دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

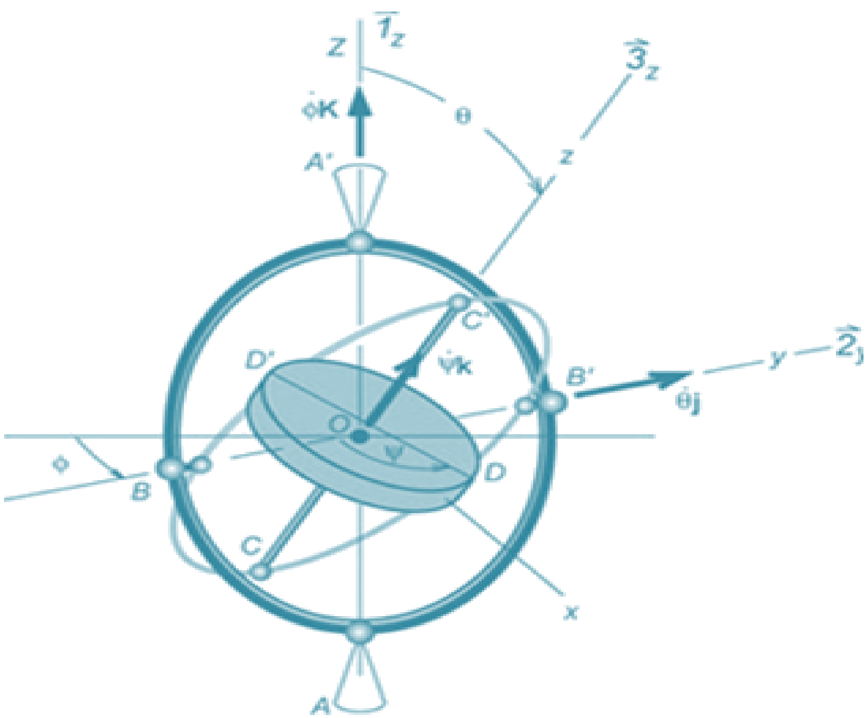
جزوه درس:

دینامیک

استاد: دکتر محمدجعفر صدیق دامغانی‌زاده

دانشجو: مهندس علی نصر

نیمسال اول ۸۹–۱۳۹۰



فصل ۱- سینماتیک ذرات

در سینماتیک، حرکت اجسام بدون در نظر گرفتن نیروهای موثر بر حرکت مطالعه می گردد. (هندسه حرکت)
در سینتیک، حرکت اجسام در ارتباط با نیروهای وارد بر آن بررسی می شود.

ذره: جسمی است که ابعاد فیزیکی آن در قیاس با شعاع انحنای مسیرش به قدری کوچک باشد که بتوانیم حرکت آن را به صورت حرکت یک نقطه بررسی کنیم

حرکت مستقیم الخط یک بعدی

سرعت ذره: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ سرعت متوسط — سرعت لحظه‌ای $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$

مقدار مثبت v بیانگر افزایش s است یعنی ذره در جهت مثبت حرکت می کند
مقدار منفی v بیانگر کاهش s است یعنی ذره در جهت منفی حرکت می کند

$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط — شتاب لحظه‌ای $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta s} = \dot{v}$ ، $a = \frac{d^2 s}{dt} = \ddot{s}$

اگر سرعت در حال افزایش باشد شتاب مثبت است
اگر در حال کاهش باشد شتاب منفی است

$v\,dv = a\,ds$ یا $\dot{s}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds$ رابطه حرکت مستقل از زمان

$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$ سطح زیر منحنی سرعت-زمان برابر است با تغییرات مکان

$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$ سطح زیر منحنی شتاب-زمان برابر است با تغییرات سرعت

$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \int_{s_1}^{s_2} a\,ds$ سطح زیر منحنی شتاب-مکان برابر است با نصف تغییرات مجذور سرعت

انواع حرکت

۱ـ حرکت شتاب ثابت

$$a(t)=a \rightarrow v=at+v_0 \rightarrow \begin{cases} v^2-v_0^2=2a(s-s_0) \\ s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0 \end{cases}$$

۲ـ شتاب تابعی از زمان $a=f(t)$

$$a=f(t) \xrightarrow{dv=adt} \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t f(t)\,dt \rightarrow \begin{cases} v-v_0=\int_0^t f(t)\,dt \\ s-s_0=\int_0^t v\,dt \end{cases}$$

۳ـ شتاب تابعی از سرعت باشد

$$a=f(v) \xrightarrow{dv=adt} \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} \rightarrow \begin{cases} t=\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} \\ x-x_0=\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{f(v)} \end{cases}$$

۴ـ شتاب تابعی از جابه‌جایی است

$$a=f(x) \xrightarrow{dv=adt} \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \rightarrow \begin{cases} v^2-v_0^2=2\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \\ t=\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{g(x)} \quad , v=g(x) \end{cases}$$

* اگر $av>0$ باشد حرکت تندشونده و اگر $av<0$ باشد حرکت کندشونده خواهد بود.

