جزوه

نام دانشگاه: تربیت مدرس

نام درس: انتقال حرارت پیشرفته

انتقال حرارت پیشرفته

جلسه هفتم

مروری بر روابط ریاضی ضروری برای مسائل پایای دو و سه بعدی

فهرست مطالب

بسم الله الرحمن الرحیم

۱. مقدمه

مباحث قبلی‌مان به مسائل یک بعدی پایا محدود می‌شد. به‌طور کلی از آنجایی‌که این‌گونه مسائل، معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را حاصل می‌کنند، معمولاً قابل حل می‌باشند. به عبارت دیگر، مسائل پایای دو و سه بعدی و مسائل ناپایا، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را حاصل می‌کنند، که هیچ راه حل کلی برای آنها وجود ندارد. در این فصل و فصل بعد، چندین روش برای حل دقیق این مسائل ارائه شده است.

وقتی‌که مرزهای یک مسأله، هدایت چند بعدی متناظر با سطوح مختصات در یک سیستم مختصات متعامد مثل مختصات‌های کارتزین، استوانه‌ای، یا کروی باشد، یک راه دقیق توسط روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر خواهد بود. یک روش متداول بر اساس جداسازی متغیرها، و دیگری بر اساس تبدیل لاپلاس می‌باشد. دلایل متقاعدکننده‌ای وجود دارد که نشان می‌دهند این دو روش متداول‌تر، برای حل مسائل ویژه مناسب‌ترند؛ اگرچه، تبدیل لاپلاس برای حل مسائل پیچیده مناسب است، اما نیازمند آگاهی از ریاضیات پیشرفته‌تری است. بنابراین، بحث پیرامون تبدیل لاپلاس را که در فصل ۷ کتاب عنوان شده است را در این درس مطرح نمی‌نماییم و این فصل را به روش جداسازی متغیرها اختصاص می‌دهیم. در چهار بخش بعدی، مروری بر روابط ریاضی ضروری برای این روش، خواهیم داشت.

۲. مسائل مقدار مرزی، مسائل مقدار مشخصه

در ابتدا یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم که از فرمولاسیون دیفرانسیلی مسأله‌ی هدایت یک بعدی پایا حاصل می‌شود را در نظر بگیرید. جواب این مسأله شامل ۲ ثابت اختیاری است که توسط دو شرط تعیین می‌شوند، که هر کدام از این شرایط در یکی از مرزهای مسأله قرار دارند. به این‌گونه مسائل، مسائل مقدار مرزی گفته می‌شود و با مسائل مقدار اولیه که در آنها همه‌ی شرایط در یک مکان تعیین شده است، متفاوت می‌باشد. یک مثال از مسأله‌ی مقدار اولیه، سقوط آزاد یک جسم است که در فصل ۱ به آن اشاره شد.

حال یک معادله خطی همگن مرتبه دوم را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0, \tag{۷-۱}$$

که در مرزهای $x=a$ و $x=b$ مقدار تابع y به صفر می‌رسد:

$$y(a) = 0, \qquad y(b) = 0. \tag{۷-۲}$$

جواب کلی این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{۷-۳}$$

که $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌های مستقل خطی و C_1 و C_2 ثوابت اختیاری می‌باشند. از ترکیب این جواب با شرایط مرزی داریم:

$$\begin{aligned} C_1y_1(a) + C_2y_2(a) &= 0, \\ C_1y_1(b) + C_2y_2(b) &= 0. \end{aligned} \tag{۷-۴}$$

یک جواب این معادله‌ی همگن به ازای $C_1=C_2=0$ بدست می‌آید، که به آن جواب بدیهی $y\equiv 0$ می‌گویند. اگر دترمینان ضرایب C_1 و C_2 غیر صفر باشد، جواب بدیهی تنها جواب است. اگر دترمینان ضرایب صفر باشد، داریم:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0. \tag{۷-۵}$$

حال دو معادله‌ی (۴-۷) یکسان بوده و یک ثابت را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دیگری با استفاده از یکی از معادلات بیان نمود، و ثابت دوم اختیاری است. بنابراین اگر معادله‌ی (۵-۷) صادق بوده و با در نظر گرفتن اولیه‌ی معادله‌ی (۴-۷)، $C_2y_2(a)=-C_1y_1(a)$ بدست می‌آید. با تعریف ثابت جدید C بصورت $C_1=Cy_2(a)$ معادله‌ی $C_2=-Cy_1(a)$ بدست می‌آید و معادله (۳-۷) به صورت زیر خواهد بود:

$$y = C[y_2(a)y_1(x) - y_1(a)y_2(x)]. \qquad (۶-۷)$$

به سادگی می‌توان دید که معادله‌ی (۶-۷) در شرایط مرزی صدق می‌کند. یک شرط، $y(a)=0$ است که به طور مستقیم از معادله‌ی (۶-۷) حاصل می‌شود و شرط دیگر یعنی $y(b)=0$ معادله‌ی (۶-۷) را به $y_2(a)y_1(b)-y_1(a)y_2(b)=0$ تبدیل می‌کند، که این عبارت، منفی معادله‌ی (۵-۷) است. شایان ذکر است که معادله‌ی (۶-۷) جواب غیربدیهی است اگر فقط $y_1(a)$ و $y_2(a)$ هر دو صفر نباشند. اگر $y_1(a)=y_2(a)=0$ باشد، معادله ی اول (۴-۷) پاسخ بدیهی خواهد بود، که در این مورد تنها معادله‌ی دوم ممکن است برای بدست آوردن رابطه‌ی بین ثوابت C_1 و C_2 مورد استفاده قرار گیرد. و پاسخ غیربدیهی به صورت زیر خواهد بود:

$$y = C[y_2(b)y_1(x) - y_1(b)y_2(x)],$$

با این شرط که $y_1(b)$ و $y_2(b)$ هر دو صفر نیستند. اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ هر دو در نقاط $x=a$ و $x=b$ صفر شوند، آن‌گاه برای مقادیر اختیاری ثوابت C_1 و C_2، معادله‌ی (۳-۷) در معادله‌ی (۲-۷) صدق می‌کند. اگر معادله‌ی (۵-۷) صادق نباشد، تنها جواب مسأله، جواب بدیهی یا $y\equiv 0$ خواهد بود.

جواب مسائل هدایت پایای ۲ و ۳ بعدی، و همچنین پاسخ مسائل ناپایای یک و چند بعدی ممکن است به جواب معادله ی (۱-۷) تبدیل شوند، که در معادله‌ی (۱-۷) ضرایب $f_1(x)$ و یا $f_2(x)$ به پارامتر λ وابسته هستند.

در چنین مسائلی ممکن است دترمینان معادله‌ی (۵-۷) تنها برای مقادیر حقیقی λ ($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...$) به صفر میل کند. این مقادیر، مقادیر مشخصه نامیده می‌شوند. به ازای هر مقدار از λ یک جواب مشابه معادله‌ی (۶-۷) حاصل می‌شود.

این جواب‌های ویژه، توابع مشخصه‌ی مسأله هستند و مسائل این‌چنینی، مسائل مقدار مشخصه نامیده می‌شوند. که در این مورد واژه‌های مقادیر ویژه و توابع ویژه و مسائل مقدار ویژه نیز استفاده می‌شوند.

