دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

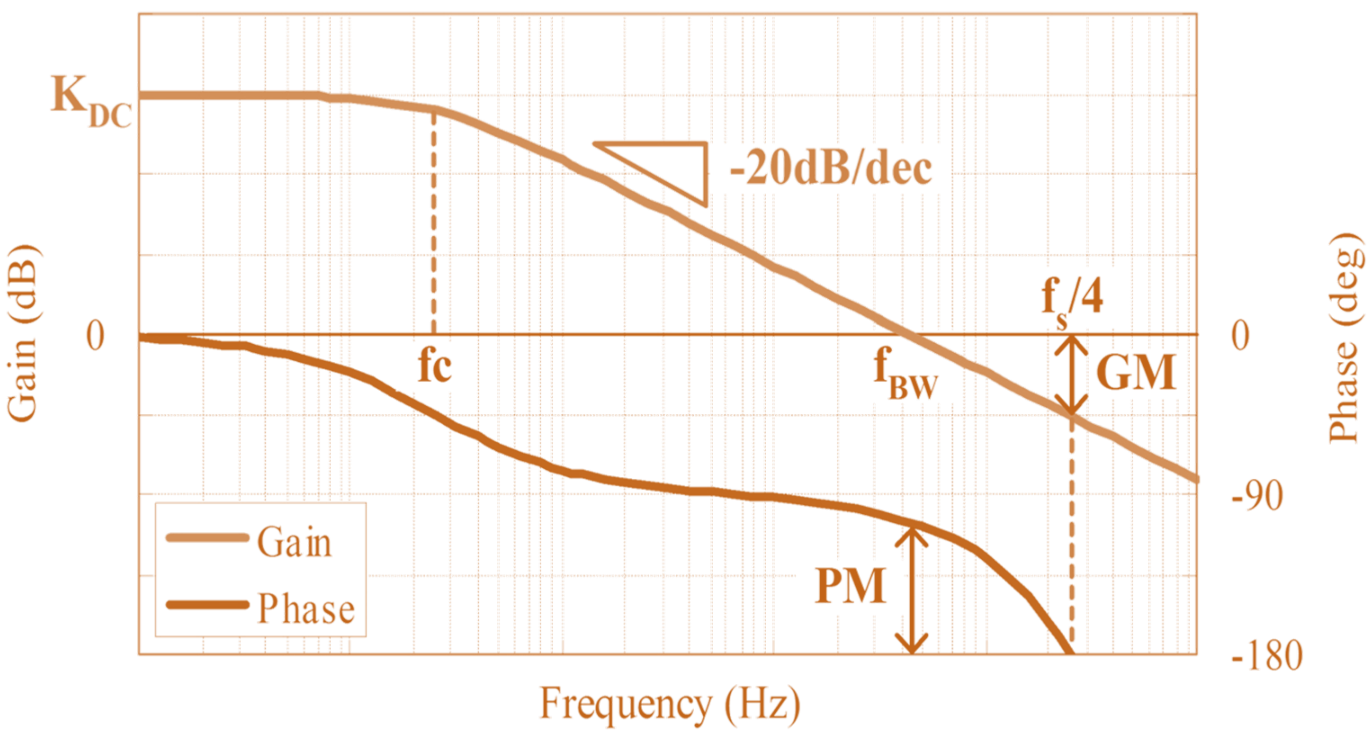
جزوه درس:

کنترل اتوماتیک

استاد: دکتر سعید بهبهانی

دانشجو: مهندس علی نصر

نیمسال اول ۹۱-۱۳۹۲



Subject:
Year. Month. Date. ( )

بهره یک حلقه: حاصل ضرب تمام ترنسمیتانس های موجود بر روی شاخه های تشکیل دهنده یک حلقه

حلقه: هر مسیر بسته ای که با شروع از یک نقطه به همان نقطه برسیم و از هیچ نقطه ای بیش از یکبار عبور نکرده باشیم

مسیر: رفتن از نقطه ای به نقطه دیگر بدون تشکیل یک حلقه بسته و بدون قطع یا عبور مجدد از نقطه ای

تابع تبدیل = $\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}}$

صورت تابع تبدیل: تمامی مسیرهای رفت از ورودی تعیین شده به خروجی تعیین شده

* در صورت وجود حلقه مستقل از مسیر: در صورت تابع تبدیل در جلوی آن مسیر عبارت زیر را می نویسیم

1 - Σ تمام حلقه های مستقل از این مسیر + Σ حاصلضرب حلقه های دو به دو مستقل از مسیر - حاصلضرب حلقه های سه به سه مستقل از مسیر + ...

مخرج تابع تبدیل: 1 - Σ حلقه ها + Σ حاصلضرب بهره های تمام ترکیب دو حلقه مستقل - Σ ...

بهره خالص یک حلقه: حاصلضرب تمام ترنسمیتانس های یک حلقه با علامت آن ها در کنارشان

حلقه های خاص: تعدادی حلقه (که حتماً مستقل از مسیر نیستند) در داخل مسیر مانند یا به اصطلاح بدون هیچ برخوردی با این حلقه ها از ورودی به خروجی

* می توان از گره های مختلف در سیستم مسیر خارج کرد، اما وارد کردن یک ورودی جدید بی معنی است

تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم $G(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$ $m<n$

$$G(s)=\frac{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_1 s + B_0}{s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_1 s + A_0}$$

* برای اینکه مشتق n ام پاسخ پله سیستم در $t=0^+$ صفر باشد باید $m<n-i$ باشد

تابع ناسره: تابعی که درجه صورت از مخرج بزرگتر باشد

تابع سره: تابعی که درجه صورت و مخرج برابر باشند

تابع اکیداً سره: تابعی که درجه صورت از درجه مخرج کوچکتر است.

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد

$$G_c(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{B(s)}{A(s)+B(s)}$$

* واضح است که صفرهای سیستم حلقه بسته همان صفرهای سیستم حلقه باز است ولی قطبهای حلقه بسته ریشه $A(s)+B(s)$ می باشد که با ریشه های $A(s)$ متفاوت است

سیستم کنترل مدار باز (حلقه باز) 1- سادگی 2- هزینه کم 3- دقت کم یا متوسط 4- حساسیت زیاد نسبت به نویز 5- پاسخ آهسته

سیستم کنترل حلقه بسته: 1- دقت زیاد 2- پاسخ سریع 3- استقلال نسبی از شرایط محیط و نویز 4- پیچیدگی و هزینه زیاد

* افزایش تعداد قطب ها در تابع تبدیل حلقه باز به معنی کاهش پایداری سیستم است

نقاط عادی: نقاطی از صفحه مختلط s که در آن نقاط تابع تبدیل $G(s)$ تحلیلی باشد

نقاط تکین Singular Point: نقاطی که تابع تبدیل $G(s)$ ناتحلیلی است

Subject:

Year. Month. Date. ( )

قطب P Pole نقاط تکینی که در آن ها تابع تبدیل $G(s)$ یا مشتقات آن به سمت بی نهایت میل کند

صفر Z zero نقاطی که در آن تابع تبدیل $G(s)$ مقدار صفر اختیار کند افزودن صفر به تابع تبدیل حلقه بسته طراحی سرعت ↑ زمان خیز ↓

مرتبه قطب: مقدار n که به ازای آن برای اولین بار $\lim_{s \to p_0} (s-p_0)^n G(s)$ متناهی شود

* قطب مرتبه اول را قطب ساده می نامند

* در صورتی که قطب سیستم به صورت $a \pm jb$ باشد باید معادله آن به صورت $s^2 - 2as + (a^2+b^2)$ باشد

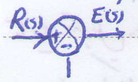
* اضافه شدن صفر باعث پایداری بیشتر و اضافه شدن قطب باعث پایداری کمتر می شود (همواره)

* با هیچ جبرانسازی (فیدبک یا سری) نمی توان صفر ناپایدار را پایدار کرد و سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی واحد با افزایش بهره حلقه باز حتماً ناپایدار می شود

* سیستم تأخیردار را می توان با سیستم های مرتبه اول با یک صفر ناپایدار تقریب زد

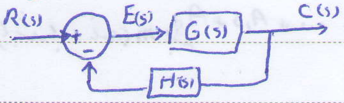
نوع سیستم اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم $G(s).H(s) = \frac{K\,(T_a s+1)\times\cdots\times(T_z s+1)}{s^N\,(T_1 s+1)\ldots\ldots(T_p s+1)}$ توان N در عبارت s^N نمایانگر نوع سیستم است و بالا بودن نوع سیستم، دقت بالا، خطای ماندگار کمتر و احتمال ناپایداری را به همراه دارد

* نوع سیستم را از روی تابع تبدیل حلقه باز و مرتبه سیستم را از روی تابع تبدیل حلقه بسته تعیین می کنیم



E_{ss}: خطای حالت ماندگار، یا خطای عمل کننده یا سیگنال خطا در حالت تعادل و ماندگار سیستم است

$$E_{ss}(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s.\,R(s)}{1+G(s).H(s)}$$



ورودی = وضعیت تغییرات ورودی = سرعت تغییرات سرعت = شتاب

خطای حالت ماندگار کمتر E_{ss} = پایداری کمتر (دقت سیستم با افزایش نوع سیستم بالاتر می رود)

