u,v)$$

$$\rightarrow G(u,v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, e^{-i(xu+yv)}\, dx\, dy$$

$$\rightarrow g(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(u,v)\, e^{i(ux+yv)}\, du\, dv$$

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \rightarrow (r,\theta) \Longrightarrow \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}$$

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} \rightarrow (\rho,\phi) \Longrightarrow \begin{array}{l} u = \rho\cos\phi \\ v = \rho\sin\phi \end{array}$$

$$xu + yv = \rho r \cos\theta\cos\phi + \rho r \sin\phi \sin\theta = \rho r \cos(\theta - \phi)$$

$$G(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{2\pi} r g(r) e^{-i\rho r \cos(\phi-\theta)} \, d\theta \, dr$$

$$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{2\pi} \rho g(\rho) e^{i\rho r \cos(\theta-\phi)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dy$$

$$\downarrow$$

$$\int\int dr\,d\theta$$

قبلاً داشتیم : $J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta$

$$J_0(\rho r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos(\theta-\phi)} \, d\theta$$

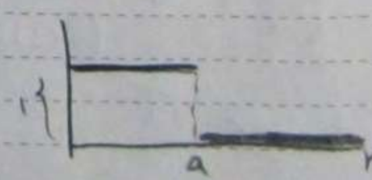
$$\rightarrow G(\rho) = \int_0^{\infty} r g(r) J_0(\rho r)\, dr = H_0\left[g(r)\right]$$

تبدیل وارون هنکل $g(r) = \int_0^{\infty} \rho G(\rho) J_0(\rho r)\, d\rho$

$$\Rightarrow \quad H_n\left[f(r)\right] = \int_0^{\infty} r f(r) J_n(\rho r)\, dr$$

* مثال :

$H_n(r^n \underbrace{H(a-r)}_{\text{تابع پله‌ای هویساید}})$ $\quad H(a-r) = \begin{cases} 1 & a-r \geqslant 0 \\ 0 & a-r < 0 \end{cases}$



$$\to H_n\left[r^n H(a-r)\right] = \int_0^\infty r^{n+1} H(a-r) J_n(\rho r)\,dr$$

$$= \int_0^a r^{n+1} J_n(\rho r)\,dr$$

$* \ \rho r = x \to r = \frac{x}{\rho}$ $\qquad r=0 \quad x=0$

$\qquad r=a \quad x=\rho a$

$$= \int_0^{\rho a} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{n+1} J_n(x)\frac{dx}{\rho} = \frac{1}{\rho^{n+2}}\int_0^a x^{n+1} J_n(x)\,dx$$

$* \ \frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$

$$= \frac{1}{\rho^{n+2}} x^{n+1} J_{n+1}(x)\Big|_0^{\rho a} = \frac{(\rho a)^{n+1}}{\rho^{n+2}} J_{n+1}(\rho a)$$

$$= \frac{a^{n+1}}{\rho} J_{n+1}(\rho a)$$

$$* \ H_0\left[e^{-a^2r^2}\right] = \int_0^\infty r e^{-a^2r^2} J_0(\rho r)\,dr$$

$$\int x^p J_q(x)\,dx \xrightarrow{\text{قابل حل اگر}} p+q = 2n+1$$

$$= \int_0^\infty r e^{-a^2r^2} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\left(\frac{\rho r}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}\,dr$$

$$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}\int_0^\infty e^{-a^2r^2} r^{2k+1}\,dr$$

$a^2r^2 = t \to r = \frac{\sqrt{t}}{a}$ $\qquad r=0 \quad t=0$

$\qquad r\to\infty \quad t=\infty$

$$= \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{\sqrt{t}}{a}\right)^{2k+1} \frac{dt}{2a\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{2a^{2k+2}} \int_0^\infty e^{-t} t^k \, dt = \frac{k!}{2a^{2k+2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \frac{(k!)}{2a^{2k+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2a^2} \frac{\left(\frac{\rho}{2a}\right)^{2k}}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2a^2} \frac{\left(\frac{\rho^2}{4a^2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2a^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\rho^2}{4a^2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2a^2} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2}}$$

$$\star\ H_0\left\{\frac{e^{-ar}}{r}\right\} = \int_0^\infty e^{-ar} J_0(\rho r)\, dr = \frac{1}{\sqrt{a^2+\rho^2}}$$

$a \to 0 \Rightarrow \star\ H_0\left(\frac{1}{r}\right)$ ✓

$$\to \lim_{a\to 0} H_0\left\{\frac{e^{-ar}}{r}\right\} = \frac{1}{\rho}$$

★ تبدیل هنکل مشتقات تابع

$$F(\rho) = H_n[f(r)]$$

$$H_1[f'(r)] = \int_0^\infty r f'(r) J_1(\rho r)\, dr$$

$f'(r)dr = du \quad u = f(r)$

$rJ_1(\rho r) = v \quad dv = r\rho J_0(\rho r)$

$$\to r f(r) J_1(\rho r)\Big|_0^\infty - \rho \int_0^\infty r f(r) J_0(\rho r)\, dr = -\rho H_0[f(r)]$$

مشتق بلا زیره محصل ← تبدیلا هنکل مرتبه صفر

تبدیل را برای کامل نما شد ← " " " مرتبه n

A $H_0\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rf(r))\right] =$

$$\to I = \int_0^\infty J_1(\rho r)\frac{d}{dr}(rf(r))\,dr$$

$$= rf(r)J_0(\rho r)\Big|_0^\infty + \rho\int_0^\infty rf(r)J_1(\rho r)\,dr$$

$$= \rho H_1\left[f(r)\right]$$

A فرض کنید $f'(r) = g(r)$

$$\to \rho H_1\left[f'(r)\right] = -\rho^2 H_0\{f(r)\} \to \boxed{H_1\{f'(r)\} = -\rho H_0\{f(r)\}}$$

