

با استفاده از جواب حاصلضرب معادله (۵۰) و  $\lambda^2 +$ ، معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی سیستم به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad Y(l) = 0,$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0; \quad X(\infty) = 0. \quad (64)$$

(۵۳)

در اینجا شرط تقارن وسط صفحه در جهت  $y$ ، مناسب‌تر بوده و ترجیح داده می‌شود.

جواب مسأله مقدار مشخصه در جهت  $y$  با استفاده از معادله (۶۴) به صورت زیر است:

$$Y_n(y) = C_n \varphi_n(y) \quad (65)$$

و داریم:

$$\varphi_n(y) = \cos \lambda_n y, \quad (66) \text{ توابع مشخصه}$$

$$\lambda_n = (2n + 1)\pi/2l, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (67) \text{ مقادیر مشخصه}$$

که  $C_n$  یک ثابت دلخواه است.

جواب مسأله مقدار مرزی در جهت  $x$ ، مشابه مسأله پیش، معادله (۵۳) است:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n x}. \quad (54)$$

بنابراین جواب حاصلضرب معادله (۵۰) و ترکیب آن با معادلات (۵۴)، (۶۵)، (۶۶) و (۶۷) نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y, \quad (68)$$

که در این معادله دوباره  $a_n = B_n C_n$  است.

سرانجام با استفاده از شرط مرزی ناهمگن داده شده  $\theta(0, y) = \theta_0$ ، می‌توان معادله (۶۸) را به معادله زیر تبدیل نمود:

$$\theta_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y, \quad (69)$$

سپس مثل قبل، با استفاده از معادله (۲۳) خواهیم داشت:

$$a_n = (-1)^n \frac{2\theta_0}{\lambda_n l}. \quad (70)$$

بنابراین، با قرار دادن معادله (۷۰) درون معادله (۶۸)، جواب مسأله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\lambda_n x}}{\lambda_n} \cos \lambda_n y. \quad (71)$$

معادلات (۶۳) و (۷۱) نشان‌دهنده دمای یکسان در دو سیستم مختصات مختلف است. بجز در مسائل بدیهی، انتخاب مبدأ مختصات بسیار مهم بوده و در اولین مرحله روش حل باید انتخاب شود. این نکته در بخش ۷ شرح داده شده است.

### ۲-۳- مثال ۳

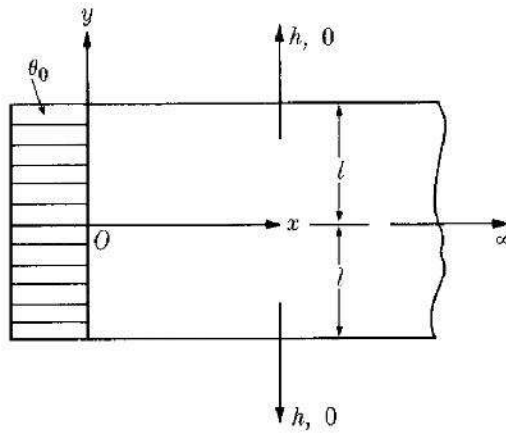
توزیع دمای سطح گسترش یافته مثال ۲ را برای ضریب انتقال حرارت محدود  $h$  (شکل ۱۲) بدست آورید. در این مورد فرمولاسیون مسأله بر حسب مختصات سیستم مسأله ۲ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0,$$

$$\theta(0, y) = \theta_0, \quad \theta(\infty, y) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad -k \frac{\partial \theta(x, l)}{\partial y} = h\theta(x, l).$$

جواب حاصلضرب داده شده توسط معادله (۵۰) فرمولاسیون مسأله را به روابط زیر تبدیل می‌کند:



شکل ۱۲

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad -k \frac{dY(l)}{dy} = hY(l), \quad (72)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0; \quad X(\infty) = 0. \quad (53)$$

مسأله مقدار مشخصه در جهت  $y$ ، معادله (۷۲) دارای جواب زیر است:

$$Y_n(y) = C_n \varphi_n(y), \quad (73)$$

با

$$\varphi_n(y) = \cos \lambda_n y, \quad (74) \text{ توابع مشخصه}$$

که مقادیر مشخصه، ریشه‌های معادله غیر جبری زیر است:

$$k\lambda_n \sin \lambda_n l = h \cos \lambda_n l. \quad (75)$$

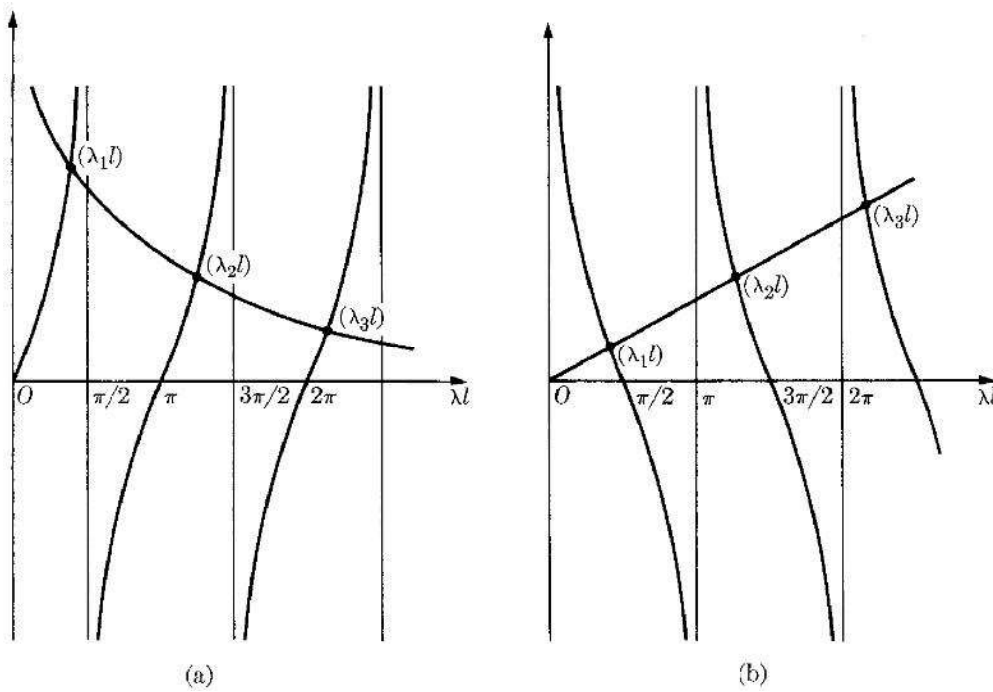
معادله (۷۵) را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر بازآرایی نمود:

$$\tan \lambda_n l = \text{Bi}/\lambda_n l, \quad \cot \lambda_n l = \lambda_n l/\text{Bi}; \quad \text{Bi} = hl/k,$$

که به صورت گرافیکی در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

مسأله مقدار مرزی در جهت  $x$  مانند مثال ۱ و ۲ است؛ از اینرو:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n x},$$



(۵۴)

شکل ۱۳

و جواب حاصلضرب مسأله به صورت زیر است:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y. \quad (۷۶)$$

با استفاده از شرط مرزی ناهمگن باقیمانده، خواهیم داشت:

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y, \quad (۷۷)$$

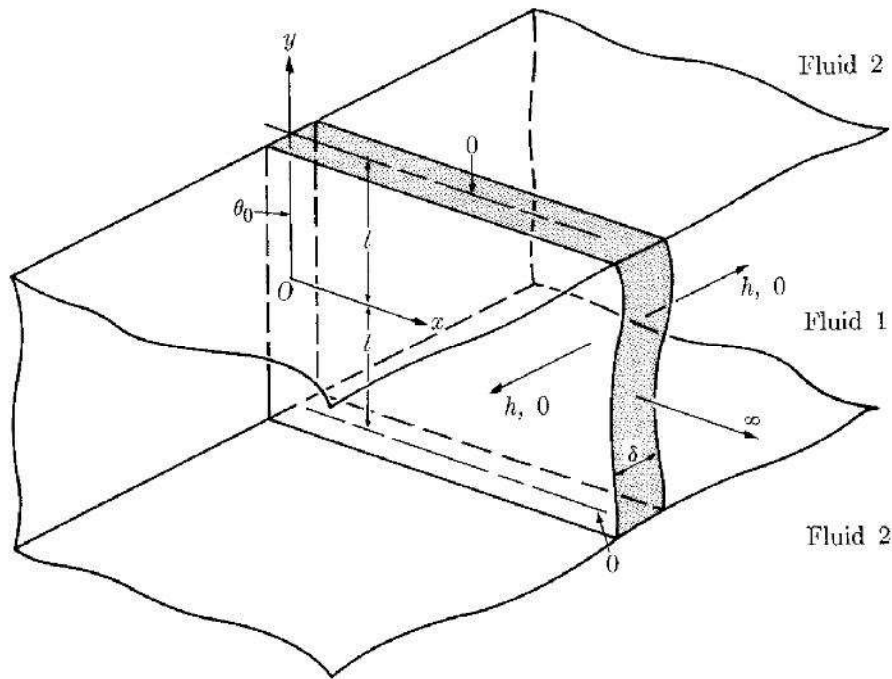
که مقدار  $a_n$  با استفاده از معادله (۷۶) به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2\theta_0 \sin \lambda_n l}{\lambda_n l + \sin \lambda_n l \cos \lambda_n l}. \quad (۷۸)$$

با قرار دادن معادله (۷۸) درون معادله (۷۶)، توزیع دمای مسأله به صورت زیر است:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \lambda_n l}{\lambda_n l + \sin \lambda_n l \cos \lambda_n l} \right) e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y. \quad (79)$$

[اگر  $h \rightarrow \infty$ ، آنگاه در معادله (۷۰) چه اتفاقی می افتد؟]



شکل ۱۴

#### ۴-۲-۴ مثال

فرض می شود سطح گسترش یافته مثال ۲، صفحه ای با ضخامت  $\sigma$  و عرض  $2L$  است (شکل ۱۴). ضریب انتقال حرارت عمودی بزرگ بوده و ضریب انتقال حرارت افقی دارای مقدار متوسط  $h$  است. توزیع دما در طول ضخامت  $\sigma$  قابل صرف نظر است. می خواهیم دمای پایای صفحه را بدست آوریم.