روند کلی مذکور را می‌توان با استفاده از یک مثال به طور واضح‌تری شرح داد. معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

این معادله در جلسات قبل برای نشان دادن روش سری‌های توانی برای حل معادلات دیفرانسیل، مورد استفاده قرار گرفت. علاوه بر آن فرض می‌کنیم که این معادله‌ی همگن شامل یک پارامتر λ به صورت زیر است:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0, \qquad (۷-۷)$$

و شرایط مرزی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(0) = 0, \qquad (۷-۸)$$

$$y(L) = 0. \qquad (۷-۹)$$

جواب کلی معادله‌ی (۷-۷) به صورت زیر است:

$$y = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x. \qquad (۷-۱۰)$$

با استفاده از معادله‌ی (۸-۷)، $C_2=0$ می‌شود و خواهیم داشت:

$$y = C_1 \sin \lambda x, \qquad (۷-۱۱)$$

و از ترکیب معادله‌ی (۹-۷) با معادله‌ی (۱۱-۷)، معادله‌ی $0=\sin \lambda L$ حاصل می‌شود. تنها اگر λ در معادله $0=\sin \lambda L$ صدق کند، معادله دارای جواب غیربدیهی است. بنابراین،

$$\lambda_n = n\pi/L, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (۷-۱۲)$$

و جواب متناظر با معادله‌ی (۱۱–۷) به صورت زیر است:

$$y = C_1\varphi_n(x), \qquad \varphi_n(x) = \sin{(n\pi/L)x}. \qquad \text{(پ۳–۷)}$$

وقتی‌که n دارای مقدار صحیح منفی باشد هیچ جواب جدیدی حاصل نمی‌شود.

بنابراین مسأله‌ی مقدار مرزی مذکور، یعنی معادلات (۷–۷)، (۸–۷) و (۹–۷) تنها دارای جواب بدیهی $y\equiv 0$ می‌باشند، مگر اینکه λ دارای مقدار مشخصه‌ای حاصل از معادله‌ی (۱۲–۷) باشد. متناظر با هر مقدار λ_n یک تابع مشخصه $\varphi_n(x)$ وجود دارد که توسط معادله‌ی (۱۳–۷) حاصل می‌شود. حاصل‌ضرب هر ثابت دلخواهی در این تابع، جوابی از مسأله است. نکته‌ی مهم این است که مسأله‌ی مقدار مرزی

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \lambda^2 y = 0; \qquad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

و $y(0)=0$ و $y(L)=0$ به ازای $\lambda=0$ تنها دارای جواب بدیهی $y\equiv 0$ است. از این‌رو برای این مسأله مقادیر مشخصه و توابع مشخصه وجود نخواهد داشت. این امر این واقعیت را نشان می‌دهد که مسأله‌ی مقدار مرزی ممکن است مسأله‌ی مقدار مشخصه باشد. وقتی‌که یک مسأله‌ی مقدار اولیه دارای جوابی با ماهیت متناوب باشد، تبدیل به مسأله‌ی مقدار مشخصه خواهد شد. دوره‌ی تناوب و میدان نوسان این جواب‌ها ممکن است ثابت و یا متغیر باشد. مثال‌ها دربرگیرنده‌ی توابع گردشی و توابع بسل نوع اول و دوم با هر درجه‌ای است. از آنجایی‌که نقطه‌ی آغازین مسأله‌ی مقدار مشخصه یک مسأله‌ی مقدار مرزی است، معمولاً به مسأله‌ی مقدار مشخصه، مسأله‌ی مقدار اولیه گفته می‌شود.

در سه بخش بعدی ویژگی‌های کلی توابع مشخصه بررسی شده است.

۳. تعامد توابع مشخصه

طبق تعریف، دو تابع $\varphi_n(x)$ و $\varphi_m(x)$ در یک بازه‌ی محدود (a,b) و با استفاده از تابع وزنی $w(x)$ متعامد نامیده می‌شوند، اگر انتگرال حاصل‌ضرب $w\varphi_n\varphi_m$ در آن بازه صفر باشد و داریم:

$$\int_a^b w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n. \tag{۷-۱۴}$$

علاوه بر آن، دسته‌ای از توابع در بازه‌ی (a,b) متعامد نامیده می‌شوند اگر هر دو جفت متمایز از این توابع در بازه‌ی (a,b) متعامد باشند. واژه‌ی تعامد از آنالیز برداری گرفته شده است. می‌خواهیم یک بردار در فضای ۳ بعدی را با $\varphi_m(x_i)$ نشان دهیم که تصاویر این بردار روی محورهای مختصات $\varphi_m(x_1)$، $\varphi_m(x_2)$ و $\varphi_m(x_3)$ است. دو بردار $\varphi_m(x_i)$ و $\varphi_n(x_i)$ متعامدند و یا بر هم عمودند اگر داشته باشیم:

$$\boldsymbol{\varphi}_m(x_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(x_i) = \sum_{i=1}^{3} \varphi_m(x_i)\varphi_n(x_i) = 0.$$

وقتی که واحد طول در محورهای مختصات از یک محور به محور دیگر تغییر کند، حاصل‌ضرب نرده‌ای مذکور را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$\boldsymbol{\varphi}_m(x_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(x_i) = \sum_{i=1}^{3} w(x_i)\varphi_m(x_i)\varphi_n(x_i),$$

که تعداد توابع وزنی $w(x_1)$، $w(x_2)$ و $w(x_3)$ به واحد طولی مورد استفاده در طول سه محور، بستگی دارد.

به طور مشابه، بردارهای فضای Nبعدی و دارای سازنده‌های $\varphi_m(x_i)$، $\varphi_n(x_i)$ و $i=1,2,3,\ldots,N$ با استفاده از توابع وزنی $w(x_i)$ وقتی متعامدند که داشته باشیم:

$$\boldsymbol{\varphi}_m(x_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(x_i) = \sum_{i=1}^{N} w(x_i)\varphi_m(x_i)\varphi_n(x_i) = 0. \tag{۷-۱۵}$$

اگر بردار فضایی دارای تعداد نامحدودی بعد باشد، $\varphi_m(x_i)$ و $\varphi_n(x_i)$به طور پیوسته متمایز بوده و x_i به صورت گسسته نبوده بلکه دارای مقادیر پیوسته است و به آن x می‌گویند؛ در این مورد معادله‌ی (۱۵-۷) با معادله ی (۱۴-۷) یکسان خواهد شد.

اکنون می‌توانیم نشان دهیم که توابع مشخصه‌ی یک مسأله‌ی مقدار مشخصه در یک بازه‌ی محدود و با استفاده از تابع وزنی متعامدند. برای نشان دادن این واقعیت، مسأله‌ی مقدار مشخصه شامل معادله‌ی دیفرانسیل خطی همگن درجه دوم با فرم کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + [f_2(x) + \lambda^2 f_3(x)]y = 0$$

و دو شرط مرزی همگن در دو انتهای بازه‌ی محدود (a,b) تعیین می‌شود. اگر این معادله را در فاکتور $p(x) = \exp[\int f_1(x)dx]$ و در تابع $f_2(x)p(x) = q(x)$ و $f_3(x)p(x) = w(x)$ ضرب نموده و بازآرایی کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda^2 w(x)]y = 0, \qquad (۷-۱۶)$$

که این فرم برای بحث حاضر مناسب‌تر است.