سیگنال خطا: اختلاف بین سیگنال ورودی و سیگنال فیدبک

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \times \frac{1}{s}}{1+G.H} = \frac{1}{1+K_p} \qquad K_p = G(0).H(0)$$

ضریب خطای تعادل وضعیت (موقعیت) K_p

- برای سیستم نوع صفر و با فرض ورودی پله با افزایش بهره K خطای حالت ماندگار کمتر می شود (به شرطی که افزایش K سیستم را ناپایدار نکند)

- برای سیستم نوع 1 و بالاتر، برای ورودی پله، هیچ خطای ندارد

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \times \frac{1}{s^2}}{1+G(s).H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s\,G(0).H(0)} = \frac{1}{K_v}$$

ضریب خطای تعادل سرعت K_v

- سیستم نوع صفر در حالت تعادل قادر نیست ورودی تابع سرعت (شیب) را دنبال کند

- در سیستم نوع 1 ورودی تابع سرعت (شیب) را با مقدار خطای ثابتی در حالت تعادل تعقیب می کند، برای این

PAPCO

حالت «سرعت» ورودی و خروجی در وضعیت تعادل یکی بوده ولی بین «وضعیت» ورودی و خروجی خطای وجود دارد که با بهره K نسبت عکس دارد

- هرچه مقدار بهره زیادتر شود خطا کمتر است

- سیستم نوع ۲ و بالاتر برای ورودی شیب هیچ خطای ندارد (از مسئله پایداری نباید غافل شد)

ضریب خطای تعادل شتاب K_a

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s \times \frac{1}{s^3}}{1+G(s).H(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2 G(s).H(s)} = \frac{1}{K_a}$$

- سیستم‌های نوع صفر و ۱ در حالت تعادل قادر به تعقیب ورودی سهمی شکل نیستند

- سیستم‌های نوع ۲ ورودی شتاب را با مقدار خطای ثابتی در حالت تعادل دنبال می‌کنند

- سیستم نوع ۳ و بالاتر برای ورودی سهمی (شتاب) هیچ خطای ندارد

* در سیستم با فیدبک واحد، سطح زیر منحنی خطا $\int_0^\infty e(t)\,dt$ بازاء ورودی پله واحد برابر است با خطای تعادل سیستم وقتی که ورودی سرعت باشد:

$$e_{ss}(t)\Big|_{r(t)} = \int_0^\infty e(t)\,dt\Big|_{u(t)}$$

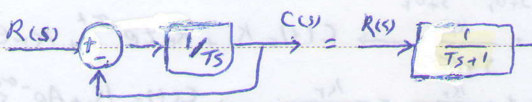
ضرایب خطای استاتیک = اعداد شایستگی سیستم‌های کنترل

$t=0$ با شرط پیوستگی در: $y=(0^+)=0 \longrightarrow \lim_{s\to\infty} sY(s)=0$

$t=0$ با شرط پیوستگی شیب پاسخ در: $y=(0^+)=0 \longrightarrow \lim_{s\to\infty} s^2Y(s)=0$

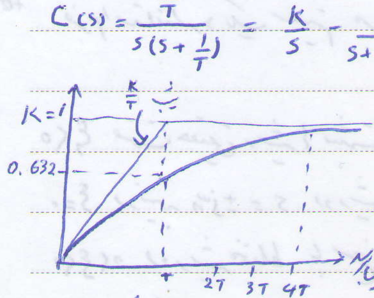
- اگر در صورت سؤالی منظور از محاسبه خطای حالت ماندگار صراحتاً بوسیله یک رابطه ویژه یا از یک منطقه ویژه اعلام شود باید حتماً این شکل یا رابطه را به جای $\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s).H(s)}$ مورد توجه قرار داد

سیستم درجه اول: اگر خروجی سیستمی با یک معادله دیفرانسیل درجه اول به ورودی آن مربوط شود $T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$



پاسخ سیستم درجه اول به ورودی پله با دامنه K $\left(\frac{K}{s}\right)$

$$C(s) = \frac{\frac{K}{T}}{s(s+\frac{1}{T})} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+\frac{1}{T}} \longrightarrow c(t)=K(1-e^{-\frac{t}{T}}) \qquad c'(t)=\frac{K}{T}=\tan\theta$$



T ثابت زمانی سیستم است و در $t=T$ منحنی به ۶۳٪ مقدار نهایی‌اش می‌رسد

زمان نشست این سیستم تقریباً $t_s=4T$ است (گاهی 5T)

زمان نشست: مدت زمانی که طول می‌کشد تا سیستم با دقت قابل قبولی به مقدار نهایی‌اش برسد

* در یک سیستم درجه اول، خطای حالت دائمی به ورودی پله صفر است و همواره زمان نشست معنی پیدا می‌کند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

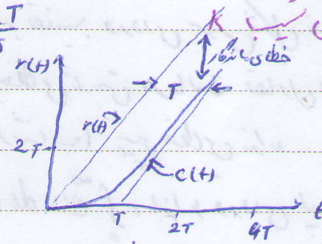
* در صفحه لگاریتمی معادله سیستم درجه اول بصورت خطی است
* هرچه قطب به محور $j\omega$ نزدیکتر باشد T بزرگتر است $(s=-\frac{1}{T})$ زمان نشست بزرگتر خواهد بود و سیستم کندتر
* جهت بدست آوردن ثابت زمانی سیستم با داشتن $c(t)$: $\frac{c(t)-c(\infty)}{c(0)-c(\infty)} = e^{-\frac{t}{T}}$

اگر شرایط اولیه سیستم درجه اول برابر c_0 ← پاسخ سیستم بصورت $c(t) = K + (c_0 - K)e^{-\frac{t}{T}}$

پاسخ سیستم درجه اول به ورودی شیب K

$$C(s) = \frac{\frac{K}{T}}{s^2(s+\frac{1}{T})} = \frac{K}{s^2} + \frac{KT}{s+\frac{1}{T}} - \frac{KT}{s}$$

$$c(t) = K(t - T + Te^{-\frac{t}{T}})$$



* اگر در مدار حلقه باز یک انتگرالگیر $(\frac{1}{s})$ داشته باشیم در حالت ماندگار مدار بسته ورودی پله را در خروجی دنبال می‌کند
اما تنها در صورتی می‌تواند تابع شیب را دنبال کند که در مسیر رفت حلقه باز، حداقل دو انتگرال‌گیر داشته باشد

سیستم‌های درجه دوم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

پاسخ زمانی سیستم درجه دوم به ورودی پله

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

ω_n فرکانس طبیعی نامیرا ω_d فرکانس طبیعی میرا ξ ضریب یا نسبت میرایی $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

تابع تبدیل یک سیستم درجه دو بفرم $\frac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0}$ (فرض شرایط اولیه صفر)

$s^2+a_1 s+s_0 = (s+\sigma_1)(s+\sigma_2) \xrightarrow[\text{حقیقی}]{\text{حالت ۲ ریشه}} C(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+\sigma_1} + \frac{K_3}{s+\sigma_2} \longrightarrow c(t) = K_1 + K_2 e^{-\sigma_1 t} + K_3 e^{-\sigma_2 t}$

$s^2+a_1 s+s_0 = (s+\sigma)^2 \xrightarrow[\text{مزدوج}]{\text{حالت ۱ ریشه}} C(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+\sigma)^2} + \frac{K_3}{s+\sigma} \longrightarrow c(t) = K_1 + K_2 t e^{-\sigma t} + K_3 e^{-\sigma t}$

$s^2+a_1 s+s_0 = (s+\sigma-j\omega_d)(s+\sigma+j\omega_d) \xrightarrow[\text{مختلط}]{\text{حالت ۲ ریشه}} C(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+\sigma-j\omega_d} + \frac{K_3}{s+\sigma+j\omega_d} \longrightarrow c(t) = K_1 + Ae^{-\sigma t}\sin(\omega_d t+\theta)$

فرم استاندارد یک سیستم مرتبه ۲ $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

$\xrightarrow[\text{مشخصه استاندارد}]{\text{ریشه‌های معادله}} s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \sigma \pm j\omega_d$

$\xi<0$ قسمت حقیقی ریشه‌ها مثبت و سیستم ناپایدار است

$\xi=0$ دو ریشه موهومی $s=\pm j\omega_n$ پاسخ نامیرای نوسانی

$0<\xi<1$ دو ریشه مختلط پاسخ میرای نوسانی

$\xi=1$ دو ریشه $s_{1,2}=-\omega_n$ پاسخ غیرنوسانی

$\xi>1$ دو ریشه حقیقی پاسخ غیرنوسانی

میرایی $2\xi\omega_n$ (هرچه $2\xi\omega_n$ بزرگتر باشد میرایی پاسخ شدیدتر است)

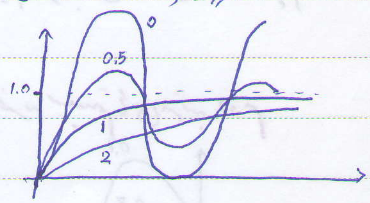
۱- فرومیرا یا زیرمیرا $0<\xi<1$ درحالت دائمی و ماندگار سیستم خطایی ندارد $c(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_d t+\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right),\ t\geq0$

