Advanced Engineering Mathematics

ریاضیات مهندسی پیشرفته

دکتر رضا انصاری

گروه مکانیک دانشگاه گیلان

2009

« درسنامه ریاضیات مهندسی پیشرفته »

فصل ششم :

نگاشت همدیس و کاربرد آن در حل مسایل مقدار مرزی

نگاشت همدیس و کاربرد آن در حل مسایل مقدار مرزی

معادلات کوشی – ریمان (Cauchy–Riemann)

برای آنکه $f'(z)$ در بعضی نواحی وجود داشته باشد، u, v می بایست معادلات زیر را در نقطه مورد نظر ارضا نمایند.

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

برقراری معادلات کوشی – ریمان شرط لازم برای مشتق پذیری است اما کافی نیست.

شرایط کافی هنگامی حاصل می شود که u, v در همسایگی z_0، C^1 باشند. (در همسایگی z_0 توابع u, v و چهار مشتق آن در معادلات کوشی- ریمان پیوسته باشند.

برای آنکه تابع $f(z) = u + iv$ در z_0 مشتق پذیر باشند

- لازم است معادلات کوشی- ریمان را در z_0 ارضا نمایند.
- کافی است u, v در بعضی همسایگی های z_0، C^1 نیز باشند.

در اینصورت داریم

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

اگر تابع $f(z)$ در z_0 و بعضی همسایگی های آن مشتق پذیر باشد میگوییم در z_0 تحلیلی (*analytic/ holomorphic/ regular*) است و در غیر اینصورت در z_0 منفرد (*singular*) است.

اگر تابع $f(z)$ در همه جای صفحه مختلط تحلیلی باشد، آنرا تابع تام (*Entire function*) نامند.

اگر تابع $f(z)$ در همه جای صفحه مختلط بجز برخی نقاط منفرد مجزا (*isolated singularities*) تحلیلی باشد، آنرا *memorphic* نامند.

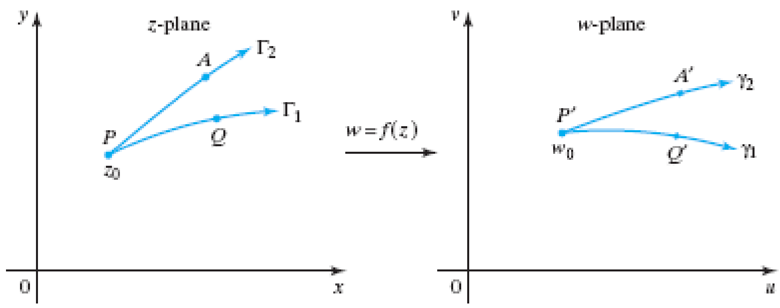
♦**نکته :** $f(z)$ می بایست معادلات کوشی- ریمان را در یک ناحیه ارضا نماید نه فقط یک نقطه.

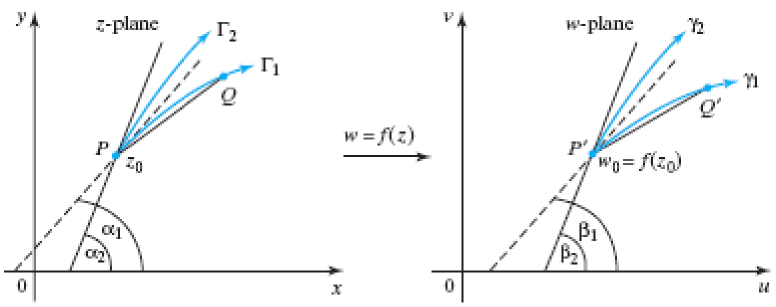
بعنوان مثال $f(z) = |z|$ فقط در $z = 0$ معادلات کوشی- ریمان را ارضا می نماید و نه جای دیگر. لذا $f(z)$ در هیچ جای صفحه مختلط تحلیلی نیست.

نگاشت همدیس

نگاشت همدیس یا حافظ زاویه (angle-preserving) است که در آن زاویه بین منحنی های جهت دار هم از نظر جهت و هم از نظر اندازه حفظ شود.

نگاشت همدیس روشی متعارف برای حل مسائل مقدار مرزی در نظریه پتانسیل می باشد . با این روش یک ناحیه پیچیده مفروض به ناحیه ای ساده تر تبدیل می شود.





$$\alpha_2-\alpha_1=\beta_2-\beta_1.$$

قضیه نگاشت همدیس: نگاشتی که با تابع تحلیلی $f(z)$ تعریف می شود بجز در نقاط $f'(z)=0$ همدیس است.

اگر $w=f(z)=u+iv$ یک تابع تحلیلی تک مقداره باشد ، $u=constant$ و $v=constant$ مسیرهای متعامد هستند ؛ یعنی دسته منحنی های $u=constant$ و $v=constant$ در صفحه w به جز در تصویر نقاط بحرانی $f(z)$ بر هم عمودند .

- اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد ، z_0 را نقطه بحرانی می نامیم هرگاه $f'(z)=0$.

انواع تبدیلات

تبدیل خطی $\quad w=az+b\ \ (a\neq 0)\quad$ ترکیبی از انتقال، دوران و انبساط

$$z=re^{i\theta}\ ,a=|a|e^{i\alpha}\ ,b=b_1+ib_2$$

این تبدیل سه عمل زیر را همزمان انجام می دهد :

1 - فاصله هر نقطه تا مبدأ را $|a|$ برابر می کند .

2 - به اندازه ی α کل شکل را حول مبدأ دوران می دهد .

3 -به اندازه ی b_1 شکل را به سمت راست یا چپ و به اندازه ی b_2 به سمت بالا یا پایین انتقال می دهد .

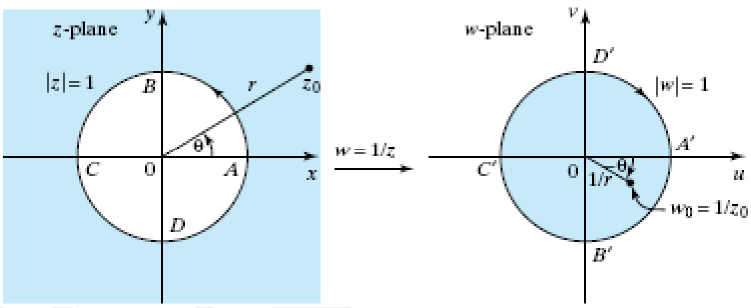
تبدیل انعکاس $w = \frac{1}{z}$

این نگاشت به جز در z=0 در سایر نقاط تحلیلی است و همچنین به جز در این نقطه در سایر نقاط همدیس می باشد .