فرمولاسیون مسأله بر حسب  $\theta$  به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - m^2 \theta = 0,$$

$$\theta(0, y) = \theta_0, \quad \theta(\infty, y) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \theta(x, l) = 0,$$

مانند قبل با استفاده از قاعده حاصلضرب خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad Y(l) = 0, \quad (64)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - (\lambda^2 + m^2)X = 0; \quad X(\infty) = 0. \quad (80)$$

جهت  $y$  مسأله، معادله (64)، مشابه مثال ۲ است؛ از اینرو:

$$Y_n(y) = C_n \cos \lambda_n y; \quad \lambda_n = (2n + 1)\pi/2l, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

در جهت  $x$  خواهیم داشت:

$$X_n(x) = B_n e^{-(\lambda_n^2 + m^2)^{1/2} x}, \quad (81)$$

و بنابراین این معادله با مثال ۲ فرق دارد. اگر چه از آنجاییکه جهت  $x$  هیچ نقشی را در محاسبه  $a_n$  بازی نمی‌کند، مقدار  $a_n$  ممکن است با استفاده از معادله (۷۰) بدست آید. از اینرو ممکن است جواب مسأله به سادگی به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-(\lambda_n^2 + m^2)^{1/2} x} \cos \lambda_n y. \quad (82)$$

$m \rightarrow 0$  را می‌توان به صورت  $h \rightarrow 0$  یا  $\sigma \rightarrow \infty$  تفسیر نمود و وقتی که  $m \rightarrow 0$ ، آنگاه معادله (82) به (۷۱)

نزدیک می‌شود.

## ۲-۵- مثال ۵

می‌خواهیم بدانیم اثر حرکت بر جواب مسأله ۲ چیست. فرض کنید که سطح گسترش یافته با سرعت ثابت  $v$  در

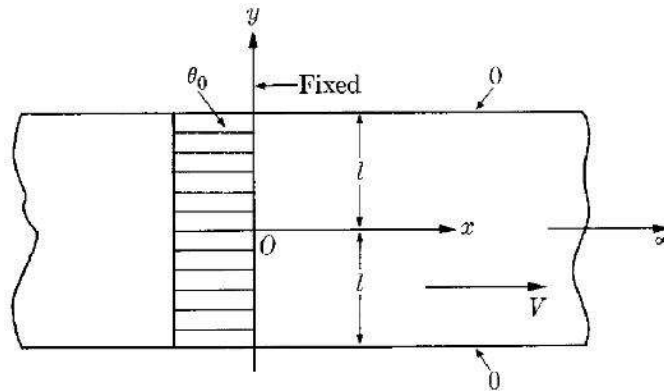
جهت  $x$  حرکت کند، که در آن جهت هدایت قابل صرف نظر است (شکل ۱۵). توزیع دمای پایا با توجه به مبدأ

مختصات ثابت استفاده شده در مثال ۲ را بدست آورید.

فرمولاسیون به صورت زیر است:

$$2s \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2},$$

$$\theta(0, y) = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \theta(x, l) = 0,$$



شکل ۱۵

که  $2s = \rho c V / k$  است. قاعده حاصلضرب نتایج زیر را حاصل می کند:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad Y(l) = 0, \quad (64)$$

$$2s \frac{dX}{dx} + \lambda^2 X = 0. \quad (83)$$

دوباره می بینیم که در جهت  $y$  همان فرمولاسیون مثال ۲ و ۴ حاصل می شود.

واضح است که وقتی مسأله فیزیک و هندسه در یک جهت تغییر نمی کند، روش جداسازی متغیرها همان

فرمولاسیون را برای این جهت حاصل می کند.

در جهت  $x$  جواب به صورت زیر است:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n^2 x / 2s}$$

بنابراین با استفاده از قاعده حاصلضرب داریم:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 x / 2s} \cos \lambda_n y. \quad (۸۴)$$

سرانجام استفاده از شرط مرزی ناهمگن، معادله (۸۴) را به (۶۹)

تبدیل می کند، که در آن مقدار  $a_n$  با استفاده از معادله (۷۰) حاصل می شود. با قرار دادن این مقدار درون معادله

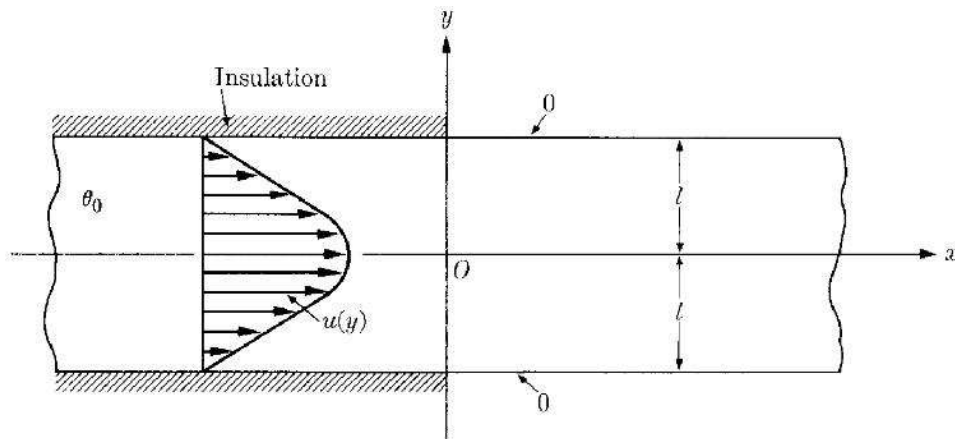
(۸۴)، دمای پره به صورت زیر است:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 x / 2s} \cos \lambda_n y. \quad (۸۵)$$

مثال مذکور یکی از مهمترین مثال های نفوذ خطی است، مسأله *Graetz*، که اکنون بیان می کنیم.

## ۶-۲-۶ مثال ۶

جسم مثال ۵ را با یک سیال ویسکوز با جریان آرام کاملاً توسعه یافته بین دو صفحه موازی تعویض می کنیم (شکل ۱۶). ضخامت صفحه قابل صرف نظر است. نیمه بالادستی صفحه عایق بوده در حالیکه نیمه پایین دستی آن در دمای صفر نگه داشته می شود. هدایت محوری قابل صرف نظر است. دمای سیال جریان بالادستی یکنواخت است، که  $\theta_0$  می باشد. می خواهیم توزیع دما در سیال را بدست آوریم.





شکل ۱۶

فرمولاسیون مسأله با فرمولاسیون مثال ۵ یکسان است. فقط سرعت یکنواخت مسأله ۵، با سرعت جریان آرام کاملاً توسعه یافته بین دو صفحه موازی جایگزین شده است:

$$u(y) = \frac{(-dp/dx)l^2}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{y}{l} \right)^2 \right].$$

می‌توان این سرعت را به شکل مناسبی بر حسب مقدار متوسط  $u_m$  و متغیر بی‌بعد  $\eta = y/l$  به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{u(\eta)}{u_m} = \frac{3}{2} (1 - \eta^2) \quad (۸۶)$$

که  $u_m = (-dp/dx)l^2 / 3\mu$  است.

بدلیل مطالعه پارامتری مسأله، آنرا به صورت فرمولاسیون بی‌بعد در نظر گرفتیم. با جایگزینی  $\eta$  با معادله (۸۶) در فرمولاسیون مثال ۵ و قرار دادن اعداد بی‌بعد مناسب خواهیم داشت:

$$\frac{3}{2}(1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}, \quad (۸۷)$$

که  $\psi = \theta / \theta_0$ ،  $Pe = u_m l / a$  و  $\xi = (x/l)Pe$  است. معکوس  $\xi$ ، مدول Graetz نامیده می‌شود و با  $Gz = 1/\xi = Pe/(x/l)$  نشان داده می‌شود. شرایط مرزی در معادله (۸۷) صادق بوده و داریم:

$$\psi(0, \eta) = 1, \quad \frac{\partial \psi(\xi, 0)}{\partial \eta} = 0, \quad \psi(\xi, 1) = 0.$$

با استفاده از قاعده حاصلضرب  $\psi(\xi, \eta) = X(\xi)Y(\eta)$  به راحتی مسأله را می‌توان تفکیک نمود:

$$\frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \frac{3}{2}\lambda^2(1 - \eta^2)Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{d\eta} = 0, \quad Y(1) = 0, \quad (۸۸)$$

$$\frac{dX}{d\xi} + \lambda^2 X = 0. \quad (89)$$

بر خلاف معادلات موجود در مثال‌های قبلی، جواب معادله (88) را نمی‌توان بر حسب توابع ساده بیان نمود.

بنابراین از روش سری‌های توانی که در جلسات قبل ذکر شد، برای حل استفاده می‌کنیم. می‌توانیم جواب کلی

مسئله را به صورت منحنی زیر نشان دهیم:

$$Y(\eta) = AG_0^{(1)}(\lambda\eta) + BG_0^{(2)}(\lambda\eta), \quad (90)$$

که  $G_0^{(1)}$  و  $G_0^{(2)}$  نشان‌دهنده تابع *Graetz* در مختصات کارتزین از نوع اول و دوم با درجه صفر است. دوباره

متذکر می‌شویم که جواب کلی معادله‌ای مثل معادله (90) با ماهیت نوسانی معمولاً متشکل از توابع زوج و فرد

می‌باشد.