A $\int_0^\infty rf(r)g(r)\,dr = \int_0^\infty \rho F(\rho)G(\rho)\,d\rho$

$F(\rho)$ و $G(\rho)$ تبدیلات هنکل توابع $f(r)$ و $g(r)$ از هر مرتبه دلخواهی می‌باشند

جلسه ۲۳ - ۹۱/۹/۲۶

$$H_n\left[e^{-a^2r^2}\right] = \frac{1}{2a^2}e^{-\frac{\rho^2}{1+a^2}}$$

$$H_n\left\{r^n e^{-a^2r^2}\right\} = \int_0^\infty r^{n+1}J_n(\rho r)e^{-a^2r^2}\,dr = \int_0^\infty r^{n+1}\left(\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{\left(\frac{\rho r}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(k+n+1)}\right)e^{-a^2r^2}\,dr$$

$$= \sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(k+n+1)}\int_0^\infty r^{n+1}e^{-a^2r^2}r^{2k+n}\,dr$$

$$a^2r^2 = t \to r = \frac{\sqrt{t}}{a} \to dr = \frac{dt}{2a\sqrt{t}} \quad \begin{cases} r=0 & t=0 \\ r\to\infty & t\to\infty \end{cases}$$

$$I=\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{\sqrt{t}}{a}\right)^{2k+2n+1}\frac{dt}{2a\sqrt{t}}$$

$$=\frac{1}{2a\cdot a^{2k+2n+1}}\int_0^{\infty} e^{-t}\underbrace{(\sqrt{t})^{2(k+n)}}_{t^{k+n}}\,dt=\frac{1}{2a\cdot a^{2k+2n+1}}\,\Gamma(k+n+1)$$

$$\rightarrow H_n\left\{r^n e^{-a^2r^2}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(k+n+1)}\times\frac{\cancel{\Gamma(k+n+1)}}{2a\cdot a^{2(k+n)+1}}$$

$$==\frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n}{2a^2a^{2n}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}}{k!\,a^{2k}}\qquad\left(\frac{\rho^2}{4a^2}\right)^k$$

$$\boxed{\rightarrow H_n\left\{r^n e^{-a^2r^2}\right\}=\frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n}{2a^2\cdot a^{2n}}\,e^{-\frac{\rho^2}{4a^2}}}$$

جلسه قبل $H_1\{f'(r)\}$ را بدست آوردیم. حال می‌خواهیم $H_n\{f'(r)\}$ را بدست آوریم:

$$H_n\{f'(r)\}=\int_0^{\infty} r\,f'(r)\,J_n(\rho r)\,dr=\int_0^{\infty}\underbrace{r\,J_n(\rho r)}_{v}\,\underbrace{f'(r)\,dr}_{du}$$

$$=r f(r) J_n(\rho r)\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty} f(r)\frac{d}{dr}\left[rJ_n(\rho r)\right]dr$$

هرگاه $f(r)$ و هم J_n ... $\infty \Rightarrow 0$

بالا صفر است ← ... 0

$$\star\quad \frac{d}{dr}\left[rJ_n(\rho r)\right]=J_n(\rho r)+r\left[\rho J_n'(\rho r)\right]$$

$$\rightarrow H_n\{f'(r)\}=-\int_0^{\infty} f(r)\left\{J_n(\rho r)+r\left[\rho J_n'(\rho r)\right]\right\}dr$$

می‌توانیم بنویسیم: $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$

$$\xrightarrow{\partial t} \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, t^{n-1} J_n(x)$$

$$\to \frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n + \frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^{n-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x)\, t^{n-1}$$

$$\to \frac{x}{2}\left[J_{n+1} + J_{n-1}\right] = n J_n$$

$$\to H_n\{f'(r)\} = -\int_0^{\infty} f(r)\left[\frac{\rho r}{2n}\left(J_{n+1}(\rho r) + J_{n-1}(\rho r)\right) + \frac{\rho r}{2}\left(J_{n-1}(\rho r) - J_{n+1}(\rho r)\right)\right] dr$$

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

$$\xrightarrow{\partial x} \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)\, t^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n t^{n+1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n t^{n-1} = 2\sum J_n' t^n$$

$$\boxed{\to J_n' = \frac{1}{2}\left[J_{n-1} - J_{n+1}\right]}$$

$$= \int_0^{\infty}\left\{\left[\frac{\rho r}{2n} f(r) J_{n+1}(\rho r) + \frac{\rho r}{2n} f(r) J_{n-1}(\rho r)\right] + \left[\frac{\rho r}{2} f(r) J_{n-1}(\rho r) - \frac{\rho r}{2} f(r) J_{n+1}(\rho r)\right]\right\} dr$$

$$\to H_n\{f'(r)\} = -\left\{\frac{\rho}{2n} H_{n+1}[f(r)] - \frac{\rho}{2} H_{n+1}[f(r)] + \frac{\rho}{2n} H_{n-1}[f(r)] + \frac{\rho}{2} H_{n-1}[f(r)]\right\}$$

$$= -\frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{1}{n}-1\right) H_{n+1}[f(r)] + \left(\frac{1}{n}+1\right) H_{n-1}[f(r)]\right\}$$

$$= \frac{-\rho}{2n}\left\{(1-n) H_{n+1}[f(r)] + (1+n) H_{n-1}[f(r)]\right\}$$

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r f'(r)\right]$$

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{\nu^2}{r^2} f(r) = 0 \longrightarrow J$$ (تابع بسل)

$$H_0\left\{\frac{d}{dr}\left(r f'(r)\right)\right\}$$ می خواهیم تبدیل

$$H_0\left\{\frac{d}{dr}\left[r f'(r)\right]\right\} = \int_0^\infty r J_0(\rho r)\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r f'(r)\right]\right] dr = \int_0^\infty J_0(\rho r)\, d\left[r f'(r)\right]$$

$$= r f'(r) J_0(\rho r)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty r f'(r) \frac{d}{dr}\left[J_0(\rho r)\right] dr$$