λ_n وλ_m مقادیر مشخصه متمایز هستند، که در آنها $m \neq n$ بوده و $\varphi_n(x)$ و $\varphi_m(x)$ متناظر با توابع مشخصه است. از آنجایی که $y=\varphi_n(x)$ و $y=\varphi_m(x)$ جواب‌های معادله‌ی (۱۶-۷) هستند، داریم:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_m}{dx}\right) + (q + \lambda_m^2 w)\varphi_m = 0,$$
$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_n}{dx}\right) + (q + \lambda_n^2 w)\varphi_n = 0.$$

با ضرب معادله‌ی اول در φ_n و ضرب معادله‌ی دوم در φ_m، سپس تفریق معادله‌ی دوم از اول خواهیم داشت:

$$\varphi_n\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_m}{dx}\right) - \varphi_m\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi_n}{dx}\right) + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)w\varphi_m\varphi_n = 0.$$

با انتگرال‌گیری از این معادله در بازه‌ی محدود (a,b) خواهیم داشت:

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2)\int_a^b w\varphi_m\varphi_n\,dx = \int_a^b \left[\varphi_n \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{d\varphi_m}{dx}\right) - \varphi_m \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{d\varphi_n}{dx}\right)\right]dx,$$

با انجام انتگرال سمت راست معادله‌ی بالا خواهیم داشت:

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2)\int_a^b w\varphi_m\varphi_n\,dx = \left\{p(x)\left[\varphi_n(x)\,\frac{d\varphi_m(x)}{dx} - \varphi_m(x)\,\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right]\right\}\Big|_a^b. \tag{۷-۱۷}$$

از آنجائی‌که هر دو عبارت $y=\varphi_n(x)$ و $y=\varphi_m(x)$ جواب‌های ویژه‌ی معادله‌ی (۷-۱۶) هستند، وقتی‌که یکی از شرایط مرزی زیر در انتهای بازه‌ی (a,b) تعیین شود، سمت راست معادله (۷-۱۷) صفر می‌شود:

$$y = 0, \tag{۷-۱۸}$$

$$dy/dx = 0, \tag{۷-۱۹}$$

$$dy/dx + By = 0, \tag{۷-۲۰}$$

که B یک پارامتر اختیاری است. در واقع وقتی‌که معادله‌ی (۷-۲۰) صادق باشد، معادله‌ی (۷-۱۷) صفر خواهد شد که می‌توان این حالت را با بازآرایی قسمت سمت راست معادله‌ی (۷-۱۷) و به صورت زیر نشان داد:

$$\varphi_n\varphi_m' - \varphi_m\varphi_n' = \varphi_n\varphi_m' - \varphi_m\varphi_n' \pm B\varphi_m\varphi_n = \varphi_n(\varphi_m' + B\varphi_m) - \varphi_m(\varphi_n' + B\varphi_n).$$

به ویژه وقتی‌که در $x=a$ یا $x=b$، $p(x)=0$ باشد، سمت راست معادله‌ی (۷-۱۷) صفر خواهد شد، که در این صورت استفاده از شروط داده شده در معادلات (۷-۱۸) و (۷-۱۹) یا (۷-۲۰)، به ازای هر مقدار محدود y و در هر نقطه، غیر ضروری است. اگر $p(b)=p(a)$ باشد، تعامد به شرطی وجود خواهد داشت که شرایط مرزی با شرایط $y(b)=y(a)$ و $y'(b)=y'(a)$ جایگزین گردد، که به این شرایط اخیر شرایط مرزی متناوب گفته می‌شود.

به عنوان یک مثال، مسأله‌ی مقدار مشخصه‌ی ذکر شده در معادلات (۷-۷)، (۸-۷) و (۹-۷) را دوباره در نظر بگیرید. مقایسه‌ای بین معادلات (۷-۷) و (۱۶-۷)، $w(x)=1$ را حاصل می‌کند و شرط تعامد برای این مسائل به صورت زیر است:

$$\int_0^L \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_0^L \sin\,(m\pi x/L)\,\sin\,(n\pi x/L)\,dx = 0, \qquad m \neq n,$$

که این امر را می‌توان به‌وسیله‌ی انتگرال‌گیری مستقیم و به طور مستقیم بدست آورد.

۵. بسط توابع دلخواه به صورت سری توابع متعامد

فرض کنید $\varphi_n(x)$ گروهی از توابع متعامد در بازه‌ی محدود (a,b) و به همراه تابع وزنی $w(x)$ است. می‌خواهیم تابع دلخواه $f(x)$ را به شکل یک سری به فرم زیر بسط دهیم و داریم:

$$f(x) = b_0\varphi_0(x) + b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varphi_n(x). \tag{۷-۲۱}$$

با فرض وجود چنین بسطی، می‌توانیم ضرایب b_n را بدست آوریم. با ضرب دو طرف معادله‌ی (۲۱-۷) در $w(x)\varphi_m(x)$ وانتگرال‌گیری از نتیجه آن در بازه‌ی (a,b) و با فرض این‌که انتگرال یک حاصل جمع نامحدود، معادل مجموع انتگرال باشد، خواهیم داشت:

$$\int_a^b w(x)f(x)\varphi_m(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\int_a^b w(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx, \tag{۷-۲۲}$$

که $\varphi_m(x)$، mامین عبارت در گروه توابع ذکر شده است. با استفاده از تعامد گروه توابع، می‌توانیم در یابیم که همه‌ی عبارات موجود در حاصل جمع در سمت راست معادله‌ی (۲۲-۷) صفر بوده، بجز عبارت متناظر با $n=m$. از این‌رو معادله‌ی (۲۲-۷) عبارت زیر را حاصل می‌کند:

$$b_n = \frac{\int_a^b w(x)f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\varphi_n^2(x)\,dx}. \tag{۷-۲۳}$$

مسأله‌ی کلی تعیین بسط معادله‌ی (۲۱-۷) که نشان‌دهنده‌ی تابع $f(x)$ است، خارج از محدوده‌ی این درس است. البته قابل ذکر است که چنین بسط‌هایی کاملاً عمومیت دارند و بر خلاف بسط‌های تیلور و مک‌لورن که نیاز دارد تابع و همه مشتقاتش پیوسته باشند، اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ی محدود (a,b) یک تابع دیفرانسیل‌پذیر تکه‌ای باشد، در تمام نقاط پیوستگی، سری حاصل از معادله‌ی (۲۱-۷) به تابع $f(x)$ هم‌گرا است. در بخش بعدی نشان می‌دهیم که سری‌های معروف فوریه، در واقع موارد بخصوصی از بسط‌ها بر حسب توابع متعامد شامل توابع گردشی هستند.

۵. سری‌های فوریه

در بخش ۳ آموختیم که مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر است:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0; \qquad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

و همچنین آموختیم که مسأله‌ی مقدار مشخصه دارای مقادیر و توابع مشخصه‌ی زیر است:

$$\lambda_n = n\pi/L, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (۷-۱۲)$$

$$\varphi_n = \sin\,(n\pi/L)x. \qquad (۷-۱۳)$$

حال می‌خواهیم یک تابع دلخواه $f(x)$ را به صورت توابع مشخصه بسط دهیم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\,(n\pi/L)x, \qquad 0 < x < L, \qquad (۷-۲۴)$$

که ضرایب b_n با استفاده از معادله‌ی (۲۳-۷) بدست می‌آید:

$$b_n = \frac{\int_0^L f(x)\,\sin\,(n\pi/L)x\,dx}{\int_0^L \sin^2\,(n\pi/L)x\,dx}. \qquad (۷-۲۵)$$

می‌توان به سرعت و با انتگرال‌گیری مستقیم نشان داد که مخرج معادله‌ی (۲۵-۷) بدون توجه به مقدار n برابر $\frac{L}{2}$ است.