فرض می‌کنیم که  $G_0^{(1)}(\lambda\eta)$  و  $G_0^{(2)}(\lambda\eta)$  به ترتیب نشان‌دهنده توابع فرد و زوج هستند. اولین شرط

مرزی در معادله (88) نشان می‌دهد که  $B \equiv 0$  بوده و تابع مشخصه  $\varphi_n(\eta) = G_0^{(1)}(\lambda\eta)$  است. با استفاده از

شرط مرزی دوم، مقادیر مشخصه بدست می‌آید که در واقع این مقادیر مشخصه، ریشه‌های معادله

$G_0^{(1)}(\lambda\eta) = 0$  هستند. با کمک جواب کلی معادله (89) یعنی  $e^{-\lambda^2\xi}$ ، اکنون می‌توانیم قاعده‌ی حاصلضرب را

برای این مسئله به صورت زیر بنویسیم:

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \xi} G_0^{(1)}(\lambda_n \eta). \quad (91)$$

سرانجام با استفاده از شرط مرزی ناهمگن مسئله  $\psi(0, \eta) = 1$  خواهیم داشت:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_0^{(1)}(\lambda_n \eta),$$

که با توجه به معادله (23) داریم:

$$a_n = \frac{\int_0^1 (1 - \eta^2) G_0^{(1)}(\lambda_n \eta) d\eta}{\int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta}. \quad (92)$$

اکنون می‌توانیم با استفاده از روابط ریاضی،  $a_n$  را به صورت مناسب‌تری بیان نماییم. متذکر می‌شویم که  $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$  یک جواب ویژه معادله (۸۸) است که به جای آن،  $Y(\eta)$  را در این معادله قرار می‌دهیم و با انتگرال‌گیری از نتیجه آن در بازه  $(0,1)$  عبارت ساده‌تری برای صورت معادله (۹۲) به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^1 (1 - \eta^2) G_0^{(1)}(\lambda_n \eta) d\eta = - \frac{2}{3\lambda_n^2} \left. \frac{dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta)}{d\eta} \right|_{\eta=1}. \quad (93)$$

بعضی اوقات بازآرایی مخرج معادله (۹۲) مهمتر است. ما ابتدا معادله (۸۸) را بر حسب  $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$  به صورت

$dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta) / d\lambda_n$  بیان نموده و سپس از نتیجه حاصل در بازه  $(0,1)$  انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right) \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\lambda_n} \right) \Big|_{\eta=1} - \int_0^1 \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\lambda_n} \right) d\eta \\ - \frac{3}{4} \lambda_n^2 \frac{d}{d\lambda_n} \int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta = 0. \end{aligned} \quad (94)$$

سپس معادله (۸۸) را که به صورت  $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$  بیان شده در  $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$  ضرب کرده و از نتیجه حاصل در همان بازه انتگرال می‌گیریم و داریم:

$$G_0^{(1)} \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \Big|_{\eta=1} - \int_0^1 \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right)^2 d\eta + \frac{3}{2} \lambda_n^2 \int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta = 0. \quad (95)$$

با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۹۵) با توجه به  $\lambda_n$  نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\lambda_n} \right) \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right) \Big|_{\eta=1} + G_0^{(1)} \frac{d}{d\lambda_n} \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right) \Big|_{\eta=1} - 2 \int_0^1 \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \frac{d}{d\lambda_n} \left( \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right) d\eta \\ + 3\lambda_n \int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta \\ + \frac{3}{2} \lambda_n^2 \frac{d}{d\lambda_n} \int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

متذکر می‌شویم که مرتبه دیفرانسیل‌گیری با توجه به  $\eta$  و  $\lambda_n$  ممکن است تغییر نماید. با تقسیم معادله (۹۶) بر ۲

و جایگذاری نتیجه از معادله (۹۴) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta = \frac{1}{3\lambda_n^2} \frac{dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta)}{d\lambda_n} \frac{dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=1} \quad (97)$$

با قرار دادن معادلات (93) و (97) درون معادله (92) خواهیم داشت:

$$a_n = - \frac{2}{\lambda_n \frac{dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta)}{d\lambda_n} \Big|_{\eta=1}}.$$

بنابراین توزیع دما درون سیال به صورت زیر است:

$$\psi(\xi, \eta) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \xi} G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)}{\lambda_n \frac{dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta)}{d\lambda_n} \Big|_{\eta=1}}. \quad (98)$$

اگر چه با توجه به نقطه نظر محاسبات انتقال حرارت، آگاهی از حرارت تلف شده از سیال مهمتر از آگاهی از دمای سیال است. در این ارتباط ما ابتدا در مورد اعداد بدون بعد وابسته به انتقال حرارت از سطوح بحث می کنیم.

همانطور که در فصل ۲ دیدیم، ممکن است انتقال حرارت  $q_n$  از سطح  $\sigma$  با استفاده از ضریب انتقال حرارت به صورت زیر باشد:

$$q_n = h(T_\sigma - T_\infty),$$

که  $T_\sigma$  و  $T_\infty$  به ترتیب نشان دهنده دماهای سطح و محیط می باشند. همچنین در فصل ۲،  $q_n$  را بر حسب هدایت از یا به جسم بیان نمودیم. بنابراین با توجه به شکل ۱۷ الف خواهیم داشت:

$$-k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial n} \right)_\sigma = h(T_\sigma - T_\infty),$$

که  $T_s$  و  $k_s$  به ترتیب دما و ضریب هدایت پذیری جسم هستند. با بازآرایی معادله مذکور، عدد بایوت به صورت زیر حاصل می شود:

$$\text{Bi} = \frac{hL}{k_s} = - \frac{[\partial T_s / \partial (n/L)]_\sigma}{T_\sigma - T_\infty}, \quad (99)$$

که  $L$  طول مشخصه است. به طور واضح ممکن است که  $q_n$  را نیز بر حسب هدایت از یا به سیال (نشان داده شده در شکل ۱۷ب) بیان کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

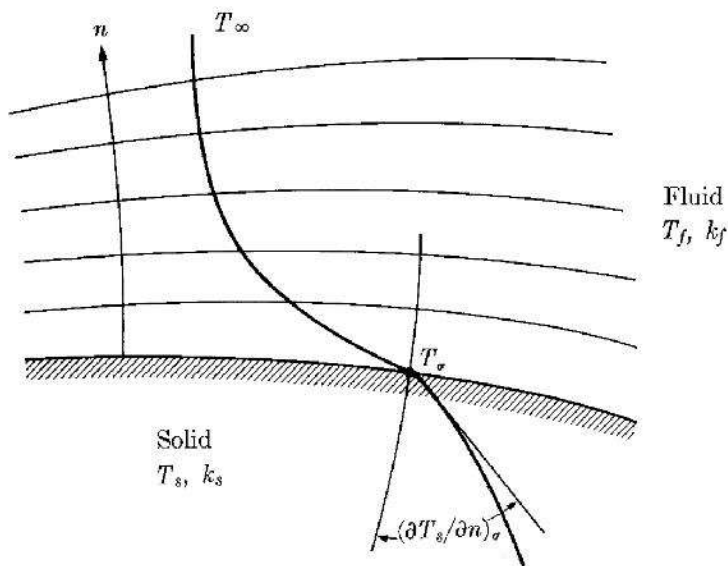
$$-k_f \left( \frac{\partial T_f}{\partial n} \right)_\sigma = h(T_\sigma - T_\infty),$$

که می توان آن را به صورت زیر بازآرایی نمود:

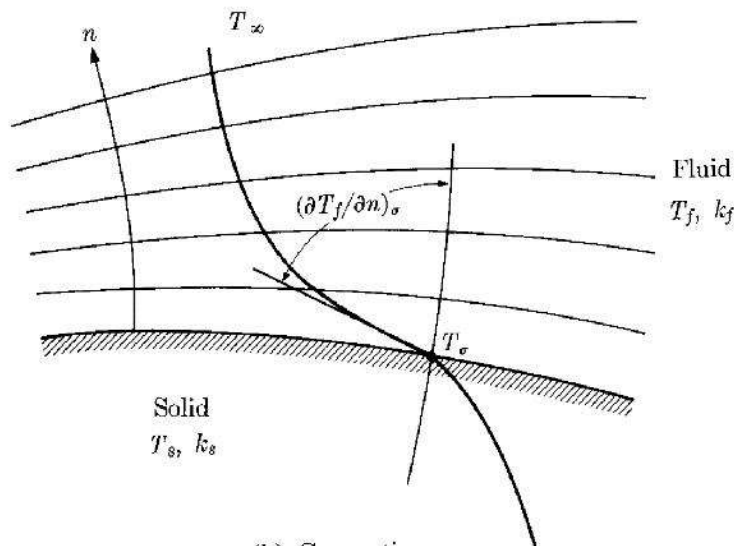
$$\text{Nu} = \frac{hL}{k_f} = - \frac{[\partial T_f / \partial (n/L)]_\sigma}{T_\sigma - T_\infty}, \quad (100)$$

که  $N_n$  به عنوان عدد (ضریب) ناسلت معروف است. وقتیکه سیال محدود باشد، در معادلات (۹۹) و (۱۰۰)

را با دمای متوسط سیال که دمای بالک نامیده می شود، تعویض می نمایم،



(a) Conduction



(b) Convection

شکل ۱۷

$$T_b = \frac{1}{AU} \int_A u(\mathbf{r}, t) T(\mathbf{r}, t) dA, \quad (101)$$

که  $A$  نشان‌دهنده سطح سیال و  $U$  معیاری از مقدار سرعت متوسط سیال است. تذکری در مورد تفاوت در استفاده از معادلات (۹۹) و (۱۰۰): در مسائل هدایت،  $h$  و  $T_\infty$  (یا  $T_b$ ) در مسأله داده می‌شود، و معادله (۹۹) به عنوان شرط مرزی استفاده می‌شود. در مسائل جابه‌جایی  $T_\infty$  داده شده ولی  $h$  داده نمی‌شود. مسائل جابه‌جایی بر حسب شرایط مرزی نامربوط به  $h$  حل می‌شوند؛ سپس جواب‌های حاصل برای حصول مقدار  $h$  درون معادله (۱۰۰) قرار داده می‌شود.