در هر دو کران صفر

$$= \rho \underbrace{\int_0^\infty r f'(r) J_1(\rho r)\, dr}_{-\rho H_0\{f(r)\}} = -\rho^2 H_0\left[f(r)\right]$$

★مثال:

$$u_t = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r\right) + f(r)\delta(t) \qquad r>0,\ t>0$$

$$u(r,0) = 0$$

برای این که بدانیم از تبدیل هنکل چه مرتبه‌ای استفاده کنیم:

اگر u وابسته به ϕ یا θ نباشد $\longrightarrow H_0$

ولی اگر u وابسته به ϕ یا θ باشد $\longrightarrow H_n$ (n غیر از صفر)

$$\bar{u}(\rho,t) = \int_0^\infty r\, u(r,t) J_0(\rho r)\, dr$$

$$\rightarrow \int_0^\infty r \frac{\partial u}{\partial t} J_0(\rho r)\, dr = c^2 H_0\left[u_{rr} + \frac{1}{r} u_r\right] + \int_0^\infty \delta(t)\, r f(r) J_0(\rho r)\, dr$$

$$\rightarrow \frac{\partial \bar{u}(\rho,t)}{\partial t} = -\rho^2 c^2 \bar{u}(\rho,t) + \delta(t) F(\rho)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \bar{u}(\rho,t)}{\partial t} + \rho^2 c^2 \bar{u}(\rho,t) = \delta(t)\, F(\rho)$$

با پیدا کردن عامل انتگرال ساز داریم:

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{u}(\rho,t)\, e^{\rho^2 c^2 t}\right] = F(\rho)\,\delta(t)\, e^{\rho^2 c^2 t}$$

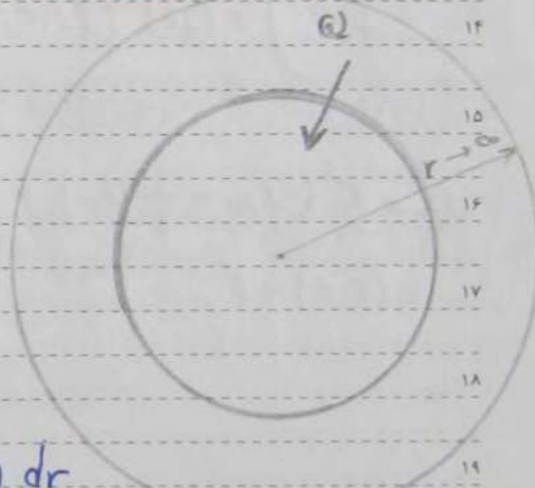
$$\xrightarrow{\int_0^t dt} \bar{u}(\rho,\tau)\, e^{\rho^2 c^2 \tau}\Big|_0^t = \underbrace{\int_0^t F(\rho)\,\delta(\tau)\, e^{\rho^2 c^2 \tau}\, d\tau}_{F(\rho)}$$

$\delta(t-\tau_0)$

$$\rightarrow \bar{u}(\rho,t) = F(\rho)\, e^{-\rho^2 c^2 t}$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل } \bar{H}_0^{-1}} \boxed{u(r,t) = \int_0^\infty \rho\, F(\rho)\, e^{-\rho^2 c^2 t} J_0(\rho r)\, d\rho}$$

جواب معادله



اگر داشته باشیم

شدت انتقال گرما

$$f(r) = \frac{Q}{\pi a^2} \underbrace{H(a-r)}_{\text{تابع پله ای واحد (هوی ساید)}}$$

$$F(\rho) = H_0[f(r)] = \int_0^\infty r \frac{Q}{\pi a^2} H(a-r)\, J_0(\rho r)\, dr$$

$$H(a-r) = \begin{cases} 1 & a-r \geq 0 \\ 0 & a-r < 0 \end{cases}$$

$$= \int_0^a \frac{Q}{\pi a^2}\, r J_0(\rho r)\, dr$$

$$= \frac{Q}{\pi a^2} \int_0^a \frac{x}{\rho} J_0(x) \frac{dx}{\rho} = \frac{Q}{\pi \rho^2 a^2}\, x J_1(x)\Big|_0^{\rho a} = \frac{Q}{\pi \rho a} J_1(\rho a)$$

$$\rightarrow u(r,t) = \int_0^\infty \rho\left(\frac{Q}{\pi\rho a}\right) J_1(\rho a) J_0(\rho r)\, e^{-\rho^2 c^2 t}\, d\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{u(r,t) = \frac{Q}{\pi a}\int_0^\infty J_1(\rho a) J_0(\rho r)\, e^{-\rho^2 c^2 t}\, d\rho}$$

• تمرین ۹ و ۱۰ کتاب

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} = -A_0\, q(r)$$

$$u(r,0) = 0 \qquad \lim_{\substack{r\to\infty \\ z\to\infty \\ r\to 0}} |u(r,z)| < \infty$$

از تبدیل هنکل مرتبه صفر نسبت به متغیر r داریم:

$$H_0\left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right] + H_0\left[u_{zz}\right] = -A_0\, H_0\left[q(r)\right]$$

اگر $\bar{U}(\rho,z) = H_0\left[u(r,z)\right] \quad , \quad \bar{Q}(\rho) = H_0\left[q(r)\right]$

$$-\rho^2\, \bar{U}(\rho,z) + \frac{\partial^2 \bar{U}(\rho,z)}{\partial z^2} = -A_0\, \bar{Q}(\rho)$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن

$$\rightarrow \bar{U}(\rho,z) = C_1 e^{\rho z} + C_2 e^{-\rho z} + A_0 \frac{\bar{Q}(\rho)}{\rho^2}$$