از این‌رو داریم:

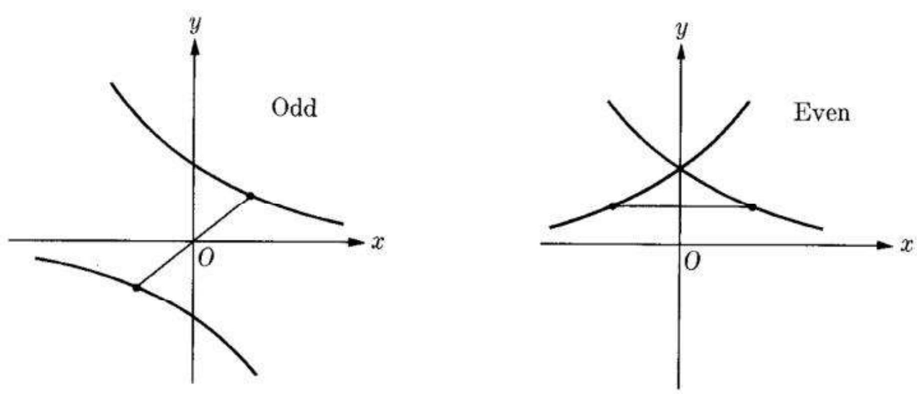
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx. \qquad (۷-۲۶)$$

سری موجود در معادله‌ی (۲۴-۷) تعریف سری سینوس فوریه تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,L)$ است. همه‌ی عبارات این سری با دوره‌ی تناوب $2L$، که دو برابر طول بازه است، متناوب است. اگر x را با $-x$ جایگزین کنیم، علامت هر عبارت معکوس می‌شود.

از این‌رو در بازه‌ی $(-L,0)$ سری نشان‌دهنده تابع $-f(x)$ است. رفتار سری‌ها در بازه‌ی $(-L,L)$ به صورت تناوبی برای همه‌ی مقادیر x تکرار می‌شود. اگر $f(x)$ تابعی فرد از x باشد، سری بدست آمده از معادله‌ی (۲۴-۷)، تابع $f(x)$ را تنها در بازه‌ی $(0,L)$ نشان نمی‌دهند، بلکه این سری نشان‌دهنده‌ی تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(-L,L)$ است. اگر علاوه بر آن، $f(x)$ با دوره تناوب $2L$، متناوب باشد، سری‌ها در هر نقطه‌ای $f(x)$ را نشان می‌دهند.

یک تابع $f(x)$ تابع فرد نامیده می‌شود اگر $f(-x)=-f(x)$ باشد و یک تابع زوج است اگر $f(-x)=f(x)$ باشد.

یک تابع فرد نسبت به مبدأ متقارن است، در حالی‌که تابع زوج نسبت محور y متقارن است (شکل ۱).



شکل ۱- تابع زوج و فرد

به عنوان یک مثال سری فوریه‌ی سینوسی، تابع زیر را در بازه‌ی $(0,L)$ مدنظر قرار می‌دهیم (شکل ۲):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \quad \text{and} \quad L/2 < x < \infty \\ 1, & 0 < x < L/2 \end{cases}$$

(۷-۲۷)

ضرایب سری به صورت زیر است:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} 1\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right);$$

از این‌رو سری به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x.$$

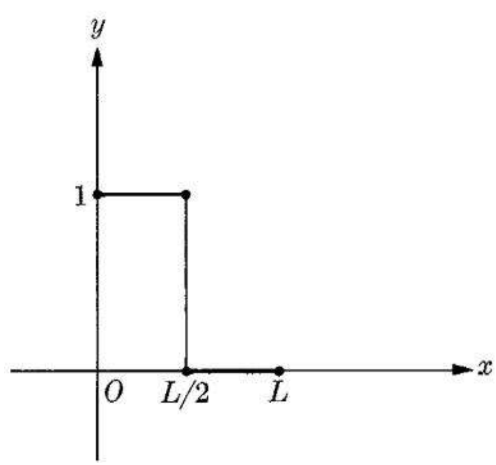
(۷-۲۸)

با سری‌های مشابهی می‌توان تابع زیر را در بازه‌ی $(-L,0)$ نشان داد (شکل ۳):

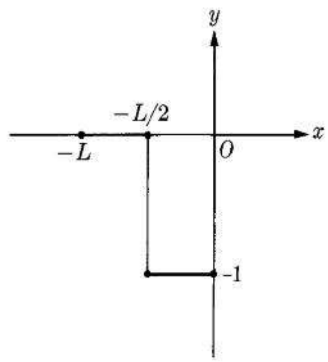
$$-f(x) = f(-x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -L/2 \quad \text{and} \quad 0 < x < \infty \\ -1, & -L/2 < x < 0 \end{cases}$$

بنابراین سری فوریه‌ی سینوسی تابع فرد به صورت زیر تعریف می‌شود:

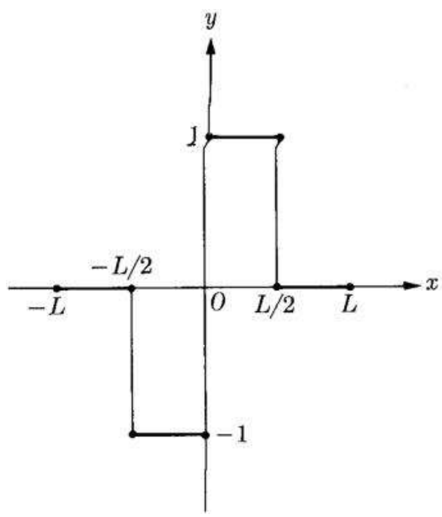
$$f(x) = \begin{cases} -1, & -L/2 < x < 0 \\ 0, & -\infty < x < L/2 \quad \text{and} \quad L/2 < x < \infty \\ 1, & 0 < x < L/2 \end{cases}$$



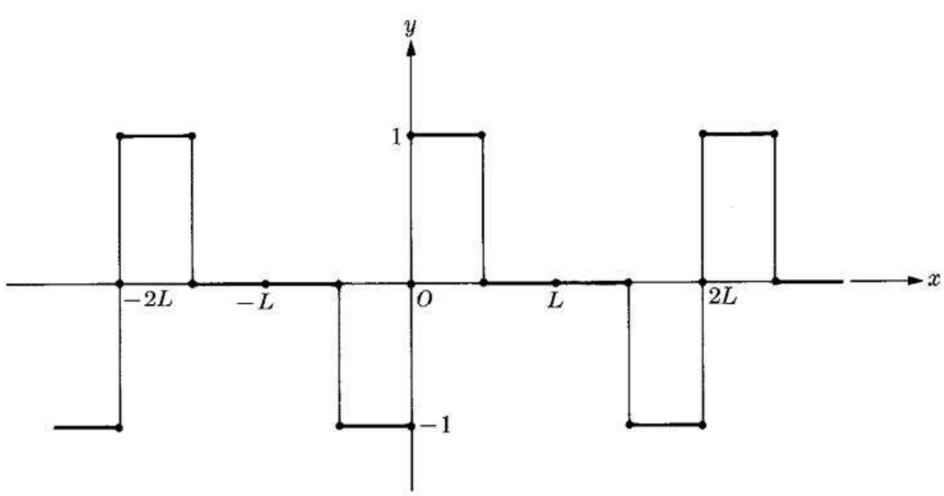
شکل ۲- سری فوریه‌ی سینوسی تابع ۲۷-۷



شکل ۳- سری فوریه‌ی سینوسی تابع زوج



شکل ۴- سری فوریه‌ی سینوسی تابع فرد



شکل ۵- سری فوریه‌ی سینوسی تابع فرد

که عبارت بالا تابع $f(x)$ را در بازه‌ی $(-L,L)$ (شکل ۴) بجز در نقاط ناپیوستگی نشان می‌دهد و رفتار متناوب را به ازای همه‌ی مقادیر x (شکل ۵) تکرار می‌کند.