این تبدیل سه عمل زیر را همزمان انجام می دهد :

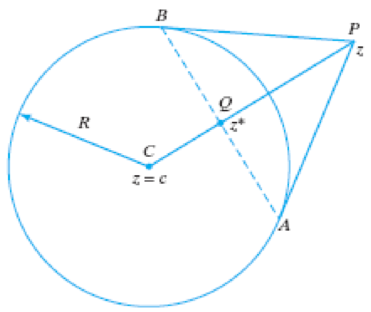
1 - فاصله هر نقطه تا مبدأ از شکل تا مبدأ را معکوس می کند .

2 -زاویه ی حامل شعاع هر نقطه را منفی می کند .



$$w = \left(\frac{1}{r}\right)e^{-i\theta}.$$

$$|CP| \times |CQ| = R^2,$$



$$|z - c|\,|z^* - c| = R^2.$$

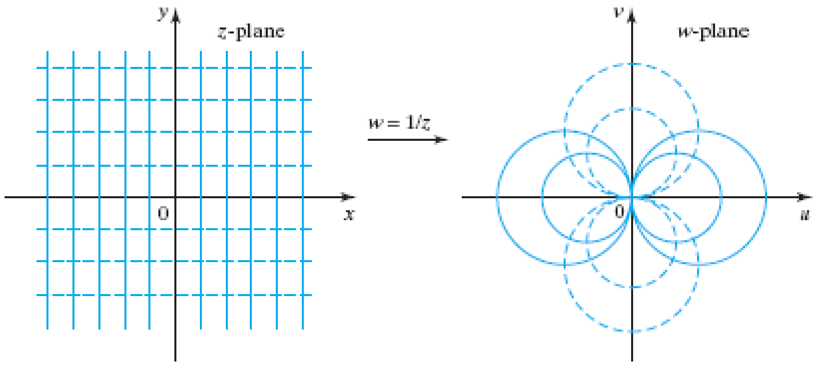
$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

$$u + iv = \frac{1}{x + iy}, \quad x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0,$$

- تحت این تبدیل دایره غیر گذرنده از مبدأ در صفحه z به دایره غیر گذرنده از مبدأ در صفحه w تبدیل می شود.
- خط گذرنده از مبدأ به خط گذرنده از مبدأ تیدیل می شود .

- خط غیر گذرنده از مبدأ به دایره گذرنده از مبدأ تبدیل می شود .
- دایره گذرنده از مبدأ به خط غیر گذرنده از مبدأ تیدیل می شود .



تبدیل دو خطی موبیس $ad \neq bc$ $w=\frac{az+b}{cz+d}$ ترکیبی از انتقال، دوران، انبساط و انعکاس

تبدیل یک دایره تحت این تبدیل یک دایره است. (خط دایره ای با شعاع بی نهایت است).

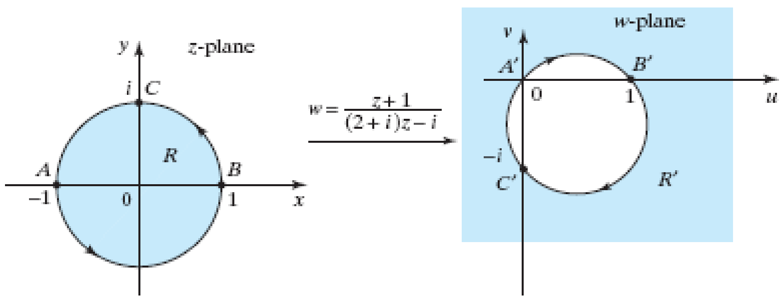
این تبدیل می تواند ضمن حفظ تقارن ، یک دایره را به دایره دیگر تبدیل کند و می تواند برای تبدیل دو دایره غیر هم مرکز به دو دایره هم مرکز به کار رود .

برای انتقال سه نقطه از صفحه z به سه نقطه از صفحه w داریم

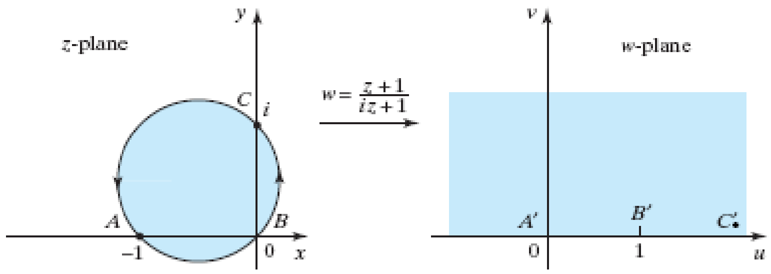
$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

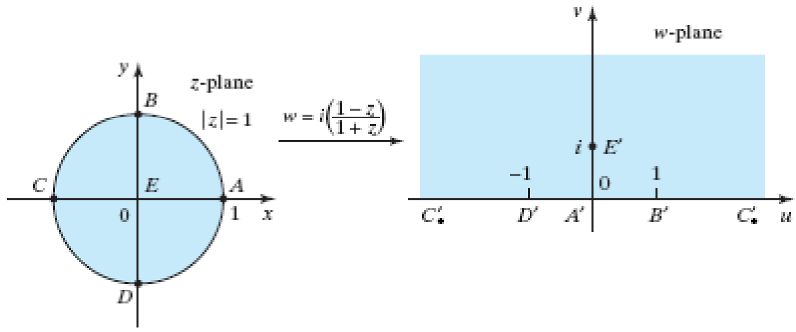
سؤال :

$$\frac{w}{w-1}\cdot\frac{-(1+i)}{-i}=\frac{z+1}{z-1}\cdot\frac{i-1}{i+1}, \qquad w=\frac{z+1}{(2+i)z-i}.$$