از شرط کران‌دار بودن $\quad z\to\infty \quad u<\infty$

$$\lim_{z\to\infty} \bar{U}(\rho,z) < \infty \longrightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$\bar{U}(\rho,0) = 0 \longrightarrow \boxed{C_2 = -\frac{A_0 \bar{Q}(\rho)}{\rho^2}}$$

$$\rightarrow \bar{U}(\rho,z) = \frac{A_0 \bar{Q}(\rho)}{\rho^2}\left(1 - e^{-\rho z}\right)$$

$$\xrightarrow{\bar{H}_0^{-1}} \boxed{u(r,z) = A_0 \int_0^\infty \frac{\bar{Q}(\rho)}{\rho} \left(1-e^{-\rho z}\right) J_0(\rho r)\, d\rho}$$

اگر تابع $q(\rho)$ داده شود

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{c^2} u_{tt} \qquad r>0,\ t>0$$

$$u(r,0) = f(r), \qquad \lim_{\substack{r\to\infty \\ t\to\infty \\ r\to 0}} |u(r,t)| < \infty$$

$$u_t(r,0) = g(r)$$

$$\to H_0\left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right] = \frac{1}{c^2} H_0[u_{tt}] \quad , \ \bar{u}$$

$$\bar{u}(\rho,t) = H_0[u(r,t)] = \int_0^\infty r\, u(r,t) J_0(\rho r)\, dr$$

$$-\rho^2 \bar{u}(\rho,t) = \frac{1}{c^2} \bar{u}_{tt}(\rho,t) \to \bar{u}_{tt}(\rho,t) + \rho^2 c^2 \bar{u}(\rho,t) = 0$$

$$\to \bar{u}(\rho,t) = A_1 \sin \rho c t + A_2 \cos \rho c t$$

چون Sin و Cos کران دار هستند شرایط کران داری خود بخود برآورده شده اند.

$$\bar{u}(\rho,0) = A_2 = \overbrace{\int_0^\infty r\, f(r) J_0(\rho r)\, dr}^{F(\rho)} = F(\rho)$$

$$\to \bar{u}(\rho,t) = A_1 \sin \rho c t + F(\rho) \cos \rho c t$$

$$\xrightarrow{u_t(r,0)=g(r)} \boxed{A_1 = \frac{1}{\rho c} G(\rho)}$$

$$\to \bar{u}(\rho,t) = \frac{G(\rho)}{\rho c} \sin \rho c t + F(\rho) \cos \rho c t$$

$$\rightarrow u(r,t) = \frac{1}{c}\int_0^\infty G(\rho)\sin\rho ct\, J_0(\rho r)\, d\rho + \int_0^\infty \rho F(\rho)\cos\rho ct\, J_0(\rho r)\, d\rho$$

برای حالت ساده $g(r)=0$ و $f(r)=\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}$ داریم:

$$F(\rho) = \int_0^\infty \frac{ra}{\sqrt{a^2+r^2}} J_0(\rho r)\, dr = \frac{a}{\rho} e^{-a\rho}$$

$$\rightarrow u(r,t) = a\int_0^\infty e^{-a\rho}\cos\rho ct\, J_0(\rho r)\, d\rho$$

$$\cos\rho ct = \mathrm{Re}\left[e^{-i\rho ct}\right]$$

$$\rightarrow u(r,t) = a\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[e^{-\rho(a+ict)}\right] J_0(\rho r)\, d\rho$$

$$L\left[J_0(\rho r)\right] = \int_0^\infty e^{-sr} J_0(\rho r)\, dr = \frac{1}{\sqrt{s^2+\rho^2}}$$

$$u(r,t) = \cancel{a} \ a\,\mathrm{Re}\frac{1}{\sqrt{r^2+(a+ict)^2}}$$

جلسه ۲۴ - 91/9/28

آنالیز برداری و تانسوری

با کمیت هایی که قبلاً آشنا شده ایم.

اسکالر $\xrightarrow{\text{تعریف}}$ عدد

جرم، حجم، زمان $\xrightarrow{\text{استفاده کلمات}}$

$m_1 = m_2 \rightarrow \rho\, dx\, dy\, dz = \rho' dx' dy' dz'$

جاکوبی تبدیل $\neq 0$ ⟵ قانون بقای جرم

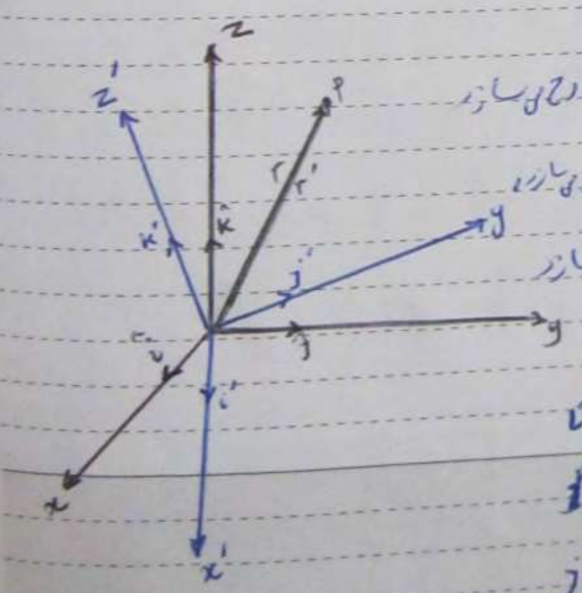
و کمیت هایی که جهت و مقدار دارند را کمیت های برداری گویند.