بسط سری شامل کسینوس به جای سینوس ممکن است با در نظر گرفتن مسأله‌ی مقدار مرزی زیر حاصل شود:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0; \qquad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0. \tag{۷-۲۹}$$

بر طبق روند مسأله‌ی مقدار مشخصه‌ی قبلی، می‌توانیم به سادگی مقادیر مشخصه و توابع مشخصه را به فرم زیر بدست آوریم:

$$\lambda_n = n\pi/L, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad \varphi_n = \cos(n\pi/L)x. \tag{۷-۳۰}$$

شایان ذکر است که $\varphi_0(x)=1$ یکی از اعضای گروه توابع مشخصه در معادله‌ی (۳۰-۷) و متناظر با $\lambda_0=0$ است. اکنون با بسط یک تابع دلخواه $f(x)$ بر حسب سری مذکور، خواهیم داشت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi/L)x, \qquad 0 < x < L, \tag{۷-۳۱}$$

که ضرایب a_n با استفاده از معادله‌ی (۲۳-۷) و به فرم زیر محاسبه می‌شود:

$$a_0 = \frac{\int_0^L f(x)\,dx}{\int_0^L dx}, \qquad a_n = \frac{\int_0^L f(x)\cos(n\pi/L)x\,dx}{\int_0^L \cos^2(n\pi/L)x\,dx}. \tag{۷-۳۲}$$

علاوه بر آن می‌توان نوشت:

$$\int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx = \begin{cases} L, & n = 0 \\ L/2, & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

با بازآرایی معادله‌ی (۳۲-۷) خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx. \tag{۷-۳۳}$$

مشاوره و پشتیبانی

مشاوره پشتیبانی ۲۴ ساعته

از طریق سایت و تلگرام

سری بدست آمده در معادله‌ی (۳۱–۷) تعریف سری فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,L)$ است. همه عبارات معادله‌ی (۳۱–۷) توابعی زوج از x هستند و با دوره‌ی تناوب $2L$، متناوب می‌باشند. این سری‌ها نشان‌دهنده‌ی تابع $f(-x)$ در بازه $(-L,0)$ می‌باشند. اگر $f(x)$ تابع فردی از x باشد، سری نه تنها به ازای بازه $(0,L)$ به $f(x)$ هم‌گراست، بلکه به ازای بازه $(-L,0)$ نیز به $f(x)$ همگراست. اگر علاوه بر آن، $f(x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $2L$ باشد، سری در هر نقطه‌ای نشان‌دهنده‌ی تابع $f(x)$ است.

اکنون سری فوریه‌ی کسینوسی مثال قبلی یعنی معادله‌ی (۲۷–۷) را در نظر بگیرید. ضرایب سری به صورت زیر است:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^{L/2} 1\cdot dx = \tfrac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} 1\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x. \qquad (۷–۳۴)$$

با سری‌های مشابهی می‌توان تابع زیر را در بازه‌ی $(-L,0)$ نشان داد (شکل ۶):

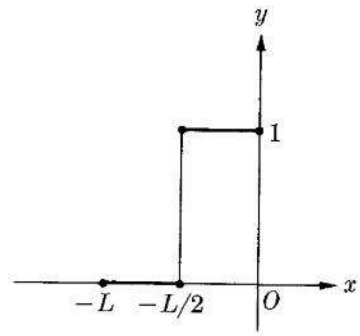
$$f(x) = f(-x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -L/2 \quad \text{and} \quad 0 < x < \infty \\ -1, & -L/2 < x < 0 \end{cases}$$

بنابراین سری فوریه‌ی کسینوسی تابع زوج به صورت زیر تعریف می‌شود:

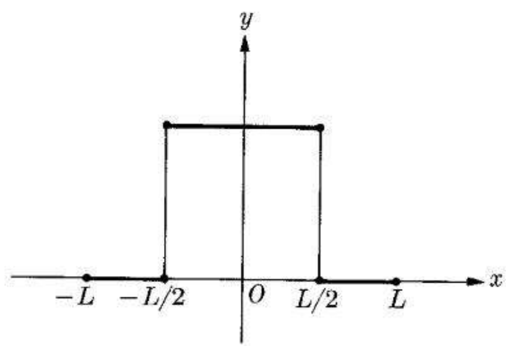
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -L/2 \quad \text{and} \quad L/2 < x < \infty \\ 1, & -L/2 < x < L/2 \end{cases}$$

که عبارت بالا تابع $f(x)$ را در بازه‌ی $(-L,L)$ (شکل ۷) بجز در نقاط ناپیوستگی نشان می‌دهد و رفتار متناوب را به ازای همه‌ی مقادیر x (شکل ۸) تکرار می‌کند.

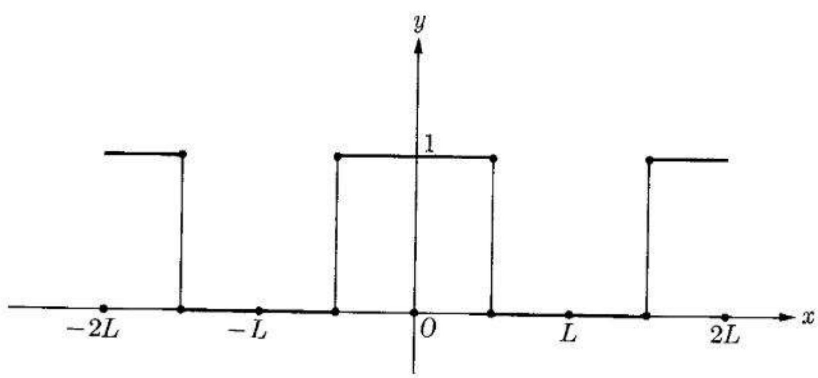
بنابراین می‌توان دید که هر تابع پیوسته‌ی تکه‌ای را می‌توان در بازه‌ی $(0,L)$ با سری‌هایی شامل سینوس و کسینوس و با دوره‌ی تناوب $2L$ بیان نمود. وقتی که تابع فرد باشد، سری‌های سینوس در بازه‌ی $(-L,L)$ معتبرند، در حالیکه برای یک تابع زوج سری‌های کسینوسی در یک بازه‌ی یکسان قرار می‌گیرند.



شکل ۶- سری فوریه کسینوسی



شکل۷- سری فوریه کسینوسی



شکل ۸- سری فوریه کسینوسی

حال می‌خواهیم تابع $f(x)$ پیوسته‌ی تکه‌ای را در بازه‌ی $(-L,L)$ بر حسب هر دو عبارت سینوسی و کسینوسی دارای دوره تناوب $2L$، بیان کنیم. می‌توان نوشت:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \tfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$

که تابع درون کروشه‌ی اول، زوج بوده و درون کروشه‌ی دوم، فرد است. می‌توانیم به این واقعیت توجه کنیم که یک تابع دلخواه را می‌توان بر حسب مجموع توابع زوج و توابع فرد بیان نمود. از این‌رو:

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x). \tag{۷-۳۵}$$

با بیان تابع $f(x)$ بر حسب کسینوس و $f_0(x)$ بر حسب سینوس در بازه‌ی $(-L,L)$ خواهیم داشت:

$$f_e(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (n\pi/L)x, \tag{۷-۳۶}$$

$$f_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin (n\pi/L)x, \tag{۷-۳۷}$$

که:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f_e(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_e(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_o(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx.$$

از آنجایی که انتگرال‌گیری از این معادلات توابع زوجی از x را حاصل می‌کند، $\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}$ را جایگزین $\int_0^L$ می‌کنیم:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx. \tag{۷-۳۸}$$

واضح است که بخش فرد دو انتگرال اول و بخش زوج انتگرال، خود به طور یکسان صفر می‌شود. از این‌رو با قرار دادن معادله‌ی (۳۶-۷) و (۳۷-۷) درون معادله‌ی (۳۵-۷) خواهیم داشت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos (n\pi/L)x + b_n \sin (n\pi/L)x], \qquad -L < x < L. \tag{۷-۳۹}$$

این سری تعریف سری فوریه‌ی کامل تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(-L,L)$ است. وقتی $f(x)$ زوج باشد، سری حاصل تنها شامل عبارت کسینوسی است، و وقتی که $f(x)$ فرد باشد، سری حاصل تنها شامل عبارت سینوسی است. علاوه بر آن معادله‌ی (۷-۳۹) بر حسب هر دو تابع سینوس و کسینوس با دوره‌ی تناوب $2L$ و در بازه‌ی $(-L,L)$ است و این رفتار به صورت تناوبی به ازای همه‌ی مقادیر x تکرار می‌شود.

