Subject
Date همصر

۴- تعداد شاخه‌های مکان هندسی :

(n) تعداد قطب‌های مدار باز = تعداد شاخه‌های مکان

= حداکثر درجه چندجمله‌ای معادله مشخصه

فیدبک ⊕ یا منفی

~~صفرهای مکان هم~~ از هر قطب به هر صفر یک شاخه داریم

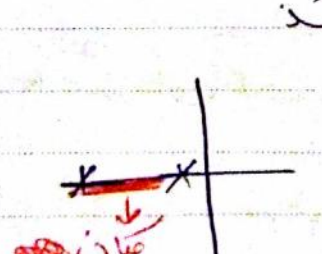
۵- تقارن منحنی :

مکان هندسی نسبت به محور حقیقی متقارن است (فیدبک ⊕ یا منفی)

۶- قسمت‌هایی از محور حقیقی که جزو مکان هستند.

در اینجا بین فیدبک ⊕ و ⊖ تفاوت داریم!!! اولین تفاوت

فیدبک منفی : قسمت‌هایی از محور حقیقی جزو مکان است که مجموع تعداد قطب‌ها (x) و صفرهای (o) مدار باز عدد فرد باشد
محدود



صفر = زوج

~~فیدبک مثبت~~

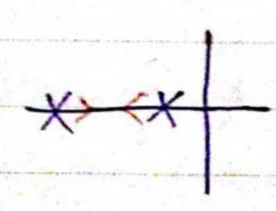
نکته: مکان هندسی از قطب شروع و به صفر ختم می‌شود.

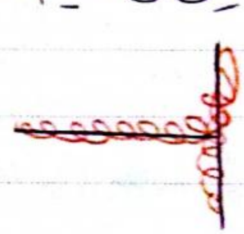
قطب × →

صفر ○ →

ادش درنیست: حتماً شاخه از قطب خارج و به صفر ختم شود

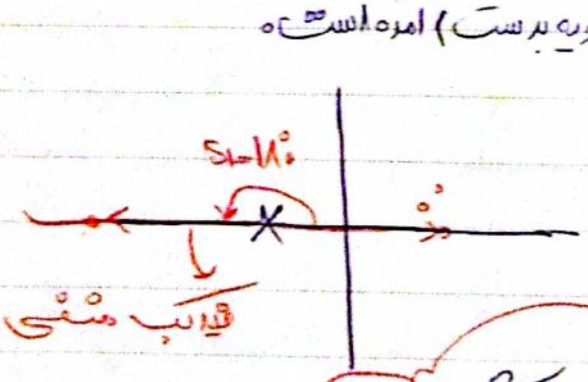
اگر قطبی نداشتند با نکته بالا تشخیص می‌دهیم × یا ○ است





فیدبک مثبت:

قسمت‌هایی از محور حقیقی جزء مکان است که مجموع تعداد قطب و صفرها سمت راست آن‌ها عدد زوج باشد (این از شرط زاویه بدست آمده است.)



صفر را جزء اعداد زوج در نظر می‌گیریم.

۷- صفرهای نامحدود (مجانب‌ها):

صفرهای نامحدود مجانب‌هایی هستند که مکان هندسی در بی‌نهایت در جهت به آن ختم می‌شود.

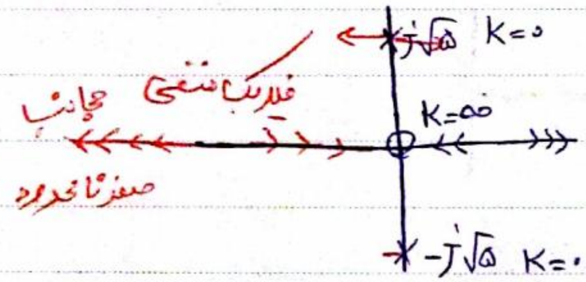
۱) تعداد مجانب (صفرهای نامحدود):

تعداد مجانب‌ها $= n - m$

۲) مختصات محل برخورد مجانب‌ها با محور حقیقی:

$$\sigma_a = \frac{(\text{مجموع قسمت‌های حقیقی قطب‌های مدار باز}) - (\text{مجموع قسمت‌های حقیقی صفرهای محدود مدار باز})}{n - m}$$

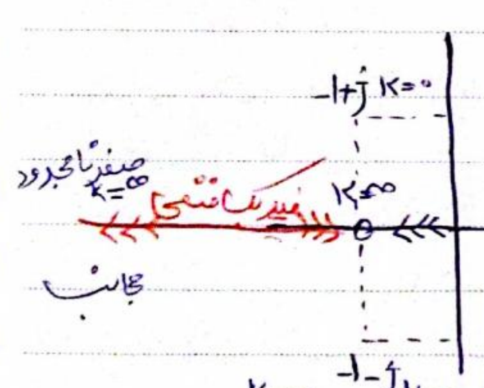
الف)



$n - m = 1$ $\qquad \phi_a = \frac{180}{1} = 180^\circ$ محور حقیقی منفی

در این مجانب لازم نیست حساب کنیم

ب)



$n - m = 1$ $\qquad \theta_a = 180$

ج)

$n - m = 2$

$n = 2,\ m = 0 \qquad \sigma_a = \frac{(-1-2)-(0)}{2-0} = -1.5$

$$\phi_a = \frac{(2K'+1)180}{2} = (2K'+1)\times 90$$

$K' = 0 \Rightarrow \phi_a = 90$

$K' = 1 \Rightarrow \phi_a = 270$

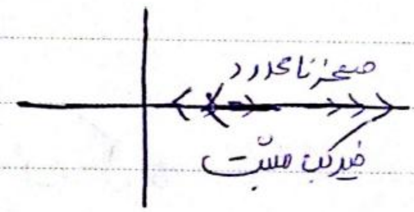
Subject
Date

در فیدبک + و - ، ۷-۱ و ۷-۲ یکسانند

۷-۳ - زاویه مجانب ها با محور حقیقی ⊕

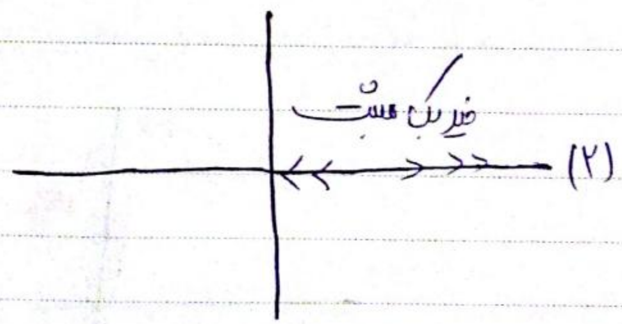
$$\phi_a = \begin{cases} \dfrac{(2k'+1)180^\circ}{n-m} \;,\; k'=0,1,2,\dots,n-m-1 & \text{فیدبک منفی} \\[2ex] \dfrac{k'\times 360^\circ}{n-m} \;,\; k'=0,1,2,\dots,n-m-1 & \text{فیدبک مثبت} \end{cases}$$

(۱) فیدبک مثبت $\phi_a = \dfrac{0\times 360}{1} = 0^\circ$



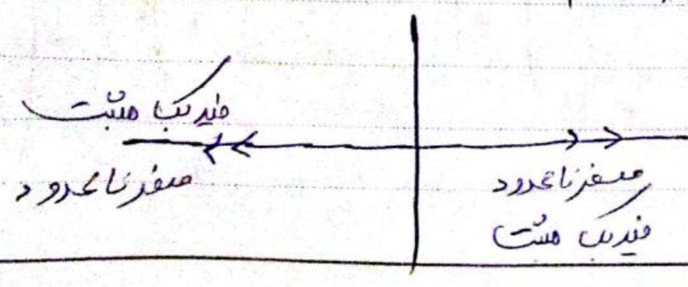
نکته: فیدبک ⊕ و ⊖ در ۷-۳ تفاوت دارند

(۲)



(۳)

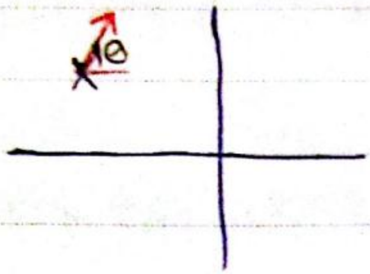
$$\phi_a = \frac{k'\times 360}{2} \begin{cases} k'=0 \rightarrow \phi_a = 0 \\ k'=1 \Rightarrow \phi_a = 180 \end{cases}$$



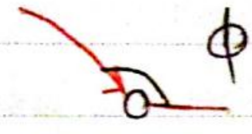
PAPCO

۸ـ زاویه جدا شدن شاخه از قطب و زاویه رسیدن شاخه به صفر

منتظر منتظر



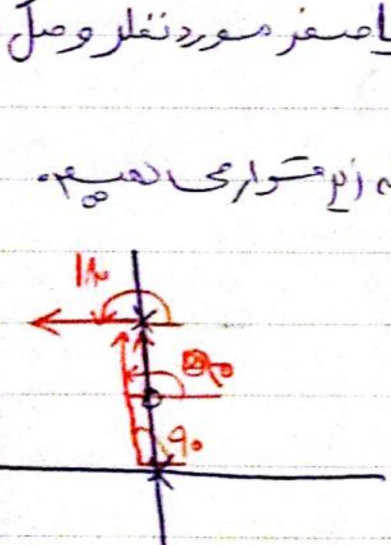
θ: زاویه جدا شدن شاخه از قطب



φ زاویه رسیدن به صفر

چون فیدبک ⊕ و منفی تفاوت داره

از تمام قطب و صفرها به قطب یا صفر مورد نظر وصل کرده و زوایا را نسبت به محور حقیقی اندازه گیری و در رابطه زیر قرار می دهیم.



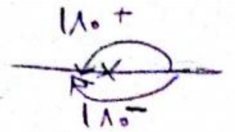
هدف: محاسبه زاویه خروج از قطب j

θ + (مجموع زوایای قطب ها تا قطب مورد نظر) − (مجموع زوایای صفرها تا قطب مورد نظر + φ) = { فیدبک منفی $\pm 180^\circ$ ، فیدبک مثبت 0 یا 360 }

φ: زاویه ورود به صفر مورد نظر

θ: زاویه خروج از قطب مورد نظر

Subject
Date

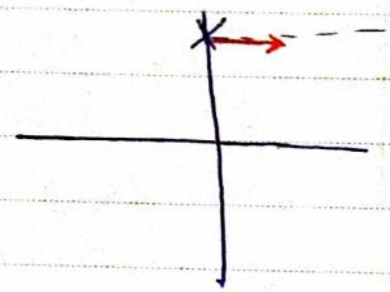


ضریب منفی $90 - (90+\theta) = \pm 180 \Rightarrow \theta = \pm 180$

$-\theta = \pm 180 \Rightarrow \theta = \pm 180^\circ$

ضریب مثبت : $90 - (90+\theta) = 0$ یا 360

$\Rightarrow -\theta = 0$ یا $360 \Rightarrow \theta = 0$ یا 360



۶_ نقطه شکست :

محل برخورد شاخه ها با یکدیگر را نقطه شکست می نامند.

بین دو قطب روی محور حقیقی در شرایطی که بین این دو قطب صفر هیچ صفری وجود نداشته باشد نقطه شکست به وجود می آید که به آن واگرا گفته می شود.