برداری Φ, Ψ

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{u}, \vec{v}$

کمیت های برداری = ترکیب خطی از بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$

$\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ بردارهای یکه بر صفحه های x و y و z



α_1 و β_1 و γ_1 زوایایی هستند که بردار یکه $\hat{i}'$ با محور x و y و z می سازد

α_2 و β_2 و γ_2 زوایایی هستند که بردار $\hat{j}'$ با محور x و y و z می سازد

α_3 و β_3 و γ_3 که زوایایی هستند که k' با محور x و y و z می سازد

$$i' = \cos\alpha_1\, \hat{i} + \cos\beta_1\, \hat{j} + \cos\gamma_1\, \hat{k}$$

$$i' = p_1 \hat{i} + q_1 \hat{j} + r_1 \hat{k}$$

$$j' = p_2 \hat{i} + q_2 \hat{j} + r_2 \hat{k}$$

$$k' = p_3 \hat{i} + q_3 \hat{j} + r_3 \hat{k}$$

$$r' = r$$

$$x'i' + y'j' + z'k' = xi + yj + zk$$

$$\rightarrow x'(p_1\hat{i} + q_1\hat{j} + r_1 k) + y'(p_2 i + q_2 j + r_2 k) + z'(p_3 i + q_3 j + r_3 k) = xi + yj + zk$$

$$x = p_1 x' + p_2 y' + p_3 z'$$
$$y = q_1 x' + q_2 y' + q_3 z'$$
$$z = r_1 x' + r_2 y' + r_3 z'$$

$p_1 = \cos(i, i')$

$$x^\alpha \qquad \bar{x}^\beta$$

$$a^\alpha_\beta = \cos(i, i')$$

$$\rightarrow \boxed{x^\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} a^\alpha_\beta \, \bar{x}^\beta}$$

به همین ترتیب $\boxed{\bar{x}^\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} A^\alpha_\beta \, x^\alpha}$

$a^\alpha_\beta = A^\alpha_\beta$ برای دستگاه‌هایی که نقطه دوران دارند

$$a^\alpha_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \quad , \quad A^\alpha_\beta = \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\alpha}$$

* حالتی را در نظر بگیریم که دستگاه مختصات به اندازه زاویه خاصی دوران کند همچنین زوایای بین محورها هم تغییر کند (در حقیقت از برخورد محورهای منحنی مختصات منحنی‌ها را خواهیم داشت)

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\longrightarrow d\vec{r} = \frac{\partial r}{\partial x} dx\,\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y} dy\,\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z} dz\,\vec{k}$$ از دوران محورها

نقطه P روی منحنی حامل حرکت خواهد کرد. که از مبدأ مختصات به این منحنی وصل کنیم (منحنی c) بردار $\vec{r}$ می‌شود

$$dr = \vec{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

در حالت کلی $i \cdot j = \delta_{ij}$ $\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{array} \right.$

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

$$e_i \times e_j = e_k \, \varepsilon_{kij}$$

عملگر دل (نابلا) $\vec{\nabla} = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$

در راستای میدان $\rightarrow$ $\vec{\nabla}\phi = \text{grad}\,\phi = i\frac{\partial \phi}{\partial x} + j\frac{\partial \phi}{\partial y} + k\frac{\partial \phi}{\partial z}$ هندسی: جهت بیشترین تغییرات

اگر ϕ ثابت باشد gradϕ بر خود ϕ عمود خواهد بود

روی بردار $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div}\,\vec{V} = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot v_j e_j = e_i \cdot e_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ \nabla \times \vec{V} = e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times v_j e_j = e_i \times e_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = e_k \varepsilon_{kij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \end{array} \right.$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

4

$$= i\underbrace{\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)}_{\omega_1} - j\underbrace{\left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right)}_{\omega_2} + k\underbrace{\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)}_{\omega_3}$$

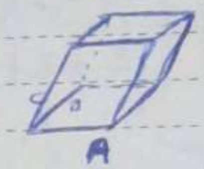
ω_1 سرعت زاویه‌ای حول محور x

if $\omega_i = 0 \longrightarrow$ جریان غیر چرخشی

★ اگر سه بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ را داشته باشیم :

ضرب دوتایی : $\vec{A}\cdot\vec{B}$ و $\vec{A}\times\vec{B}$

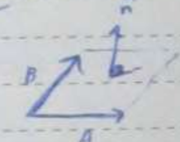
ضرب سه تایی : $A \cdot B \times C = [ABC]$



$\vec{A}\cdot\vec{B} \Rightarrow$ کار ، $\vec{A}\times\vec{B} \Rightarrow$ مساحت متوازی الاضلاع

نیرو

جابجایی

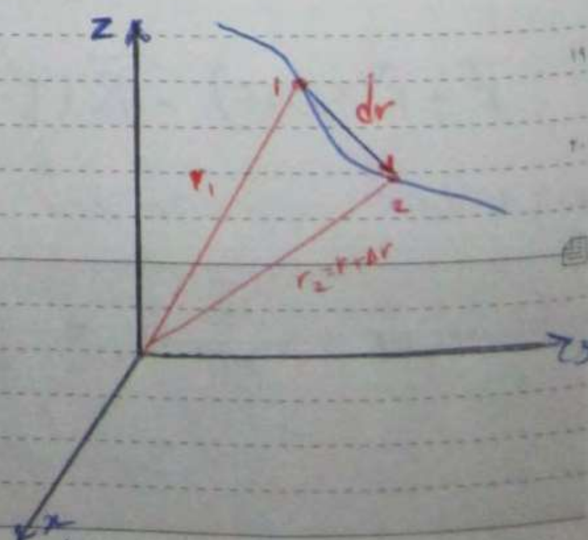


$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (B\cdot A)\vec{C} - (C\cdot A)\vec{B}$$

$$dA_z = dx\,dy\,\hat{k} = \hat{i}\,dx \times \hat{j}\,dy$$

فرض کنیم x و y و z توابعی پیوسته از پارامتر t هستند

که از تغییر آنها منحنی فضای C ایجاد می‌شود



دستگاه مختصات $(x, y, z) \xrightarrow[\text{تبدیل وارون}]{T} (q_1, q_2, q_3)$, T^{-1}

این تبدیل یک به یک بوده و وارون پذیر است.