در آخر می‌خواهیم سری فوریه‌ی کامل معادله‌ی (۷-۲۷) را بدست آوریم. ضرایب این سری‌های عبارتند از:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{1}{2L}\int_{0}^{L/2} 1 \cdot dx = \tfrac{1}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) x\, dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L/2} 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) x\, dx = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2},$$

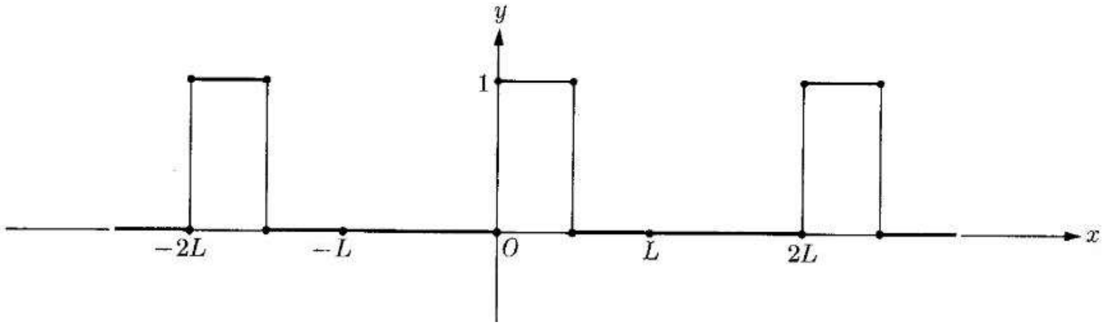
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) x\, dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L/2} 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) x\, dx = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right).$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x + \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right], \tag{۷-۴۰}$$

که این تابع به ازای همه مقادیر x هم‌گراست و یک تابع متناوب است که در شکل ۹ نشان داده شده است.

[معادله‌ی (۴۰) را با مجموع بسط سری‌های سینوسی و کسینوسی توابع مشابه که در شکل‌های ۵ و ۸ و یا معادلات (۲۸-۷) و (۳۴-۷) به صورت جبری داده شده‌اند، مقایسه نمایید.]



شکل ۹- سری فوریه کامل

۶.خلاصه(جمع‌بندی)

مباحث قبلی‌مان به مسائل یک بعدی پایا محدود می‌شد. بطور کلی از آنجاییکه اینگونه مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را حاصل می‌کنند، معمولاً قابل حل می‌باشند. به عبارت دیگر، مسائل پایای دو و سه بعدی و مسائل ناپایا، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را حاصل می‌کنند، که هیچ راه حل کلی برای آنها وجود ندارد. در اینجلسه و جلسات بعد، چندین روش برای حل دقیق این مسائل ارائه شده است.

وقتی‌که مرزهاییک مسأله، هدایت چند بعدی متناظر با سطوح مختصات در یک سیستم مختصات متعامد مثل مختصات‌های کارتزین، استوانه‌ای،یا کروی باشد، یک راه دقیق توسط روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر خواهد بود. یک روش متداول بر اساس جداسازی متغیرها، و دیگری بر اساس تبدیل لاپلاس می‌باشد. دلایل متقاعدکننده‌ای وجود دارد که نشان می‌دهند این دو روش متداول‌تر، برای حل مسائل ویژه مناسب‌ترند؛ اگرچه، تبدیل لاپلاس برای حل مسائل پیچیده مناسب است، اما نیازمند آگاهی از ریاضیات پیشرفته‌تری است. بنابراین، بحث پیرامون تبدیل لاپلاس را که در فصل ۷ کتاب عنوان شده است را در این درس مطرح نمی‌نماییم و این فصل را به روش جداسازی متغیرها اختصاص می‌دهیم. در این جلسه مروری بر روابط ریاضی ضروری برای این روش داشتیم.

۸. فهرست منابع

1. Conduction Heat Transfer, By: V. S. Arpachi, Addison – Wesley, 1966, 1991.
2. Heat Conduction, By: S. Kakas, Y. Yener, Taylor & Francis, 1993.
3. انتقال حرارت هدایتی، نویسنده: آرپاچی، مترجمان: غفاربرهانی، رضایی‌منش و جدیدی.

انتقال حرارت پیشرفته

جلسه هشتم

حل معادلات پایای دو بعدی در مختصات کارتزین + مثال‌های حل شده

فهرست مطالب

مشاوره و پشتیبانی

مشاوره پشتیبانی ۲۴ ساعته

از طریق سایت و تلگرام

بسم الله الرحمن الرحیم

با توجه به ریاضیات ارائه شده در جلسه قبل، حال می‌خواهیم جواب مسأله را با استفاده از روش جداسازی متغیرها بدست آوریم.

۱. مقدمه

مباحث قبلی‌مان به مسائل یک بعدی پایا محدود می‌شد. بطور کلی از آنجاییکه اینگونه مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را حاصل می‌کنند، معمولاً قابل حل می‌باشند. به عبارت دیگر، مسائل پایای دو و سه بعدی و مسائل ناپایا، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را حاصل می‌کنند، که هیچ راه حل کلی برای آنها وجود ندارد. در این جلسه و جلسات بعد، چندین روش برای حل دقیق این مسائل ارائه شده است.

وقتی‌که مرزهای یک مسأله، هدایت چند بعدی متناظر با سطوح مختصات در یک سیستم مختصات متعامد مثل مختصات‌های کارتزین، استوانه‌ای، یا کروی باشد، یک راه دقیق توسط روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر خواهد بود. یک روش متداول بر اساس جداسازی متغیرها، و دیگری بر اساس تبدیل لاپلاس می‌باشد. دلایل متقاعدکننده‌ای وجود دارد که نشان می‌دهند این دو روش متداول‌تر، برای حل مسائل ویژه مناسب‌ترند؛ اگرچه، تبدیل لاپلاس برای حل مسائل پیچیده مناسب است، اما نیازمند آگاهی از ریاضیات پیشرفته‌تری است. بنابراین، بحث پیرامون تبدیل لاپلاس را که در فصل ۷ کتاب عنوان شده است را در این درس مطرح نمی‌نماییم و این فصل را به روش جداسازی متغیرها اختصاص می‌دهیم. در این جلسه به کمک روش جداسازی متغیرها، معادلات پایای دو بعدی در مختصات کارتزین را حل می‌نماییم.