حال می‌خواهیم به مسأله خودمان برگردیم. شکل مناسب معادلات (۱۰۰) و (۱۰۱) به صورت زیر است:

$$\text{Nu} = \frac{hl}{k} = \frac{-(\partial\psi/\partial\eta)_{\eta=1}}{\psi_b}$$

و:

$$\psi_b = \frac{3}{2} \int_0^1 (1 - \eta^2) \psi(\xi, \eta) d\eta.$$

سرانجام با استفاده از معادله (۹۸) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_{\eta=1} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^{(1)}/d\eta}{\lambda_n dG_0^{(1)}/d\lambda_n} \Big|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}.$$

سپس با قراردادن معادله (۹۸) درون  $\psi_b$  و نوشتن معادله (۹۳) خواهیم داشت:

$$\psi_b = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^{(1)}/d\eta}{\lambda_n^3 dG_0^{(1)}/d\lambda_n} \Big|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}.$$

بنابراین عدد ناسلت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$Nu = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^{(1)}/d\eta}{\lambda_n dG_0^{(1)}/d\lambda_n} \Big|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^{(1)}/d\eta}{\lambda_n^3 dG_0^{(1)}/d\lambda_n} \Big|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}} \quad (102)$$

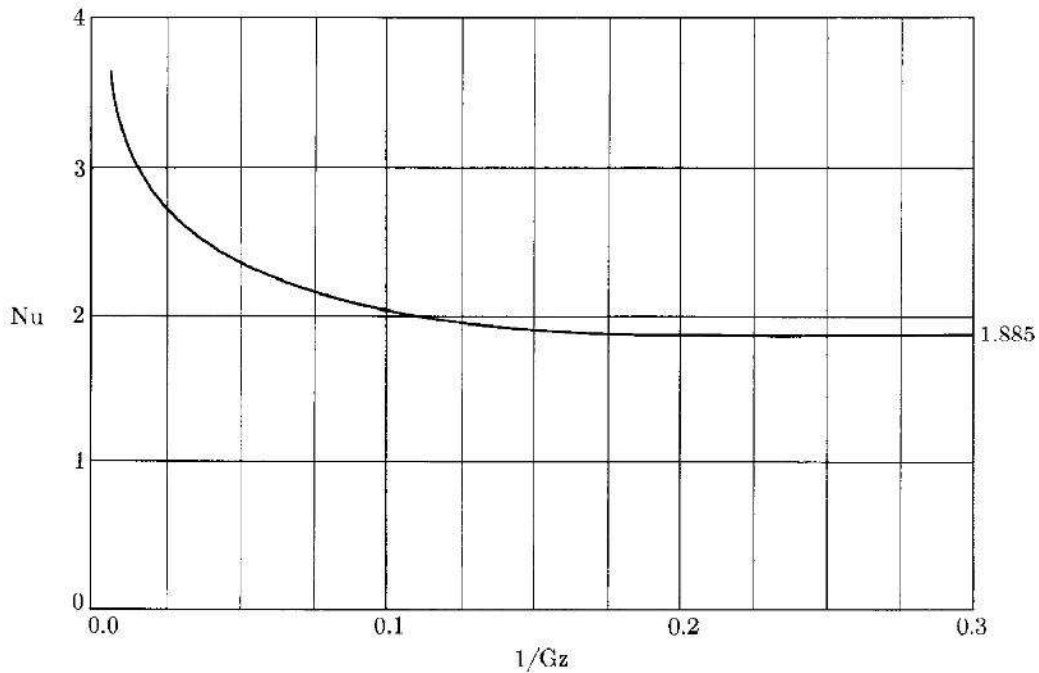
در شکل ۱۸، ناسلت بر حسب  $\xi$  رسم شده است. بنابراین

می‌توان فهمید که وقتی که  $\xi \rightarrow 0$ ، آنگاه  $Nu \rightarrow \infty$  و وقتی که  $\xi \rightarrow \infty$  آنگاه  $Nu \rightarrow 1.825$  [حدود مذکور

برای  $Nu$  با استفاده از فیزیک مسأله بدست آمده است].

در مثال بعدی اثر هدایت محوری بر مسأله بررسی می‌شود. اگر چه بدلیل جلوگیری از افزایش پیچیدگی مسأله،

فرض می‌شود که سیال مورد نظر ایده‌آل باشد (یا یک سطح گسترش یافته متحرک داشته باشیم).



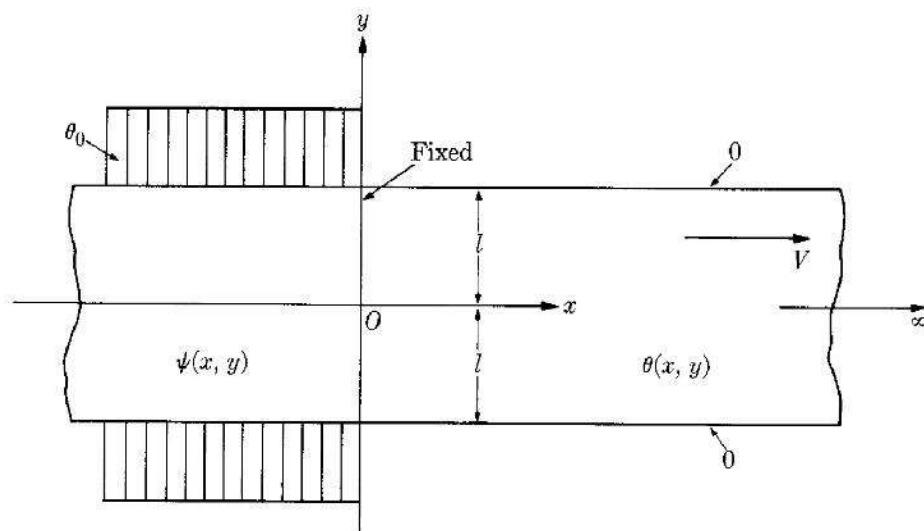
شکل ۱۸

## ۲-۲-۷ مثال ۷

مثال ۵ را برای زمانی که اثرات هدایتی در جهت حرکت هم در نظر گرفته شده، حل کنید.

طبق توضیحات مثال ۳ از جلسه پنجم، رسانش محوری دو اثر دارد. اول، اثر خود رسانش محوری که اغلب مورد توجه است و به صورت  $\partial^2 \theta / \partial x^2$  در معادلات دیفرانسیل داده می‌شود، و اثر دوم با همان اهمیت، در فیزیک مسأله مستتر است که آن نفوذ رسانشی گرما به خارج از محدوده انتگرالی اولیه است. بنابراین در این مسأله ما دو محدوده داریم (شکل ۱۹). از آنجاییکه نقطه  $x=0$  مرز بین دو ناحیه است، دما در  $x=0$  قابل تعیین نیست.

در اینجا باید شرایط مرزی طبیعی مشخص شود؛ به عبارت دیگر تساوی دماها و شارهای حرارتی باید مشخص شود. در فاصله منفی دور از نقطه  $x=0$  یا به عبارت دیگر در سطح پره هنگامیکه  $x < 0$  است، دما به صورت  $\theta_0$  قابل نمایش است. با استفاده از معادله  $\theta(x, y)$  برای توزیع دما ناحیه  $x > 0$  و  $\psi(x, y)$  برای  $x < 0$  دمای مسأله را می‌توان به شکل زیر نوشت:



شکل ۱۹

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad x < 0$$



$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0$$

$$\psi(-\infty, y) = \theta_0, \quad \theta(\infty, y) = 0,$$

$$\psi(0, y) = \theta(0, y), \quad \frac{\partial \psi(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0,$$

$$\psi(x, l) = \theta_0, \quad \theta(x, l) = 0.$$

این فرمولاسیون دو معادله دیفرانسیل همگن را شامل می‌شود به همراه چهار شرط مرزی همگن و چهار شرط

مرزی ناهمگن. یکی از شرایط ناهمگن،  $\psi(x, l) = \theta_0$ ، یک ناهمگنی را به جهتی که قابلیت متعامد شدن را

دارد وارد می‌کند و بنابراین استفاده از روش جداسازی متغیرها برای ناحیه  $x < 0$  مناسب است، اگر چه تبدیل

$\psi(x, y) = \theta_0 + \phi(x, y)$  برای  $x < 0$  این مشکل را رفع خواهد کرد. از اینرو ایزوترم  $\phi(x, y)$  برای ناحیه  $x < 0$

به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad x < 0$$

$$\phi(-\infty, y) = 0,$$

$$\theta_0 + \phi(0, y) = \theta(0, y), \quad \frac{\partial \phi(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \phi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \phi(x, l) = 0,$$

که معادلات باقیمانده فرمولاسیون قبلی برای  $x > 0$  بدون تغییر باقی و دیگر تکرار نمی‌شود.

پاسخ همگن جهت  $y$  در  $\theta(x, y)$  و  $\phi(x, y)$  در مثال‌های ۲، ۴ و ۵ یکسان است. پاسخ کلی در جهت  $x$  به

صورت زیر می‌شود:

$$X_n(x) = A_n e^{[s+(s^2+\lambda_n^2)^{1/2}]x} + B_n e^{[s-(s^2+\lambda_n^2)^{1/2}]x}, \quad (103)$$

که پاسخ فوق برای هر دو ناحیه‌ها قابل استفاده است. هر چند جمله اول معادله (۱۰۳)، فیزیک منطقه  $x < 0$  را ارضا می‌کند، در حالیکه جمله دوم برای منطقه  $x > 0$  مناسب است. از اینرو پاسخ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\psi(x, y) = \theta_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{[s+(s^2+\lambda_n^2)^{1/2}]x} \cos \lambda_n y, \quad (104)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{[s-(s^2+\lambda_n^2)^{1/2}]x} \cos \lambda_n y. \quad (105)$$

در اینجا  $a_n$  و  $b_n$  از روی شرایط مرزی در  $x=0$  بدست می‌آیند. با مساوی قرار دادن دمای دو ناحیه:

$$\theta_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \lambda_n y. \quad (106)$$

با بسط  $\theta_0$  بصورت مجموعه سری‌های متعامد از معادله (۶۶)، پاسخ به صورت زیر است:

$$\theta_0 = \frac{2\theta_0}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \cos \lambda_n y, \quad (107)$$

با قرار دادن معادله (۱۰۷) در معادله (۱۰۶) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$(-1)^n \frac{2\theta_0}{\lambda_n l} + a_n = b_n. \quad (108)$$

تساوی شارهای حرارتی نتیجه زیر را می‌دهد:

$$[s + (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]a_n = [s - (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]b_n. \quad (109)$$

سپس حل معادله (۱۰۵) و (۱۰۹) برای  $a_n$  و  $b_n$  و جایگذاری نتایج در معادلات (۱۰۴) و (۱۰۵) و تعریف