حرکت دورانی

$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ سرعت زاویه‌ای متوسط $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای

$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ شتاب زاویه‌ای متوسط $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$ شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای

$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$ شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای $\omega d\omega = \alpha d\theta$

حرکت منحنی الخط در صفحه

$\vec{r}$ بردار مکان نسبت به مبدأ ثابتی مانند O $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

راستای سرعت همواره بر مسیر حرکت مماس است $v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ $\vec{v} = |\dot{\vec{r}}|$

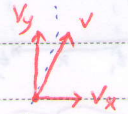
* در حرکت منحنی الخط حتی اگر طول بردار سرعت ثابت باشد، شتاب به غیر از نقاط عطف منحنی برابر صفر نخواهد بود

در حرکت منحنی الخط راستای شتاب ذره نه مماس بر مسیر است و نه عمود بر آن اما مؤلفه شتاب عمود بر مسیر همواره به سوی مرکز انحنای مسیر می‌باشد

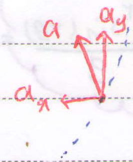
* زمانی که مقدار سرعت ثابت و فقط راستای آن تغییر می‌کند بردار شتاب عمود بر بردار سرعت خواهد شد

دستگاه مختصات متعامد یا قائم یا کارتزین

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$ $a = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$

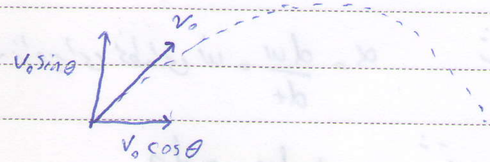


$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$ $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$



اگر زاویه θ بردار v با محور x ها در جهت پادساعتگرد اندازه‌گیری شود، برای دستگاه نشان داده شده $\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$ برقرار خواهد بود.

حرکت پرتابی



$a_x = 0 \qquad a_y = -g$

$V_x = (V_x)_0 = V_0\cos\theta \qquad V_y = (V_y)_0 - gt = V\sin\theta - gt$

$x = x_0 + (V_x)_0 t = x_0 + V\cos\theta\, t \qquad y = y_0 + (V_y)_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0 + V\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$

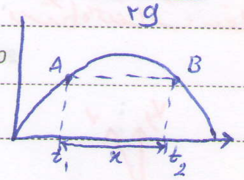
$V_y^2 = (V_{y_0})^2 - 2g(y - y_0)$

$y = x\tan\theta - \frac{g x^2}{2V_0^2\cos^2\theta}$ معادله مسیر پرتابه

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 - 2gy}$ سرعت پرتابه در هر لحظه

$H = \frac{V_0^2\sin^2\theta}{2g}$ ارتفاع نقطه اوج $\qquad t_H = \frac{V_0\sin\theta}{g}$ زمان به اوج رسیدن $\qquad$ سرعت در نقطه اوج $V_H = V_x = V_0\cos\theta$

$X_H = \frac{V_0^2\sin 2\theta}{2g}$ مختصه x نقطه اوج



* در نقطه اوج کمترین سرعت را دارد
* برای زمان t_1 و t_2 که مسافت OA و OB را طی می‌کند از ارتفاع یکسان h می‌گذرد

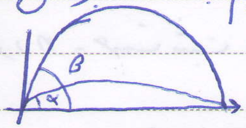
$t_1 + t_2 = \frac{2V_0\sin\theta}{g} \qquad t_1 \times t_2 = \frac{2H}{g} \qquad |t_2 - t_1| = \frac{2\sqrt{V_0^2\sin^2\theta - 2gH}}{g}$

$R = \frac{V_0^2\sin(2\theta)}{g} = \frac{2(V_x)_0(V_y)_0}{g}$ برد پرتابه $\qquad V_R = V_0 \qquad t_R = 2t_H = \frac{2V_0\sin\theta}{g}$

* ماکزیمم برد افقی با سرعت اولیه ثابت در زاویه $\theta = 45°$ رخ می‌دهد

* اگر زاویه پرتاب دو پرتابه متمم هم باشند، برد آن ها برابر خواهد بود

$\alpha + \beta = 90^\circ \qquad R_\alpha = R_\beta$



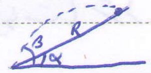
$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

* به ازای زاویه پرتاب $\theta = 45^\circ$ مساحت زیر منحنی حرکت پرتابی بیشینه خواهد بود.