استوانه‌ای

$(x,y,z) \longrightarrow (r,\theta,z)$. ممکن است دارای بعد طول نباشند q_1, q_2, q_3

مثلاً بعد زاویه‌ای

(r,θ,ϕ) کروی

رابطه بین دو دستگاه

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \xrightarrow{\text{برعکس}} \begin{cases} q_1 = q_1(x,y,z) \\ q_2 = q_2(x,y,z) \\ q_3 = q_3(x,y,z) \end{cases}$$

منحنی — تابع

منحنی — تابع

$$(x,y,z) \longrightarrow (\underset{q_1}{r}, \underset{q_2}{\theta}, \underset{q_3}{z})$$

$$\begin{cases} x = q_1 \cos q_2 \\ y = q_1 \sin q_2 \\ z = q_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = \sqrt{x^2+y^2} \\ q_2 = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ q_3 = z \end{cases}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(x,y,z) = \vec{R}(q_1, q_2, q_3)$$

توابعی از q_1, q_2, q_3 — توابعی از x, y, z

دیفرانسیل $\longrightarrow$ $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_2} dq_2 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial q_3} dq_3$

$d\vec{r}$ بردار مماس بر منحنی در نقطه را است که لزوماً بردار ~~[illegible]~~ یکه نیست

برای بدست آوردن بردار یکه نرمال داریم :

q_1 بردار یکه در راستای : $\bar{e}_1 = \dfrac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_1}}{\underbrace{\left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_1}\right|}_{h_1}}$, $\bar{e}_2 = \dfrac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_2}}{\underbrace{\left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_2}\right|}_{h_2}}$, $\bar{e}_3 = \dfrac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_3}}{\underbrace{\left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_3}\right|}_{h_3}}$

$\longrightarrow d\vec{r} = h_1 \bar{e}_1 \, dq_1 + h_2 \bar{e}_2 \, dq_2 + h_3 \bar{e}_3 \, dq_3$

مقایسه $\quad i\,dx + j\,dy + k\,dz$

$$\left.\begin{aligned} dx &\leftrightarrow h_1 \, dq_1 \\ dy &\leftrightarrow h_2 \, dq_2 \\ dz &\leftrightarrow h_3 \, dq_3 \end{aligned}\right.$$

h_1, h_2, h_3 را ضریب مقیاس یا ضریب شکل (Shape factor) گویند

مثال
$$\begin{cases} x = q_1 \cos q_2 \\ y = q_1 \sin q_2 \\ z = q_3 \end{cases}$$

استوانه‌ای

$$h_1 = \left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} = \sqrt{\cos q_2^2 + \sin q_2^2 + 0} = 1$$

$$h_2 = \left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_2}\right| = \sqrt{(-q_1 \sin q_2)^2 + (q_1 \cos q_2)^2 + 0} = q_1$$

$$h_3 = \left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial q_3}\right| = \sqrt{0^2 + 0 + 1} = 1$$

q_1 المان طول در جهت $\quad dl_1 = h_1 \, dq_1 = dr$

q_2 〃 〃 〃 $\quad dl_2 = h_2 \, dq_2 = r \, d\theta$

q_3 〃 〃 〃 $\quad dl_3 = h_3 \, dq_3 = dz$

المان سطح $dA_k = dl_i \vec{e}_i \times dl_j \vec{e}_j = e_i \times e_j \, dl_i \, dl_j = e_k \, dl_i \, dl_j$

$dl_i = h_i \, dq_i \rightarrow \qquad = e_k (h_i \, dq_i)(h_j \, dq_j)$

المان سطح در جهت کلی — $\boxed{dA_k = h_i h_j \, dq_i \, dq_j}$

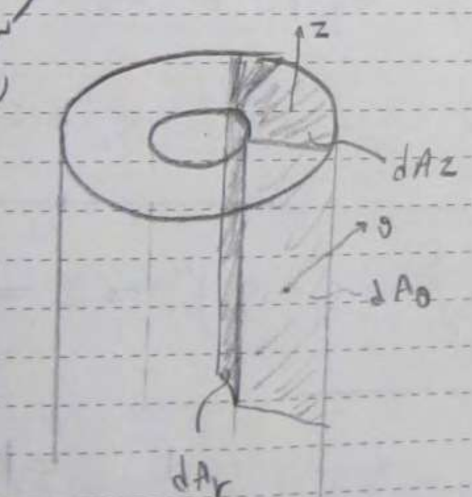
المان سطح در جهت r : $dA_r = dA_1 = h_2 h_3 \, dq_2 \, dq_3 = q_2 \, dq_2 \, dq_3$

$= r \, d\theta \, dz$

المان سطح در جهت θ $dA_2 = dA_\theta = h_3 h_1 \, dq_3 \, dq_1 = dr \, dz$

z 〃 〃 〃 $dA_3 = dA_z = h_1 h_2 \, dq_1 \, dq_2 = r \, dr \, d\theta$

که بردار یکه عمود بر سطح در جهت z می‌باشد



المان حجم $dV = \vec{e}_1 \, dl_1 \cdot \vec{e}_2 \, dl_2 \times \vec{e}_3 \, dl_3 = \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \times \hat{e}_3}_{1} \cdot h_1 h_2 h_3 \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3$

$dV = \underbrace{h_1 h_2 h_3}_{\text{ژاکوبی تبدیل}} \underbrace{dq_1 \, dq_2 \, d_3}_{\text{حجم}}$