پارامترهای بدون بعد، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$P\acute{e} \text{ (or } P) = Vl/a, \quad Gz = 1/\xi = P\acute{e}/(x/l),$$

$$\eta = y/l, \quad \mu_n = (2n + 1)\pi/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

در نهایت دمای بدون بعد دو ناحیه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\psi(\xi, \eta, P)}{\theta_0} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu_n} \left[ 1 - \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right] \times \cos \mu_n \eta \exp \left( \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \left( \frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi \right), \quad \xi < 0, \quad (110)$$

(۱۱۱)

$$\theta(\xi, \eta; P) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ 1 + \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2}} \right\} \times \cos \mu_n \eta \exp \left( \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[ 1 + \left( \frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi \right), \quad \xi > 0.$$

برای جزییات بیشتر، مثال ۳ جلسه پنجم را ملاحظه کنید.

$$\frac{\text{Axial enthalpy flow}}{\text{Axial conduction}} = Pe \theta,$$

زمانیکه  $Pe \rightarrow \infty$  اثرات رسانش محوری حذف شده و معادلات (۱۱۰) و (۱۱۱) تبدیل به معادلات زیر

می شوند:

$$\frac{\psi(\xi, \eta)}{\theta_0} = 0, \quad \xi < 0, \quad (112)$$

$$\frac{\theta(\xi, \eta)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu_n} e^{-\mu_n^2 \xi} \cos \mu_n \eta, \quad \xi > 0. \quad (113)$$

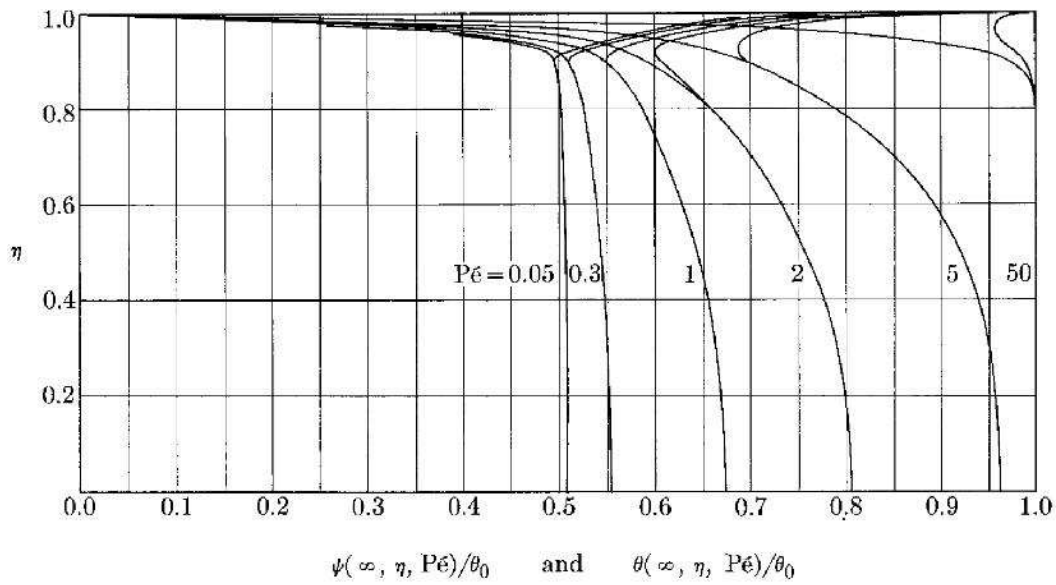
معادله (۱۱۳) مطابق انتظار، شکل بی بعد معادله (۸۵) است.

شکل بی بعد دمای  $\psi(x, y)$  و  $\theta(x, y)$  بوسیله معادلات (۱۱۰) و (۱۱۱) داده شده است. حال به ادامه بحث با

مطالعه عددی مسأله می پردازیم.

در شکل ۲۰ دمای مرز دو سیستم که دما در نقطه  $\xi = 0 (Gz = \infty)$  است، بر اساس  $\eta$  برای مقادیر ۰/۳، ۰/۰۵،

۱، ۲، ۵ و ۵۰ عدد  $Pe$  رسم شده است. نتایج نشان دهنده اثرات مثبت رسانش محوری با کاهش  $Pe$  می باشد.



شکل ۲۰

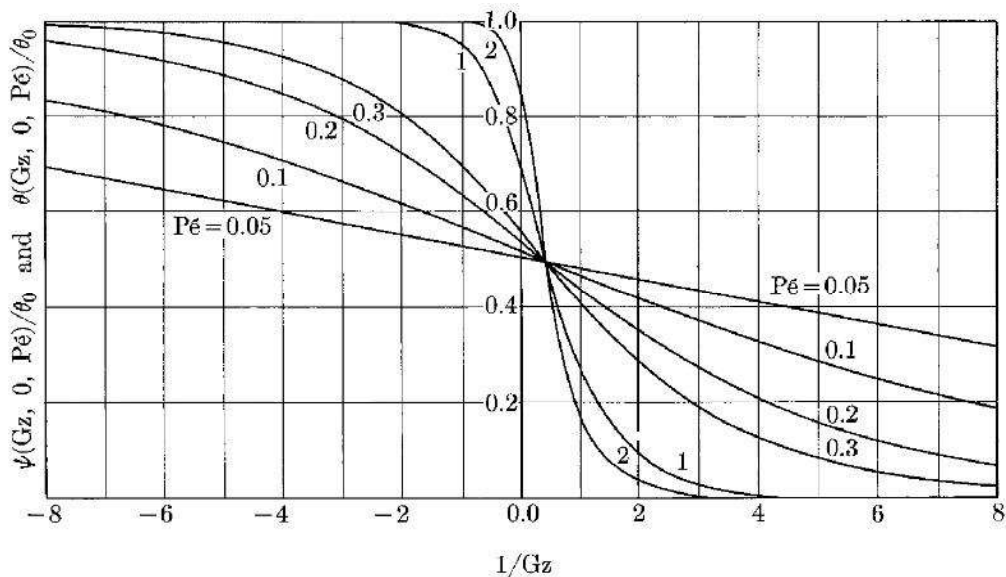
در شکل ۲۱ دمای صفحه میانی بر حسب  $1/Gz$  برای مقادیر  $0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 1$  و  $2$  عدد  $Pe$  رسم شده است. طبق انتظار، نفوذ توزیع دما به محدوده  $x < 0$  با کاهش عدد  $Pe$  افزایش می‌یابد.

در نهایت ضریب انتقال حرارت  $h$  بر پایه فاصله  $L$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\theta_b = \int_0^1 \theta d\eta \quad \text{and} \quad \psi_b = \int_0^1 \psi d\eta$$

و در ادامه:

$$Nu = \frac{(\partial\psi/\partial\eta)_{\eta=1}}{\psi_w - \psi_b}, \quad \xi < 0,$$



شکل ۲۱

$$\text{Nu} = \frac{-(\partial\theta/\partial\eta)_{\eta=1}}{\theta_b - \theta_w}, \quad \xi > 0,$$

که در معادلات بالا  $\psi_w = \psi(\xi, 1; P) = \theta_0$  و  $\theta_w = \theta(\xi, 1; P) = 0$ . با قرار دادن معادلات (۱۱۰) و (۱۱۱) در

معادلات فوق، معادلات زیر بدست می آیند:

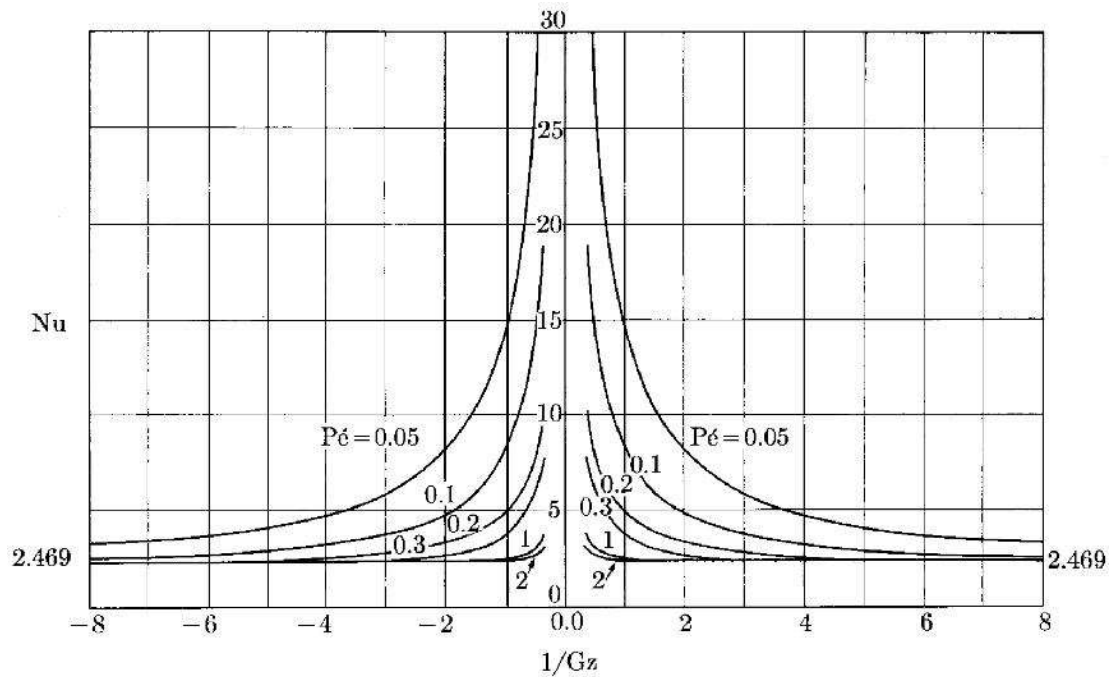
$$\text{Nu} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \left(\frac{2\mu_n}{P}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \left(\frac{2\mu_n}{P}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi\right)}, \quad \xi < 0, \quad (114)$$

$$\text{Nu} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[ 1 + \left(\frac{2\mu_n}{P}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \left\{ 1 + \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[ 1 + \left(\frac{2\mu_n}{P}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi\right)}, \quad \xi > 0. \quad (115)$$

معادلات (۱۱۴) و (۱۱۵) در شکل ۲۲ بر حسب  $I/Gz$  برای مقادیر ۰/۰۵، ۰/۱، ۰/۲، ۰/۳، ۰/۴ و ۱ و عدد  $Pe$  رسم

شده است. توجه به این نکته ضروری است که توسعه ضریب انتقال حرارت با افزایش اهمیت رسانش محوری،

کاهش می یابد.