* همواره $\tan\theta = \frac{4H}{R}$

- سطح شیبدار با زاویه α. پرتابه ای از نقطه A پایین سطح شیبدار با سرعت اولیه v_0 در جهتی که با افق زاویه β می سازد شلیک می گردد. برد R روی سطح شیبدار

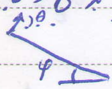
$$R = \frac{2v_0^2 \sin(\beta-\alpha)\cos\beta}{g\cos^2\alpha}$$



* بیشینه برد روی سطح شیبدار

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g(1+\sin\alpha)} \qquad \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

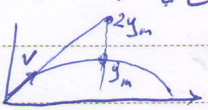
* اگر از بالای سطح شیبدار با شیب φ پرتابه ای را با زاویه $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ با خط افق داشته باشیم بیشترین برد حاصل می شود



* اگر از یک بلندی به ارتفاع h چند گلوله در راستاهای مختلف و با سرعت های اولیه مساوی پرتاب شوند سرعت رسیدن آنها به زمین یکسان و برابر $\sqrt{v_0^2+2gh}$ بوده ولی زمان رسیدنشان متفاوت خواهد بود

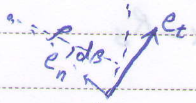
* اگر دو پرتابه از ارتفاع y یکی در راستای افقی با سرعت اولیه v_0 و دومی در راستای قائم رها شوند باهم به زمین می رسند و زمان رسیدن آنها به زمین $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$ خواهد بود

* در هر زاویه ای دلخواه، پرتابه به نقطه اوج خود می رسد که ارتفاع آن نصف ارتفاع پرتابه در حالتی است که شتاب جاذبه وجود ندارد



دستگاه مختصات عمودی ـ مماسی

امتداد مماس t بر مسیر ذره، امتداد عمود n ـ جهت مثبت n را همیشه به طرف مرکز انحنای مسیر



$\vec{v} = v\hat{e}_t = \rho\dot{\beta}\hat{e}_t$ $\quad \vec{a} = \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n + \dot{v}\hat{e}_t$ شعاع انحنا ρ

$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\beta}^2 = v\dot{\beta}$ $\quad a_t = \dot{v} = \ddot{s}$ $\quad a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$

ـ مؤلفه مماسی شتاب در تغییر سرعت ذره موثر است. در حالیکه مولفه قائم آن جهت حرکت ذره را تغییر می‌دهد

* شتاب ذره وقتی صفر است که مولفه‌هایش صفر باشد لذا شتاب ذره‌ای که با سرعت ثابت در طول یک منحنی حرکت می‌کند صفر نخواهد بود مگر اینکه از نقطه عطف (شعاع انحنای بینهایت) شود یا خط راست

حرکت دایره‌ای

شتاب مماسی a_t
شتاب نرمال a_n

$v = r\dot{\theta}$ $\quad a_n = \frac{v^2}{r} = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta}$ ، $a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta}$

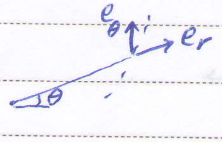
معادلات کلی

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|} = \frac{(v_x^2+v_y^2)^{\frac{3}{2}}}{|v_x a_y - v_y a_x|} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{v^2}\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}$$

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$ برای منحنی به معادله $y = y(x)$

در نقطه‌ای که شیب $\frac{dy}{dx}$ برابر صفر است شعاع انحنا: (مثل شعاع انحنا نقطه اوج پرتابه) $\rho = \frac{1}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$

دستگاه مختصات قطبی



$\vec{r} = r\hat{e}_r$ $\quad \dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$ $\quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$

بردار یکه $\hat{e}_r$ را در جهت مثبت r بردار یکه $\hat{e}_\theta$ را در جهت مثبت θ نشان می‌دهیم

$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$

* برای حرکت دایره‌ای $a_r = -a_n$

$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$ * به عبارت $2\dot{r}\dot{\theta}$ شتاب کریولیس گفته می‌شود

حرکت منحنی الخط فضایی

۱- مختصات کارتزین یا متعامد

$\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad \vec{V} = \dot{\vec{R}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \qquad \vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{R}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

۲- مختصات استوانه‌ای

$\vec{R} = r\hat{e}_r + z\hat{k} \qquad \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{k} \qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{k}$

$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad v_z = \dot{z} \qquad v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2}$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \qquad a_z = \ddot{z} \qquad a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$

۳- مختصات کروی

$\vec{R} = R\hat{e}_R \qquad \vec{V} = V_R\hat{e}_R + V_\theta\hat{e}_\theta + V_\varphi\hat{e}_\varphi \qquad V_R = \dot{R} \qquad V_\theta = R\dot{\theta}\cos\phi \qquad V_\phi = R\dot{\phi}$