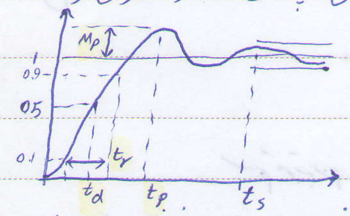
اگر $\xi=0$ ⇐ پاسخ سیستم نامیرا است و همواره نوسان دارد. $c(t)=1-\cos\omega_n t\ ,\ t\geq0$

۲- میرایی بحرانی که در آن $\xi=1$ $\quad c(t)=1-e^{-\omega_n t}(1-\omega_n t)\ ,\ t\geq0$

۳- فرامیرا یا فوق میرا $\xi>1$ $\quad c(t)=1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}-\frac{e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}\right)$

اگر $\xi\gg1$ از آن جمله‌ای که ثابت زمانی کوچکتری دارد صرف نظر می‌شود $c(t)\simeq1-e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}\ ,\ t\geq0$





زمان تاخیر (Delay Time) t_d (پاسخ سیستم به مقدار نصف مقدار نهایی خود در زمان t_d می‌رسد)

زمان خیز یا صعود (Rise Time) t_r (زمان پاسخ سیستم بین ۱۰٪ تا ۹۰٪) $\quad t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}\ ,\ \beta=\cos^{-1}\xi$

زمان اوج (Peak Time) t_p (زمانی که سیستم به اولین مقدار اوج خود برسد) $\quad t_p=\frac{\pi}{\omega_d}$

زمان نشست یا استقرار (Settling Time) t_s (زمانی که جواب سیستم در محدوده معینی از انحراف مقدار نهایی باقی بماند)

٪α تلرانس $t_s=\frac{1}{\xi\omega_n}\ln\left(\frac{100}{\alpha\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ $\quad$ ٪۲ تلرانس $t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}$ $\quad$ ٪۵ تلرانس $t_s=\frac{3}{\xi\omega_n}$

* هرچه تلرانس کمتر باشد دقت سیستم در رسیدن به مقدار نهایی بهتر است و نوسان کمتری نسبت به مقدار نهایی (تعقیب ورودی) خواهیم داشت

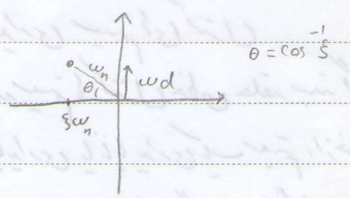
* هرچه زمان نشست بزرگتر باشد احتمال رسیدن به تلرانس کمتر و در نتیجه دقت بالاتر بیشتر است

مقدار بیشینه جهش M_o $\quad M_o=1+e^{\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$

جهش نسبی M_p یا MP $\quad M_p=\frac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)}$ $\quad$ ورودی پله $M_p=M_o-1=e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

* اگر $\xi>1$ باشد، آنگاه سیستم از حالت درجه دو بودن خارج شده و به سمت درجه یک شدن میل می‌کند

* مکان قطبها برای ω_n ثابت و ξ متغیر دوایری به مرکز صفر می‌باشند



مکان قطبها برای ξ ثابت و ω_n متغیر شعاعی است.

مکان قطبها برای $\xi\omega_n$ ثابت خطوط موازی محور موهومی است.

مکان قطبها برای ω_d ثابت خطوط موازی محور حقیقی است.

پهنای باند یک سیستم درجه دو BW $\quad t_r\simeq\frac{2.2}{BW}$ $\quad$ فاصله بین پیک‌های متوالی

ما بین پیک‌ها کاهش لگاریتمی داریم که رابطه بین پیک‌های متوالی ⇐ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=d\rightarrow\ln d=\frac{2\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

در میرایی $0<\xi<1$ منحنی بین دو پوش $1\pm\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* سرعت کاهش پاسخ گذرا به مقدار ثابت زمانی $\frac{1}{\xi\omega_n}$ بستگی دارد

* برای پاسخ سریع ω_n باید تا حد امکان بزرگ باشد

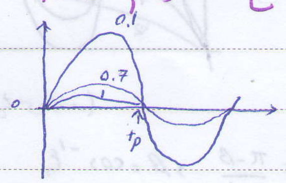
و با کوچک نبودن ξ ⇐ زمان نشست کوتاه و ماکزیمم جهش (M_p) کم باشد

* سیستم های زیر میرایی دارای $0.4 < \xi < 0.8$ سریعتر از سیستم های میرای بحرانی و فوق میرا به مقدار نهایی خود می رسند

در سیستم های غیر نوسانی، سیستم میرای بحرانی سریعترین پاسخ را دارد.

* ماکزیمم فراجهش و زمان صعود با هم تناسب عکس دارند

پاسخ ضربه سیستم های مرتبه دوم



$$C(s) = R(s)\,\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$ سیستم مرتبه دوم

$$0 < \xi < 1 \longrightarrow c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin \omega_d t$$

$$\xi = 1 \longrightarrow c(t) = t\,\omega_n^2 e^{-\omega_n t}$$

$$1 < \xi \longrightarrow c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left[e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t} - e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}\right]$$

* برای حالت های میرایی بحرانی و فرامیرا، پاسخ ضربه همواره مثبت یا صفر است و به سمت مقدار ثابتی میل می کند

* ماکزیمم فراجهش پاسخ ضربه برای سیستم در حالت زیر میرا $0 < \xi < 1$ رخ می دهد و زمان آن

$$t = \frac{\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\cos^{-1}\xi}{\omega_d}$$

$$c(t)_{max} = \omega_n e^{\left[-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]}$$

* مساحت زیر منحنی پاسخ ضربه از $t=0$ تا اولین عبور از صفر برابر $1 + M_P$

* زمان اوج پاسخ پله (t_p) برابر زمان پاسخ ضربه برای بار اول

پایداری سیستم های کنترل

در سیستم های کنترل خطی حلقه بسته اگر قطبها همگی در نیمه راست صفحه مختلط s (سمت راست jω) باشند، سیستم اساساً ناپایدار است

* پایداری یا ناپایداری یک سیستم، از خواص درونی و ذاتی سیستم است و به ورودی، نوع آن، دامنه آن و ... بستگی ندارد (عیارهای قبلی بر روی حالت ماندگار پاسخ تأثیر خواهند گذاشت)

○ اگر قطبهایی روی محور jω قرار گیرد باعث ایجاد نوساناتی می شود که دامنه آنها نسبت به زمان میرا نخواهد شد

- هنگامی که یک سیستم مستقل از زمان تحت تأثیر نویز باشد ولی خروجی آن در نهایت به حالت تعادل برگردد ⇐ سیستم پایدار

حالت تعادل اگر هیچ ورودی یا نویزی به سیستم اعمال نشود، خروجی در همان حالت اولیه باقی می ماند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سیستم ناپایدار: اگر سیستم تحت تأثیر نویز باشد و خروجی همواره نوسان کرده یا حالت تعادل خود را از دست بدهد

تعاریف

سیستم ناپایدار: قطب های تابع تبدیل حلقه بسته در سمت راست محور ها باشد

سیستم پایدار: قطب های تابع تبدیل حلقه بسته سمت چپ محور ها باشد

سیستم پایدار حاشیه‌ای: اگر یک یا چند قطب ساده (تکراری نباشد) تابع تبدیل روی محور موهومی باشند و سایر قطبها سمت چپ قرار بگیرند، پاسخ به صورت نوسانات سینوسی نامیرا خواهد بود

سیستم مینیمم فاز: اگر تمام صفرها و قطبهای تابع تبدیل سیستم در سمت چپ محور ها باشند دارای کمترین فاز خواهد بود

سیستم پایدار مشروط: مکان ریشه به سمت راست محور هم کشیده می شود لذا برای محدوده ای از K سیستم پایدار و برای محدوده ای از K سیستم ناپایدار است

پایداری نسبی: ممکن است پایداری مطلق ضعیف باشد یعنی قسمت حقیقی ریشه‌ها منفی بوده ولی خیلی نزدیک به صفر باشد

معیار پایداری راوث - هرویتز

قضیه: شرط لازم برای اینکه همه ریشه های معادله مشخصه سمت چپ محور ها باشند ← تمام ضرایب وجود داشته و هم علامت باشند

۱- مخرج تابع تبدیل حلقه بسته را نوشته $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$

۲- به صورت توالی نزولی s ی مرتب کرده (اگر حداقل یکی از ضرایب مثبت و مابقی صفر یا منفی باشند ← ریشه‌ها یا موهومی یا دارای قسمت های حقیقی مثبتند ← سیستم پایدار نیست).

۳- جدول روبرو را تشکیل داده

s^n	a_0	a_2 ... a_n
s^{n-1}	a_1	a_3 ... a_{n-1}
s^{n-2}	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$\frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$
$\vdots$	$\vdots$	
s^0		

- شرط لازم و کافی برای اینکه تمام ریشه‌های معادله مشخصه در سمت چپ محور ها برابر این است که تمام علامت ستون اول جدول مثبت باشند ← سیستم پایدار

- تعداد ریشه‌های معادله مشخصه برابر تعداد تغییر علامت های ضرایب ستون اول درایه‌ها در جدول است

* ضرایب معادله مشخصه کمیت های حقیقی اند (نمایی، موهومی، سینوسی و ... باشند) در غیر اینصورت معیار راوث جوابگو نیست

* شرط لازم ولی ناکافی برای پایداری وجود و مثبت بودن تمامی ضرایب معادله مشخصه است.