$$\frac{w}{w-1}=\frac{z+1}{z}\cdot\frac{i}{i+1}, \qquad w=\frac{z+1}{iz+1}.$$

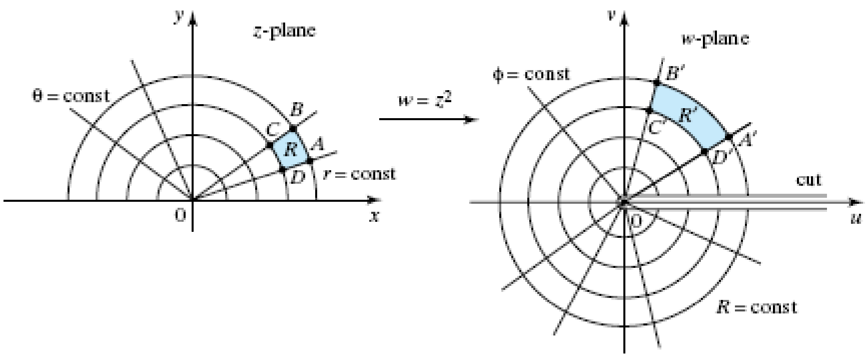




تبدیل $w = z^2$

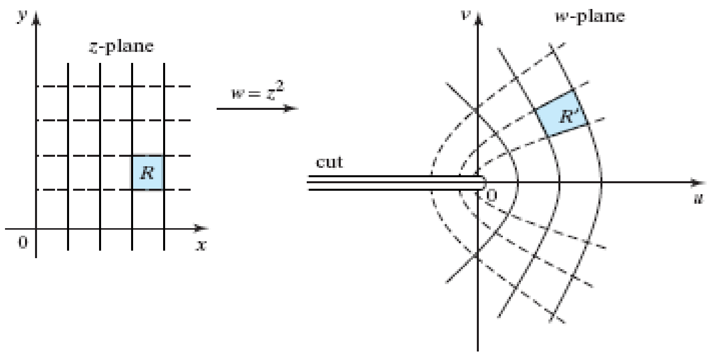
$z = re^{i\theta}$ and $w = \rho e^{i\phi}$

$\rho = r^2$ and $\phi = 2\theta.$



$z = x + iy$ and $w = u + iv$ in $w = z^2$

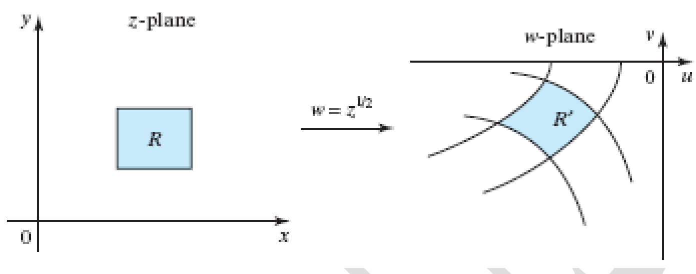
$u = x^2 - y^2$ and $v = 2xy.$



تبدیل $w = z^{1/2}$

$z = x + iy$ and $w = u + iv$ in $w = z^2$

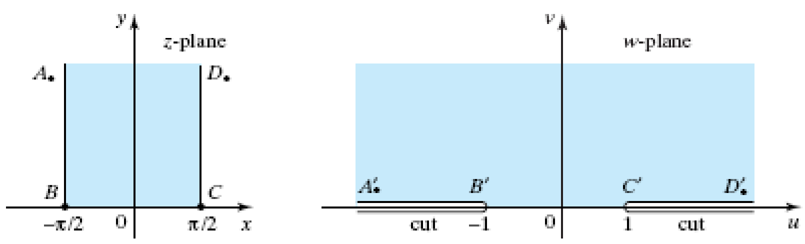
$x = u^2 - v^2$ and $y = 2uv.$



تبدیل $w = \sin z$ & $w = \sin^{-1} z$

$w = \sin z = u + iv = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$

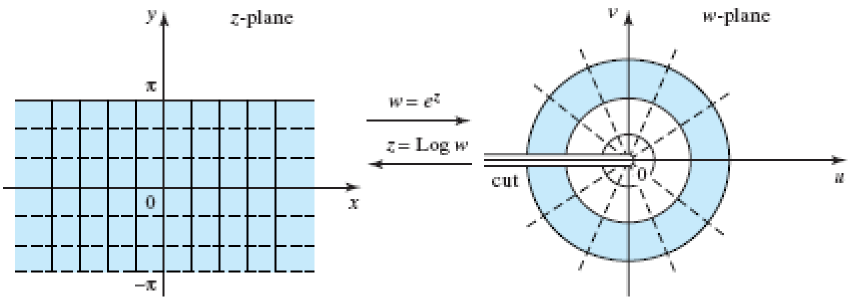
$u = \sin x \cosh y$ and $v = \cos x \sinh y.$



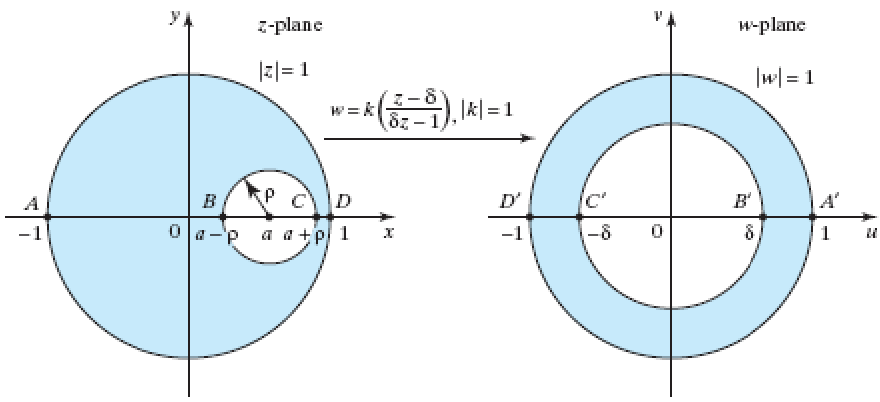
تبدیل $w = \exp z$ & $w = \log z$

$w = \exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$

$\text{Log}\, z = \ln|z| + i\, \text{Arg}\, z, \quad \text{with } |z| > 0 \text{ and } -\pi < \text{Arg}\, z \le \pi.$



تبدیل دوایر غیر هم مرکز به هم مرکز

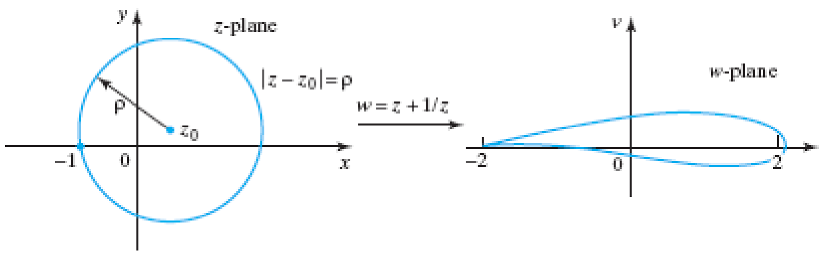


(a) (b)