$V = \sqrt{V_R^2 + V_\theta^2 + V_\phi^2}$

$$\vec{a} = a_R\hat{e}_R + a_\theta\hat{e}_\theta + a_\phi\hat{e}_\phi \qquad a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\cos^2\phi \qquad a_\theta = \frac{\cos\phi}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\theta}) - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi$$

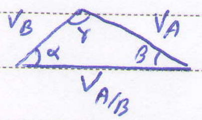
$$a_\phi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi}) - R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi \qquad a = \sqrt{a_R^2 + a_\theta^2 + a_\phi^2}$$

حرکت نسبی

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \qquad \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \qquad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

A نسبت به B : A/B

$$\frac{V_A}{\sin\alpha} = \frac{V_B}{\sin\beta} = \frac{V_{A/B}}{\sin\gamma}$$



حرکت مقید ذرات متصل به هم

قید را نوشته و با مشتق گرفتن سرعت و شتاب را نسبت به دیگر پارامترها مشخص کرده

فصل ۲ - سینتیک ذرات

قانون دوم نیوتن $\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum F_z = ma_z$

دستگاه عمودی - مماسی $\longrightarrow \sum F_n = ma_n \quad \sum F_t = ma_t \quad a_t = \dot{v} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$

دستگاه قطبی $\longrightarrow \sum F_r = ma_r \quad \sum F_\theta = ma_\theta \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

اصل دالامبر: اگر بردار $-m\vec{a}$ را به نیروهای وارد بر ذره اضافه کنیم می توان ذره را تحت نیروهای عرضی و بردار لختی در حال تعادل در نظر گرفت و به صورت استاتیکی مورد تحلیل کرد

کار و انرژی کار انجام شده بوسیله نیروی F در اثر جابجایی جزئی ds $\quad U = \int F \cdot ds$

قطبی $U = \int (F_r dr + F_\theta r d\theta) \quad U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$ نیروی مماس بر مسیر $U = \int F_t ds$

کار کمیتی عددی است و نیروی عمود بر مسیر کار انجام نمی دهد

انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم m و سرعت v - کمیتی اسکالر N.m یا J $\quad T = \frac{1}{2}mv^2$

انرژی پتانسیل گرانشی $\quad V_g = mgh$

انرژی پتانسیل الاستیک $\quad \Delta V_e = \frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2) \quad V_e = \int_0^x Kx\,dx = \frac{1}{2}Kx^2$

$U_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \longrightarrow T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} + U'_{1-2} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2}$

قانون بقای انرژی مکانیکی

نیروهای خارجی بر ذره برابر صفر است $\quad \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0 \longrightarrow T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2}$

نیروی کنسرواتیو یا پایستار = نیرویی که به مسیر بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد

انتگرال $\int F \cdot dr$ به مسیر بستگی دارد و اگر $F \cdot dr$ دیفرانسیل دقیق باشد و به صورت روبرو آید $\int dV = V_2 - V_1$

* شرط آنکه تابع $d\psi = Pdx + Qdy + Rdz$ یک دیفرانسیل دقیق از مشتقات x.y.z باشد این است که

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

اگر تابع V داشته باشیم تغییر دیفرانسیلی آن $dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$ که از مقایسه آن با $-dV = F.dr$

داریم $F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ و $F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ و $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ به صورت برداری $F = -\nabla V$ (دل ∇)

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ گویند تابع پتانسیل V و عبارت ∇V را گرادیان تابع پتانسیل

* اگر میدان های نیرویی را بتوان با روابط فوق به دست آورد نیرو کنسرواتیو یا پایستار است

ضربه و مومنتم = اندازه حرکت خطی ذره از حاصلضرب جرم و سرعت $G = mV$ $N.s$ یا $Kg.m/s$

$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}$ برآیند همه نیروهای وارد بر ذره برابر است با آهنگ تغییر مومنتم خطی آن نسبت به زمان

همچنین جهت نیرو و مومنتوم و سرعت یکسان است

ضربه خطی نیرو = حاصلضرب نیرو در زمان $\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 = \Delta \vec{G}$

$\int_{t_1}^{t_2} \sum F_x dt = (mV_x)_2 - (mV_x)_1$, $\int_{t_1}^{t_2} \sum F_y dt = (mV_y)_2 - (mV_y)_1$, $\int_{t_1}^{t_2} \sum F_z dt = (mV_z)_2 - (mV_z)_1$

اصل بقای مومنتوم خطی = اگر در بازه ای از زمان، برآیند نیروهای وارد بر ذره ای صفر باشد مومنتوم خطی آن ذره ثابت می ماند $G_1 = G_2 \rightarrow \Delta G = 0$