۲- جداسازی متغیرها، معادلات پایای دو بعدی در مختصات کارتزین

وقتی که شرایط مرزی مسأله بر حسب عبارت T و $\frac{\partial T}{\partial n}$ و یا $\frac{\partial T}{\partial n}+BT$ باشد که n جهت نرمال شرط مرزی و B یک ثابت است، ممکن است جواب را به صورت حاصلضرب توابعی از مختصات‌های جداگانه بیان

کنیم. این کار، این امکان را می‌دهد که شرایط مرزی را بر حسب متغیرهای جداگانه بیان کرده و همچنین معادله دیفرانسیل پاره‌ای به تعدادی مسأله دیفرانسیل معمولی تبدیل گردد. حال خصوصیات اساسی روش را با استفاده از مسأله پایای دو بعدی بیان می‌کنیم. معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$a_1(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_2(x)\frac{\partial T}{\partial x} + a_3(x)T + b_1(y)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + b_2(y)\frac{\partial T}{\partial y} + b_3(y)T = 0. \qquad (۴۱)$$

یک فرم کلی این معادله که شامل ضرایبی است که این ضرایب تابعی از هر دو متغیر مستقل است، برای جداسازی متغیرها مناسب نمی‌باشد. فرض کنید حاصلضرب جواب به صورت زیر باشد:

$$T(x, y) = X(x)Y(y), \qquad (۴۲)$$

که X تنها تابعی از x، و Y تنها تابعی از y است. این فرض هنگامیکه x و y هر یک در معادله دیفرانسیل جداگانه‌ای صدق کنند، بسیار فرض مناسب و پرمعنایی خواهد بود.

با قرار دادن معادله (۴۲) درون معادله (۴۱) و تقسیم نتیجه آن بر XY خواهیم داشت:

$$\left[a_1(x)\frac{d^2X}{dx^2} + a_2(x)\frac{dX}{dx} + a_3X\right]\frac{1}{X} = -\left[b_1(y)\frac{d^2Y}{dy^2} + b_2(y)\frac{dY}{dy} + b_3(y)Y\right]\frac{1}{Y}\cdot \qquad (۴۳)$$

سمت چپ این معادله از y مستقل بوده و سمت راست آن مستقل از x است. از آنجاییکه x و y به طور مستقل تغییر می‌کنند، هر دو سمت معادله (۴۳) از یکی از متغیرها مستقل است و باید دو طرف معادله برابر یک ثابت $+\lambda^2$ یا $-\lambda^2$ باشد. این ثابت پارامتر جداسازی نامیده می‌شود. از اینرو معادله دیفراسیل پاره‌ای (۴۱) به دو معادله دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌شود:

$$a_1(x)\frac{d^2X}{dx^2} + a_2(x)\frac{dX}{dx} + [a_3(x) \pm \lambda^2]X = 0,$$

$$b_1(y)\frac{d^2Y}{dy^2} + b_2(y)\frac{dY}{dy} + [b_3(y) \mp \lambda^2]Y = 0. \qquad (۴۴)$$

روش جداسازی متغیرها را وقتی می‌توان برای مسائل پایای ۲ بعدی مورد استفاده قرار داد، وقتیکه داشته باشیم:

(الف) یکی از جهت‌های مسأله با معادله دیفرانسیل همگن که دارای شرایط مرزی همگن است (جهت همگن)، بیان شده، در حالیکه جهت دیگر با معادله دیفرانسیل همگن که دارای یک شرط مرزی همگن و یک شرط مرزی ناهمگن است (جهت ناهمگن)، بیان می‌شود.

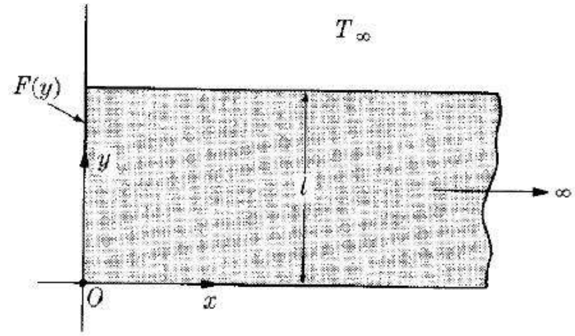
(ب) علامت λ^2 به صورتی انتخاب می‌شود که مسأله مقدار مرزی جهت همگن، منجر به مسأله مقدار مشخصه شود (یعنی علامت λ^2 را مخالف علامت جهت همگن مسأله انتخاب می کنیم).

جواب‌های حاصل از روش جداسازی متغیرها، به صورت مجموع یا انتگرالی است و به ترتیب به محدود بودن یا نامحدود بودن جهت همگن بستگی دارد. این فصل و فصل آینده را به روش سری که برای حل مسائل همگن با دامنه محدود کاربرد دارند، اختصاص می‌دهیم. مناسب است مسائلی که در حوزه مسائل همگن با دامنه نامحدود قرار می‌گیرند را توسط روش‌های انتگرالی حل نماییم. البته می‌توان این مسائل را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس حل نمود که فصل ۷ کتاب به این مطلب اختصاص دارد.

نتایج حاصل از این بخش را می‌توان به سادگی برای مسائل سه بعدی و مسائل ناپایا بسط داد. حال می‌خواهیم روش جداسازی متغیرها را با تعدادی مثال بیان کنیم.

۲-۱ مثال ۱

یک پره نامحدود دو بعدی با ضخامت l را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۰). دمای پایه پره $F(y)$ و دمای محیط T_∞ است. ضریب انتقال حرارت بزرگ است. می‌خواهیم دمای پایای پره را بدست آوریم.



شکل ۱۰

فرمولاسیون دیفرانسیلی مسأله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0,$$

$$T(0, y) = F(y), \qquad T(\infty, y) = T_\infty,$$

$$T(x, 0) = T_\infty, \qquad T(x, l) = T_\infty.$$

حال می‌خواهیم جواب حاصل از روش جداسازی متغیرها را بدست آوریم، که برای این امر لازم است که معادله دیفرانسیل و ۳ شرط مرزی همگن باشد. اگر چه با بیان مسأله بر حسب متغیر T این شرایط را ایجاد نخواهد شد، بنابراین با تبدیل ساده زیر داریم:

$$\theta = T - T_\infty$$

با این تغییر متغیر، بدون اثرگذاری بر همگنی معادله دیفرانسیل، سه شرط از شرایط مرزی همگن می‌شود.

بنابراین فرمولاسیون مسأله بر حسب θ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \qquad (۴۵)$$

$$\theta(0, y) = F(y) - T_\infty = f(y),$$

(۴۶)

$$\theta(\infty, y) = 0,$$

(۴۷)

$$\theta(x, 0) = 0,$$

(۴۸)

$$\theta(x, l) = 0.$$

(۴۹)

حال فرض می‌کنیم حاصلضرب جواب به صورت زیر باشد:

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y), \qquad (۵۰)$$

سپس با قرار دادن معادله (۵۰) درون معادله (۴۵) و تقسیم نتیجه بر XY خواهیم داشت:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \pm\lambda^2. \tag{۵۱}$$

در اینجا علامت λ^2 باید به گونه‌ای انتخاب شود که در مسأله مقدار مشخصه، جهت y همگن باشد. با انتخاب $-\lambda^2$، جواب ویژه در جهت y به صورت توابع هیپربولیک بیان می‌شود که همانطور که در بخش ۲ اشاره شد، این گونه توابع نمی‌توانند متعامد باشند؛ از اینرو برای مسأله ما $+\lambda^2$ مناسب خواهد بود.

علاوه بر آن استفاده از معادله (۵۰) شرایط مرزی همگن دو بعدی مسأله را به شرایط یک بعدی تبدیل می‌کند. این امر ممکن است به سادگی توسط یکی از شرایط بیان شود که آن شرط معادله (۴۷) است. بنابراین از آنجایی که $Y(y)$ اختیاری و دلخواه است، $\theta(\infty, y) = X(\infty)Y(y)$ نشان می‌دهد که باید $X(\infty) = 0$ باشد.