شکل ۲۲

### ۳- انتخاب محورهای مختصات (XML)

در بخش‌های گذشته تعدادی مسأله دو بعدی در مختصات کارتزین بدون هیچ بحثی راجع به مختصات انتخاب شده حل شد. همچنین پاسخ مثال ۱ (برای دمای پایه ثابت) و مثال ۲ که هر دو یک شرایط فیزیکی یکسانی را بیان می‌کنند، به صورت دو سیستم مختصات مختلف در نظر گرفته شده است. پاسخ‌ها از نظر پیچیدگی ریاضی، قابل قیاس هستند و از این رو انتخاب محورهای مختصات که در بعضی مسائل از اهمیت بالایی برخوردار است، در مثال‌های زیر تشریح شده است.

#### ۳-۱- مثال ۸

مثال ۲ را با فرض اینکه پره طول محدود  $L$  را داشته باشد را دوباره حل کنید (شکل ۲۳).

مسأله مشابه مثال‌های قبل قابل جداسازی است. پاسخ در جهت  $y$  (جهت متعامد) همانند مثال‌های ۲، ۴، ۵ و ۷ می‌باشد. پاسخ در جهت  $x$  (جهت غیرمتعامد) اکنون به طور صریح بدست می‌آید. فرمولاسیون این جهت همراه با شرط مرزی قابل تفکیک به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0, \quad (116)$$

$$X(L) = 0. \quad (117)$$

برای بازه محدود از توابع هیپربولیک استفاده می‌شود که پاسخ کلی معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

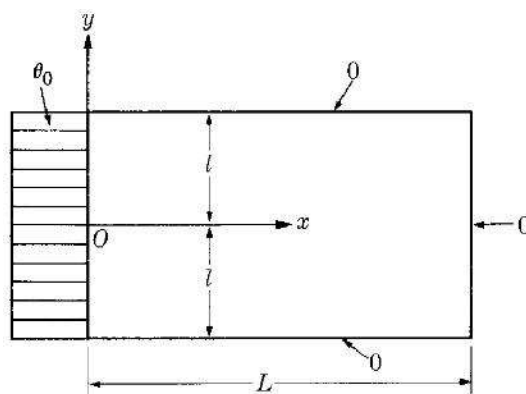
$$X(x) = A \cosh \lambda x + B \sinh \lambda x. \quad (118)$$

با قرار دادن شرط معادله (۱۱۷) در معادله (۱۱۸) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$0 = A \cosh \lambda L + B \sinh \lambda L. \quad (119)$$

با حل معادله (۱۱۹) برای  $A$  یا  $B$ ، به طور مثال برای  $B$ ، و قرار دادن نتیجه بدست آمده در معادله (۱۱۸)، معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$X(x) = A \left( \cosh \lambda x - \frac{\cosh \lambda L}{\sinh \lambda L} \sinh \lambda x \right),$$



شکل ۲۳

که معادله فوق به صورت زیر بازآرایی می‌شود:

$$X(x) = A^* \sinh \lambda(L - x), \quad A^* = A/\sinh \lambda L.$$

پس پاسخ حاصلضرب مسأله به صورت زیر نوشته می شود:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \sinh \lambda_n(L - x) \cos \lambda_n y.$$

با مقاردهی  $a_n^*$  مشابه مثال های قبل، توزیع دما در پره به صورت معادله زیر می شود:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n l)} \left[ \frac{\sinh \lambda_n(L - x)}{\sinh \lambda_n L} \right] \cos \lambda_n y. \quad (120)$$

حال مسأله را برای حالتیکه مختصات سیستم به صورت نشان داده شده در شکل ۲۴ باشد، حل می کنیم.

فرمولاسیون جهت  $y$  ثابت باقی می ماند، ولی فرمولاسیون در جهت  $x$  تغییر می کند. در اینجا متغیر جدید  $\xi$

تعریف می شود:

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} - \lambda^2 X = 0, \quad (121)$$

$$X(0) = 0. \quad (122)$$

پاسخ کلی معادله (۱۲۱) به صورت معادله (۱۱۸) خواهد شد، با این تفاوت که  $x$  با  $\xi$  جایگزین می شود.

استفاده از معادله (۱۲۲)  $A=0$  می شود و قاعده حاصلضرب جدید بدست می آید:

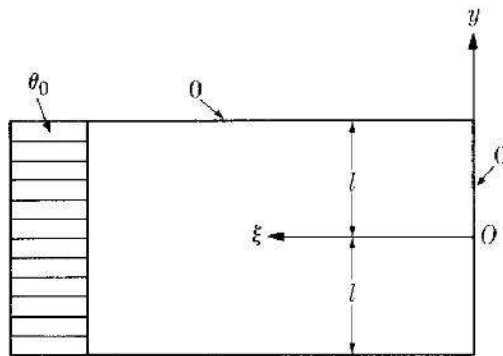
$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sinh \lambda_n \xi \cos \lambda_n y.$$

با مقاردهی  $b_n$  دمای پره به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\theta(\xi, y)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n l)} \left( \frac{\sinh \lambda_n \xi}{\sinh \lambda_n L} \right) \cos \lambda_n y. \quad (123)$$

ازاینرو، به علت ساده تر بودن پاسخ در جهت  $x$  سیستم مختصات شکل ۲۴ برای این مسأله مناسب تر از سیستم

مختصات شکل ۲۳ می شود.





## شکل ۲۴

اکنون نتایج فوق برای جهت ناهمگن می‌تواند با دربرگرفتن یک عبارت مشابه، برای انتخاب جهت همگن عمومیت یابد.

در فرمولاسیون یک مسأله، انتخاب محور مناسب و معمول اهمیت زیادی دارد. در بحث جداسازی متغیرها و تئوری توابع متعامد بیان شد که شرط مرزی اول در جهت همگن در هر مسأله‌ای توابع مشخصه را بر پایه سیستم مختصات انتخاب شده، محاسبه می‌کند. شرط مرزی دوم به همراه نتیجه بدست آمده از شرط مرزی اول، مقادیر مشخصه را نتیجه می‌دهد (مسأله ۴ را ملاحظه کنید). بنابراین ساده‌ترین توابع مشخصه ممکن، متناسب با محورهای مختصاتی است (در جهت همگن) که از روی ساده‌ترین شرط مرزی همگن بدست می‌آید. نتیجه حاصله دیگر این است که شرط مرزی همگن رابطه‌ای بین پاسخ‌های ویژه در جهت ناهمگن می‌دهد. بنابراین ساده‌ترین پاسخ در این جهت، پاسخ برای محورهای مختصاتی است (در جهت همگن) که از روی ساده‌ترین شرط مرزی همگن بدست می‌آید.

نتیجه حاصله دیگر این است که شرط مرزی همگن رابطه‌ای بین پاسخ‌های ویژه در جهت ناهمگن می‌دهد. بنابراین ساده‌ترین پاسخ در این جهت، پاسخ برای محورهای مختصاتی است (در همان جهت) که از شرط مرزی قابل تفکیک بدست آمده باشد.

این روش تنها برای انتخاب محورهای مختصات در مسائل یک بعدی استفاده می‌شود. این نکته عجیب نیست، زیرا مسائل یک بعدی مسائل مقدار مشخصه نیستند و شرایط مرزی آنها برای مقداردهی ضرایب نامعین پاسخ‌های ویژه استفاده می‌شود، نه برای بدست آوردن توابع مشخصه و مقادیر مشخصه. از اینرو در مسائل یک

بعدی، بوسیله انتخاب مبدأ در یک مرز پیچیده می‌توان یک یا دو جهت که شامل این ضرایب می‌باشند را به طور قابل ملاحظه‌ای ساده کرد.

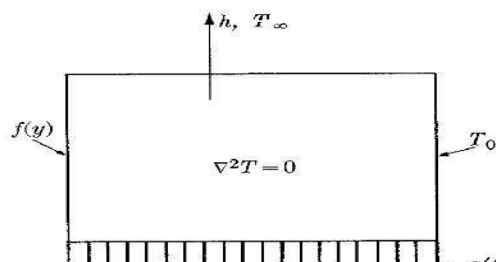
#### ۴- ناهمگنی

در گذشته، مسائل دو بعدی پایدار مختصات کارتزین که با روش جداسازی متغیرها حل می‌شود، شامل یک معادله دیفرانسیل همگن به همراه دو شرط مرزی همگن در جهت محدود یا یک شرط مرزی همگن به همراه یک شرط ناهمگن در جهت باقیمانده (محدود یا نامحدود) بود. اما اغلب مسائل دو بعدی این روش شرایط را ارضا نمی‌کند و در بعضی موارد مسائل باید در صورت امکان تبدیل به شکلی شوند که در شرایط بالا صدق کند. یک راه انجام این تبدیل، تغییر سطح دما می‌باشد، روشی که در مثال‌های قبلی حل شده در این فصل مورد استفاده قرار گرفته است. اگر این مورد امکان پذیر نبود، از مفهوم قاعده جمع پذیری استفاده می‌شود. به این صورت که می‌توان مسأله را به چند مسأله ساده‌تر که هر کدام از آنها در شرایط همگنی مورد نیاز صدق کنند تقسیم نمود و در نهایت، مسأله‌های مورد نظر جمع شوند.

ناهمگنی می‌تواند نتیجه ناهمگنی در مرزها و یا ناهمگنی در معادله دیفرانسیل باشد. از آنجاییکه مرزهای ناهمگن ساده‌تر می‌باشند، ابتدا مورد بررسی قرار می‌گیرند.

#### ۴-۱- مثال ۹

مطلوبست محاسبه دمای پایدار مسأله نشان داده شده در شکل ۲۵.