* تمام قوانین و اصول نظیر اصل بقای انرژی، اصل بقای مومنتم خطی، اصل بقای مومنتم زاویه ای و ... از یکدیگر مستقل می باشند

مومنتم زاویه ای: گشتاور بردار مومنتم خطی حول نقطه دلخواه O ← H_o $\vec{H}_o = \vec{r} \times m\vec{V}$

$H_x = m(V_z.y - V_y.z)$ $H_y = m(V_x.z - V_z.x)$ $H_z = m(V_y.x - V_x.y)$

گشتاور نیروهای وارد بر ذره $\sum \vec{M}_o = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \vec{r} \times m\dot{\vec{V}}$

گشتاور همه نیروهای وارد بر ذره حول نقطه O برابر است با آهنگ تغییر مومنتم زاویه ای ذره نسبت به نقطه O

کل ضربه زاویه ای وارد بر ذره حول نقطه ثابت O برابر است با تغییر مومنتم زاویه ای ذره نسبت به نقطه O

$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_o dt = H_{o_2} - H_{o_1}$ $Kg.m^2/s$ یا $N.m.s$

$M_o = \frac{dH_o}{dt}$

اصل بقای مومنتم زاویه ای = اگر گشتاور برآیند همه نیروهای وارد بر ذره حول نقطه O در طی بازه ای از زمان صفر باشد، مومنتم زاویه ای ذره حول نقطه O یعنی H_o ثابت می ماند $H_{o_1} = H_{o_2} \rightarrow \Delta H_o = 0$

برخورد

برخورد مرکزی مستقیم

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad v_1 > v_2$$

ضریب بازگشت

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{\text{سرعت نسبی جدا شدن}}{\text{سرعت نسبی نزدیک شدن}}$$

* اگر $e = 1$ ← برخورد الاستیک بدون اتلاف انرژی
* اگر $e = 0$ ← برخورد پلاستیک با اتلاف انرژی حداکثر که ذرات به هم می‌چسبند

$$v_1' = \frac{1}{1+R}\left[(1-Re)v_1 + R(1+e)v_2\right] \qquad v_2' = \frac{1}{1+R}\left[(1+e)v_1 + (R-e)v_2\right] \qquad R = \frac{m_2}{m_1}$$

اگر جسم ۲ ساکن باشد

$$v_1' = \frac{1-Re}{1+R}v_1 \qquad v_2' = \frac{1+e}{1+R}v_1$$

جهت حرکت جسم دوم همواره هم جهت با جسم اول قبل از برخورد است

ا) جهت حرکت جسم اول اگر $Re > 1$ ← برمی‌گردد، $Re = 0$ ← ساکن می‌شود، $Re < 1$ ← در همان جهت قبلی

حالات خاص

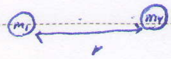
$$R = 1 \begin{cases} e = 1 \rightarrow v_1' = 0 \quad v_2' = v_1 \quad \Delta T = 0 \\ e = 0 \rightarrow v_1' = v_2' = \frac{v_1}{2} \quad \Delta T = 50\% \end{cases}$$

$$R \to 0 \begin{cases} e = 1 \rightarrow v_1' = v_1 \ , \ v_2' = 2v_1 \quad \Delta T = 0 \\ e = 0 \rightarrow v_1' = v_2' = v_1 \quad \Delta T = 0 \end{cases}$$

$$R \to \infty \begin{cases} e = 1 \rightarrow v_1' = -v_1 \quad v_2' \quad \Delta T = 0 \\ e = 0 \rightarrow v_1' = v_2' = 0 \quad \Delta T = 100\% \end{cases}$$

* اگر جسمی از ارتفاع h رها شود پس از برخورد تا ارتفاع $e^2 h$ باز می‌گردد

تبدیل سیستم ۲ ذره‌ای به سیستم یک ذره‌ای ساده



$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

برخورد مرکزی مایل

جهت بردارهای سرعت نسبت به مماس مشترک کره‌ها

$$(v_1)_n = -v_1 \sin\theta_1 \qquad (v_1)_t = v_1 \cos\theta_1$$

$$(v_2)_n = v_2 \sin\theta_2 \qquad (v_2)_t = v_2 \cos\theta_2 \qquad e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

$$m_1 (v_1)_n + m_2 (v_2)_n = m_1 (v_1')_n + m_2 (v_2')_n \qquad m_1 (v_1)_t = m_1 (v_1')_t \qquad m_2 (v_2)_t = m_2 (v_2')_t$$