سرانجام، مسأله را به صورت جداگانه در جهات x و y و به صورت زیر بیان خواهیم نمود:

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \qquad Y(0) = 0, \quad Y(l) = 0, \tag{۵۲}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0; \qquad X(\infty) = 0. \tag{۵۳}$$

شرط مرزی ناهمگن در جهت x جدایی ناپذیر است، و برای مرحله آخر راه حل، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مسأله مقدار مشخصه معادله (۵۲) قبلاً در بخش ۲ حل شده است (معادلات ۷ تا ۱۳ را ببینید). توابع مشخصه حاصل $\varphi_n(y) = C_1 \sin\lambda_n y$ و مقادیر مشخصه $\lambda = n\pi/l$، $n = 1,2,3,...$ می‌باشد. بنابراین جواب معادله (۵۲) به صورت $Y_n(y) = C_n\varphi_n(y)$ است که در آن C_n یک ثابت اختیاری است. به عبارت دیگر، جواب کلی معادله (۵۳) به شکل مناسبی بر حسب توابع نمایی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n x}, \tag{۵۴}$$

که B_n یک ثابت اختیاری است.

بنابراین، با استفاده از معادله (۵۰)، جواب حاصلضرب مسأله به صورت زیر است:

$$\theta(x, y) = a_n e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y, \tag{۵۵}$$

که B_nC_n همواره به صورت یک حاصلضرب بوده و به مقدار ویژه n بستگی دارد و با a_n نشان داده می‌شود.

اکنون باید تعیین کنیم که کدام مقدار n باید در معادله (۵۵) برای حل مسأله، استفاده شود. به طور واضح، معادله (۵۵) در معادله دیفرانسیل (۴۵)، و شرایط مرزی همگن یعنی معادلات (۴۷)، (۴۸) و (۴۹) برای همه مقادیر مثبت عدد صحیح صادق می‌باشند. به عبارت دیگر، شرط مرزی ناهمگن، معادله (۴۶) با معادله (۵۵) ترکیب شده و داریم:

$$f(y) = a_n \sin \lambda_n y,$$

که به طور کلی ممکن است این رابطه به ازای مقادیر منفرد n صادق نباشد. اگر چه با استفاده از خطی بودن مسأله و استفاده از اصل جمع‌پذیری می‌توان بر این مشکل غلبه نمود. از اینرو، بر حسب تمام مقادیر مثبت n، جواب را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y \tag{۵۶}$$

بنابراین شرط ناهمگن استفاده شده در معادله (۵۶) بسط زیر را حاصل می‌کند:

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n y, \tag{۵۷}$$

شایان ذکر است که در اینجا تابع وزنی واحد است و می‌توانیم مقادیر a_n را با استفاده از معادله (۲۳) بدست آوریم. نتیجه به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{\int_0^l f(y) \sin \lambda_n y \, dy}{\int_0^l \sin^2 \lambda_n y \, dy}. \tag{۵۸}$$

مخرج معادله (۵۸) برای مقادیر صحیح n برابر $l/2$ است. از اینرو معادله (۵۸) به صورت زیر خواهد بود:

(۵۹)

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(y)\sin\lambda_n y\,dy.$$

سرانجام، با قرار دادن معادله (۵۹) درون معادله (۵۶) می‌توانیم جواب مسأله را به صورت زیر بدست آوریم:

$$\theta(x,y) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l f(\eta)\sin\lambda_n\eta\,d\eta\right]e^{-\lambda_n x}\sin\lambda_n y, \qquad (۶۰)$$

که متغیر y در معادله (۵۹) با متغیر η جایگزین شده است.

به ویژه اگر دمای اولیه یکنواخت باشد، یعنی:

$$\theta(0,y) = f(y) = \theta_0,$$

در نتیجه معادله (۵۹) به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2\theta_0}{\lambda_n l}[1-(-1)^n]. \qquad (۶۱)$$

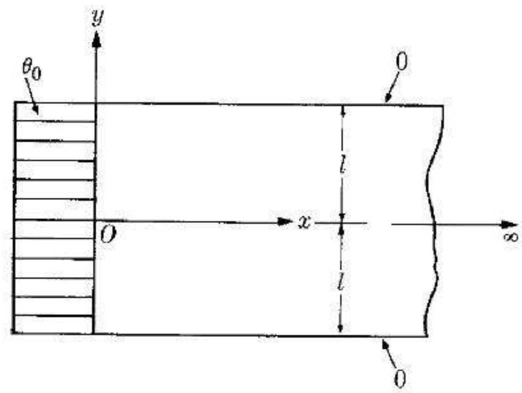
بنابراین اگر معادله (۶۱) را درون معادله (۵۶) قرار دهیم، جواب مسأله بر اساس دمای ثابت پایه به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\theta(x,y)}{\theta_0} = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{\lambda_n}e^{-\lambda_n x}\sin\lambda_n y. \qquad (۶۲)$$

از آنجاییکه تنها مقادیر فرد صحیح از n برای دما صادقند، با تعریف عدد صحیح k به صورت $n=2k+1$ و استفاده از $\lambda_n=n\pi/l$، می‌توانیم معادله (۶۲) را به صورت مناسب‌تر زیر بنویسیم:

$$\frac{\theta(x,y)}{\theta_0} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)(\pi/l)x}}{(2k+1)}\sin(2k+1)\frac{\pi}{l}y, \qquad (۶۳)$$

که k همه مقادیر مثبت صحیح و صفر را در برمی‌گیرد.



شکل ۱۱

۲-۲- مثال ۲

برای نشان دادن اثر انتخاب مبدأ مختصات بر مسأله، می‌خواهیم جواب مثال ۱ را در یک مبدأ مختصات جدید (شکل ۱۱) برای مورد دمای یکنواخت θ_0 در پایه بدست آوریم.

تقارن دمایی مسأله با توجه به طول جدید تعریف شده در مسأله، موجب استفاده از $2l$ به عنوان ضخامت پره می‌شود. فرمولاسیون مسأله بر حسب θ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0,$$

$$\theta(0, y) = \theta_0, \qquad \theta(\infty, y) = 0,$$

$$\frac{\partial\theta(x, 0)}{\partial y} = 0 \qquad \text{or} \qquad \theta(x, -l) = 0,$$

$$\theta(x, l) = 0.$$

با استفاده از جواب حاصلضرب معادله (۵۰) و $+\lambda^2$، معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی سیستم به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \qquad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad Y(l) = 0,$$
$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0; \qquad X(\infty) = 0. \qquad (۶۴)$$

(۵۳)

در اینجا شرط تقارن وسط صفحه در جهت y، مناسب‌تر بوده و ترجیح داده می‌شود.

جواب مسأله مقدار مشخصه در جهت y با استفاده از معادله (۶۴) به صورت زیر است:

$$Y_n(y) = C_n \varphi_n(y) \qquad (۶۵)$$

و داریم:

$$\varphi_n(y) = \cos \lambda_n y,$$ (۶۶) توابع مشخصه

$$\lambda_n = (2n+1)\pi/2l, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$ (۶۷) مقادیر مشخصه

که C_n یک ثابت دلخواه است.

جواب مسأله مقدار مرزی در جهت x، مشابه مسأله پیش، معادله (۵۳) است:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n x}. \qquad (۵۴)$$

بنابراین جواب حاصلضرب معادله (۵۰) و ترکیب آن با معادلات (۵۴)، (۶۵)، (۶۶) و (۶۷) نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y, \qquad (۶۸)$$

که در این معادله دوباره $a_n=B_nC_n$ است.