در تبدیل دکارتی به استوانه‌ای

$J = r$

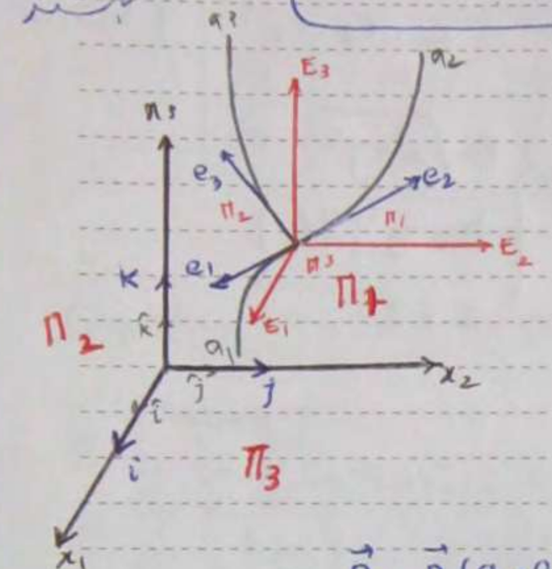
$J = r$

Spencer
Field theory H.B for Engineers

$$dV = \vec{e}_i h_i dq_i \cdot \vec{e}_j h_j dq_j \times \vec{e}_k h_k dq_k$$

دستگاه مختصات های منحنی الخط متعامد باید باشند

$$\boxed{dV = h_i h_j h_k \, dq_i \, dq_j \, dq_k}$$



جلسه 25 — 91/10/3

$$(x, y, z) \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\longleftrightarrow}} (q_1, q_2, q_3)$$

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$dR = i\,dx + j\,dy + k\,dz$$

$$\vec{R} = \vec{R}(q_1, q_2, q_3)$$

$$d\vec{R} = \frac{\partial R}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial R}{\partial q_3} dq_3$$

$$= h_1 e_1 dq_1 + h_2 e_2 dq_2 + h_3 e_3 dq_3$$

$h_1 dq_1$ = اندازه طول در جهت q_1
$h_2 dq_2$ این طول در جهت q_2
⋮

$$E_1 = \frac{\nabla q_1}{|\nabla q_1|}, \quad E_2 = \frac{\nabla q_2}{|\nabla q_2|} \quad \frac{\nabla q_3}{|\nabla q_3|}$$

بردارهای یکه عمود بر رویه‌های Π_1 و Π_2 و Π_3

بنابراین اگر برداری داشته باشیم می‌توانیم بنویسیم :

$$V = V_1 e_1 + V_2 e_2 + V_3 e_3$$

← بردار V Contra Variant
V_1, V_2, V_3 مولفه‌های

$$= \bar{V}_1 E_1 + \bar{V}_2 E_2 + \bar{V}_3 E_3$$

← بردار V Covarient $\bar{V}_i$ مولفه‌های

فرض کنیم از دستگاه دکارتی به دستگاه مختصات استوانه‌ای می‌رویم. داریم:

$$\begin{cases} r \longrightarrow q_1 \\ \phi \longrightarrow q_2 \\ z \longrightarrow q_3 \end{cases}$$ [illegible]

استوانه‌ای ⟶ دکارتی

$i, j, k \longrightarrow e_r, e_\phi, e_z$

$i, j, k \longleftarrow E_r, e_\phi, e_z$

بررسی تفاوت‌ها

ارتباط بین دو دستگاه مختصات (روابط تبدیل)

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

روابط تبدیل برعکس

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = tg^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

$R + z\ldots$

ثابت = z ← صفحه مختصات x, y

$$\vec{R} = xi + yj + zk$$

$$d\vec{R} = i\,dx + j\,dy + k\,dz$$

$$dx = \cos\phi\, dr - r\sin\phi\, d\phi$$

$$dy = \sin\phi\, dr + r\cos\phi\, d\phi$$

$$dz = dz$$

$$\rightarrow d\vec{R} = i(\cos\phi\, dr - r\sin\phi\, d\phi) + j(\sin\phi\, dr + r\cos\phi\, d\phi) + k\,dz$$

این روابط را براساس دیفرانسیل دستگاه مختصات استوانه‌ای مرتب می‌کنیم

$$d\vec{R} = \underbrace{(i\cos\phi + j\sin\phi)}_{\text{بردار مماس بر منحنی محور } r} dr + \underbrace{(-r\sin\phi\, i + r\cos\phi\, j)}_{\text{بردار مماس بر منحنی } \phi} d\phi + k\,dz$$

e_r ⇒ اندازه واحد است

$e_\phi = -i\sin\phi + j\cos\phi$ اندازه r

e_z

$$\begin{cases} \vec{e}_r = i\cos\phi + j\sin\phi \\ \vec{e}_\phi = -i\sin\phi + j\cos\phi \\ \vec{e}_z = e_z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس تبدیل}} \begin{bmatrix} dr \\ d\phi \\ dz \end{bmatrix}$$

اگر وارون این ماتریس تبدیل را بدست آوریم می‌توانیم بردارهای یکه i و j و k را بر حسب بردارهای یکه e_r و e_ϕ و e_z بدست آوریم.