مؤلفه سرعت در راستای t ثابت است

در راستای n

$$(V_1')_n = \frac{1}{1+R}\left[(1-Re)(V_1)_n + R(1+e)(V_2)_n\right]$$

$$(V_2')_n = \frac{1}{1+R}\left[(1+e)(V_1)_n + (R-e)(V_2)_n\right] \qquad R = \frac{m_2}{m_1}$$

* اگر دو جسم با جرم‌های مساوی برخورد غیرمستقیم الاستیک کنند زاویه بین سرعت‌های نهایی آن‌ها ۹۰ درجه است

* برای پرتابه به صورت روبرو برد پرتابه در پرش بعدی $L_2 = eL_1$ است

$L_1 \quad L_2$

حرکت در میدان مرکزی

$$F = G\frac{m m_e}{r^2}$$

$$-G\frac{m m_e}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad \text{قطبی} \qquad 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \longrightarrow \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \longrightarrow r^2\dot{\theta} = Cte$$

* پتانسیل گرانشی با انتخاب یک مسیر شعاعی به صورت $GP = -GM$ می‌باشد

* پتانسیل گرانشی، کار انجام شده روی جسم به جرم یک کیلوگرم است وقتی که آن جسم با تندی ثابت از نقطه معین r در راستای یک مسیر دلخواه به سوی بینهایت حرکت کند، با انتخاب یک مسیر شعاعی $GP = -\frac{GM}{r}$ است

حرکت نسبی نسبت به دستگاه مختصات انتقالی

$$\Sigma F = m a_{rel}$$

$$dU_{rel} = dT_{rel} \qquad U_{rel} = \Delta T_{rel}$$

$$\Sigma F = \dot{G}_{rel} \qquad \int \Sigma F dt = \Delta G_{rel}$$

$$\Sigma M_B = \dot{H}_{B\,rel}$$

فصل ۳- سینتیک سیستم ذرات

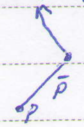
قانون دوم نیوتن برای مجموعه‌ای از ذرات منفرد با جرم m_i که $m=\sum m_i$ ، $\bar{a}$ شتاب مرکز جرم $\sum F = m\bar{a}$

کل انرژی جنبشی سیستم برابر با انرژی انتقالی مرکز جرم سیستم به علاوه انرژی ناشی از حرکت ذرات نسبت به مرکز جرم
$\dot{\rho}_i$ سرعت ذره m_i نسبت به دستگاه مختصات غیر دوار متصل به مرکز جرم $T=\frac{1}{2} m\bar{v}^2+\sum\frac{1}{2} m_i|\dot{\rho}_i|^2$

مومنتم خطی هر سیستم با جرم ثابت برابر است با جرم سیستم ضرب در سرعت مرکز جرم $G=m\bar{v}$ $\sum F=\dot{G}$

مومنتم زاویه‌ای سیستم برابر است با حاصل جمع برداری گشتاورهای مومنتم‌های خطی همه ذرات حول O $H_O=\sum(r_i\times m_i v_i)$
از حاصل جمع گشتاورهای $\sum M_O$ فقط شامل گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم $\sum M_O=\dot{H}_O$
مومنتم زاویه‌ای مطلق سیستم حول نقطه P برابر است با مومنتم زاویه‌ای سیستم حول نقطه G به علاوه گشتاور مومنتم خطی متمرکز در G ، $(m\bar{v})$ حول نقطه P $H_P=H_G+\bar{\rho}\times m\bar{v}$

$\sum M_G=\dot{H}_G$



سیستم کنسرواتیو یا پایدار: اگر انرژی سیستم به واسطه نیروی اصطکاک داخلی که کار منفی انجام می‌دهند یا به واسطه اعضای غیر الاستیک که انرژی را در چرخه حرکات خود تلف می‌کنند، تغییر نکند
اگر نیروهای خارجی (غیر از جاذبه و نیروهای پتانسیل) روی سیستم کنسرواتیو کاری انجام ندهند انرژی سیستم تغییر نخواهد کرد
در این حالت $\Delta E=0$ $E_{\text{اولیه}}=E_{\text{نهایی}}$ $\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_e=0 \rightarrow T_1+V_{g_1}+V_{e_1}=T_2+V_{g_2}+V_{e_2}$

اگر برآیند نیروهای خارجی $\sum F$ وارد بر یک سیستم نامادی در دوره‌ای از زمان صفر باشد $\dot{G}=0$ ← $G_1=G_2$
اگر گشتاور همه نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم حول نقطه ثابت O صفر باشد $H_{G_1}=H_{G_2}$

جرم متغیر $\sum F=m\dot{v}+\dot{m}u$
$\dot{m}$ آهنگ افزایش جرم و u سرعت نسبی ذرات در رسیدن به جسم