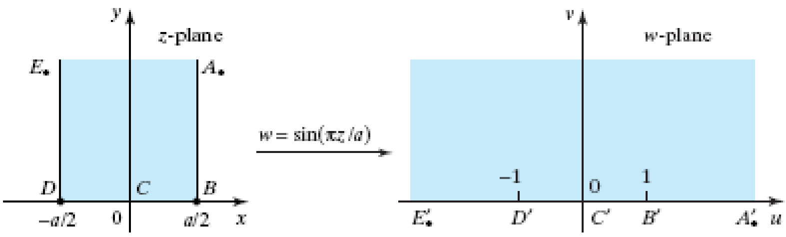
تبدیل Joukowski $w = z + \frac{1}{z}$

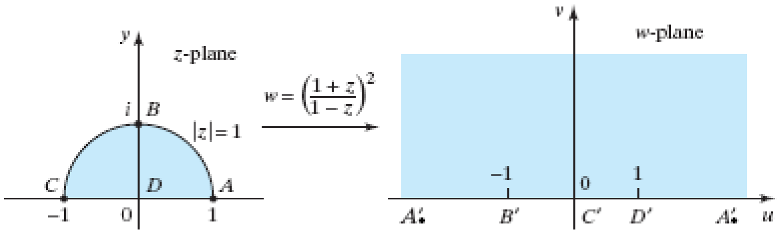
$$w = u + iv = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta,$$

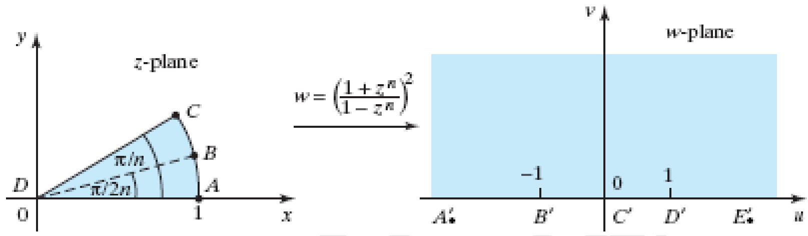
$$u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \quad \text{and} \quad v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

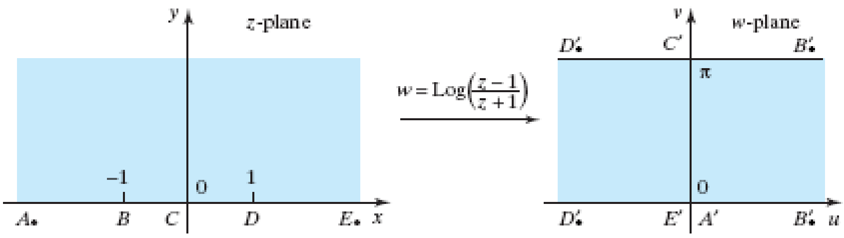


چند تبدیل مهم



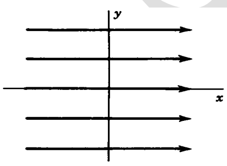






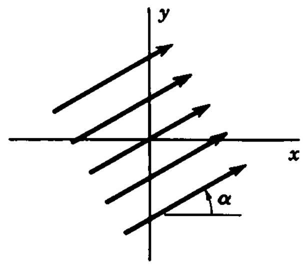
جریان سیالات ایده ال (غیر قابل تراکم، غیر لزج و غیر چرخشی)

انواع جریان های پایه



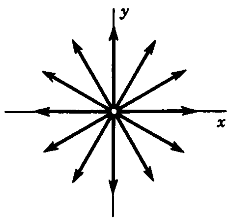
$$\Phi = V_0 z,$$

$$V_x = V_0, \qquad V_y = 0,$$

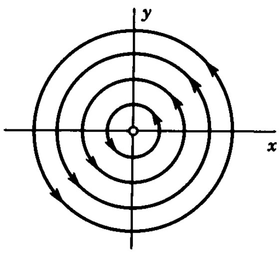


$$\Phi = V_0 e^{-i\alpha} z$$

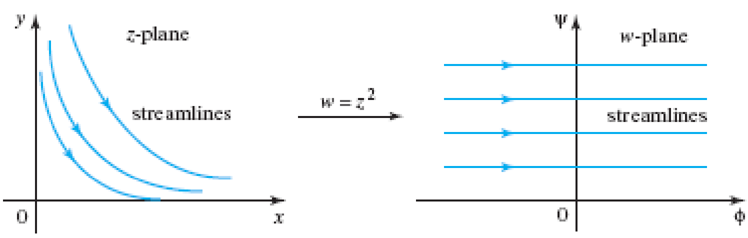
$$V_x = V_0 \cos\alpha, \qquad V_y = V_0 \sin\alpha,$$

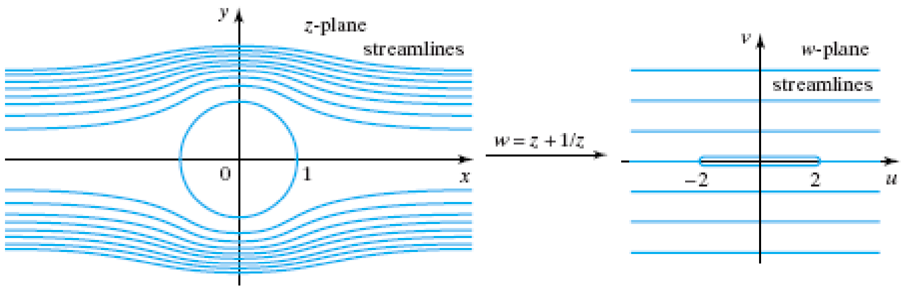


$$\Phi = k \log z = k(\log r + i\theta),$$



$$\Phi = -ik \log(z - a)$$





حل مسایل مقدار مرزی با استفاده از نگاشت همدیس

قضیه: اگر تابع $f(z)$ تحلیلی و $f'(z) \neq 0$ باشد داریم

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right)$$

نتیجه: تابع هارمونیک یا همساز $\varphi(x, y)$ تحت تبدیل تابع تحلیلی $f(z)$ و $f'(z) \neq 0$ همساز باقی می ماند. به بیان ریاضی

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0$$

قضیه: نگاشت همدیس تابع $f(z)$ تحلیلی و $f'(z) \neq 0$ شرایط مرزی $\varphi(x, y) = cte$ و $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ را بدون تغییر نگه می دارد.

یادآوری: قسمت های حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی هارمونیک هستند.

تابع پتانسیل

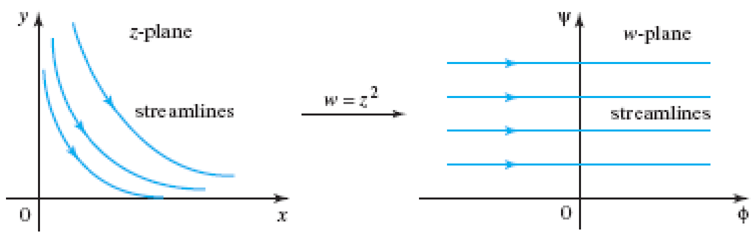
تابع تحلیلی $f(z) = \varphi + i\psi$ تابع مختلط جریان نامیده می شود .