نکته مهم : در نقطه شکست قطب های مدار بسته تکراری هستند

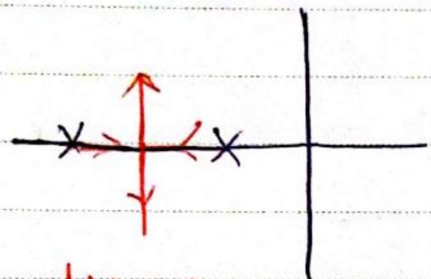
مثلاً اگر دو شاخه برخورد کنند ← مرتبه ۲ ۳ شاخه ← مرتبه ۳

مرتبه تکرار قطب های تکراری = تعداد شاخه های برخورد کننده در نقطه شکست

تعداد شاخه ها بعد از برخورد = تعداد شاخه ها قبل از برخورد

شاخه ها صفحه را به زوایای مساوی تقسیم می کنند

$$\text{زاویه بین شاخه ها} = \frac{180}{\text{تعداد شاخه ها قبل از برخورد}} = \frac{360}{\text{تعداد کل شاخه ها}}$$



$$\frac{180}{2} = 90$$

مختصات نقطه شکست: ریشه یا ریشه های از معادله زیر است:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

اما تمام ریشه های این معادله لزوماً مختصات نقطه شکست نیستند

فیدبک منفی:

الف | $1 + K\frac{s}{s^2+5} = 0 \rightarrow K = -\frac{s^2+5}{s}$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{-2s^2 + s^2 + 5}{s^2} = 0$$

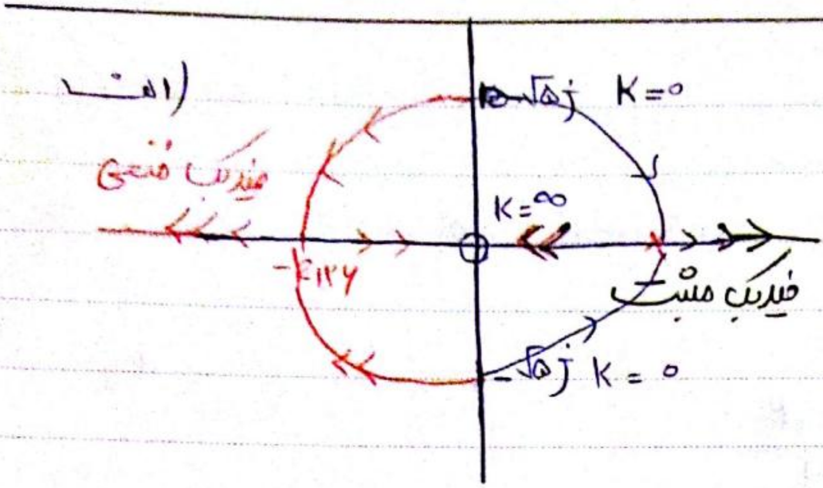
$$\rightarrow -s^2 + 5 = 0 \Rightarrow s^2 = 5 \Rightarrow s = \pm\sqrt{5}$$

$s = -2.24 \longrightarrow$ فیدبک منفی است

$s = 2.24$

Date

الف)



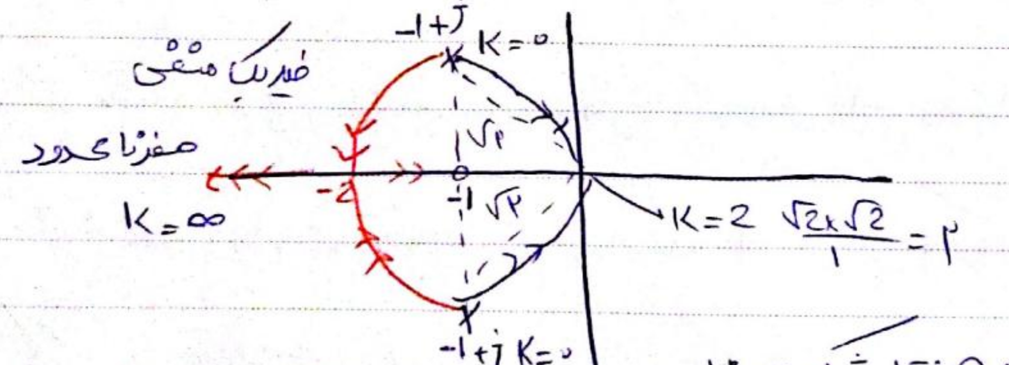
ب)

$$1 + K\frac{s+1}{s^2+2s+2} = 0 \Rightarrow K = -\frac{s^2+2s+2}{s+1}$$

فیدبک منفی

$$\frac{dK}{dS} \Rightarrow (-2s-2)(s+1) + s^2+2s+2 = 0$$

$$-s^2 - 2s = 0 \quad \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2 \checkmark \end{cases}$$



برای فیدبک ⊕ نقطه شکست نداریم

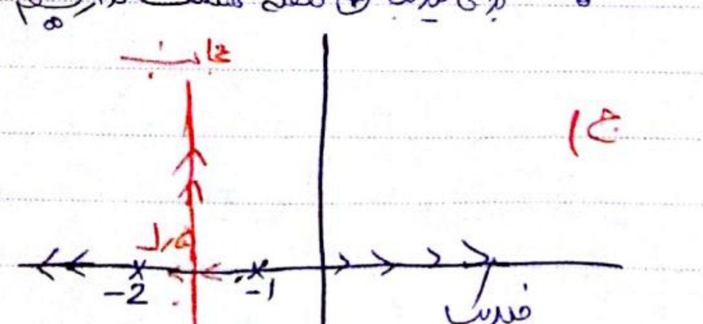
ج)

$$1 + K\frac{1}{(s+1)(s+2)} = 0$$

$$K = -(s^2+3s+2)$$

$$\frac{dK}{dS} = 0 \rightarrow -2s-3 = 0$$

$$S = -\frac{3}{2}$$



فیدبک مثبت:

$$K = \frac{s^2+5}{s}$$

$$\frac{dK}{dS} = \frac{2s^2 - s^2 - 5}{S} = 0 \Rightarrow S_{1,2} = \pm\sqrt{5}$$

ب)

$$K = \frac{S^2+2S+3}{S+1}$$

$$\frac{dK}{dS} = (2S+2)(S+1) - S^2 - 2S - 3$$

$$S^2 + 2S = 0 \Rightarrow S_{1,2} = 0, -2$$

۱۰) محل برخورد شاخه‌ها با محور موهومی:

در محل برخورد شاخه‌ها با محور موهومی سیستم در مرز پایداری است.

۱- جایگذاری $s=j\omega$ در معادله مشخصه و پیدا کردن ω که همان محل برخورد شاخه‌ها با محور موهومی است

۲- استفاده از راوث: با استفاده از راوث سطر صفر ایجاد نموده و ریشه‌های معادله کمکی معمولاً محل برخورد شاخه‌ها با محور موهومی است.

الف) فیدبک منفی:

$$1 + K\frac{S}{S^2+5} = 0$$

$$\rightarrow S^2 + 5 + KS = 0$$

$$\rightarrow S^2 + KS + 5 = 0$$

معادله درجه ۲ سیستم پایداری است $\rightarrow K>0$

محل برخورد شاخه با محور موهومی $K=0 \Rightarrow s^2+5=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm\sqrt{5}j$

ب) فیدبک منفی

$$1+K\frac{s+1}{s^2+2s+2}=0$$

$$s^2+2s+2+Ks+K=0$$

$$s^2+(K+2)s+K+2=0$$

به ازای $K>0$ هیچ شاخه‌ای محور موهومی را قطع نمی‌کند.

ج) فیدبک منفی

$$s^2+3s+2+K=0$$

به ازای $K>0$ هیچ شاخه محور موهومی را قطع نمی‌کند.

ج م فیدبک مثبت:

$$1-\frac{K}{s^2+3s+2}=0$$

$$s^2+3s+2-K=0 \qquad K=2$$

اگر $K=2 \Rightarrow s^2+3s=0 \rightarrow s(s+3)=0 \quad \begin{cases} s=0 \\ s=-3 \end{cases}$

$K=2$ ← محل برخورد شاخه با محور موهومی

پایدار $0<K<2$

مرز پایداری $K=2$

ناپایدار $K>2$

هر وقت شاخه محور موهومی را قطع کند در ~~…~~ تزلزل است.

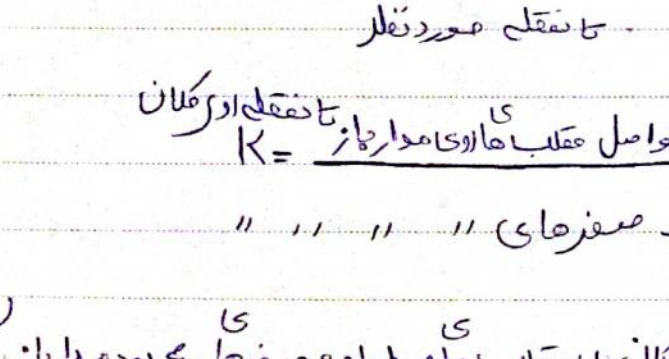
۱۱) محاسبه K در نقاط مختلف مکان:

$$1 = K \times \frac{\text{حاصل ضرب فواصل صفرها تا نقطه مورد نظر}}{\text{حاصل ضرب فواصل قطب تا نقطه مورد نظر}}$$ از شرط اندازه

$$K = \frac{\text{حاصل ضرب فواصل قطب های مدار باز تا نقطه ای از مکان}}{\text{حاصل ضرب صفرهای " " " "}}$$

برای محاسبه K در هر نقطه مکان از قطب های مدار باز و صفرهای محدود مدار باز به آن نقطه وصل و فواصل را اندازه گیری و در رابطه فوق قرار می دهیم.

~~…~~ برای سیستم هایی که فاقد صفر محدود هستند در مخرج کسر K، ۱ قرار می دهیم.



$$K = \frac{1\times 2}{1} = 2$$

فاقد صفر محدود

Subject
Date

در مثال ج و با فیدبک منفی

مثال) K را طوری بدست آورید که در فیدبک منفی ریشه ها تکراری شوند یعنی K را در نقطه

شکست بدست آورید.

$$\underset{\text{نقطه شکست}}{|K|} = \frac{0.5 \times 0.5}{\underset{\text{صفر نداریم}}{1}} = 0.25$$

$K = 0.25$

$S_{1,2} = -1.5$

روت-لوکاس

معیار پایداری:

از نقطه نظر روت-لوکاس سیستم پایدار است اگر هیچ شاخه ای در RHP قرار نگیرد.

فیدبک منفی: اگر تمام قطبها و صفرها در LHP باشند و $n-m = 0, 1$ سیستم پایدار است.

$$\phi_a = 180$$

$n-m=2$: سیستم پایدار است اگر تمام قطب و صفرها در LHP و σ_a نیز در LHP باشد.

$$\phi_a = 90, 270$$

$n-m$	ϕ_a
1	180
2	90, 270
3	60, 180, -60
4	45, 135, 225, -45

: $n-m \geq 3$

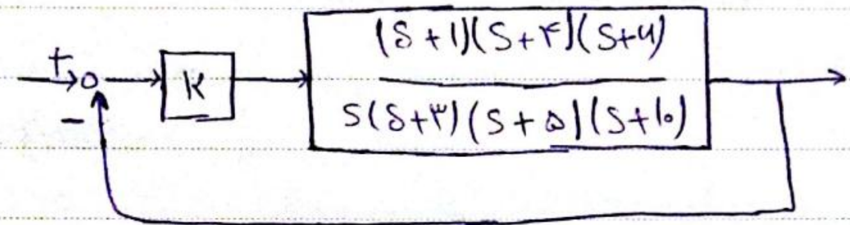
PAPCO

چون تعداد از جانب ها محور موهومی را قطع می کنند بنابراین سیستم به ازای بعضی مقادیر K ناپایدار است

فیدبک مثبت :

به ازای بعضی مقادیر K ناپایدار است .