حالت های خاص در تشکیل جدول راوث

۱- درصورتی که یکی از عوامل ستون اول صفر شود و اما ضرایب دیگر آن ردیف صفر نشوند یا وجود نداشته باشند می توان

Subject:
Year. Month. Date. ( )

	۱	۳
	۰	۲
	$\frac{3\varepsilon-2}{\varepsilon}$	
	۲	

\+ \+ تغییر علامت − تغییر علامت \+

به جای صفر از یک عدد مثبت بسیار کوچک ε به جای آن استفاده کرد

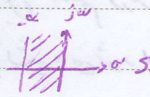
۲- اگر تمام ضرایب یک سطر صفر باشند (دو ریشه حقیقی با اندازه مساوی ولی با علامت مخالف یا دو ریشه مختلط مزدوج داریم)
با استفاده از ضرایب سطر ماقبل سطر صفر معادله را نوشته معادله کمکی را بدست آورده و یک بار مشتق می‌گیریم

s^6	۱	۶	۱۱	۶
s^5	۳	۱۲	۹	
s^4	۲	۸	۶	
s^3	۰	۰		

$\xrightarrow{\text{معادله کمکی}} 2s^4+8s^2+6=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} 8s^3+16s \rightarrow s^3 \,|\, 8 \quad 16$

چون یک سطر تماماً صفر شد دو ریشه مزدوج موهومی بر روی محور $j\omega$ داریم و سیستم نوسانی است

۳- اگر چند جمله‌ای مشخصه در $s=0$ ریشه داشته باشد باید از s فاکتور گرفت و جدول را برای چند جمله‌ای جدید نوشت



بررسی پایداری سیستم در ناحیه بین $s=0$ و $s=-\alpha$

در معادله مشخصه به جای s جمله $s-\alpha$ را قرار داده و جدول راوث را تشکیل داده تعداد تغییر علامت نشان دهنده این است که ریشه‌هایی در سمت راست خط $s=-\alpha$ قرار دارد و اگر جدول را برای حالت اولیه تشکیل داده و تغییر علامتی نداشته باشیم سیستم پایدار است و در سمت راست $s=-\alpha$ ریشه‌ای قرار ندارد

مکان ریشه‌ها: روش مکان ریشه‌ها بر این ایده اساسی مبتنی است که مقادیری از s که تابع تبدیل را حول حلقه -1 می‌کنند و اثر هر کدام از صفرها، قطب‌های حلقه باز، از رابطه اصل قرارگیری قطب‌های حلقه بسته تعیین می‌کنند

۱- ابتدا معادله مشخصه (مخرج تابع تبدیل حلقه بسته) را بصورت زیر مرتب می‌کنیم $D(s)=1+G(s).H(s)=0$

(مکان ریشه از روی تابع تبدیل حلقه باز رسم می‌شود) $1+K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$

۲- تمامی قطب‌ها (P , x) و صفرهای حقیقی و مختلط (Z , o) را روی صفحه مشخص می‌کنیم

اگر مجموع نقطه به نقطه شمارش عددی تعداد صفرها و قطب‌ها بر روی s-plane عددی فرد باشد آن مکان جزو مکان است و گر زوج باشد جزو مکان نخواهد بود

قسمت‌های تیره رنگ جزو مکان است برای $K>0$ می‌باشند

* با توجه به $\frac{|K||s-z_1|\cdots}{|s-p_1|\cdots}=1$ روی صفرها K بی‌نهایت و روی قطب‌ها K صفر است

۳- مجانب: مکان ریشه‌ها در ازای $K\to\infty$ به سمت مجانب‌ها میل می‌کنند

- مکان تلاقی مجانب‌ها با محور حقیقی

$$\delta = \frac{\overbrace{\sum Re(p_i) - \sum Re(z_i)}^{\text{قسمت حقیقی}}}{\underbrace{m}_{\text{درجه مخرج}} - \underbrace{n}_{\text{درجه صورت}}}$$

- زاویه مجانب‌ها با محور حقیقی

$$\gamma = \begin{cases} \pm\frac{(2h+1)180^\circ}{m-n} & K>0 \\ \pm\frac{(2h)180^\circ}{m-n} & K<0 \end{cases} \qquad h=0,1,2,\ldots$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴- نقاط شکست: اگر بر روی محور حقیقی دو قطب یا دو صفر پشت سر هم قرار گیرند، نقطه شکست وجود دارد.

* ممکن است بر روی یک صفر شکست داشته باشیم زیرا صفر دوم در بینهایت است. محل نقطه شکست روی محور حقیقی

A صورت تابع تبدیل حلقه باز $=$ و B مخرج تابع تبدیل حلقه باز $=$ و $G.H=\frac{A}{B} \longrightarrow A'B-B'A \longrightarrow s=?$

* بر روی محور حقیقی، K حداکثر مقدار خود را در روی نقطه شکست اختیار می‌کند و بعد از آن دیگر ریشه‌ها مختلط اند و از حالت حقیقی خارج می‌شوند.

اگر از حل معادله به یک نقطه شکست مختلط رسیدیم، در معادله $1+KG(s).H(s)$ جایگذاری می‌کنیم و K را بدست می‌آوریم. اگر عددی حقیقی شد نقطه شکست مختلط قابل قبول است و اگر K عددی مختلط شد نقطه شکست بدست آمده قابل قبول نیست.

۵- زوایای خروج از قطبها و ورود به صفرهای مختلط:

p_i زاویه خروج از قطب: $\theta_{p_i}=180^\circ+\angle\left[(s-p_i)G(s).H(s)\right]\Big|_{s=p_i}$

z_i زاویه ورود به صفر: $\theta_{z_i}=180^\circ-\angle\left[\frac{G(s).H(s)}{(s-z_i)}\right]\Big|_{s=z_i}$

* صفرها و قطبهای مختلط مزدوج هستند مکان ریشه‌ها نسبت به محور حقیقی متقارن اند.

الف - از قطب یا صفر مورد نظر به تمام قطبها و صفرهای دیگر به صورتی که بخواهیم وصل می‌کنیم.

ب - از هر قطب یا صفر (بجز قطب یا صفر مورد نظر) یک خط افقی رسم می‌کنیم.

ج - روی این خط در جهت مثلثاتی شروع به حرکت می‌کنیم تا خط واصل بین نقطه آخر و صفر یا قطب قطع کند و زاویه را می‌خوانیم.

$$\begin{cases}\theta_{p_i}=(2K+1)180^\circ-(\text{مجموع زوایای قطبها}-\text{مجموع زوایای صفرها}) & K>0\\ \theta_{z_i}=-(2K+1)180^\circ-(\text{"}\quad\text{"}) & \end{cases}$$

برای $K<0$ بجای $2K+1$ از $2K$ استفاده می‌کنیم.

* هرگاه قطب یا صفر روی هم باشند باید عدد بدست آمده را بر m (تعداد روی هم ها) تقسیم کنیم.

۶- محل تلاقی با محور موهومی: در خود معادله مشخصه (مخرج تابع تبدیل حلقه بسته) به جای s پارامتر $j\omega$ را بکار گرفته و قسمت‌های حقیقی و موهومی را مساوی صفر قرار دهیم.

* معمولاً مقدار K در محل تلاقی با محور مورد سوال است برای اینکار قسمت حقیقی را صفر می‌کنیم و مقدار ω بدست آمده از قسمت قبل را در آن جاگذاری می‌کنیم، K بدست می‌آید.

* اگر ضریب بالاترین توان s در صورت و مخرج برای رسم مکان ریشه مثبت نباشد باید $-K$ را به K' تبدیل کرده و مکان را برای $K'>0$، $K'<0$ رسم کنیم.

* برای بدست آوردن مقدار K در یک نقطه دلخواه باید شرط اندازه ($|G.H.K|=1$) را نوشت و نقطه را جایگذاری کنیم. راه دیگر: از آن نقطه به تمام صفرها و قطبها وصل کرده و فاصله‌ها را اندازه می‌گیریم و حاصل ضرب فاصله نقطه از قطبها را به حاصلضرب فاصله از صفرها تقسیم کنیم.