شکل ۲۵

$$\pm k \frac{\partial \theta}{\partial y} = h \theta$$

$$\nabla^2 \theta = 0$$

$$\pm k \frac{\partial \theta}{\partial y} = q''$$

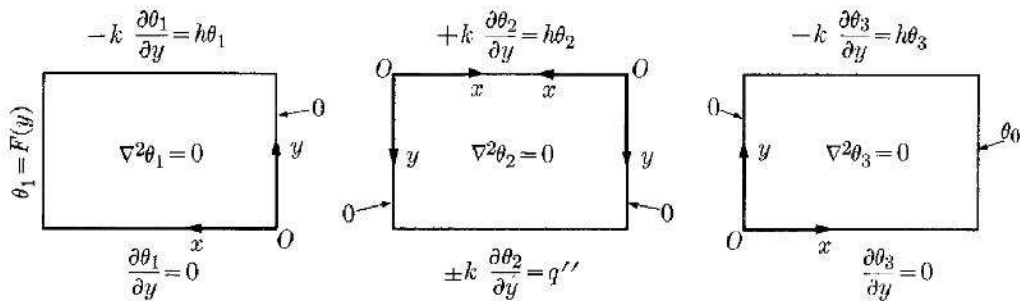
$$T(y) - T_{\infty} = F(y)$$

$$\theta_0 = T_0 - T_{\infty}$$

شکل ۲۶

محور عمودی به طور دلخواه و بدون توجه به کلیت مسأله، جهت  $y$  انتخاب می‌شود. شکل ۲۵ قابل تقسیم به چهار مسأله می‌باشد. هر کدام از آنها شامل یک شرط ناهمگن و سه شرط مرزی همگن هستند. گرچه، تبدیل ساده  $\theta = T - T_{\infty}$  (یا  $\psi = T - T_0$ ) شرط مرزی ناهمگن  $h$ ،  $T_{\infty}$  (یا  $T_0$ ) را به شرط همگن تبدیل می‌کند. با استفاده از  $\theta = T - T_{\infty}$ ، مسأله از شکل ۲۵ به شکل ۲۶ تبدیل می‌شود. این مسأله اکنون قابل بیان به صورت سه مسأله مناسب می‌باشد نه چهار مسأله. توجه شود که تبدیل یک شرط مرزی ناهمگن به یک شرط مرزی همگن، فیزیک آن شرط مرزی را نباید تغییر دهد. به عبارت دیگر، تنها شکل همگن معادله  $\pm k(\partial T / \partial n) = hT$ ،  $\pm k(\partial T / \partial n) = h(T - T_{\infty})$  می‌باشد و آن زمانی است که  $T_{\infty}$  صفر باشد، یا تنها فرم همگن معادله  $\pm k(\partial T / \partial n) = q''$  به صورت  $\pm(\partial T / \partial n) = 0$  می‌باشد.

از اینرو مسئله شکل ۲۶ به صورت سه مسأله نشان داده شده در شکل ۲۷ در می‌آید که مجموع  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$  در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی شکل ۲۶ صدق می‌کنند. پاسخ  $\theta_1$ ،  $\theta_2$  و  $\theta_3$  مشابه مثال‌های قبلی بدست می‌آید و در اینجا نیز لازم به ذکر نیست. محورهای مناسب برای هر مسأله در شکل ۲۷ نشان داده شده است. پاسخ این مسائل زمانی قابل جمع کردن است که این مسائل به صورت سیستم مختصات معمول نوشته شود.



شکل ۲۷

نوع دوم ناهمگنی، ناهمگنی در معادله دیفرانسیل است که وابسته به تولید انرژی داخلی می‌باشد. مثال بعد روش حل اینگونه مسائل را نشان می‌دهد.

#### ۴-۲- مثال ۱۰

دمای پایدار گرمکن الکتریکی مثال ۱ جلسه چهارم، زمانی که ضریب انتقال حرارت عدد بزرگی باشد را پیدا کنید.

فرمولاسیون مسأله به صورت ترم‌های شکل ۲۸ به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \quad (124)$$

(۱۲۵)

$$\frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \theta(L, y) = 0,$$

(۱۲۶)

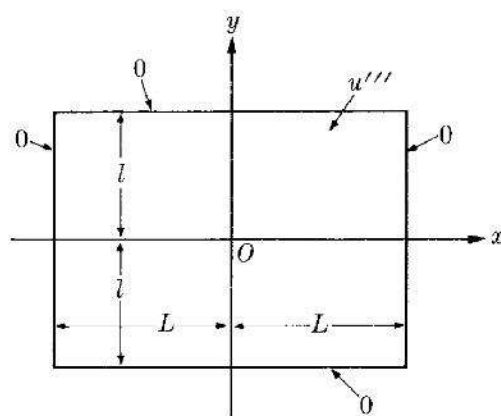
$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \theta(x, l) = 0.$$

معادله دیفرانسیل ناهمگن و غیر قابل تفکیک است.

پاسخ مسأله به صورت زیر فرض می شود:

$$\theta(x, y) = \psi(x, y) + \phi(x) \tag{۱۲۷}$$

یا:



شکل ۲۸

$$\theta(x, y) = \psi(x, y) + \phi(y). \tag{۱۲۸}$$

استفاده از هر کدام از این شکل ها در این مورد اختیاری است.

با استفاده از تولید انرژی داخلی  $u'''$  در فرمولاسیون مسأله یک بعدی  $\phi(x)$  یا معادله دیفرانسیل دو بعدی مسأله

$\psi(x, y)$  همگن می شود. بنابراین  $\psi(x, y)$  برای جداسازی متغیرها مناسب است. ولی فرمولاسیون کلی  $\phi(x)$

و  $\psi(x, y)$  نیازمند مشخص شدن شرایط مرزی هر کدام از آنها است. در اینجا فرض می شود که  $\phi(x)$  شکل

یک بعدی معادله (۱۲۵) را ارضا می کند. از اینرو:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{u'''}{k} = 0; \quad \frac{d\phi(0)}{dx} = 0, \quad \phi(L) = 0. \quad (129)$$

سپس با ترکیب معادلات (۱۲۴)، (۱۲۵)، (۱۲۶)، (۱۲۷) و (۱۲۹) شکل معادله  $\psi(x, y)$  نیز به صورت زیر

می شود:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \quad (130)$$

$$\frac{\partial\psi(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \psi(L, y) = 0, \quad (131)$$

$$\frac{\partial\psi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \psi(x, l) = -\phi(x). \quad (132)$$

مسأله تفکیک ناپذیر  $\theta(x, y)$  تبدیل به مسأله قابل تفکیک  $\psi(x, y)$  می شود. جزئیات راه حل به خواننده

واگذار می شود و پاسخ به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\theta(x, y)}{u''L^2/k} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n L)^3} \left( \frac{\cosh \lambda_n y}{\cosh \lambda_n l} \right) \cos \lambda_n x, \quad (133)$$

که در رابطه فوق  $\lambda_n L = (2n+1)\pi/2$  و  $n = 0, 1, 2, \dots$  می باشد. توجه شود که روش فوق برای مختصات

استوانه ای و کروی و مسائل ناپایدار نیز به طور کلی قابل استفاده است.

مطالعه مسائل دو بعدی در مختصات کارترین با یک مثال که با روش تقریبی انتگرالی حل شده به پایان می رسد.

#### ۴-۳- مثال ۱۱

مثال ۱۰ را بوسیله روش انتگرالی، با استفاده از تقریب درجه دوم ریتز و کانتروویچ دوباره حل کنید.

با توجه به تقارن حرارتی مسأله نسبت به محورهای شکل ۲۸، روش ریتز پیشنهاد می شود:

$$\theta(x, y) = (L^2 - x^2)(l^2 - y^2)(a_0 + a_1x^2 + b_1y^2 + a_2x^4 + b_2y^4 + c_2x^2y^2 + \dots). \quad (134)$$

در معادله (۱۳۴)،  $(a_0 + b_1y^2)$  یا  $(a_0 + a_1x^2)$  به عنوان جمله آخر تقریب درجه دوم قابل استفاده است. این

انتخاب وابسته به نسبت  $L/l$  است و در فصل ۸ در موردش بحث می شود. در اینجا:

$$\theta(x, y) = (L^2 - x^2)(l^2 - y^2)(a_0 + a_1x^2) \quad (135)$$

معادله فوق به صورت دلخواه انتخاب شده است.

معادله (135) دو پارامتر مجهول دارد،  $a_0$  و  $a_1$ ، که برای محاسبه نیاز به دو شرط مرزی دارد. طبق روش‌های گذشته، شکل انتگرالی معادله حاکم دیفرانسیلی، معادله (132) و (133) بوده و به عنوان یکی از این شرایط استفاده می‌شود. همانطور که در جلسات پیش اشاره شد، دو روش برای بدست آوردن شرط سوم وجود دارد. یکی از آنها وابسته به فرمولاسیون انتگرالی است و دیگری مربوط به فرمولاسیون دیفرانسیلی مسأله است. ادامه حل به عهده خواننده می‌باشد و در اینجا قسمت بعدی بررسی می‌شود. از آنجاییکه معادله (135) تنها در شرط مرزی مسأله صدق می‌کند، بیشترین عدم تطابق بین معادله (135) و حل دقیق معادله در دورترین نقاط از مرزها، خصوصاً در مبدأ محورهای مختصات، روی می‌دهد. از اینرو فرمولاسیون دیفرانسیلی مسأله که در مبدأ معادله (135) را ارضا می‌کند، شرط دوم متداول می‌شود:

$$4 \int_0^L \int_0^l \{-2(l^2 - y^2)[(a_0 - a_1L^2) + 6a_1x^2] - 2(a_0L^2 + a_1L^2x^2 - a_0x^2 - a_1x^4) + (u'''/k)\} dx dy = 0,$$

شرط اولیه بصورت زیر است:

$$(l^2 + L^2)a_0 + L^2(l^2 + L^2/5)a_1 = 3u'''/4k, \quad (136)$$

و از روی شرط دوم:

$$(l^2 + L^2)a_0 - L^2a_1 = u'''/2k. \quad (137)$$

پاسخ معادله (136) و (137) برای  $a_0$  و  $a_1$  به صورت زیر در می‌آید:

$$a_0 = \frac{(u''')}{(4kl^2)} \frac{5 + (\frac{2}{5})(L/l)^2}{[1 + (L/l)^2][2 + (\frac{1}{5})(L/l)^2]},$$

$$a_1 = \frac{(u''')}{(4kl^2)} \frac{(1/L)^2}{2 + (\frac{1}{5})(L/l)^2}.$$

از اینرو معادله ریتز درجه دوم به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\theta(x, y)}{u'''L^2/k} = \frac{1}{4} \frac{[1 - (x/L)^2][1 - (y/l)^2] \left[ \frac{5 + (\frac{2}{5})(L/l)^2}{1 + (L/l)^2} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]}{[2 + (\frac{1}{5})(L/l)^2]} \quad (138)$$

تقریب درجات بالای کانتروویج دوباره وابسته به نسبت  $L/l$  می باشد و به صورت زیر انتخاب می شود:

$$\theta(x, y) = (l^2 - y^2)[X_1(x) + y^2X_2(x) + y^4X_3(x) + \dots] \quad (139)$$

یا:

$$\theta(x, y) = (L^2 - x^2)[Y_1(y) + x^2Y_2(y) + x^4Y_3(y) + \dots] \quad (140)$$

که در اینجا:

$$\theta(x, y) = (l^2 - y^2)[X_1(x) + y^2X_2(x)] \quad (141)$$

و به طور دلخواه به صورت تقریب درجه دوم مورد بررسی قرار می گیرد.