تست : در ارتباط با سیستم مدار بسته زیر کدام عبارت صحیح است ؟



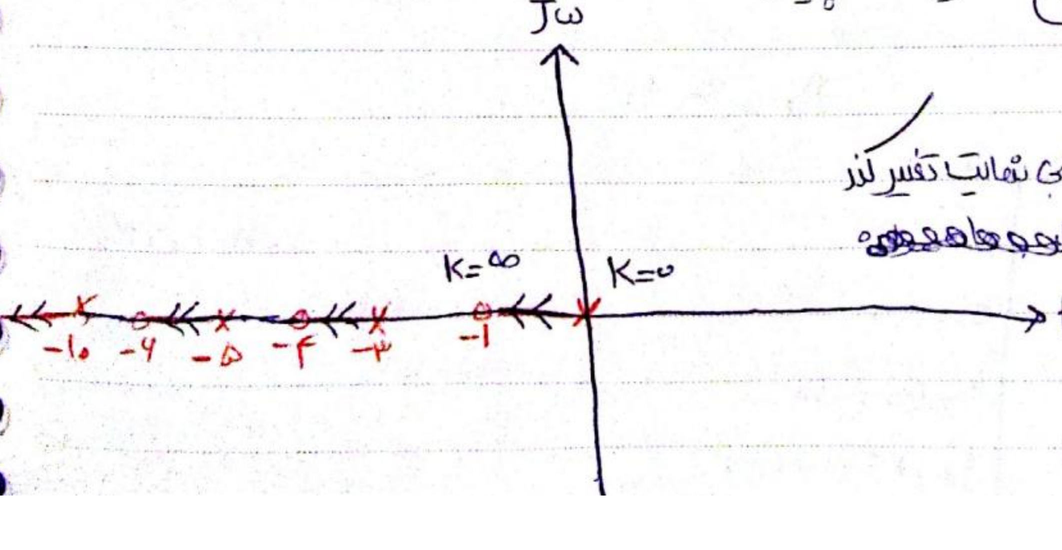
و سیستم نوسان نمی کند

۱- سیستم به ازای تمام مقادیر K پایدار است ✓ — از روث مشکل است

۲) سیستم به ازای مقادیر کوچک K پایدار است — قطب های مدار بسته همواره حقیقی اند ← سیستم نوسان نمی کند

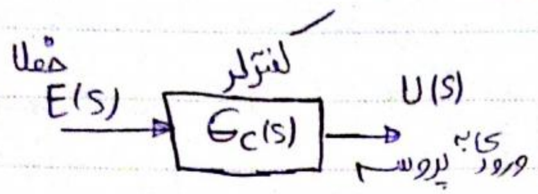
۳) سیستم به ازای مقادیر بزرگ K پایدار است

۴- سیستم به ازای جمیع مقادیر K ناپایدار است.



اگر K از صفر تا بی نهایت تغییر کند شاخه ها ~~...~~ سمت چپ هستند

طراحی کنترلرها با استفاده از مکان هندسی:



انواع کنترلرها:

۱- کنترلر تناسبی (P-action)

$$G_c(s) = K$$ بهره کنترلر

اجزا کنش ← تصمیم گیرنده — تحلیل کننده ← مقایسه کننده

کنترلر تناسبی هیچ صفر و قطبی به سیستم اضافه نمی‌کند.

۲- کنترلر انتگرالی (I-action)

$$G_c(s) = \frac{1}{T_i s}$$

T_i: ثابت زمانی انتگرالی

سبب افزودن یک قطب در مبدا مختصات به سیستم می‌شود.

۳- کنترلر تناسبی انتگرالی (PI-action) کاهش خطای ماندگار

$$G_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

سبب افزودن یک قطب در مبدأ و یک صفر در $-\frac{1}{T_i}$ می شود.

۴- کنترلر تناسبی مشتقی (PD-action)   افزایش پایداری

$$G_c(s) = K(1+T_d s)$$

T_d ثابت زمانی مشتقی

یک صفر در $-\frac{1}{T_d}$ به سیستم اضافه می کند.

۵- کنترلر تناسبی مشتقی انتگرالی (PID-action)

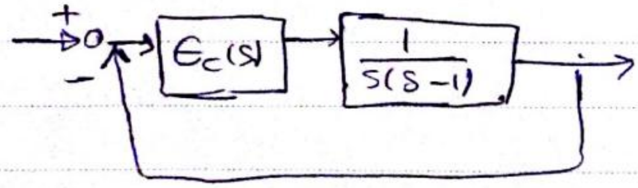
$$G_c(s) = K\left(1+T_d s+\frac{1}{T_i s}\right)$$

یک قطب در مبدأ دو صفر ریشه‌های معادله به سیستم اضافه می کند

$$T_d T_i s^2 + T_i s + 1 = 0$$

به سیستم اضافه می کند.

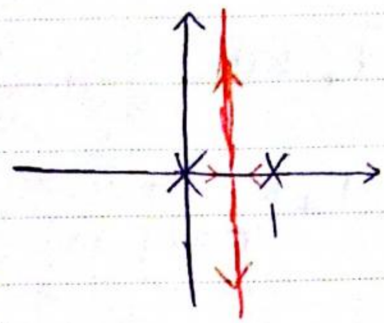
مثال ۱) کدام کنترلر سبب پایدار شدن سیستم مدار بسته زیر می شود؟



۱) تناسبی K ۲) انتگرالی $\frac{1}{T_i s}$ ۳) تناسبی ـ انتگرال $K\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$ ۴) تناسبی مشتقی $K(1+T_d s)$

معادله مشخصه مدار بسته : $1 + G_c(s) \times \frac{1}{s(s-1)} = 0$

۱) تناسبی



تناسبی

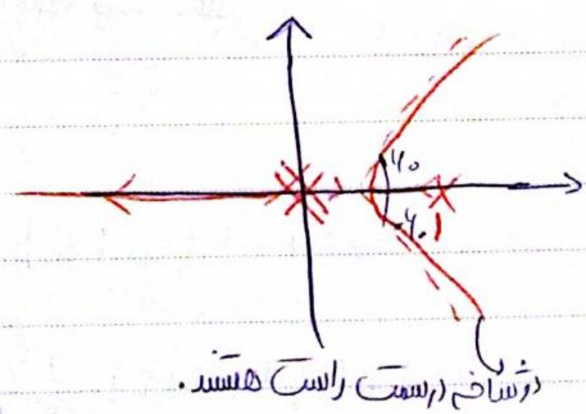
$1 + K\frac{1}{s(s-1)} = 0 \rightarrow$ ناپایدار

۲) انتگرالی

$G_c(s) = \frac{1}{T_i s}$

$1 + \underbrace{\frac{1}{T_i}}_{K}\frac{1}{s} \times \frac{1}{s(s-1)} = 0 \qquad 1 + K\frac{1}{s^2(s-1)} = 0$

ناپایدار است.



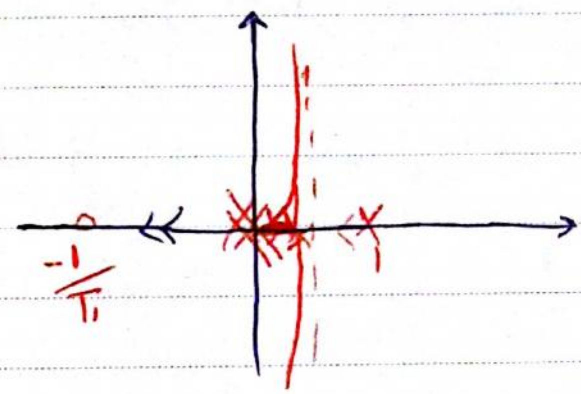
دو شاخه در سمت راست هستند.

۳- تناسبی - انتگرالی

$$G_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$1 + K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\frac{1}{s(s-1)} = 0$$

$$1 + K\frac{1 + T_i s}{T_i s^2(s-1)} = 0$$



$$\sigma_a = \frac{1 + \frac{1}{T_i}}{2} \Rightarrow RHP$$ زیرا کمیت ⊕ است

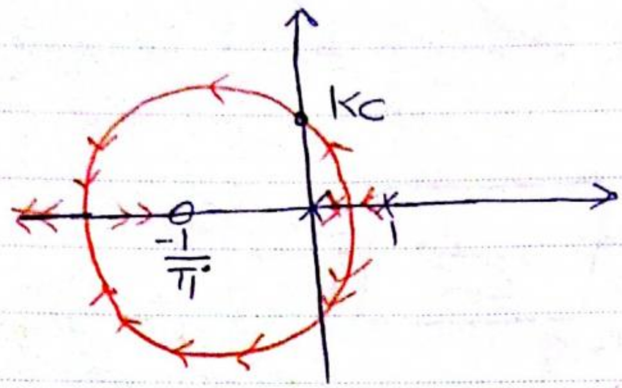
۴- تناسبی مشتقی

$$G_c(s) = K(1 + T_d s)$$

$$1 + K(1 + T_d s)\frac{1}{s(s-1)} = 0$$

$$1 + K\frac{1 + T_d s}{s(s-1)} = 0$$

Subject
Date



پایدار است $K>KC$

مرز پایداری $K = KC$

ناپایدار $K<KC$

پاسخ فرکانسی سیستم‌ها:

- تعریف پاسخ فرکانسی

- محاسبه اندازه $|G(j\omega)|$
  و زاویه فاز $\angle G(j\omega)$

- منحنی نایکوئیست
  - مینیمم فاز
  - نامینیمم فاز

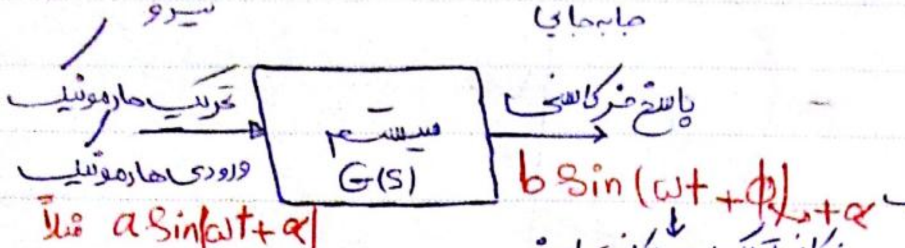
- معیار پایداری نایکوئیست

- دیاگرام بود

- ثابت‌های خطا از دیاگرام بود

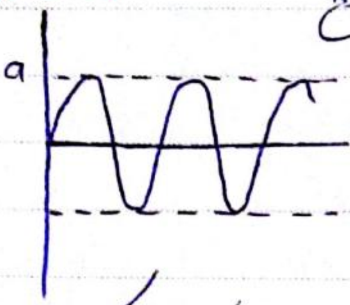
- حاشیه فاز، حاشیه بهره

تعریف پاسخ فرکانسی: پاسخ سیستم به تحریک هارمونیک را پاسخ فرکانسی می نامند



b: دامنه پاسخ

φ: اختلاف فاز تحریک و پاسخ



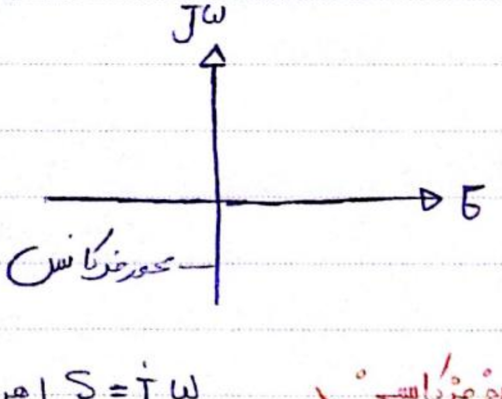
a: دامنه تحریک

ω: فرکانس تحریک

پاسخ فرکانسی حتماً یک پاسخ هارمونیک است با همان فرکانس تحریک و دامنه متفاوت و اختلاف فاز

مثال:

$$F \sin \omega t \longrightarrow X \sin(\omega t + \phi)$$



پاسخ فرکانسی $S = j\omega$ (هرجا S داریم $j\omega$ می گذاریم)

$$G(S) \rightarrow G(j\omega)$$

$$\rightarrow |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

$M(\omega) = |G(j\omega)|$ $\qquad$ $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$

$G(j\omega)$ اندازه $\qquad$ $G(j\omega)$ زاویه فاز

نتیجه ۳

$$\frac{\text{دامنه پاسخ}}{\text{دامنه تحریک}} = \frac{b}{a} = |G(j\omega)|$$

$$\text{اختلاف فاز تحریک و پاسخ} = \phi = \angle G(j\omega)$$

$$\xrightarrow{100\sin 2t} \boxed{\frac{1}{s+1}} \xrightarrow{?} b\sin(\omega t+\phi)$$

تحریک هارمونیک است پس پاسخ نیز هارمونیک است.