ریشه $a+bj$
$s^2-2a+(a^2+b^2)$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

نکته‌های روش بالا: الف) اگر سیستم صفر یا قطب نداشته باشد به ترتیب مخرج یا صورت را عدد یک فرض می‌کنیم

ب) اگر تعداد قطب‌ها ۳ تا یا بیشتر باشد از صفرهای متناهی و در آن صورت بهره K مقداری دارد که برای مقادیر بیشتر از آن مکان ریشه‌ها وارد نیمه سمت راست می‌شوند و سیستم ممکن است ناپایدار شود

ج) هرگاه صفر و قطب روی هم باشند اثری در رسم ایجاد نمی‌کنند اما در پایداری و جبران‌سازی نمی‌توان حذفشان کرد و نادیده گرفت

* چند جمله‌ای اصلی (معادله مشخصه) همواره بر معادله کمکی بخش‌پذیر است و ریشه‌های معادله کمکی نسبت به مرکز صفحه s متقارن است

* سطر تماماً صفر فقط در سطرهای با توان فرد اتفاق می‌افتد و در نتیجه معادله کمکی همواره از درجه زوج خواهد بود

Root Counters مکان ریشه برای دو متغیر

دو متغیر K_1 و K_2 داریم و معادله مشخصه را به سه بخش
۱- بدون پارامتر
۲- با پارامتر K_1
۳- با پارامتر K_2
تبدیل می‌کنیم $Q(s) + K_1 P_1(s) + K_2 P_2(s) = 0$

اول K_2 را صفر می‌گیریم ← و همان مکان ریشه را برای K_1 رسم می‌کنیم $G_1(s) . H_1(s) = \frac{K_1 P_1(s)}{Q(s)}$; $1 + \frac{K_1 P_1(s)}{Q(s)} = 0 \rightarrow$

حال K_2 را در نظر می‌گیریم ← معادله اصلی را به بخش‌های بدون پارامتر K_2 تقسیم می‌کنیم $G_2 H_2 = \frac{K_2 . P_2(s)}{Q(s) + K_1 P_1(s)}$

مکان شروع مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه اصلی به ازای مقادیر مختلف K_2 منحنی اول که به ازای K_1 رسم شده است شروع می‌شود و به سمت صفرها یا بی‌نهایت میل می‌کند

سیستم‌های تأخیری سیستم که دارای پس افت انتقالی یا سیستم با زمان مرده

رسم نمودار مکان ریشه برای سیستم‌های تأخیری

اگر تابع تبدیل سیستمی جزئی باشد e^{-Ts} داشته باشد (T زمان تأخیر است) می‌توان معادله مشخصه آن را به صورت زیر نوشت

$$Q(s) + K P(s) e^{-Ts} = 0$$

$$1 + K G(s) . H(s) . e^{-Ts} = 0$$

شرط اندازه (قدر مطلق) : $e^{-Ts} |K| . |G(s) . H(s)| = 1$

شرط اندازه $e^{-Ts} \frac{|K| . |s - z_1| \cdots}{|s - p_1| \cdots} = 1$

$$\angle G(s) . H(s) = 2(2h+1)180^\circ + \omega T \quad K > 0$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

- نقاط K مساوی صفر در قطبهای $G(s).H(s)$ و $-\infty \leftarrow \delta$ قرار دارند

- نقاط K به سمت بی نهایت: در صفرهای $G(s).H(s)$ و نیز $\infty \rightarrow \delta$ قرار دارند. تعداد شاخه‌ها ∞ تا است تقارن نسبت به محور حقیقی دارند

- مجانب‌ها: تعداد مجانب‌ها بی نهایت تا است و همگی موازی محور حقیقی‌اند

محل تلاقی مجانب‌ها با محور مجازی $\omega = \frac{N\pi}{T}$ N از جدول زیر بدست می‌آید

K	$m-n$	مجانب‌های $K=0$	مجانب‌های $K \to \pm\infty$
≥ 0	فرد	$N=0,\pm2,\pm4,\ldots$	$N=\pm1,\pm3,\ldots$
≥ 0	زوج	$N=\pm1,\pm3,\ldots$	$N=\pm1,\pm3,\ldots$
≤ 0	فرد	$N=\pm1,\pm3,\ldots$	$N=0,\pm2,\pm4$
≤ 0	زوج	$N=0,\pm2,\pm4$	$N=0,\pm2,\pm4$

مکان روی محور حقیقی (همانند حالت بدون تأخیر)

- نقاط شکست: $\frac{d\,G(s).H(s)\,e^{-Ts}}{ds} = 0$

- زاویه‌های ورود به صفرها و خروج از قطبها

$$\theta_{p_i} = (180 + \omega T) + \measuredangle (s-p_i)\,G(s).H(s)\Big|_{s=p_i}$$

$$\theta_{z_i} = (180 + \omega T) + \measuredangle \frac{G(s).H(s)}{(s-z_i)}\Big|_{s=z_i}$$

- محل تلاقی با محور مجازی: پیچیده است و به صورت ترسیمی بدست می‌آید

در یک سیستم کنترل خوب SNR باید بزرگ باشد

$$SNR = \frac{\text{خروجی ناشی از سیگنال}}{\text{خروجی ناشی از نویز}}$$ سیگنال به نویز

حساسیت $M(s)$ نسبت به پارامتر α

$$S_\alpha^M = \frac{\text{تغییر تابع } M \text{ به ازای واحد آن}}{\text{تغییر } \alpha \text{ (پارامتر سیستم) به ازای واحد آن}} = \frac{\alpha}{M}\frac{\delta M}{\delta \alpha}$$

* حساسیت خروجی نسبت به تابع تبدیل حلقه باز عدد یک خواهد شد

* هدف بکارگیری فیدبک، کاهش حساسیت سیستم در برابر تغییرات پارامترهاست

نسبت خروجی به ورودی سیستم حلقه بسته $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s).H(s)}$ $\Leftarrow$ $S_{G(s)}^{C(s)} = \frac{1}{1+G(s).H(s)}$

* حساسیت استاتیکی ← در حساسیت‌ها s را به سمت صفر میل می‌دهیم

* حساسیت دینامیکی ← در حساسیت‌های که از $j\omega$ استفاده کرده و حساسیت را به صورت تابعی از فرکانس رسم می‌کنیم

دیاگرام بد

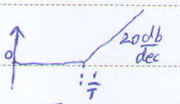
محور افقی فرکانس و محور عمودی اندازه و فاز

ضریب بهره K : تغیر K تأثیری در زاویه فاز ندارد و فقط باعث بالا پایین رفتن نمودار اندازه دارد $20\log K = a$

عامل s و $\frac{1}{s}$: s ← فاز 90 ، $\frac{1}{s}$ ← فاز -90

s ← شیب $20\frac{db}{dec}$ ، $\frac{1}{s}$ ← شیب $-20\frac{db}{dec}$

s^n ← شیب $20n\frac{db}{dec}$ و $90n$

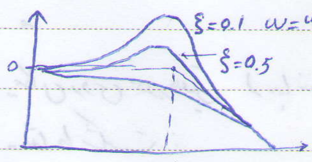


عامل $(1+Ts)$ و $\frac{1}{1+Ts}$ نقطه عطف در فرکانس گوشه $\frac{1}{T}$ ، $(1+Ts)$ ← 0 تا 90

فرکانس گوشه: فرکانسی که دو مجانب به هم می رسند و با هم تلاقی دارند (فرکانس شکست) ضریب s در $Ts+1$

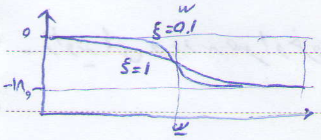
$\frac{1}{1+Ts}$ عکوس است ← 0 تا -90

* $\frac{1}{1+Ts}$ مشخصه یک فیلتر پایین گذر و $Ts+1$ مشخصه یک فیلتر بالاگذر



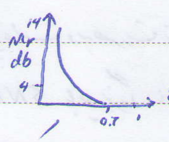
عامل $(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)^n$ مجانب اول 0 db و مجانب دوم $-40\frac{db}{dec}$ و در فرکانس $\omega=\omega_n$

اندازه و فاز درجه دوم وابسته به ω فرکانس گوشه و ξ می باشد



$\frac{\sqrt{2}}{2} > \xi > 0$ ، $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$ فرکانس تشدید ، $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ مقدار اوج

$\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\omega_r = 1$



زمانی که $\frac{\sqrt{2}}{2} > \xi > 0$ فرکانس تشدید کمتر از فرکانس طبیعی میرایی ω_n است

به ازای $1 > \xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ و مقدار ω_r ، مقدار منحنی اندازه کوچکتر از 0db است

سیستم مینیمم فاز و نامینیمم فاز: سیستمی که در سمت راست محور $j\omega$ صفر یا قطبی ندارد و سیستم کمینه فاز نام دارد و دیاگرام بد قابل پیش بینی را

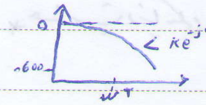
رسم نمودار بد یک سیستم چند مرتبه: نمودار فاز هر عامل را جدا جدا رسم کرده و سپس همه را با هم جمع می زنیم

* در یک سیستم مینیمم فاز، زاویه فاز با میل ω به ∞ برابر $-90(n-m)$ است که در آن n درجه مخرج و m درجه صورت

* شیب منحنی اندازه هنگامی که $\omega \to \infty$ برابر $-20(n-m)\frac{db}{dec}$ است

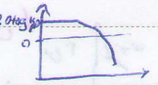
سیستم تأخیری

$Ke^{-j\omega T}$ سیستم تأخیری ، اندازه $20\log|K|$ ، فاز $-\omega T$



* در یک سیستم نوع صفر ضریب خطای ایستایی وضعیت برابر است با

$$K_p = \lim_{\omega \to 0} G(j\omega).H(j\omega)$$



یعنی در نمودار اندازه، در فرکانس‌های پایین یک خط افقی به اندازه $20\log K_p$ دارد