با قرار دادن معادله (141) در شکل انتگرالی معادله دیفرانسیل (133) از فصل دوم، نتیجه زیر بدست می آید:

$$4 \int_0^L \int_0^l [l^2X_1'' - y^2X_1'' + l^2y^2X_2'' - y^4X_2'' - 2X_1 + 2l^2X_2 - 12y^2X_2 + (u'''/k)] dx dy = 0,$$

و

با انتگرال گیری در جهت  $y$  نتیجه زیر بدست می آید:

$$4 \int_0^L \left[ \frac{2}{3}l^3X_1'' + \frac{2}{15}l^5X_2'' - 2lX_1 - 2l^3X_2 + \frac{u''''l}{k} \right] dx = 0,$$

که در اینجا جملات زیر انتگرال مساوی صفر قرار داده می شوند. نتیجه به این صورت است:

$$\frac{1}{3}l^2X_1'' + \frac{1}{15}l^4X_2'' - X_1 - l^2X_2 = -\frac{u''''}{2k} \quad (142)$$

معادله دیفرانسیلی که در مبدأ از روی معادله (141) به دست می آید، به شکل زیر خواهد شد:

$$l^2X_1'' - 2X_1 + 2l^2X_2 = -\frac{u''''}{k} \quad (143)$$

با قرار دادن اپراتور  $D \equiv d/d$ ، می توان معادله (142) و (143) را به صورت زیر بازآرایی کرد:



$$\left(\frac{l^2}{3} D^2 - 1\right) X_1 + l^2 \left(\frac{l^2}{15} D^2 - 1\right) X_2 = -\frac{u'''}{2k}, \quad (144)$$

$$(l^2 D^2 - 1) X_1 + 2l^2 X_2 = -\frac{u'''}{k}. \quad (145)$$

با حل معادله (۱۴۴) و (۱۴۵) برای  $X_1$  و  $X_2$  بوسیله تئوری دترمینان‌ها یا بوسیله حذف جبری خواهیم داشت:

$$\left(\frac{l^4}{15} D^4 - \frac{9l^2}{5} D^2 + 4\right) X_1 = 2\frac{u'''}{k}, \quad (146)$$

$$\left(\frac{l^4}{15} D^4 - \frac{9l^2}{5} D^2 + 4\right) X_2 = 0. \quad (147)$$

پاسخ ویژه معادله (۱۴۶)،  $u'''/2k$  می‌باشد. پاسخ کلی معادله (۱۴۷) و قسمت همگن معادله (۱۴۶) به صورت

چهار تابع هیپربولیک  $\cosh \alpha(x/l)$ ،  $\sinh \alpha(x/l)$ ،  $\cosh \beta(x/l)$  و  $\sinh \beta(x/l)$  که در اینجا:

$$\alpha = [27/2 - (489/4)^{1/2}]^{1/2}, \quad \beta = [27/2 + (489/4)^{1/2}]^{1/2}$$

و  $\pm \alpha/l$  و  $\pm \beta/l$  ریشه‌های معادله زیر است:

$$(1/15)r^4 - (9/5)r^2 + 4 = 0.$$

بنابراین پاسخ کلی  $X_1$  و  $X_2$  بدست می‌آید. پاسخ غیرمتقارن حرارتی  $\sinh \alpha(x/l)$  و  $\sinh \beta(x/l)$  بصورت

زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{u'''}{2k} + A \cosh \alpha \left(\frac{x}{l}\right) + B \cosh \beta \left(\frac{x}{l}\right), \\ X_2 &= C \cosh \alpha \left(\frac{x}{l}\right) + D \cosh \beta \left(\frac{x}{l}\right). \end{aligned} \quad (148)$$

$$(149)$$

در اینجا چهار ثابت  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  از روی فرآیند حذفی ملاحظه شده بین روابط (۱۴۴) و (۱۴۵) بدست

می‌آید که این ثوابت مستقل از هم نیستند. برای محاسبه رابطه بین این ثوابت، معادله (۱۴۸) و (۱۴۹) در معادله

(۱۴۳) جایگذاری شده و نتیجه مساوی صفر قرار داده می‌شود. بنابراین روابط زیر بدست می‌آید:

$$(\alpha^2 - 2)A + 2l^2C = 0,$$

$$(\beta^2 - 2)B + 2l^2D = 0.$$

نتایج مشابهی نیز با استفاده از معادله (۱۴۲) قابل حصول است. بنابراین در واقع تنها دو ثابت از ۴ ثابت اختیاری است. با بدست آوردن  $C$  بر حسب  $A$ ، و  $D$  بر حسب  $B$  و جایگذاری نتایج در معادلات (۱۴۸) و (۱۴۹) نتایج

زیر بدست می آید:

$$X_1 = \frac{w'''}{2k} + A \cosh \alpha \left( \frac{x}{l} \right) + B \cosh \beta \left( \frac{x}{l} \right), \quad (150)$$

$$X_2 = - \left( \frac{\alpha^2 - 2}{2l^2} \right) A \cosh \alpha \left( \frac{x}{l} \right) - \left( \frac{\beta^2 - 2}{2l^2} \right) B \cosh \beta \left( \frac{x}{l} \right). \quad (151)$$

در نهایت شرایط مرزی در جهت  $x$  به صورت زیر ارضا می شود:

$$X_1(L) = 0, \quad X_2(L) = 0,$$

با این شرایط معادلات زیر بدست می آید:

$$A = - \left( \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - \alpha^2} \right) \frac{w'''/2k}{\cosh \alpha(x/l)}, \quad B = \left( \frac{\alpha^2 - 2}{\beta^2 - 2} \right) \frac{w'''/2k}{\cosh \beta(x/l)}. \quad (152)$$

از اینرو با ترکیب معادلات (۱۴۱)، (۱۵۰)، (۱۵۱) و (۱۵۲)، پروفایل کانترووویج درجه دوم بدست می آید:

$$\frac{\theta(x, y)}{w'''l^2/k} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y}{l} \right)^2 \right] \left\{ 1 - \left( \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - \alpha^2} \right) \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \left( \frac{y}{l} \right)^2 \right] \frac{\cosh \alpha(x/l)}{\cosh \alpha(L/l)} \right. \quad (153)$$

$$\left. + \left( \frac{\alpha^2 - 2}{\beta^2 - \alpha^2} \right) \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \left( \frac{y}{l} \right)^2 \right] \frac{\cosh \beta(x/l)}{\cosh \beta(L/l)} \right\}. \quad \text{ادامه}$$

بحث در مورد پاسخ های تقریبی به فصل ۸ ماکول می شود. در اینجا مطالعه مسائل مختصات کارترین پایان یافته

و در جلسه بعد به بررسی مسائل دو بعدی مختصات استوانه ای پرداخته می شود.

## ۵- خلاصه (جمع بندی)

مباحث قبلی مان به مسائل یک بعدی پایا محدود می‌شد. بطور کلی از آنجاییکه اینگونه مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را حاصل می‌کنند، معمولاً قابل حل می‌باشند. به عبارت دیگر، مسائل پایای دو و سه بعدی و مسائل ناپایا، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را حاصل می‌کنند، که هیچ راه حل کلی برای آنها وجود ندارد. در این جلسه و جلسات بعد، چندین روش برای حل دقیق این مسائل ارائه شده است.

وقتیکه مرزهای یک مسأله، هدایت چند بعدی متناظر با سطوح مختصات در یک سیستم مختصات متعامد مثل مختصات‌های کارتزین، استوانه‌ای، یا کروی باشد، یک راه دقیق توسط روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر خواهد بود. یک روش متداول بر اساس جداسازی متغیرها، و دیگری بر اساس تبدیل لاپلاس می‌باشد. دلایل متقاعدکننده‌ای وجود دارد که نشان می‌دهند این دو روش متداول‌تر، برای حل مسائل ویژه مناسب‌ترند؛ اگرچه، تبدیل لاپلاس برای حل مسائل پیچیده مناسب است، اما نیازمند آگاهی از ریاضیات پیشرفته‌تری است. بنابراین، بحث پیرامون تبدیل لاپلاس را که در فصل ۷ کتاب عنوان شده است را در این درس مطرح نمی‌نماییم و این فصل را به روش جداسازی متغیرها اختصاص می‌دهیم. در این جلسه به کمک روش جداسازی متغیرها، معادلات پایای دو بعدی در مختصات کارتزین را حل نمودیم.

## ۶- فهرست منابع

1. Conduction Heat Transfer, By: V. S. Arpachi, Addison – Wesley, 1966, 1991.
2. Heat Conduction, By: S. Kakas, Y. Yener, Taylor & Francis, 1993.

انتقال حرارت هدایتی، نویسنده: آرپاچی، مترجمان: غفار برهانی، رضایی منش و جدیدی