پاسخ هارمونیک سیستم فوق کدام است ؟

۱) $20\sqrt{5}\sin(2t+\cancel{45})$ 63 $\qquad$ ۲) $20\sqrt{5}\ \sin(2t-\cancel{45}^\circ)$ 63 ✓

۳) $10\sqrt{5}\sin(2t+45)$ $\qquad$ ۴) $10\sqrt{5}\sin(2t-45)$

$a=100$

$$b = a \times |G(j\omega)| < \begin{matrix} 20\sqrt{5} \\ 10\sqrt{5} \end{matrix}$$

$$\phi \angle G(j\omega) < \begin{matrix} 45^\circ \\ -45^\circ \end{matrix}$$

محاسبه $|G(j\omega)|$ اندازه $G(j\omega)$

$\angle G(j\omega)$ زاویه فاز $G(j\omega)$

روش تحلیلی : $|G(j\omega)|$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\;|\times|\;|\times|\;|}{|\;|\times|\;|\times|\;|} \quad \sqrt{Re^2 + Im^2}$$

مثلاً $G(s) = \frac{1}{1+s} \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|1|}{|j\omega+1|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} \longrightarrow M(\omega=2) = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

یعنی تنها کمیتی که تغییر می‌کند ω است

$$b = 100 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 20\sqrt{5}$$

$\angle G(j\omega)$:

$$\angle G(j\omega) = \frac{\text{عبارت‌های صورت}}{\text{عبارت‌های مخرج}}$$

$\angle G(j\omega) =$ مجموع زوایای عبارت‌های صورت $-$ مجموع زوایای عبارت‌های مخرج

زاویه فاز هر عبارت مختلط $= \tan^{-1} \frac{Im}{Re}$

$\angle$ عدد حقیقی مثبت $= 0$

$\angle$ عدد حقیقی منفی $= 180$

$\angle \frac{1}{j\omega+1} = \angle 1 - \angle j\omega+1 = -\tan^{-1}(\omega)$

$-\tan^{-1} ۲ = -۶۳°$

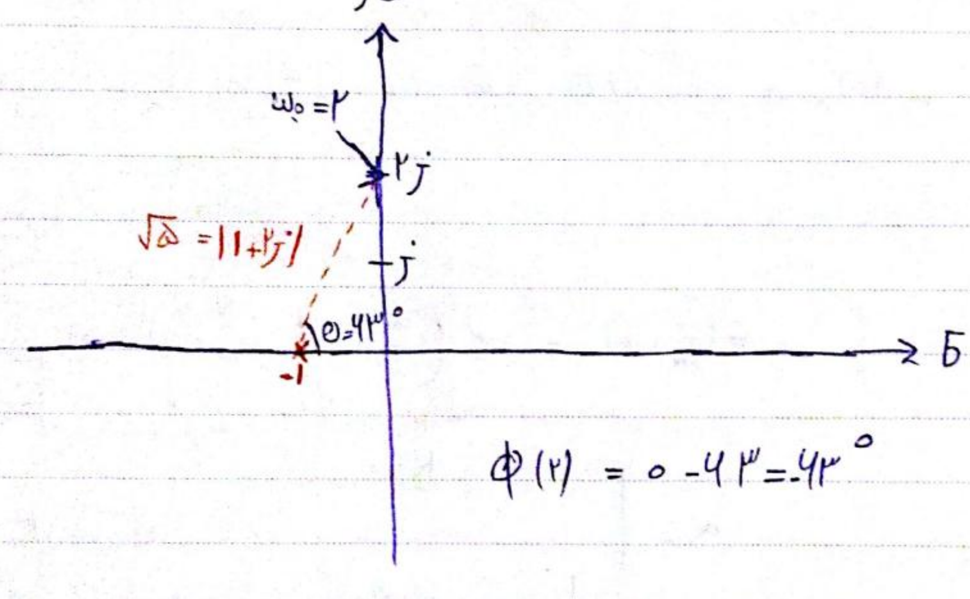
روش ترسیمی : بدون انجام رابطه‌ی کلی $M(\omega)$ و $\Phi(\omega)$ را برای مقادیر $M(\omega_0)$ و

$\Phi(\omega_0)$ را مشخص می‌کند برای محاسبه $M(\omega_0)$ و $\Phi(\omega_0)$ ابتدا ω_0 را روی محور موهومی

ω_0 : فرکانس مشخص . مشخص می‌کنیم.

در مثال
$$b = M(۲) \times ۱۰۰$$
$$\Phi = \Phi(۲)$$

ω_0 فقط می‌تواند روی محور موهومی باشد زیرا فرکانس است



$\Phi(۲) = 0 - ۶۳ = -۶۳°$

صفر و قطب‌های $G(s)$ را در صفحه s مشخص می‌کنیم

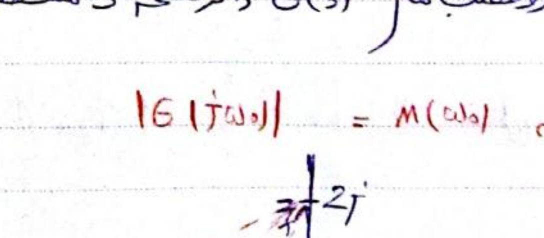
محاسبه $M(\omega_0) = |G(j\omega_0)|$

$|G(j\omega_0)| = \frac{۱۱}{|2j+1|}$

فاصله نقطه ۲j تا قطب ۱-

فاصله ۲j تا ۲-

یا $|G(s)| = \frac{|K||(s+۲)(s+۴)|}{|(s+1)(s+۳)|}$



Subject
Date

شکل: نمونه‌ای از شرکت هستم داریم

از نقطه ω_0 روی محور موهومی به تمام قطب‌ها و صفرها وصل کرده، فواصل را اندازه‌گیری و در رابطه‌ی

زیر قرار می‌دهیم:

$$M(\omega_0) = |G(j\omega_0)| = \frac{\text{حاصل ضرب فواصل از صفرها} \times \text{اندازه عدد ثابت}}{\text{حاصل ضرب فواصل از قطب}}$$

اگر صفر نداشتیم به جای حاصل ضرب صفرها در صورت عدد یک را جایگزین می‌کنیم

برای محاسبه $G(j\omega)$ = $\phi(\omega_0)$ زوایای بردارهای حاصل از صفرها و قطب‌ها

تا نقطه ω_0 روی محور موهومی را نسبت به محور حقیقی G اندازه‌گیری و در رابطه

زیر قرار می‌دهیم:

$$\angle G(j\omega_0) = \alpha(\pm 180) + \text{مجموع زوایای از صفرها} - \text{مجموع زوایا از قطب}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & K>0 \\ \\ +1 & K<0 \end{cases}$$

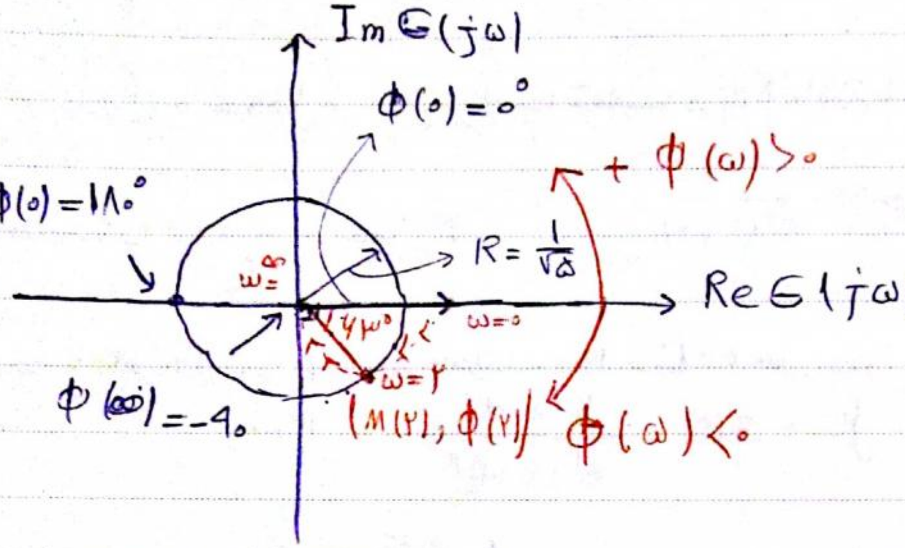
K: عدد ثابت در صورت تابع تبدیل

مثال $\varphi(\omega=2) = (\phi_1+\phi_2)-(\theta_1+\theta_2)$ $\quad K>0$ فرض

PAPCO

منحنی نایکوئیست از $\omega=0$ شروع و به $\omega=\infty$ ختم می شود.

منحنی نایکوئیست: یکی از منحنی های پاسخ فرکانسی منحنی نایکوئیست یا قطبی است که این منحنی در صفحه $G(j\omega)$ رسم می شود

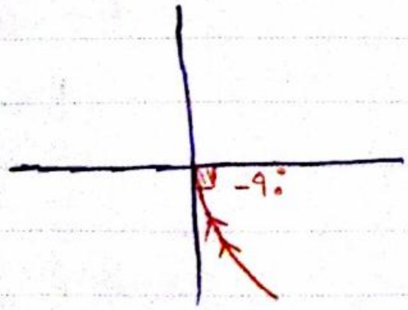


به ازای هر ω_0 روی محور موهومی یک اندازه $M(\omega_0)$ و زاویه فاز $\phi(\omega_0)$ بدست می آید

$$\omega_0=2 \begin{cases} M(\omega_0)=M(2)=\frac{1}{\sqrt{5}} = G(j\omega) & \text{فاصله تا مبدأ در صفحه} \\ \phi(\omega_0)=\phi(2)=-63^\circ & \end{cases}$$

زاویه بردار رسم شده از مبدأ تا نقطه مورد نظر در صفحه $G(j\omega)$

منحنی نایکوئیست عبارت است از مکان هندسی $G(j\omega)$ به ازای تغییرات ω از صفر تا ∞



$\phi(\infty)=-90$

تابع مینیمم فاز - تابع نامینیمم فاز:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}$$

تابع مینیمم فاز (حداقل فاز): تابعی که هیچ صفر و قطبی در RHP نداشته باشد.