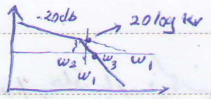
$$e_{ss}\big|_{t\to\infty} = E_{ss}\big|_{s\to 0} = \frac{1}{1+K_p}$$

* در یک سیستم نوع یک ضریب خطای ایستایی سرعت برابر است با

$$K_v = \omega_1$$

ω_1 محل تلاقی پاره خط اولیه با شیب $-20\frac{db}{dec}$ یا امتداد آن با خط $0db$ یا محل تلاقی $\omega=1$ با خط اولیه $-20\frac{db}{dec}$ برابر $20\log K_v$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$



در یک سیستم نوع یک که دو تا قطب دارد و ω_3 محل تلاقی $-40\frac{db}{dec}$ با محور 0 است

$$\omega_1\omega_2 = \omega_3^2 \qquad \xi = \frac{\omega_2}{2\omega_3}$$

* در یک سیستم نوع دو ضریب خطای ایستایی شتاب (سهمی) برابر

$$K_a = \omega_a^2$$

ω_a محل تلاقی پاره خط اولیه $-40\frac{db}{dec}$ یا امتدادش با خط $0db$ یا خط $\omega=1$ یا فقط محل تلاقی آن با خط اولیه $-40db$ برابر $20\log K_a$

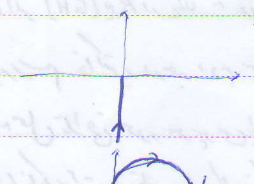
در مواردی که لازم است مختصات نقطه‌ای را از روی نمودار اندازه بدست آوریم

$$\underset{\text{نقطه ثانی}}{y} = \overset{\text{شیب}}{m}\,(\log \overset{\text{ثانی}}{b} - \log \overset{\text{اولیه}}{a})$$

* در هر جایی که دیاگرام بد منفی شد سیستم در آن محدوده ناپایدار است و پاسخ سیستم مدار بسته نامحدود است

دیاگرام قطبی (نایکوئیست مستقیم)

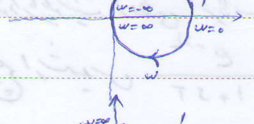
نمودار قطبی، تغییرات اندازه برحسب زاویه فاز را با تغییر فرکانس نشان می‌دهد. جایگذاری $s=j\omega$ و تبدیل تابع تبدیل داده شده به یک عبارت مختلط و محاسبه اندازه و فاز با تغییر فرکانس که فرکانس ω از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند



عامل فاکتور انتگرالگیر $\frac{1}{j\omega}$: سیستم نوع اول است

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{j\omega} = \infty \angle -90^\circ$$

$$\lim_{\omega\to \infty}\frac{1}{j\omega} = 0 \angle -90^\circ$$



عامل فاکتور درجه اول $\frac{1}{1+j\omega}$ سیستم نوع صفر است

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{1+j\omega} = 1 \angle 0^\circ$$

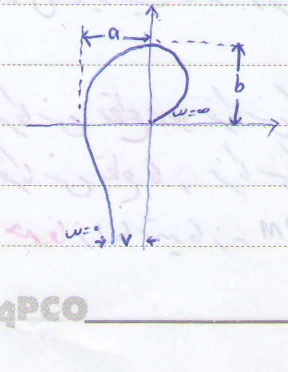
$$\lim_{\omega\to \infty}\frac{1}{1+j\omega} = 0 \angle -90^\circ$$

عامل فاکتور درجه دوم $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ سیستم نوع صفر

$$\lim_{\omega\to 0} G.H = 1\angle 0^\circ$$

$$\lim_{\omega\to \infty} GH = 0\angle -180^\circ$$

دیاگرام قطبی $\frac{\omega_n^2}{s(Ts+1)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$



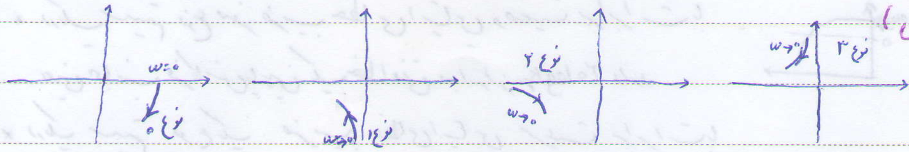
$$Im[G(j\omega_x).H(j\omega_x)] = 0 \to \omega_x \to a = Re[G(j\omega_x).H(j\omega_x)]$$

$$Re[G(j\omega_y).H(j\omega_y)] = 0 \to \omega_y \to b = Im[G(j\omega_y).H(j\omega_y)]$$

$$V = \lim_{\omega\to 0} Re[G(j\omega).H(j\omega)]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انواع مختلف دیاگرام نایکوئیست (قطبی)



دیاگرام قطبی معکوس: به جای $G(j\omega).H(j\omega)$ دیاگرام قطبی را برای $\frac{1}{G(j\omega).H(j\omega)}$ رسم می کنیم

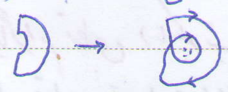
پایداری نایکوئیست (از تابع تبدیل حلقه باز فرکانسی استفاده می شود)

* به ازای هر قطب واقع در منحنی بسته در محورهای مختصات S، منحنی D(s) یک دور در جهت مثلثاتی و به ازای هر صفر واقع در منحنی بسته یک دور در جهت ساعتگرد می زند

$N = Z - P$ ، P: تعداد قطبها با قسمت حقیقی مثبت و Z: تعداد ریشه های معادله مشخصه با قسمت حقیقی مثبت و N: تعداد دوران حول نقطه $(-1,0)$

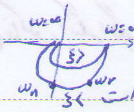
* اگر سیستم دارای فیدبک مثبت باشد دوران به جای نقطه ۱- حول نقطه ۱+ خواهد بود
* اگر $G(s).H(s)$ در مخرج "s" داشته باشد در نتیجه تأثیری ندارد

اگر قطب واقع در مبدأ یا محور $j\omega$ را خارج منحنی Q فرض کنیم به ازای هر قطب یک نیم دایره با شعاع ∞ در جهت عقربه های ساعت خواهیم داشت



* به ازای هر قطب واقع در مبدأ یک نیم دایره با شعاع صفر از 0^- به 0^+ رسم می شود
* اگر $Re[GH]$ در ω_c به مقدار K وابسته بود کم کردن K باعث فشرده شدن شکل از ۲ جهت و زیاد کردن K باعث منبسط شدن می شود

در رسم فاکتور درجه دوم به ازای ξ بزرگ نمودار نایکوئیست کوچکتر شده $\frac{1}{1+2\xi(j\frac{\omega}{\omega_n})+(j\frac{\omega}{\omega_n})^2}$



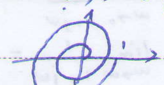
محل تلاقی محور موهومی با منحنی نایکوئیست در فرکانس ω_n می باشد و فاصله بین مبدأ تا محل تلاقی (محور موهومی) برابر $\frac{1}{2\xi}$ است

در نمودار نایکوئیست (قطبی) فرکانسی که در آن فاصله از مبدأ حداکثر است فرکانس تشدید نام دارد و با ω_r نشان می دهند

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

پیچ ارشمیدس ← $\frac{e^{-sL}}{1+sT}$



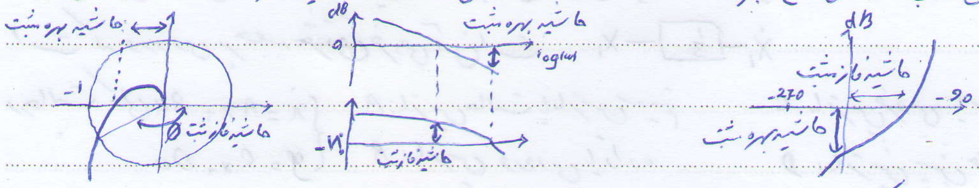
سیستم با پایداری مشروط: سیستم هایی که به ازای بازه تعریف شده و محدودی از بهره K که به ازای آن نقطه ۱- کاملاً خارج از مکان نایکوئیست حلقه باز قرار گیرد پایدار باشند. چنین سیستمی را سیستم با پایداری مشروط Conditionally stable می نامند.

فرکانس قطع بهره: فرکانسی که در آن اندازه سیستم (اندازه تابع تبدیل حلقه باز) برابر یک است

فرکانس قطع فاز: فرکانسی که در آن زاویه فاز تابع تبدیل حلقه باز سیستم -180° شود

حد فاز (حاشیه فاز - PM): زاویه فاز اضافی در فرکانس قطع بهره است تا سیستم به حاشیه مرز ناپایداری برسد.