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial R}{\partial r}\right|} , \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} i + \frac{\partial y}{\partial r} j + \frac{\partial z}{\partial r} k$$

$$= (\cos\phi) i + (\sin\phi) j$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \vec{R}}{\partial \phi}\right|} , \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi} i + \frac{\partial y}{\partial \phi} j + \frac{\partial z}{\partial \phi} k$$

$$= (-r\sin\phi) i + (r\cos\phi) j$$

$$\vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial R}{\partial z}\right|}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{بردار یکه در راستای } r} \nabla \vec{r} = \frac{\overset{r\cos\phi}{x}}{\underset{r}{\sqrt{x^2+y^2}}} \hat{i} + \frac{\overset{r\sin\phi}{y}}{\underset{r}{\sqrt{x^2+y^2}}} \hat{j} + 0$$

$$= \cos\phi \, \vec{i} + \sin\phi \, \vec{j} = \vec{e}_r$$

$$\vec{\nabla}\Phi = \Phi_x i + \Phi_y j + \Phi_z k$$

$r\sin\phi$ $\qquad$ $r\cos\phi$

$$\rightarrow \nabla\vec{\phi} = -\frac{y}{\underbrace{x^2+y^2}_{r^2}}\, i + \frac{x}{\underbrace{x^2+y^2}_{r^2}}\, j = -\frac{\sin\phi}{r}\, i + \frac{\cos\phi}{r}\, j = \frac{1}{r}\vec{e}_\phi$$

$$\nabla\vec{z} = (1)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{E}_p = \frac{\vec{e}_p}{h_p}} \qquad p = 1, 2, 3 \qquad \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = r \\ h_3 = 1 \end{cases}$$

گرادیان یک اسکالر

$$\vec{\nabla\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\, i + \frac{\partial\psi}{\partial y}\, j + \frac{\partial\psi}{\partial z}\, k$$

$f_1 \quad f_2 \quad f_3$

$$\rightarrow q_1, q_2, q_3 = ?$$

دستگاه مختصات منحنی‌الخط متعامد

$$\longrightarrow \vec{\nabla\psi} = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 \qquad f_1, f_2, f_3$$

$$\psi(x, y, z) \longrightarrow \psi(q_1, q_2, q_3)$$

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\psi}{\partial q_3} dq_3 \quad \star$$

$$= \vec{\nabla\psi} \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla\psi} \cdot (h_1 e_1\, dq_1 + h_2 e_2\, dq_2 + h_3 e_3\, dq_3)$$

$$= (f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3) \cdot (h_1 e_1\, dq_1 + h_2 e_2\, dq_2 + h_3 e_3\, dq_3)$$

$$= f_1 h_1\, dq_1 + f_2 h_2\, dq_2 + f_3 h_3\, dq_3 \quad \star$$

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial q_1} \\ f_2 = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial q_2} \\ f_3 = \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial q_3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla f} = \left(\frac{e_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{e_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{e_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3} \right)$$

ارجاعات کلی برای عملگر ∇ در مختصات منحنی‌الخط متعامد

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left(\frac{e_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{e_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{e_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \right)}$$

کاربرد عملگر ∇ در xyz داشتیم

$\nabla \to \vec{\nabla}\cdot\Box$ دیورژانس

$\nabla \to \nabla\times\Box$ کرل

$$\to \vec{\nabla f}\cdot\vec{e_1} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}$$

مشتق f در جهت q_1

$$\text{if } f = q_1 \longrightarrow \vec{\nabla q_1}\cdot\vec{e_1} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial q_1}{\partial q_1} = \frac{1}{h_1}$$

$$\vec{\nabla q_2}\cdot\vec{e_2} = \frac{1}{h_2}$$

$$\vec{\nabla q_3}\cdot\vec{e_3} = \frac{1}{h_3}$$

بردارهای عمود بر رویه‌های q_1، q_2، q_3

$$E_p = \frac{\nabla q_p}{|\nabla q_p|} \quad : \quad \nabla q_p = \vec{E_p}\,\underbrace{|\nabla q_p|}_{\frac{1}{h_p}} \longrightarrow \boxed{\vec{\nabla q_p} = \frac{\vec{E_p}}{h_p}}$$

$$\vec{E_p} = \frac{\vec{e_p}}{h_p} \quad ,$$

$$\to \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \left(\frac{e_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{e_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{e_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \right)\cdot\left(V_1e_1 + V_2e_2 + V_3e_3\right)$$

$e_1 = e_2 \times e_3$

$e_2 = e_3 \times e_1$

$e_3 = e_1 \times e_2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3V_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3h_1V_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2V_3) \right\}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1e_1 & h_2e_2 & h_3e_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3 \end{vmatrix}}$$

لاپلاسین

اگر جزء ∇ گرادیان یک میدان مانند ψ باشد

$$\nabla\cdot(\nabla\psi)=\nabla^2\psi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right\}$$

حال روابط بالا را برای یک میدان [illegible] برداری در دستگاه مختصات استوانه ای بحث می کنیم.

$$\begin{cases}h_1=h_r=1\\ h_2=h_\phi=r\\ h_3=h_z=1\end{cases}\qquad\begin{cases}q_1=r\\ q_2=\phi\\ q_3=z\end{cases}$$

$$\rightarrow\vec{\nabla}\psi=e_r\underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial r}}_{\text{بعد طول}}+\frac{e_\phi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}+e_z\underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial z}}_{\text{بعد طول}}$$

$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\Rightarrow$ بعد طول

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{\partial}{\partial\phi}(V_\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(rV_z)\right]$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}(V_\phi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rV_z)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}e_r & re_\phi & e_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_r & rV_\phi & V_z\end{vmatrix}$$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۲۸	۲۹	۳۰				

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{1}{r}\left\{ e_r\left(\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{r\,\partial v_\phi}{\partial z}\right) - r e_\phi\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) + e_z\left(\frac{\partial(r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right)\right\}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{v} = \underbrace{e_r\left(\frac{\partial v_z}{r\,\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)}_{\text{چرخش در جهت محور } r} - \underbrace{e_\phi\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)}_{\text{چرخش در جهت محور } \phi} + \underbrace{\frac{1}{r}e_z\left(\frac{\partial(r v_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right)}_{\text{چرخش در جهت محور } z}}$$

$$\nabla^2 t = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial t}{\partial z}\right)\right\}$$

$$\boxed{\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}}$$

ch10 : 1–30 ، ?

ch12

} مهلت تا روز پایان ترم