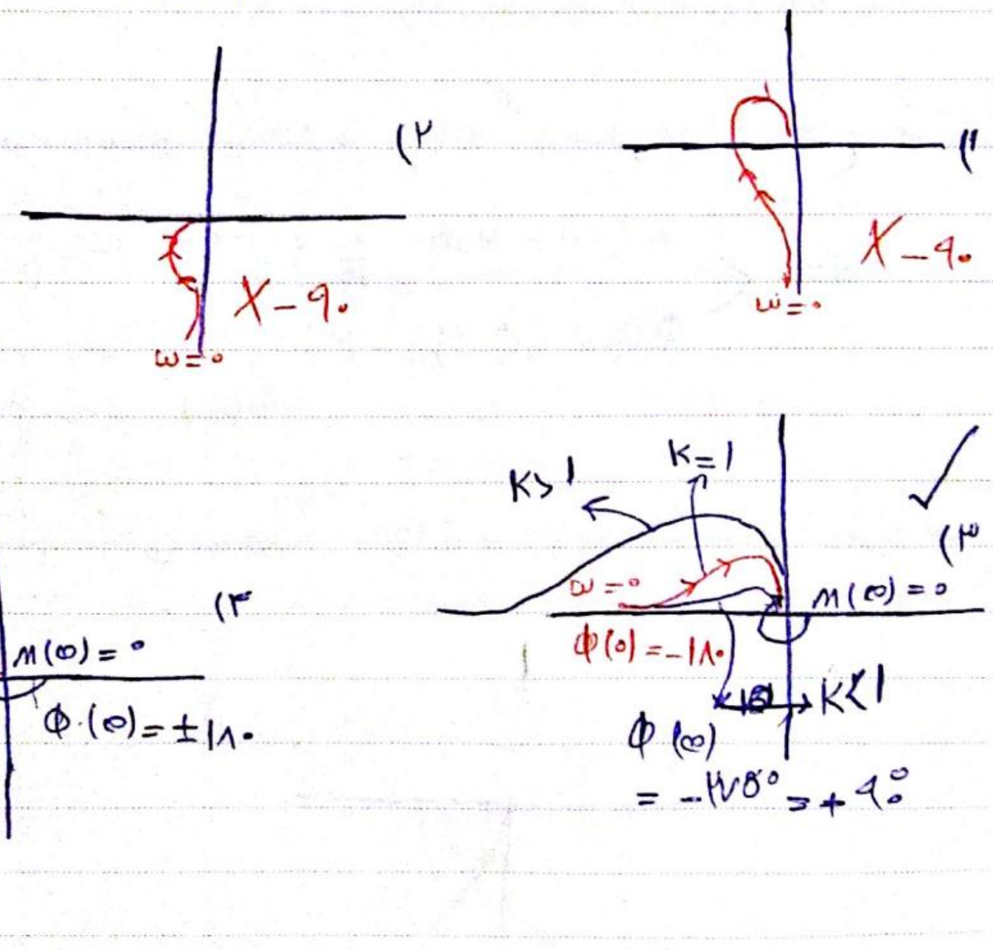
تابع نامینیمم فاز: تابعی که حداقل یک صفر یا یک قطب در RHP داشته باشد.

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2(s+4)}$$

منحنی نایکوئیست توابع مینیمم فاز:

کدام منحنی نایکوئیست تابع تبدیل فوق را به ازای تغییرات ... تا ∞ مشخص می‌کند؟

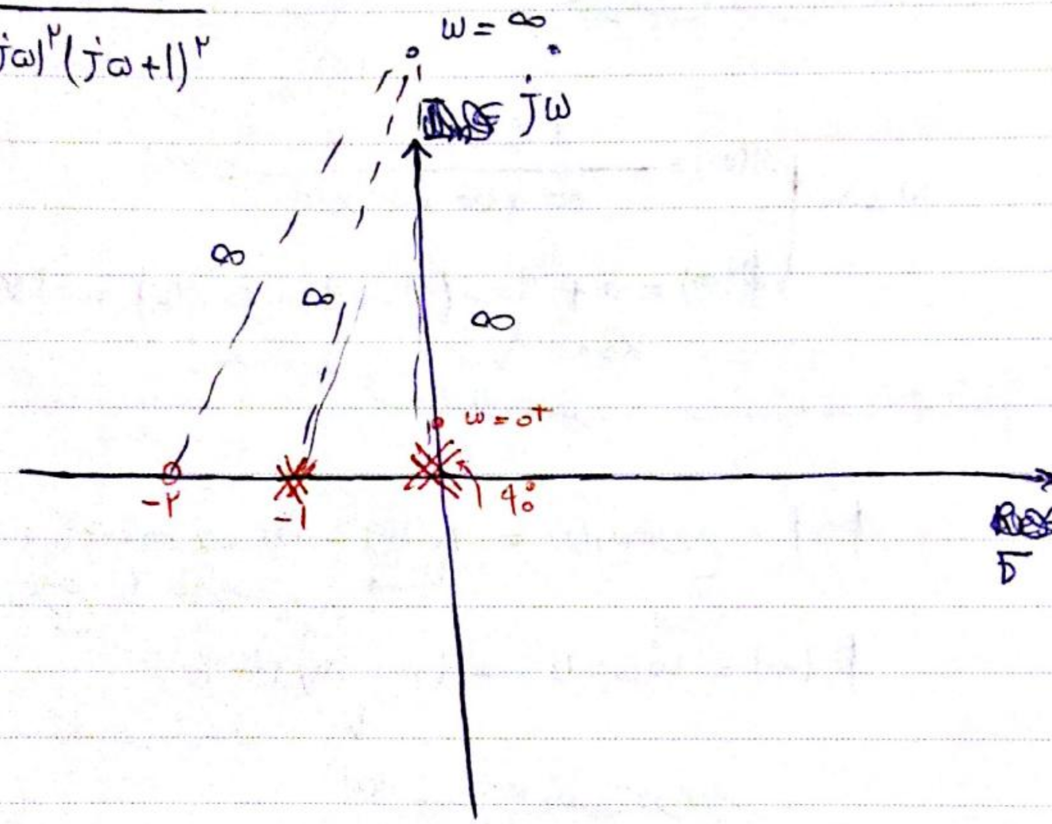
مثال: $G(S) = \dfrac{K(s+2)}{s^2(s+1)^2}$ ؛ $K>0$



فرض $K=1$

$$G(s)=\frac{s+2}{s^2(s+1)^2}$$

$$G(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2(j\omega+1)^2}$$



ω	$M(\omega)$	$\phi(\omega)$
شروع 0	∞	-185
↓		
پایان ∞	0	$-270°$

Subject
Date

فاصله نقطه (۰ و ۱-) تا مبدأ

مبدا $\omega = 0$

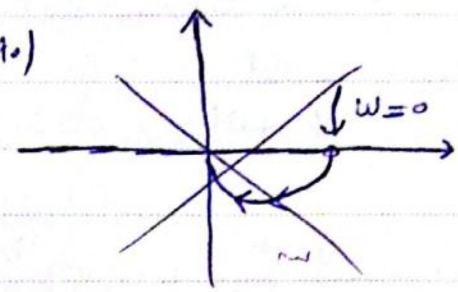
$$M(0) = \frac{K \cdot 1 \times 2}{1 \times 1 \times 0 \times 0} = \infty$$

$$\phi(0) = \underset{K>0}{0} + 0 - (0 + 0 + 90 + 90)$$

زاویه او صفر

$= -180^\circ$

محور حقیقی منفی



$$\omega = \infty \quad M(\infty) = \frac{1 \times \infty}{\infty \times \infty \times \infty \times \infty} \simeq 0$$

$$\phi(\infty) = \underset{K>0}{0} + 90 - \underbrace{(90 + 90 + 90 + 90)}_{\text{۴ تا قطب}} = -270$$

زاویه صفر

$\phi(0) =$ زاویه شروع $= N \times (-90) \Rightarrow -90 \times 2 = -180$

N: نوع سیستم | s فاکتورگیری شده در مخرج

$\phi(\infty) =$ زاویه نهایی $= (n - m) \times (-90)$ $= (4 - 1) \times (-90) = -270$

$n - m$: اختلاف توان صورت و مخرج

معمولاً در توابع مینیمم فاز $K>0$ است.

زاویه شروع توابع مینیمم فاز $= \alpha(\pm 180) + N(-90)$

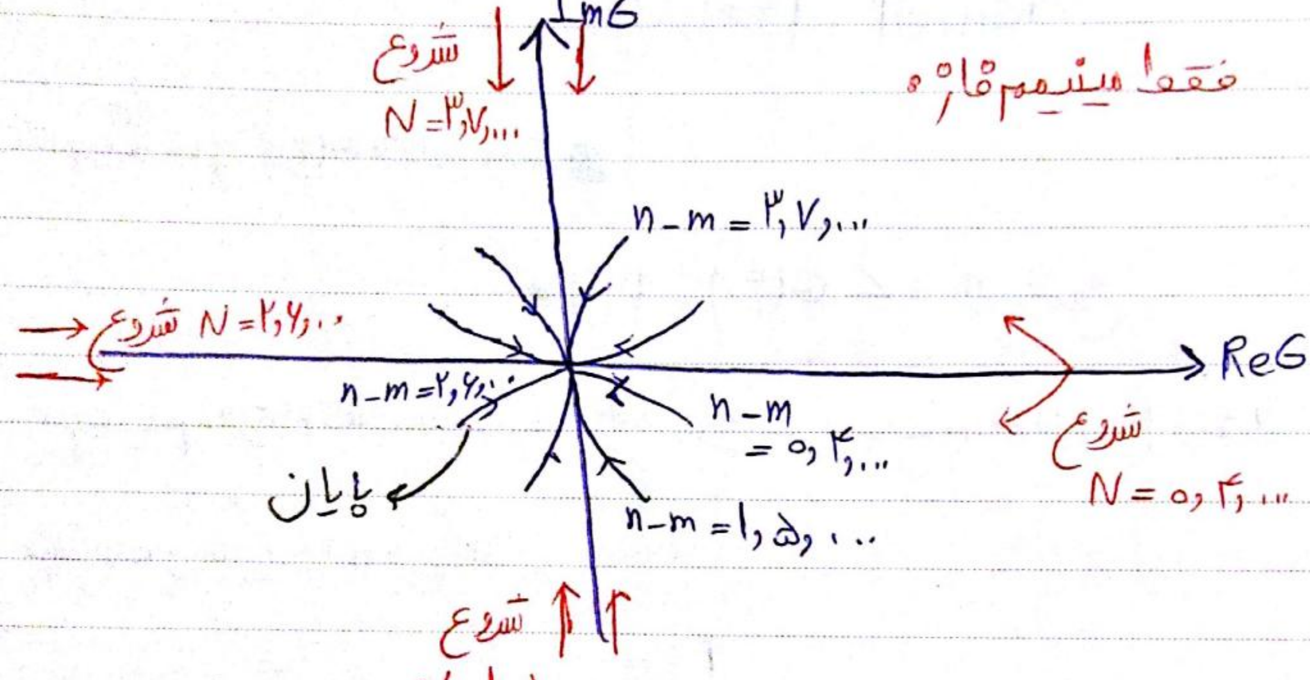
$$\alpha = \begin{cases} 0 & K>0 \\ 1 & K<0 \end{cases}$$

N: نوع سیستم

زاویه پایان مینیمم فاز $= \phi(\infty) = 2(\pm 180) + (n-m)(-90^\circ)$

n: درجه مخرج

m: درجه صورت.



فقط مینیمم فاز:

منحنی نایکوئیست توابع نامینیمم فاز:

مثال: $G(s)=\dfrac{K(s-2)}{s^2(s+1)^2}$

ω	$M(\omega)$	$\phi(\omega)$
0	∞	0
∞		

Subject
Date

اندازه $|G(j\omega)|$ برای دو تابع مینیمم فاز و نامینیمم فاز یکسان است (درصورتی که توابع شبیه هم

باشند)

$$G_1(S) = \frac{K(S+2)}{S^2(S+1)^2} \qquad G(S) = \frac{K(S-2)}{S^2(S+1)^2}$$

مینیمم فاز — نامینیمم فاز

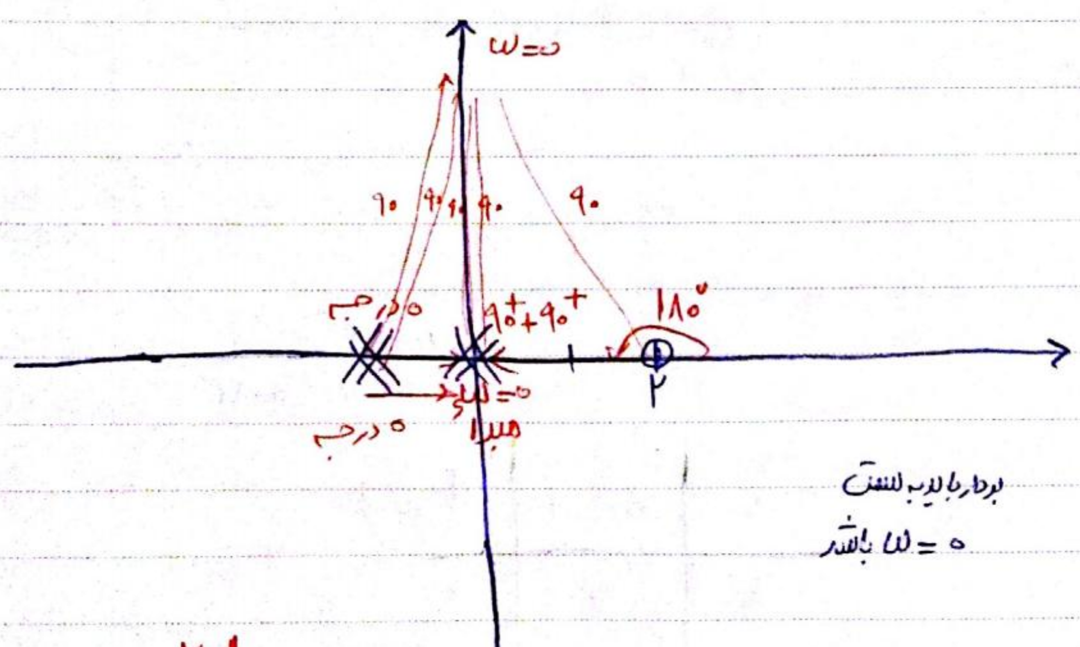
$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)|$$