برای سیستم های پایداری که چند فرکانس قطع بهره دارند، حد فاز در فرکانس عبوری که بالاترین بهره را دارد محاسبه می شود



حد بهره (حاشیه بهره GM): عکس اندازه تابع تبدیل حلقه باز در فرکانس قطع فاز است

$$GM = K_g = \frac{1}{|G(j\omega_{cp})|}$$

$$K_g(dB) = -20 \log |G(j\omega_{cp})|$$

* برای اینکه یک سیستم مینیمم فاز، پایدار باشد باید حد بهره مثبت باشد.
* در یک سیستم نامینیمم فاز حد بهره و فاز منفی است
* در سیستم های مرتبه اول یا مرتبه دوم حد بهره ∞ است. این سیستم ها از لحاظ تئوری نمی توانند ناپایدار باشند زیرا نمودار قطبی آن ها محور حقیقی منفی را اصلاً قطع نمی کند

$$\angle e^{-sT} = \omega T$$

فضای حالت

هر نقطه بیانگر یک حالت در فضای حالت است. فضای حالت یک فضای با n بعد است

بردار حالت

برداری که با مشخص شدن ورودی به ازای $t \geq t_0$ حالت هر سیستم $x(t)$ را به طور انحصاری در زمانهای $t \geq t_0$ مشخص می کند n مؤلفه

متغیرهای حالت: کمترین گروه از متغیرهای سیستم که حالت یک سیستم را مشخص می کند

نمایش سیستم ها در فضای حالت

الف) حالت ساده وقتی که ورودی سیستم دارای مشتقاتی نیست $D^n y(t) + a_{n-1} D^{n-1} y(t) + \dots + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = u(t)$

$x_1(t) = y(t) \rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$x_2(t) = Dy(t) \rightarrow \dot{x}_2(t) = x_3(t)$

$\vdots$

$x_n(t) = D^{n-1} y(t) \rightarrow \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$

$\dot{x}_n(t) = -a_0 x_1(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t) + u(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ب) حالت کلی: از تابع تبدیل استفاده می کنیم

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

Subject:
Year : Month : Day : ( )

نمودار جبرانی فضای حالت: در این نمودار هر تابع تبدیل یک انتگرالگیر دارد و از بلوک‌هایی با تابع تبدیل انتگرالگیر ساده است که ورودی هر جعبه مشتق خروجی آن است. $\dot{x}_1 \to \boxed{\frac{1}{s}} \to x_1$

در حالت کلی: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

A: ماتریس حالت یا ماتریس سیستم — C: ماتریس خروجی یا مشاهده

B: ماتریس ورودی یا اراده — D: ماتریس پیش خوران Feed forward

معادلات حالت با استفاده از تابع تبدیل

نخست نمودار جبرانی فضای حالت را با استفاده از تابع تبدیل رسم کرده. برای این کار صورت و مخرج تابع تبدیل را آنقدر به s تقسیم می‌کنیم که فقط انتگرالگیر داشته باشیم. ضمناً برای اینکه از طرف خروجی به ورودی نزدیک باشد (تا بتوان معادلات فضای حالت را نوشت) از یک متغیر کمکی مثل Q استفاده می‌کنیم. حال نمودار جبرانی فضای حالت را برای تمام روابط رسم کرده.

نمایش عوامل درجه یک در فضای حالت

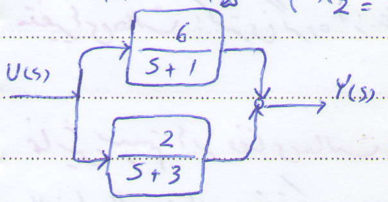
$\dot{x}_1 = -a x_1 + k x_2$ $\qquad x_2 \to \boxed{\frac{k}{s+a}} \to x_1$

تجزیه تابع تبدیل به حاصلضرب عوامل درجه یک

$U(s) \to \boxed{\frac{1}{s+4}} \xrightarrow{x_2} \boxed{\frac{1}{s+5}} \xrightarrow{x_1} Y(s)$

$\frac{Y}{U} = \frac{1}{s+4} \cdot \frac{1}{s+5}$ $\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_2 + u \end{cases}$ $\quad y = x_1 \to \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

تجزیه تابع تبدیل به حاصل جمع عوامل درجه یک



$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4(s+4)}{(s+1)(s+3)} = \frac{6}{s+1} - \frac{2}{s+3}$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 6u \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - 2u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \longrightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} u \qquad y = [1 \ 1] x$

معادلات حالت عوامل درجه یک استاندارد

$x_2 \to \boxed{\frac{k}{1+Ts}} \to x_1$ $\quad T\dot{x}_1 + x_1 = k x_2 \to \dot{x}_1 = -\frac{1}{T} x_1 + \frac{k}{T} x_2$

معادلات حالت عوامل درجه ۲ استاندارد

$x_3 \to \boxed{\frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}} \to x_1$ $\quad \ddot{x}_1 + 2\xi\omega_n \dot{x}_1 + \omega_n^2 x_1 = k x_3$

$\dot{x}_1 = x_2 \to \ddot{x}_1 = \dot{x}_2$ و $\dot{x}_2 + 2\xi\omega_n x_2 + \omega_n^2 x_1 = k x_3$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2 + k x_3 \end{cases}$

Subject:
Year : Month : Day : ( )

تابع تبدیل با استفاده از معادلات حالت $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$

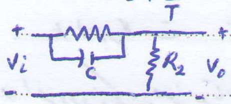
حل معادلات حالت: حل معادله حالت $\dot{x} = Ax + Bu$

$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

$e^{At} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \dots$

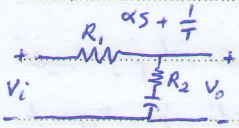
$x(t) = \varphi(t) \cdot x(0) + \int_0^t \varphi(t-\tau)Bu(\tau) \cdot d\tau$

جبران کننده پیش فاز مانند PD (کنترل تناسبی مشتقی) یا $(K_p + K_D s)$ است $\alpha < 1$ ، $G(s) = \frac{s + \frac{1}{T}}{\alpha s + \frac{1}{T}}$



۱. خطای حالت ماندگار بخوبی تصحیح نمی شود ولی پاسخ گذرا بهتر، فراجهش از بین می رود و میرایی افزایش می یابد
۲. مرتبه سیستم (و نوع آن) یک مرتبه بالا می رود. ۳. پهنای باند زیاد می شود و در نتیجه پاسخ گذرا سریعتر می شود ۴. فراجهش کم می شود
۵. نوسانات پاسخ حلقه بسته کمتر شده و حد فاز هم زیاد می شود ۶. فرکانس طبیعی مدار افزایش می یابد ۷. یک فیلتر بالاگذر است
و فاز مثبت به سیستم می دهد ۸. حد فاز حلقه بسته بهتر می شود ۹. شیب منحنی اندازه حلقه باز در فرکانس قطع بهره کاهش می یابد
لذا پایداری نسبی بیشتر شده و حد فاز و حد بهره بهتر می شود ۱۰. خطاهای سیستم دچار تغییر نمی شود
عیب پیش فاز یا PD محدودیت در فرکانس های بالا و تاخیر زمانی آن است

جبران کننده پس فاز مانند PI (کنترل تناسبی انتگرالی) یا $(K_p + \frac{K_I}{s})$ است $\alpha > 1$ ، $G(s) = \frac{s + \frac{1}{T}}{\alpha s + \frac{1}{T}}$



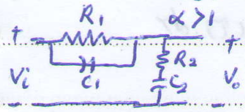
۱. یک فیلتر پایین گذر است لذا بهره در فرکانس های پایین زیاد می کند ۲. کاهش بهره در فرکانس های بالا برای
جلوگیری از ناپایداری ۳. کاهش پهنای باند و در نتیجه کندتر شدن پاسخ حالت گذرا ۴. کاهش خطای حالت ماندگار ولی دیرتر از بین
رفتن پاسخ گذرا ۵. پایداری را کم می کند برای رفع این عیب باید ثابت زمانی T از بزرگترین ثابت زمانی سیستم بزرگتر باشد
۶. افزایش مرتبه سیستم به اندازه یک واحد ۷. افزایش نوع سیستم به اندازه یک واحد مشروط به حفظ پایداری، اگر خطای ماندگار عدد ثابتی باشد آن را صفر می کند
۷. افزایش میرایی اما زمان خیز و استقرار زیاد می شود ۹. حد فاز را کاهش می دهد و فاز منفی وارد سیستم می کند ۱۰. پاسخ حلقه بسته را
را تا حدودی نوسانی می کند که عیب است ۱۱. ماکزیمم فراجهش را هم زیاد می کند که عیب محسوب می شود ۱۲. فرکانس قطع بهره کم
می شود لذا پهنای باند کمتر خواهد شد ۱۳. زمان خیز و نشست سیستم کندتر شده و معمولاً پهنای باند کمتر می شود

Subject:
Year :　　Month :　　Day :　　(　)

جبران کننده پس فاز ـ پیش فاز یا PID

$$G_c(s) = \left(\frac{1+\alpha T_1 s}{1+T_1 s}\right)\left(\frac{1+\beta T_2 s}{1+T_2 s}\right)$$

پیش فاز $\alpha > 1$ ، پس فاز $\beta < 1$



تمام خواص مثبت PD و PI را دارد و گران تمام می شود

مرتبه سیستم از نوع آن با شرطی که صفر یا قطبی حذف نشود دو مرتبه بالا می رود

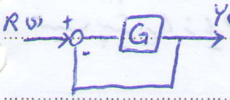
کنترلر تناسبی P نقش جبران سازی ندارد و دارای خصوصیات زیر است :

۱. افزایش پهنای باند که نتیجه اش افزایش سرعت پاسخ سیستم است ۲. کاهش خطای حالت ماندگار که مستقیماً مربوط به افزایش k است ۳. کاهش حد فاز که عیب است ۴. نوسانی تر کردن پاسخ حلقه بسته که پایداری را کم می کند و عیب محسوب می شود