$\psi = cte$: خطوط جریان (*Stream lines*)

$\varphi = cte$: خطوط هم پتانسیل

$$F'(z) = \varphi_x + i\psi_x = \varphi_x - i\varphi_y$$
$$u = \varphi_x + i\varphi_y \quad , \qquad V = \overline{F'(z)} \quad , \qquad |V| = |F'(z)|$$

سؤال : جریان در یک گوشه

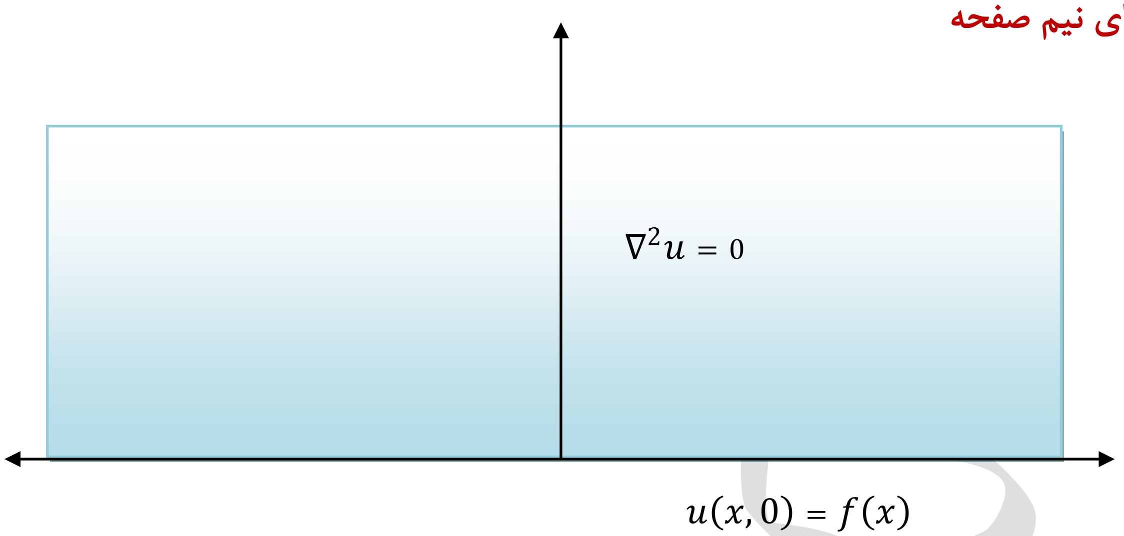


$$F(w) = V_0 w$$
$$F(z) = V_0 z^2 = V_0(x^2 - y^2 + 2xyi)$$
$$\text{خطوط جریان} = 2V_0 xy \ \rightarrow \ V = \overline{F'(z)} = 2V_0(x - iy)$$
$$|V| = 2V_0\sqrt{x^2 + y^2}$$

سؤال : جریان حول یک استوانه

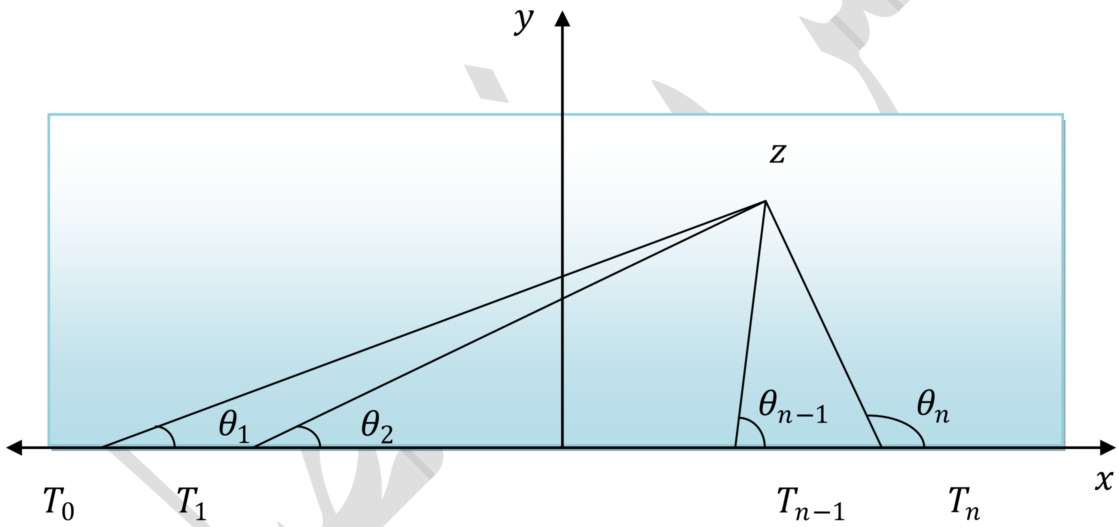
$$w = z + \frac{a^2}{z}$$
$$F(w) = V_0 w \quad , F(z) = V_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$
$$F(z) = V_0\left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{re^{i\theta}}\right) = V_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta + iV_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta$$
$$\varphi = V_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta \quad , \qquad \psi = V_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta$$
$$V_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta = cte \ \rightarrow r = a \,, \theta = 0, \pi \ \rightarrow \psi = 0$$
$$F'(z) = V_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) = V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2 e^{i2\theta}}\right)$$
$$= V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right) + iV_0\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta$$
$$|V| = |F'(z)| = \ V_0\sqrt{1 - \frac{2a^2\cos 2\theta}{r^2} + \frac{a^4}{r^4}}$$
$$F'(z) = 0 \ \rightarrow \ V_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) = 0 \ \rightarrow z = \mp a \quad \text{نقاط سکون}$$

مسایل دریشله برای نیم صفحه



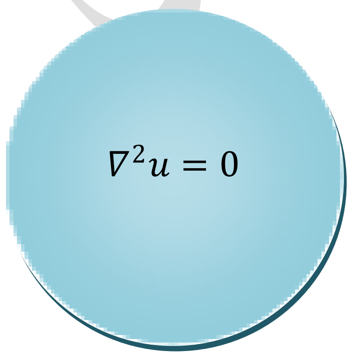
$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\xi$$

حالت خاص



$$T(x,y) = T_n + \frac{1}{\pi}[(T_{n-1} - T_n)\theta_n + \cdots + (T_0 - T_1)\theta_1]$$