فصل ۴ = سینماتیک صفحه‌ای اجسام صلب

دوران — سرعت زاویه‌ای ω ، شتاب زاویه‌ای α $\qquad \omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot\theta \qquad \alpha=\frac{d\omega}{dt}=\dot\omega=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\ddot\theta$

$\omega d\omega=\alpha d\theta$ یا $\dot\theta d\dot\theta=\ddot\theta d\theta \qquad \omega=\omega_0+\alpha t \qquad \omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\theta-\theta_0) \qquad \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

$v=r\omega \qquad a_n=r\omega^2=\frac{v^2}{r}=v\omega \qquad a_t=r\alpha$

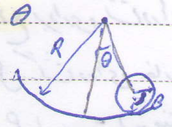
$\vec v=\vec\omega\times\vec r \qquad a_n=\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)= \qquad a_t=\vec\alpha\times r$

حرکت مطلق: ابتدا روابط هندسی که وضعیت جسم مورد نظر را مشخص می‌کنند را نوشته سپس نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

حرکت چرخ روی سطح کاو یا گوژ
$a_t=r\alpha \qquad v_0=r\omega$

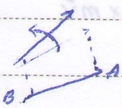
$\omega=\dot\beta \qquad \alpha=\ddot\beta \qquad \beta=\frac{(R-r)}{r}\theta$

$\omega=(\frac{R}{r}-1)\dot\theta \qquad \alpha=(\frac{R}{r}-1)\ddot\theta$



حرکت نسبی

$\vec V_A=\vec V_B+\vec V_{A/B}=\vec V_B+\underbrace{\vec\omega\times\vec r}_{\vec V_{A/B}}$



مرکز آنی دوران: نقطه‌ای که سرعتش به طور لحظه‌ای صفر است ولی شتاب آن در حالت کلی صفر نیست

* مرکز آنی دوران برای دو عضو در حرکت صفحه‌ای ← نقطه‌ای فرضی که در یک لحظه خاص برای هر دو عضو سرعتش برای هر دو عضو یکسان باشد
* برای یک چرخ با غلتش محض سرعت نقطه‌ای از محیط که با زمین تماس دارد صفر است ← مرکز آنی دوران

شتاب نسبی

$\vec a=\vec a_B+\vec a_{A/B}=\vec a_B+(\vec a_{A/B})_n+(\vec a_{A/B})_t$

$(\vec a_{A/B})_n=\frac{v_{A/B}^2}{r}=r\omega^2=\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) \qquad (\vec a_{A/B})_t=\dot v_{A/B}=r\alpha=\vec\alpha\times\vec r$

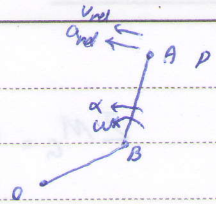
شتاب مرکز آنی دوران یک چرخ در حال غلتش محض مستقل از α و جهت آن به طرف مرکز چرخ است

حرکت نسبت به محور دوار

$\vec r_A=\vec r_B+\vec r$

$\vec V_A=\vec V_B+\vec\omega\times\vec r+\vec V_{rel}$

مشتق بردار یکه $\qquad \dot{\hat i}=\vec\omega\times\hat i \qquad \dot{\hat j}=\vec\omega\times\hat j$

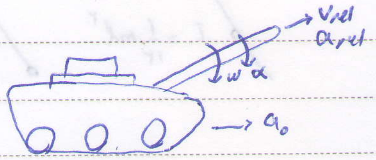


$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \underbrace{2\vec{\omega} \times V_{rel}}_{\text{شتاب کریولیس}} + \vec{a}_{rel}$$

ضرب خارجی بردار سرعت نسبی و سرعت زاویه

بردار مکان نقطه P در مبدأ B r — شتاب مطلق مبدأ دستگاه دوار a_B — سرعت مطلق مبدأ B دستگاه V_B

V_p سرعت نقطه A نسبت به دستگاه دوار V_{rel} — شتاب زاویه دستگاه دوار α — سرعت زاویه دستگاه دوار ω



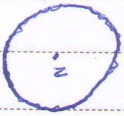
فصل ۵ - سینتیک صفحه‌ای اجسام صلب

معادلات برداری نیرو و گشتاور

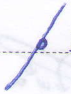
$$\sum \vec{F} = m\bar{a} \qquad \sum M_G = \dot{H}_G = \bar{I}\vec{\alpha}$$

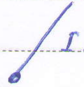
$\bar{I}$ همان اینرسی جرمی جسم حول محور z گذرنده از مرکز ثقل

I_G همان اینرسی جسم حول محوری گذرنده از مرکز جرم، همان اینرسی حول محوری موازی $I_N = I_G + mr^2$