اما زاویه‌های فاز $G(j\omega)$ متفاوت هستند

$$\text{زاویه شروع} = \angle G(j0) = \phi(0) =$$

در مینیمم فاز تمام قطب‌ها و صفرهای LHP زاویه صفر نسبت به $\omega=0$ (مبدأ) و فقط

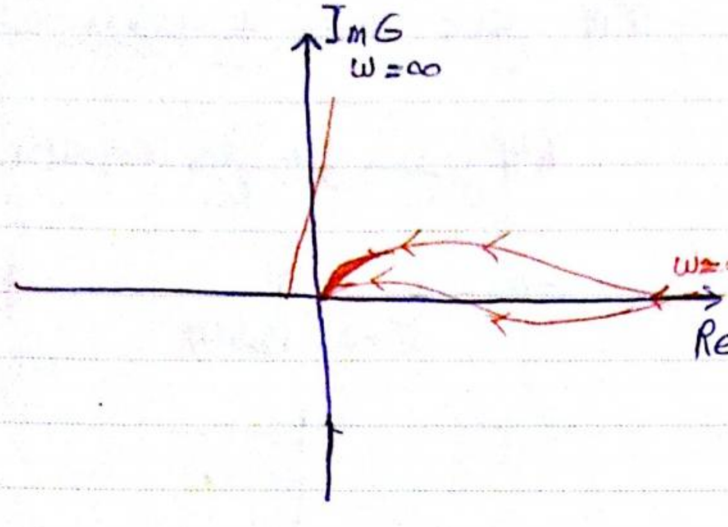
قطب‌های مبدأ زاویه ایجاد می‌کنند



بردارها بالا برسند
$\omega = 0$ باشد

K_d: فرض $K=1$

$$\phi(0) = 0 + \underbrace{180}_{\text{بزاویه منفی}} - (0+0+90+90) = 0^\circ$$



زاویه پایان $= \phi(\infty) = ۰ + ۹۰ - (۴ \times ۹۰) = -۲۷۰ = +۹۰$

معیار پایداری نایکوئیست :

برای سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی معادله مشخصه عبارت است از :

$$1 + G(s)H(s) = 0$$
$$G(s)H(s) = -1$$

فرمول معیار پایداری نایکوئیست :

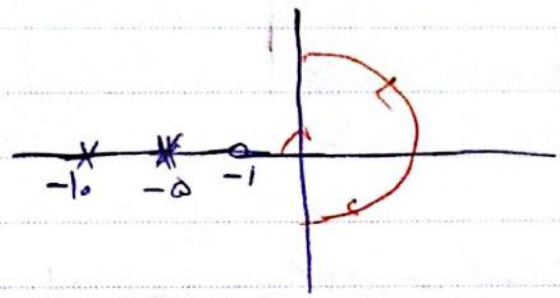
$$N = P - Z$$

نیتر

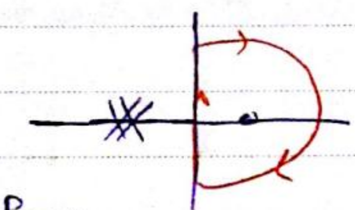
P : تعداد قطب های مدار باز : (تعداد قطب های G(s)H(s) واقع در RHP)

تعداد قطب های G(s)H(s) واقع در داخل مسیر RHP

$P \geq 0$ $\qquad$ $$G(s) = \frac{s+1}{(s+5)^2(s+10)}$$ $\qquad$ $P=0$



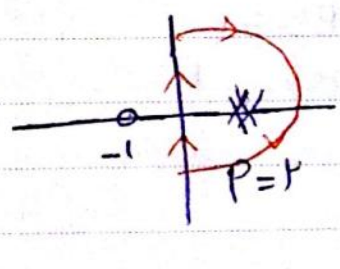
$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}$$



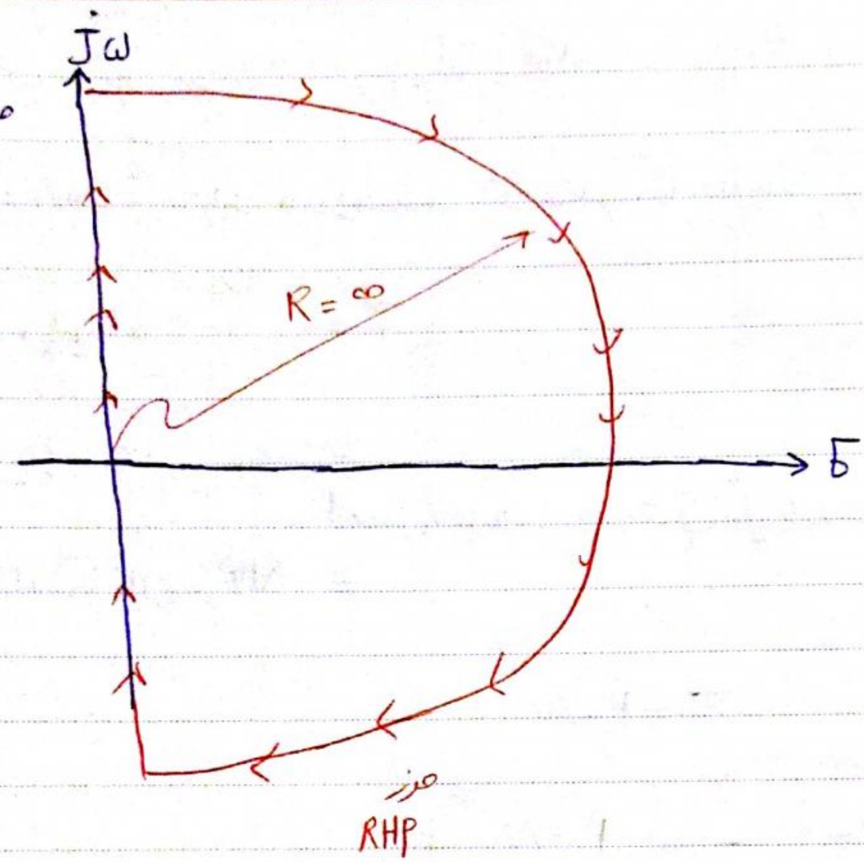
$P=0$

تعداد قطب های ناپایدار

$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2}$$

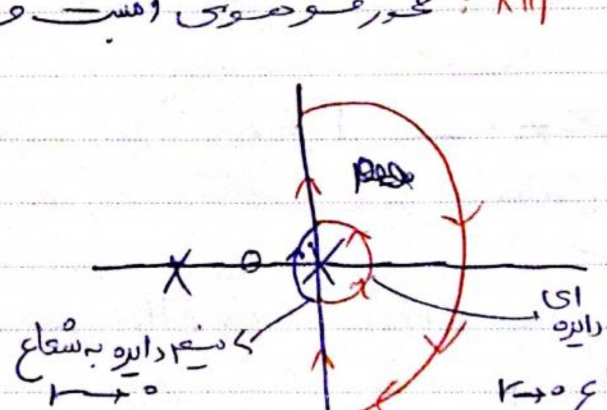


$P=2$



مرز RHP : محور موهومی (مثبت و منفی) و نیم دایره ای به شعاع بی نهایت

$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$



درصورتی که قطب روی مرز قرار گیرد بایستی مرز را با نیم دایره ای به شعاع $r \to 0$

اصلاح شود تا قطب به داخل یا به خارج مرز منتقل شود درست است که P متفاوت

می‌شود ولی در نتیجه پایداری مدار بسته تأثیری ندارد.

Z : تعداد قطب‌های ناپایدار مدار بسته   تعداد قطب‌های مدار بسته در RHP

مدار بسته پایدار است اگر $Z=0$

مدار بسته ناپایدار است اگر $Z\neq 0$

همان تغییر علامت‌ها در ستون اول راوث

تعداد شاخه‌های مکان در RHP $\equiv$

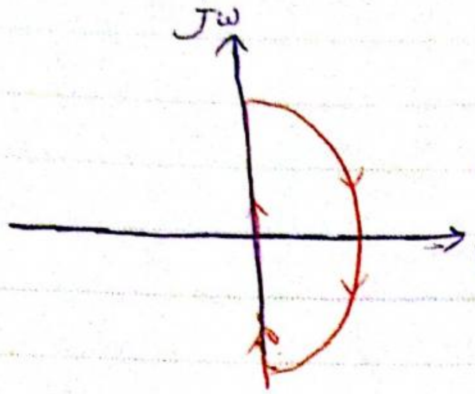
$$Z=P-N$$

$$Z=0 \longrightarrow P=N$$
مدار بسته پایدار

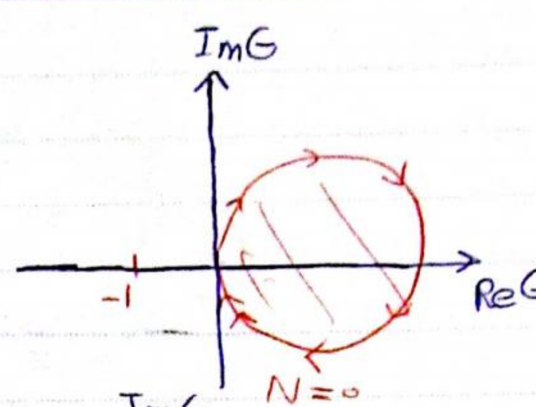
$$Z\neq 0 \longrightarrow P\neq N$$
مدار بسته ناپایدار

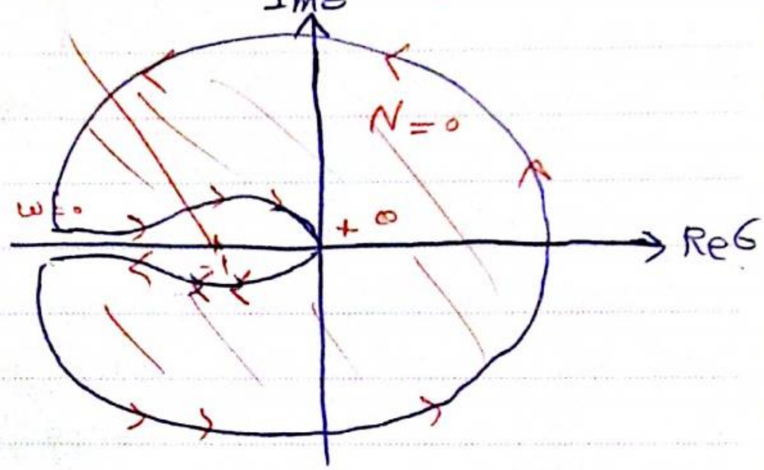
N : تعداد دوران منحنی نگاشت مرز RHP در صفحه $G(j\omega)$ حول نقطه ۱- م
$G(S)H(S)=-1$