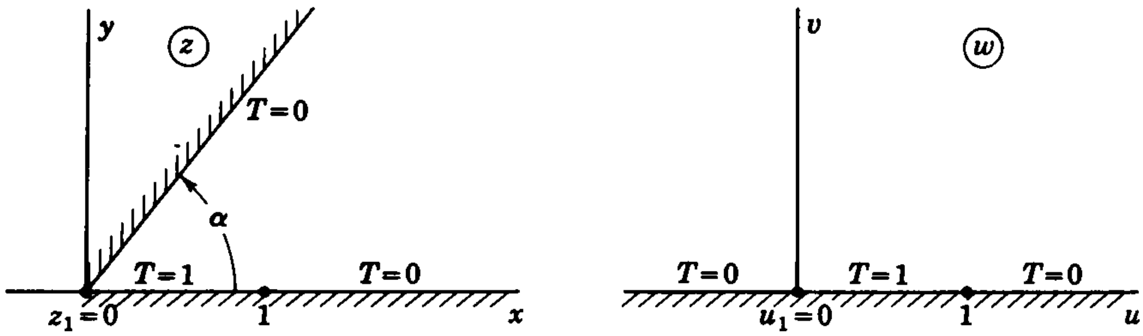
مسایل دریشله برای قرص دایروی



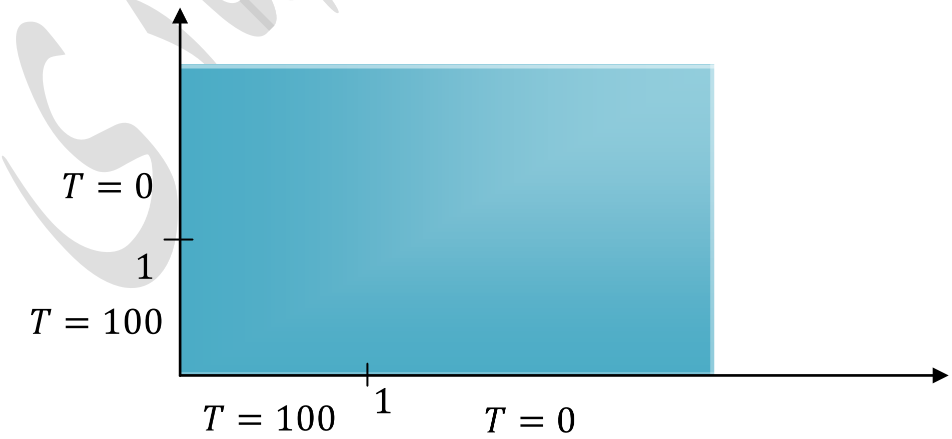
$$u(R,\theta) = f(\theta)$$

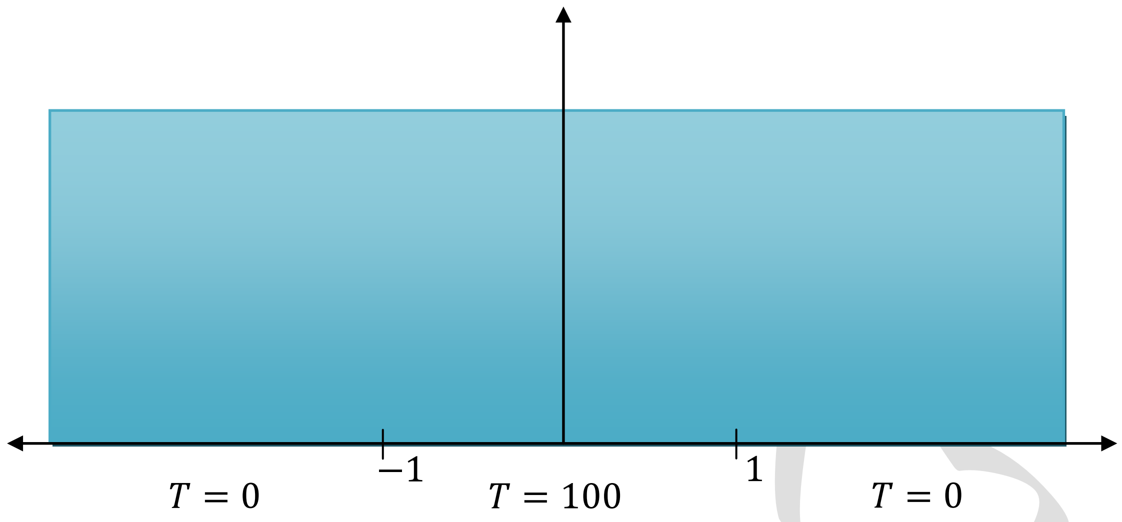
$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}\cos n(\xi-\theta)\right]f(\xi)d\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos n(\xi-\theta)+r^2}f(\xi)d\xi$$

سؤال : با استفاده از نگاشت همدیس حل معادله لاپلاس را در ناحیه نشان داده شده در شکل زیر بدست آورید.

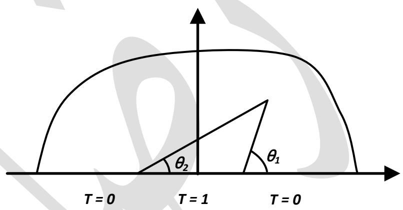


سؤال : با استفاده از نگاشت همدیس حل معادله لاپلاس را در ناحیه نشان داده شده در شکل زیر بدست آورید.





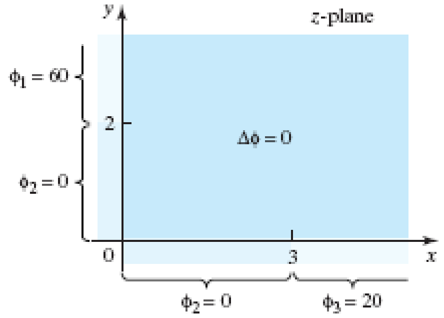
$$T(x,y) = \frac{100}{\pi}[Arg(z^2-1) - Arg(z^2+1)]$$



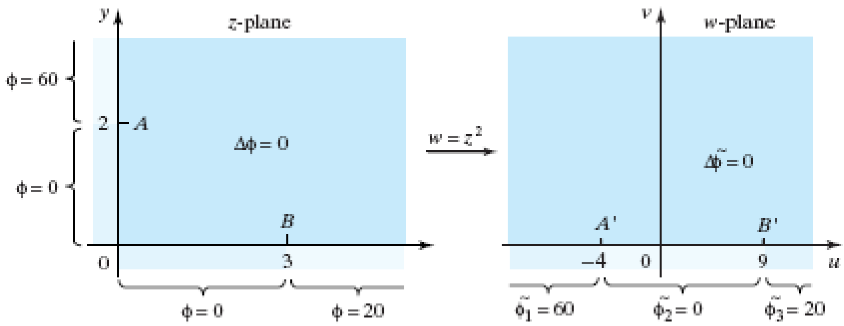
$$T = 0 + \frac{1}{\pi}\{(1-0)\theta_1 + (0-1)\theta_2\}$$

$$T = \frac{1}{\pi}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{y}{x-1} - \tan^{-1}\frac{y}{x+1}\right) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

سؤال : با استفاده از نگاشت همدیس حل معادله لاپلاس را در ناحیه نشان داده شده در شکل زیر بدست آورید.