$I = mr^2$

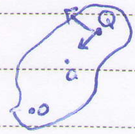

دیسک
$I = \frac{1}{2} mr^2$


$I = \frac{1}{12} ml^2$


$I = \frac{1}{3} ml^2$


کره
$I = \frac{2}{5} mR^2$


$I = \frac{1}{4} mr^2$



مرکز ضربه q

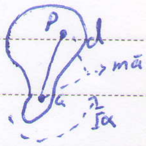
$$q = \frac{K_o^2}{\bar{r}} \qquad K^2 = \frac{I_o}{m} , \quad \bar{r} = \overline{GO}$$

* برآیند همه نیروهای وارد بر جسم از مرکز ضربه می‌گذرد
* اگر نیرویی به مرکز ضربه یک پاندول وارد شود پیچ گردنده عکس‌العملی وجود نخواهد داشت

دینامیک حرکت صفحه‌ای کلی

جسم صلب که تلفیقی از انتقال و دوران است حول نقطه P

$$\sum M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$



روابط کار و انرژی

$T = \frac{1}{2} mv^2$ انرژی جنبشی انتقالی

$T = \frac{1}{2} I_o \omega^2$ انرژی جنبشی دورانی

$T = \frac{1}{2} m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$ انرژی جنبشی کل

$\bar{I}$ اینرسی جرمی حول مرکز جرم آن — $\bar{v}$ سرعت انتقال مرکز جرم

$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ رابطه کار - انرژی

$P = F \cdot V + M\omega$ توان P آهنگ انجام کار در واحد زمان

* در حرکت چرخ روی زمین با اصطکاک چون سرعت مرکز آنی دوران صفر است پس کار نیروی اصطکاک صفر است
* اگر چرخ روی یک صفحه حرکت کند کار نیروی اصطکاک حتی اگر چرخ نلغزد صفر نمی‌شود

کار مجازی

dU' کل کاری که همه نیروهای فعال غیر پتانسیل طی جابه‌جایی بینهایت کوچک سیستم روی می‌دهد $dU' = dT + dV$

$$dU' = \sum m_i \bar{a}_i \cdot \delta \bar{s}_i + \sum \bar{I}_i \alpha_i \delta\theta_i + \sum m_i g \delta h_i + \sum k_j x_j \delta x_j$$

ضربه و مومنتم سیستم ذرات

$G = m\bar{v}$ $\quad \sum F = \dot{G}$ $\quad \int_{t_1}^{t_2} \sum F\, dt = G_2 - G_1$

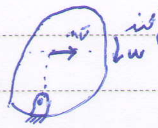
$H = \bar{I}\omega$ $\quad \sum M_G = \dot{H}$ $\quad \int_{t_1}^{t_2} \sum M_G\, dt = H_{G_2} - H_{G_1}$

$H_O = \bar{I}\omega + m\bar{v}d$ مومنتم زاویه‌ای H_O حول نقطه دلخواه O و $\vec{d}$ از مرکز ثقل G به سمت نقطه O

اگر جسم حول نقطه ثابت O دوران کند

$H_O = I_O \omega$

$\sum M_O = I_O \dot{\omega}$ $\quad \int_{t_1}^{t_2} \sum M_O\, dt = I_O(\omega_2 - \omega_1)$



اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم — سرعت مرکز جرم

اندازه حرکت (تکانه) زاویه‌ای یک جسم حول یک نقطه دلخواه در فضا مانند O برابر $H_O = H_G + m r_{OG} \times V_G$

اندازه حرکت اسپینی — اندازه حرکت مداری

* تکانه زاویه‌ای مرکز جرم نسبت به نقطه‌ای ثابت در یک چارچوب لخت را تکانه زاویه مداری جسم
* تکانه زاویه‌ای اسپینی تکانه زاویه‌ای جسم نسبت به مرکز جرمش

ضربه و مومنتم جسم مرکب

$\sum F = \dot{G}_1 + \dot{G}_2 + \dots$ $\quad \int_{t_1}^{t_2} \sum F\, dt = (\Delta G)_{system}$

$\sum M_O = \dot{H}_{O_1} + \dot{H}_{O_2} + \dots$ $\quad \int_{t_1}^{t_2} \sum M_O\, dt = (\Delta H_O)_{system}$

اگر ضربه خطی صفر باشد ($\sum F = 0$) بردار مومنتم خطی ثابت می‌ماند ($\Delta G = 0$)

اگر ضربه زاویه‌ای صفر باشد ($\sum M = 0$) مومنتم زاویه‌ای حول نقطه ثابت یا حول مرکز جرم ثابت می‌ماند