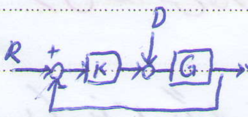
* افزودن یک صفر به تابع تبدیل حلقه باز، پهنای باند حلقه بسته را زیاد می کند البته صفر هر چقدر کوچکتر باشد (از دیگر صفرها) پهنای باند بیشتر می شود

* افزودن قطب به تابع تبدیل حلقه باز باعث می شود که حلقه بسته از پایداری کمتری برخوردار باشد و پهنای باند کمتر می شود

* یک سیستم ناپایدار را تنها در صورتی می توان به وسیله کنترلر پایدار کرد که مابین هر جفت از صفرهای ناپایدار سیستم، تعداد زوجی از قطب های ناپایدار آن قرار گیرد (صفر واقع در بینهایت هم شامل می شود)



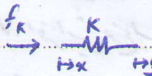
قضیه سیستم حلقه بسته پایدار و R(s) قطبی در چپ محور jω ندارد اگر $G = \frac{P}{Q}$ و $R = \frac{N}{D}$ آنگاه e(t) با زمان سمت صفر میل خواهد کرد اگر و فقط اگر قطبهای G (ریشه های Q) قطب های R(s) را شامل شود



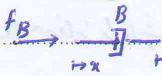
قضیه سیستم حلقه بسته پایدار و قطبهای D همگی روی محور jω یا سمت راست آن و G صفری سمت راست یا روی محور jω ندارد آنگاه d(t) بر روی y(t) با زمان به صفر میل خواهد کرد اگر و فقط اگر قطبهای K قطبهای D(s) را شامل شود یا K بر D بخش پذیر باشد

تعیین تابع تبدیل سیستم های مکانیکی

$F(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{K}} \rightarrow X(s)$　　　$F(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{Cs}} \rightarrow X(s)$



$f_K = K(x-y)$



$f_B = B\frac{d(x-y)}{dt}$　　$F_B = Bs(x-y)$

سیستم های جابجایی مکانیکی

۱. معادله دیفرانسیل سیستم را بدست آورده $\sum F = ma$ ۲. با فرض شرایط اولیه صفر تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل را می نویسیم ۳. نسبت خروجی Y(s) به ورودی X(s) را حساب کرده

Subject:
Year : Month : Day : ( )

مدار معادل الکتریکی سیستم های مکانیکی

نیرو F — جرم m — دمپر B — فنر K — جابجایی x — سرعت $\dot{x}$

جریان i — خازن C — عکس مقاومت $\frac{1}{R}$ — عکس سلف $\frac{1}{L}$ — فلوی مغناطیسی ϕ — ولتاژ V

ولتاژ V — سلف L — مقاومت R — عکس خازن $\frac{1}{C}$ — بار الکتریکی q — جریان i

مدل سازی سیستم الکتریکی

$V = Ri \quad i \rightarrow \boxed{R} \rightarrow V$

$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt} \quad I(s) = CSV(s) \quad V \rightarrow \boxed{CS} \rightarrow I$

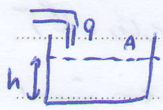
$i = \frac{V}{R} \quad V \rightarrow \boxed{\frac{1}{R}} \rightarrow i$

$V = \frac{1}{C}\int i\,dt \quad V(s) = \frac{1}{CS} I(s) \quad I \rightarrow \boxed{\frac{1}{CS}} \rightarrow V$

$V = L\frac{di}{dt} \quad V(s) = LSI(s) \quad I \rightarrow \boxed{LS} \rightarrow V$

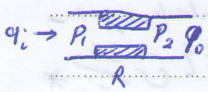
$I(s) = \frac{1}{LS} V \quad V \rightarrow \boxed{\frac{1}{LS}} \rightarrow I$

مدل سازی سیستم سیالاتی



$q = \frac{d}{dt}(Ah) \rightarrow Q(s) = ASH(s)$

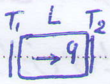
$H(s) \rightarrow \boxed{AS} \rightarrow Q(s) \quad Q(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{AS}} \rightarrow H(s)$



$\Delta P = \rho g \Delta h \rightarrow \Delta h = \frac{\Delta P}{\rho g} \quad R = \frac{h_i - h_o}{q_o}$

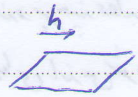
مدل سازی حرارتی

هدایت حرارتی



$q = KA\frac{\Delta T}{L}$ /

جابجایی



$q = hA\Delta T$

تشعشع $q = mc\frac{dT}{dt}$

خطی سازی

سیستم را حول نقطه کاری x_i خطی کردن ←

$y = f(x) \rightarrow y = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}(x - x_i)$

سیستم با چند ورودی

$y = f(x_1, x_2) \rightarrow y = f(x_{i_1}, x_{i_2}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x - x_{i_1}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - x_{i_2})$

تقریب زدن توابع تبدیل به درجات پایین‌تر

$G(s) = \frac{A}{(s+a)(s+b)} = \frac{K_1}{s+a} + \frac{K_2}{s+b}$

بر کدام بهره بیشتری داشت آن را $g(s)$ نامیده و

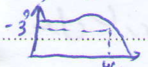
$G_{new}(s) = \frac{G(0)}{g(0)} g(s)$

فرکانس قطع بهره: فرکانسی که در آن (معمولاً حلقه باز) اندازه برابر یک شود

فرکانس قطع فاز: فرکانسی که در آن زاویه تابع تبدیل (معمولاً حلقه باز) $-180°$ شود

* سیستم حلقه بسته بخش‌هایی از سیگنال را که فرکانسشان بزرگتر از فرکانس قطع است عبور نمی‌دهد
پهنای باند نمایانگر سرعت پاسخ یک سیستم است و با آن نسبت مستقیم دارد. از دید نویز پهنای باند نباید زیاد بزرگ باشد

فرکانس قطع: فرکانس ω_c را که در آن اندازه پاسخ فرکانسی تابع تبدیل حلقه بسته به اندازه ۳ db زیر مقدار فرکانس صفر باشد و پهنای باند محسوب می‌شود



محدوده فرکانسی $0 \le \omega \le \omega_c$ که در آن اندازه تابع تبدیل حلقه بسته از 3dB− بیشتر باشد پهنای باند BW گویند

$20\log|M(j\omega)| = -3\,dB$ یا $|M(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|M(j0)|$

قطبهای غالب یا چیره یا مؤثر: نزدیکترین قطب به محور $j\omega$ها حقیقی بوده و در نزدیکی آن صفری وجود نداشته باشد و دیگر قطبهای سیستم خیلی دور باشند رفتار سیستم مانند رفتار یک سیستم درجه اول بوده و قطب نزدیک محور $j\omega$ها مشخص کننده اصلی پاسخ سیستم خواهد بود ← سیستم دارای یک قطب مؤثر درجه اول

- اگر در یک سیستم پایدار قطب نزدیک محور $j\omega$ها مختلط باشد و در نزدیکی آن صفری نباشد و دیگر قطبها به مراتب دورتر باشند آنگاه رفتار سیستم مانند رفتار یک سیستم درجه دوم بوده و قطب مختلط نزدیک محور $j\omega$ها مشخص کننده اصلی پاسخ سیستم است ← سیستم دارای یک قطب مؤثر درجه دوم

- اگر در فاصله بسیار کمی از یک قطب صفری وجود داشته باشد آنگاه صفر اثر قطب را بسیار کم می‌کند

* بیشترین تأثیر صفر در افزایش ماکزیمم جهش و کاهش زمان صعود پاسخ پله است و بر روی نشست پاسخ پله تأثیر چندانی ندارد

افزودن قطب به حلقه باز: ماکزیمم فراجهش پاسخ پله را زیاد می‌کند و هرچه قطب به مبدأ نزدیکتر فراجهش بیشتر می‌شود. زمان خیز افزایش می‌یابد زیرا قطب افزوده شده باعث کاهش پهنای باند می‌شود لذا سیگنالهای فرکانس بالای ورودی را قطع می‌کند

افزودن قطب به حلقه بسته: اثری عکس حلقه باز دارد و ماکزیمم فراجهش را کاهش داده ولی دقت کنید که زمان خیز همچنان زیاد می‌شود

افزودن صفر به حلقه باز: باعث ایجاد تغییر در حلقه بسته می‌شود. عبارت صورت، M_p (ماکزیمم فراجهش) را زیاد می‌کند اما در مخرج بصورت ضریب جمله‌ی ظاهر شده و باعث بهبود میرایی یا کاهش M_p می‌شود. در نهایت اثر صفر صورت مسلط‌تر شده و هرچه میرایی بهتر می‌شود ولی فراجهش هم زیاد است.

افزودن صفر به حلقه بسته: فراجهش را زیاد و زمان خیز را کم می‌کند. قطبهای نزدیک به محور $j\omega$ها در سمت چپ باعث می‌شود پاسخ‌های گذرا به آهستگی، اما قطبهای دور سریع از بین روند

سیستم تأخیری: اگر زمان مرده T خیلی کوچک باشد e^{-Ts}

$$e^{-Ts} \simeq \frac{1}{1+Ts} \simeq 1-Ts$$

حتماً T خیلی کوچک باشد