حل



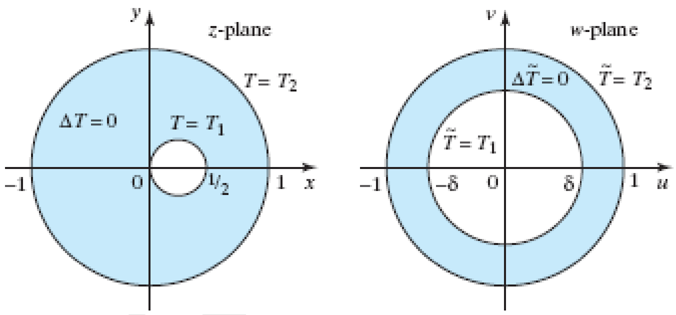
$$\tilde{\phi}(u, v) = 60 + \frac{20}{\pi}\mathrm{Arg}(w+4) - \frac{60}{\pi}\mathrm{Arg}(w-9).$$

$$\mathrm{Arg}(w+4) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2 + 4}\right)$$

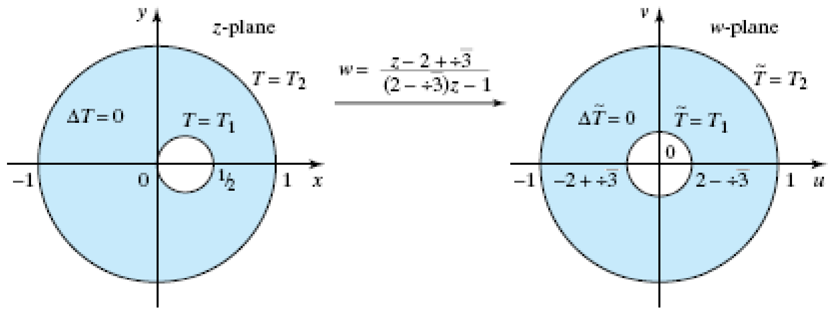
$$\mathrm{Arg}(w-9) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2 - 9}\right).$$

$$\phi(x, y) = 60 + \frac{20}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2 + 4}\right) - \frac{60}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2 - 9}\right),$$

سؤال : با استفاده از نگاشت همدیس حل معادله لاپلاس را در ناحیه نشان داده شده در شکل زیر بدست آورید.



حل



$$\frac{d^2\tilde{T}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tilde{T}}{dr} = 0.$$

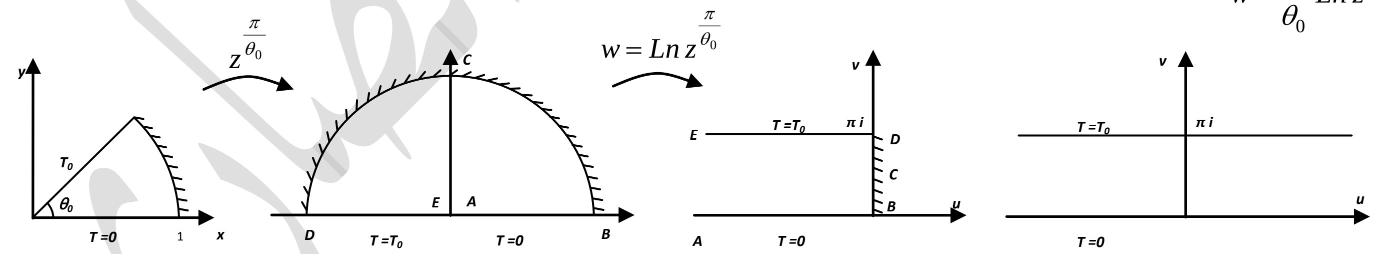
$$\tilde{T}(r) = A \ln r + B.$$

$$\tilde{T}(r) = T_2 - \left(\frac{T_2 - T_1}{\ln(2 - \sqrt{3})}\right) \ln r.$$

$$T(x, y) = T_2 - \left(\frac{T_2 - T_1}{\ln(2 - \sqrt{3})}\right) \ln\left|\frac{x + iy - 2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(x + iy) - 1}\right|.$$

سؤال : با استفاده از نگاشت همدیس حل معادله لاپلاس را در ناحیه نشان داده شده در شکل زیر بدست آورید.

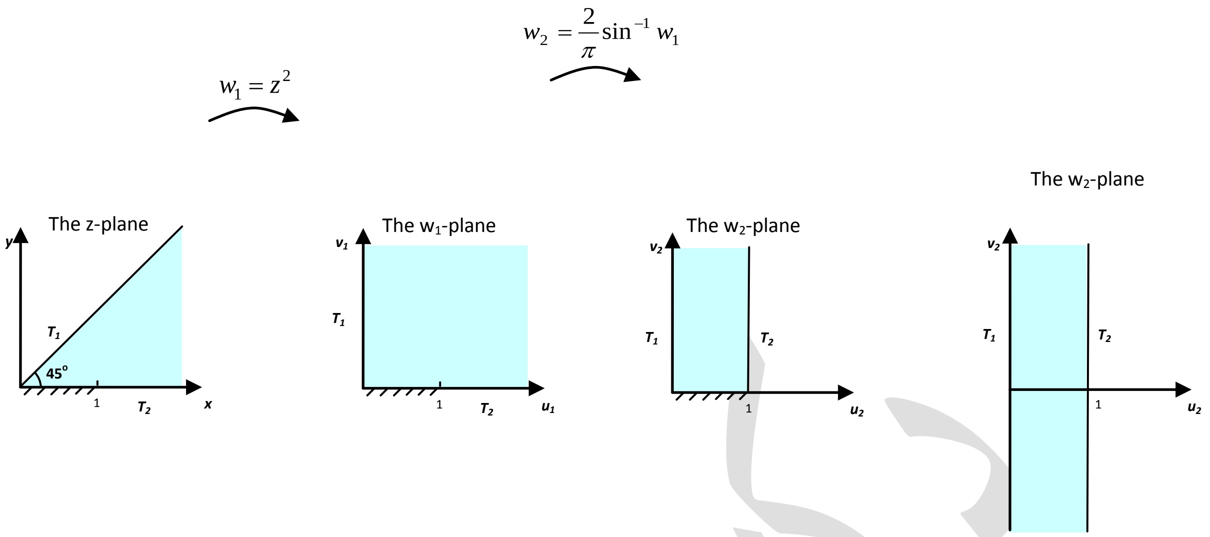
$$w = \frac{\pi}{\theta_0} Ln\, z$$



$\equiv$

$$T = \frac{T_0}{\pi} v \qquad u + iv = \frac{\pi}{\theta_0}(Ln\, r + i \arg z) \Rightarrow v = \frac{\pi}{\theta_0}\arg z \Rightarrow T = \frac{T_0}{\theta_0} arctg\, \frac{y}{x}$$