جهت مثلثاتی $\oplus$ و در جهت عقربه‌های ساعت $\ominus$ از اینجا ادامه



⟹





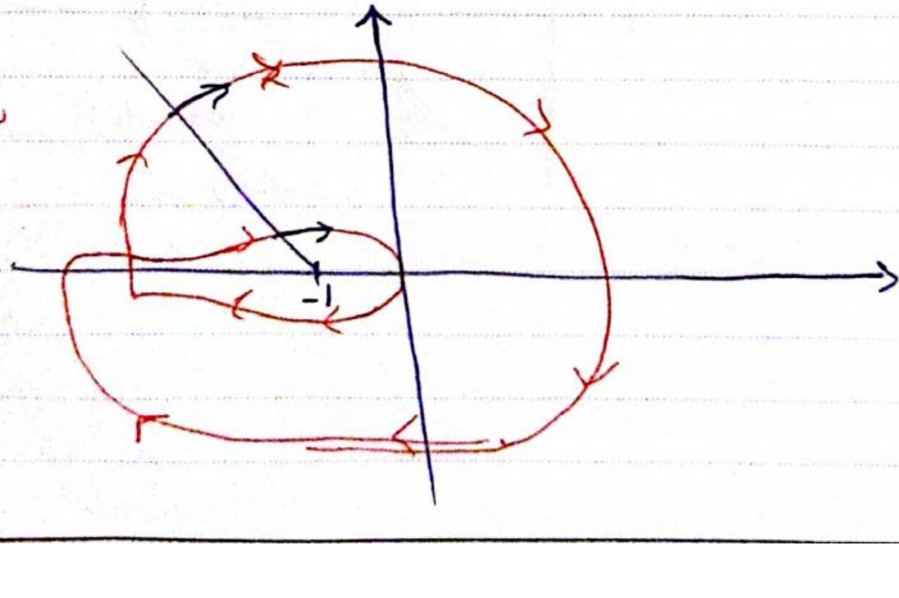
اگر منحنی ۱- را در بر گرفت برای پیدا کردن N از ۱- یک خط رسم می‌کنیم تا منحنی را قطع کند

$N =$ جمع جبری تعداد محل های تلاقی به همراه جهت آن ها

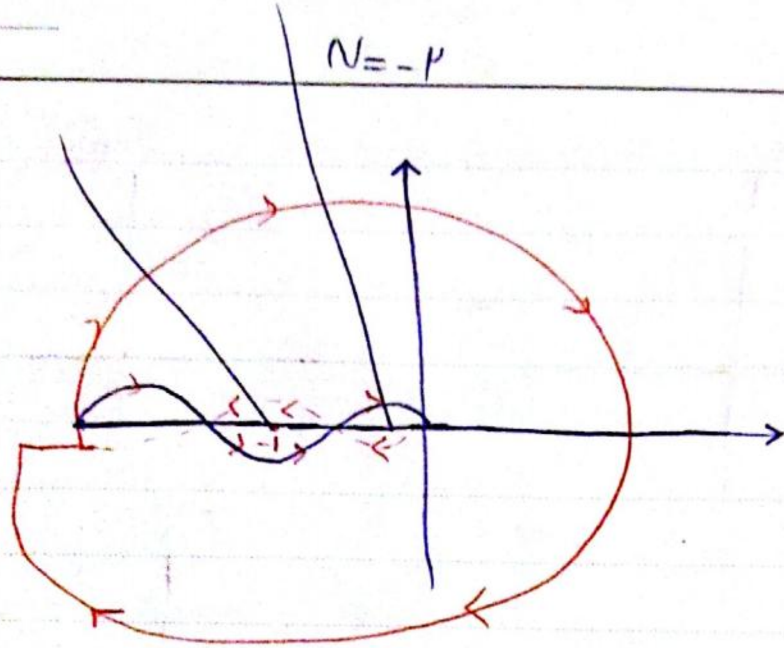
درجهت عقربه ساعت

$N = -2$

۲ بار قطع کرده

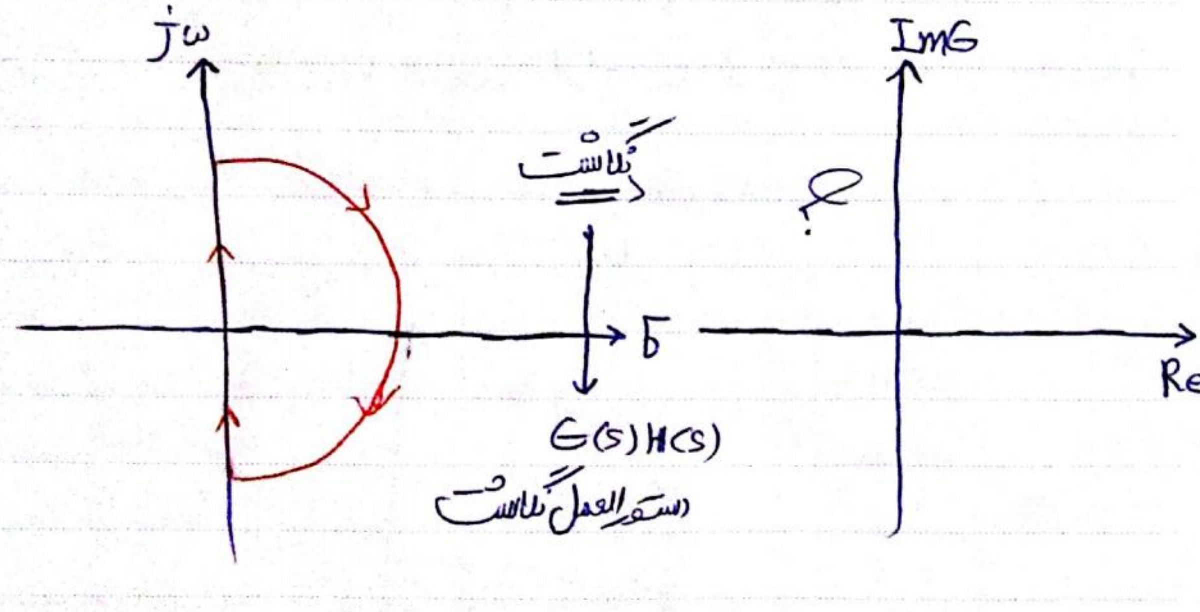


Subject
Date

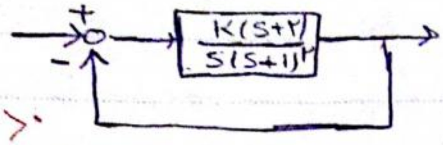


محاسبه N (روش رسم منحنی نگاشت):

منحنی نگاشت ≡ نگاشت شده مرز RHP
در صفحه G(s)



در مورد سیستم مدار بسته زیر کدام عبارت صحیح است؟



$K>0$

۱) سیستم مدار بسته همواره و به ازای همه مقادیر $K>0$ پایدار است.

۲) سیستم مدار بسته همواره و به ازای همه مقادیر $K>0$ ناپایدار است.

۳) سیستم مدار بسته به ازای مقادیر کوچک K پایدار است.

۴) سیستم مدار بسته به ازای مقادیر بزرگ K پایدار است.

در این روش بهتر است از روث یا روت لوکاس استفاده شود.
مثال

روث - هرویتز:

معادله مشخصه: $s(s+1)^2 + K(s+2) = 0$

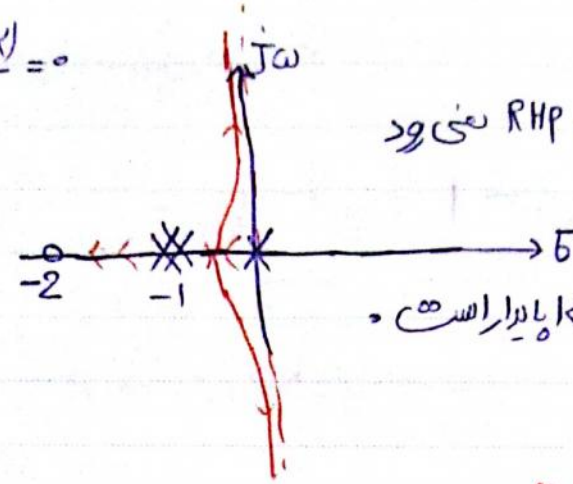
$$s^3 + 2s^2 + s(K+1) + 2K = 0$$

شروط پایداری $2(K+1) \geq 2K \Rightarrow \cancel{2K}+2 \geq \cancel{2K} \to 2>0$ ✓

سیستم مدار بسته به ازای همه مقادیر $K>0$ پایدار است ← گزینه ۱

روت لوکاس:

محل برخورد مجانب $\sigma_a = \frac{(-1-1)-(-2)}{2} = 0$



هیچ شاخه‌ای به RHP نمی‌رود

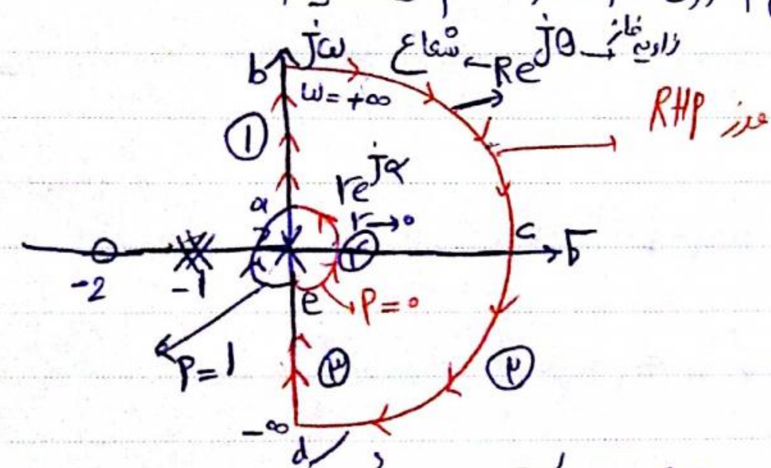
مدار بسته به ازای همه مقادیر $k>0$ پایدار است.

پایداری نایکوئیست:

$$N = P - Z \Rightarrow Z = P - N$$

نتیجه بالا به این شکل باشد که به ازای همه مقادیر $k>0$ ، $Z=0$ و مدار بسته پایدار است.