سؤال : با استفاده از نگاشت همدیس حل معادله لاپلاس را در ناحیه نشان داده شده در شکل زیر بدست آورید.



$$T = T_1 + (T_2 - T_1)u_2 = T_1 + (T_2 - T_1)\,\mathrm{Re}\{w_2\} = T_1 + (T_2 - T_1)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{2}{\pi}\sin^{-1} z^2\right\} = T_1 + \frac{2(T_2 - T_1)}{\pi}\,\mathrm{Re}\{\sin^{-1} z^2\}$$

$$\mathrm{Re}\{\sin^{-1} z\} = \sin^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}\right]\right\}, \qquad z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

$$\mathrm{Re}\{\sin^{-1} z^2\} = \sin^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + 2(x^2 - y^2) + 1} - \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 - 2(x^2 - y^2) + 1}\right]\right\}$$

توابع چند مقداره (*Multivalued functions*)، شاخه (*branch*)، شاخه اصلی (*Principal branch*)، نقاط شاخه (*branch points*)، برش شاخه (*branch cut*)

$$z = \rho^{1/n}\left\{\cos\left[\frac{2k\pi}{n} + \psi\right] + i\sin\left[\frac{2k\pi}{n} + \psi\right]\right\}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (58)$$

هر جواب با n متفاوت یک شاخه از تابع n ریشه ای نامیده می شود و شاخه متناظر با $n=0$ شاخه اصلی نامیده می شود . برش در صفحه w که یک شاخه را از دیگری جدا می کند ، برش شاخه نامیده می شود .بنابراین شاخه اصلی تابع n ریشه ای $z = w^{\frac{1}{n}}$ عبارتست از :

$$z = \rho^{1/n}[\cos\psi + i\sin\psi], \quad \text{with } -\pi/n < \psi \le \pi/n.$$

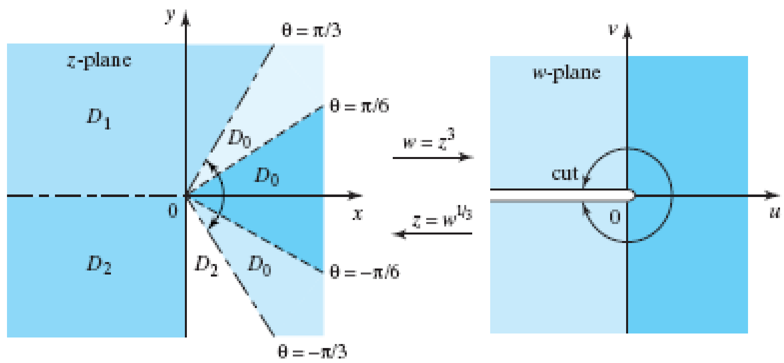


FIGURE 13.7 Mapping of sector D_0 in the z-plane onto the cut w-plane by $w = z^3$, and of the cut w-plane onto D_0 by the principal branch of $z = w^{1/3}$.

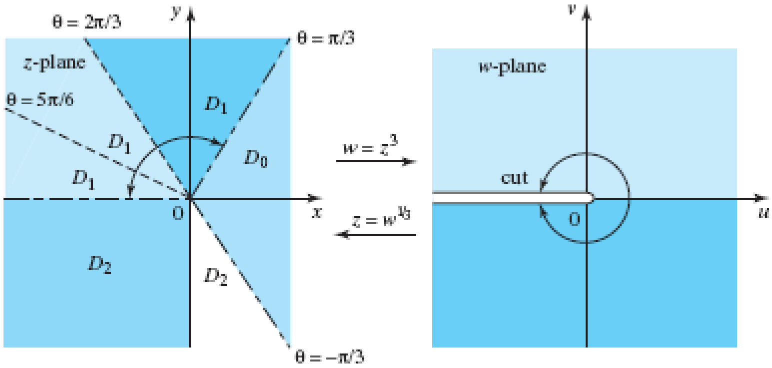


FIGURE 13.8 Mapping of sector D_1 in the z-plane onto the cut w-plane by $w = z^3$, and of the cut w-plane onto D_1 by the second branch of $z = w^{1/3}$.

$$\log z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z \pm 2n\pi).$$

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z), \quad \text{with } z \neq 0 \quad \text{and} \quad -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.$$

Improper Integrals with Branch Points

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} P(x)dx,$$

where α is not an integer and $P(x)$ is a rational function of x.

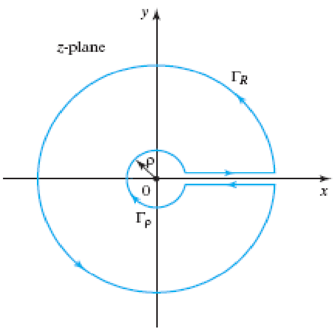


FIGURE 15.14 The contour Γ used to evaluate $\int_0^\infty x^{\alpha-1} P(x)dx$.

اگر تبدیل لاپلاس شامل یک نقطه شاخه (*branch points*) باشد ، کانتور ۱۶.۱ با اعمال یک برش شاخه باید اصلاح شود تا تابع را در در داخل کانتور به صورت یک تابع تک مقداره در آورد.

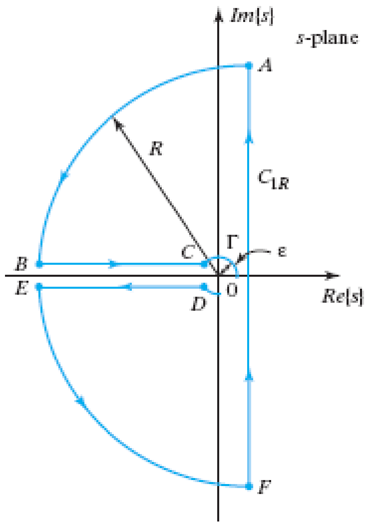


FIGURE 16.2 Modified contour with a branch cut to make $1/\sqrt{s}$ single valued.

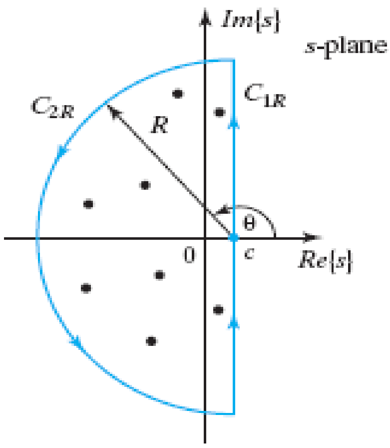


FIGURE 16.1 The contour C_R and a typical arrangement of poles inside C_R.