برای بدست آوردن P مرزی RHP را رسم می‌کنیم



نگاشت براساس مرز RHP و اصلاح آن در مبدأ به شکل قرمز ($P=0$)

$ab : \omega = 0^+ \to +\infty$: نایکوئیست

$bcd : \omega = +\infty \to -\infty$: $G(s)H(s)\Big|_{s=Re^{j\theta},\ R\to\infty}$

$de : \omega = -\infty \to 0^-$

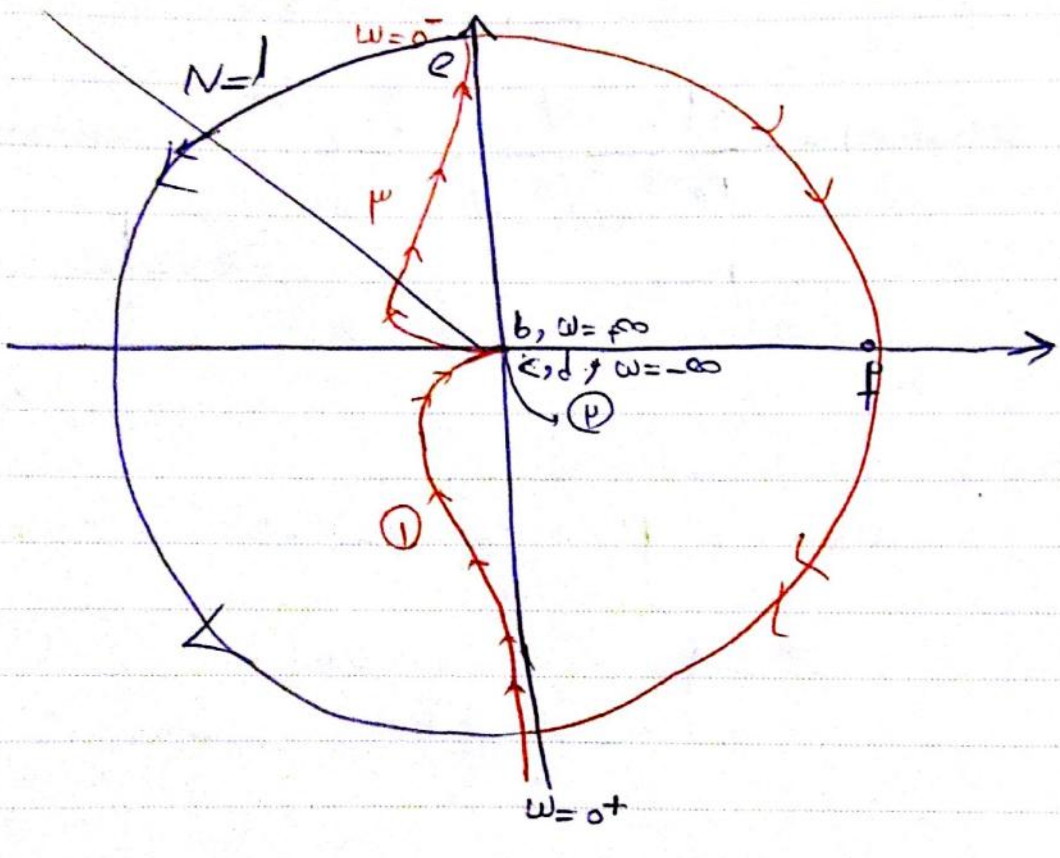
$efa : \omega = 0^- \to 0^+$

فرض $K=1$

برای مینیمم فاز : $\phi(0) = N(-90) = 1(-90) = -90^\circ$

قطب در RHP ندارد ← مینیمم فاز

$\phi(\infty) = (n-m)(-90) = 2(-90) = 180$



نگاشت بخش ۲ مبدأ مختصات است

نگاشت بخش ۳ متقارن بخش ① نسبت به محور حقیقی است

نگاشت بخش ۴ نیم دایره که از اتصال e به f بوجود می آید و شعاع آن ∞ است.

$$|G(s)H(s)|_{\substack{s=re^{j\alpha}\\ r\to 0}} = \infty$$

$$\angle G(s)H(s)\Big|_{\substack{s=re^{j\alpha}\\ r\to 0}} = \angle K + \angle(\cancel{re^{j\alpha}}+2) - (\angle re^{j\alpha} + 2\angle \cancel{re^{j\alpha}}+1) = 0$$

$$r\to 0$$

$$G(s)H(s) = \frac{K(\cancel{re^{j\alpha}}+2)}{re^{j\alpha}(\cancel{re^{j\alpha}}+1)^2} = \frac{1}{r}e^{-j\alpha} \Rightarrow \angle G(s)H(s)\Big|_{\varphi} = -\alpha\varphi = \Big|0^\circ$$

$$r\to 0$$

هرجهتی بود برعکس می‌نویسیم

به ازای همه مقادیر $K>0$ ، $N=0$ چون $P=0 \Leftarrow N=0$

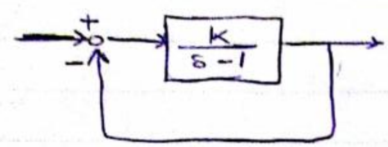
$$Z = P - N = 0 - 0 = 0$$

مدار ستبه به ازای $K=1$ پایدار است.

$$Z = P - N = 1 - 1 = 0$$

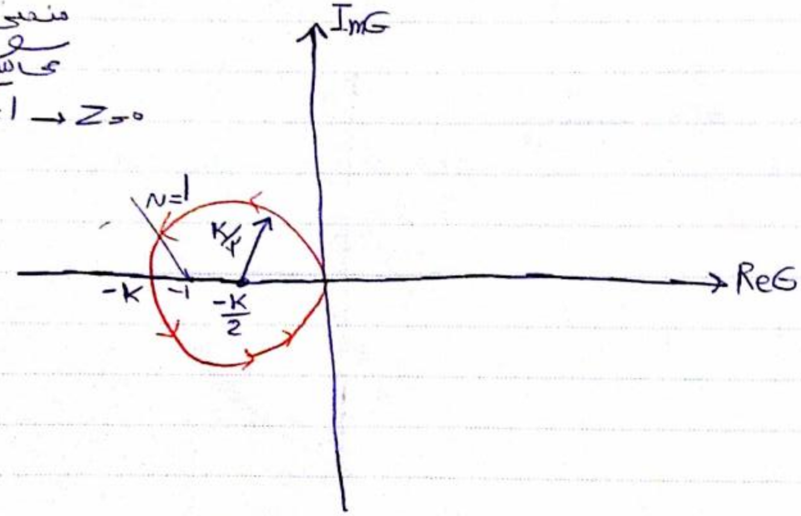
آ ب

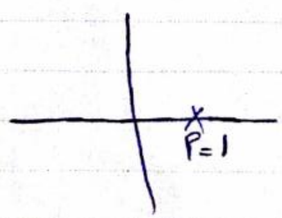
مثال) برای سیستم مدار بسته زیر محدوده K برای پایداری مدار بسته کدام است؟



۱) $0 \le K \le \frac{1}{۲}$ ۲) $K \ge \frac{1}{۲}$ ۳) $0 < K < 1$ ۴) $K > 1$

نقطه ۱- داخل
منحنی قرار
می‌گیرد
$N=1 \rightarrow Z=0$

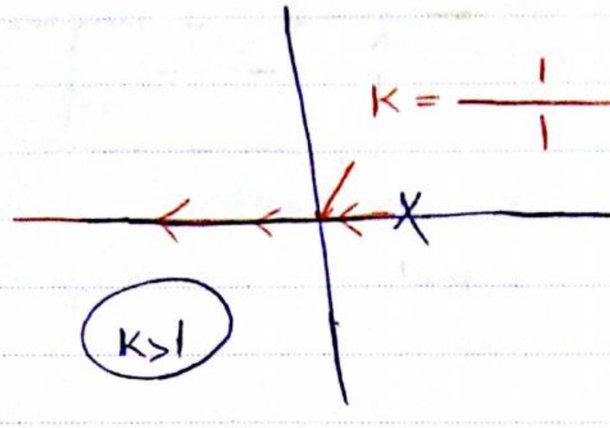




$Z = \overset{1}{P} - N \Rightarrow N = 1$

معادله مشخصه مدار بسته:

$$1+\frac{K}{S-1}=0 \Rightarrow S=1-K$$

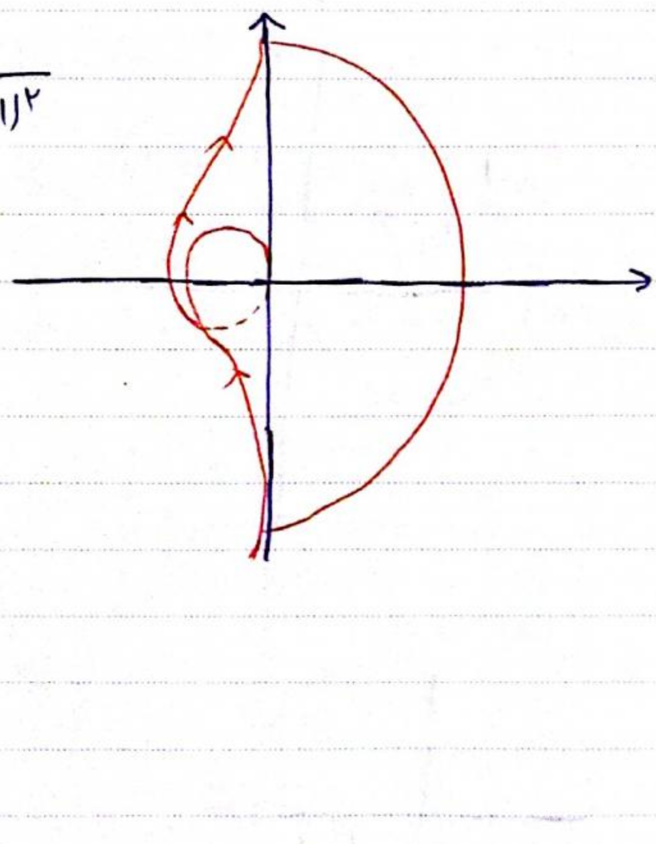


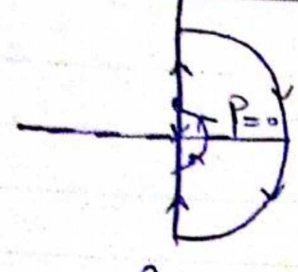
$$K=\frac{1}{1}=1$$

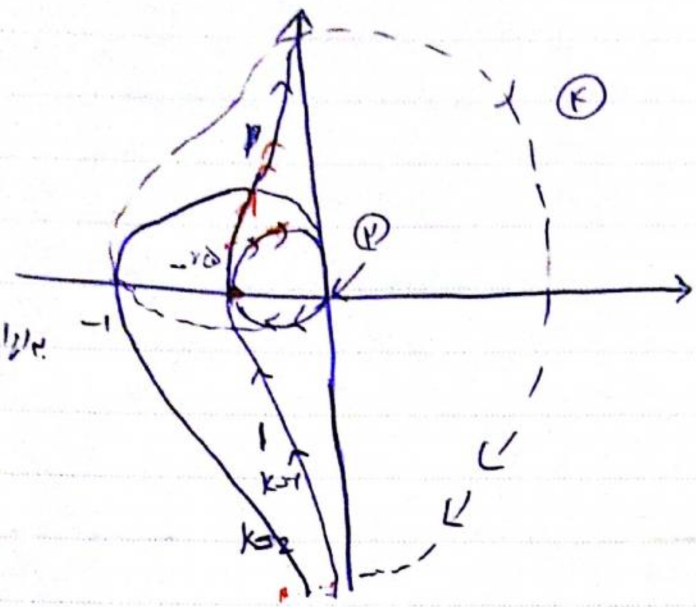
$K>1$

تمرین:

$$G(S)=\frac{K}{S(S+1)^2}$$







$N=0 , P=0$

$Z=0 \rightarrow K=1$ به ازای

اگر منحنی نایکوئیست در نقطه ۱- محور حقیقی را قطع کند مدار بسته در مرز پایداری است

$0<K<2$ پایدار

$K=2$ مرز پایداری

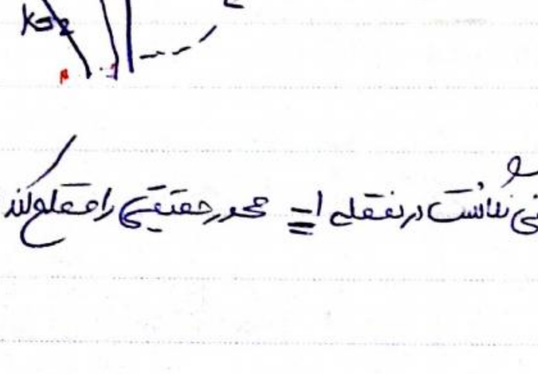
$K>2$ ناپایدار

$$s(s+1)^2 + K = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + s + K = 0$$

$$K = 2$$

مرز پایداری



$$Z = P - N$$
$$= 0 - (-2) = 2$$

مدار بسته ناپایدار دو قطب مدار بسته در RHP است

محاسبه فرکانس محل تلاقی منحنی با محور حقیقی و مختصات محل برخورد با محور حقیقی 8

$$\angle G(j\omega)\Big| = -180^\circ$$

محل برخورد با محور حقیقی منحنی

$$\angle \frac{K}{s(s+1)^2} = -180^\circ \qquad \angle \frac{K}{j\omega c(j\omega c+1)^2} = -180$$

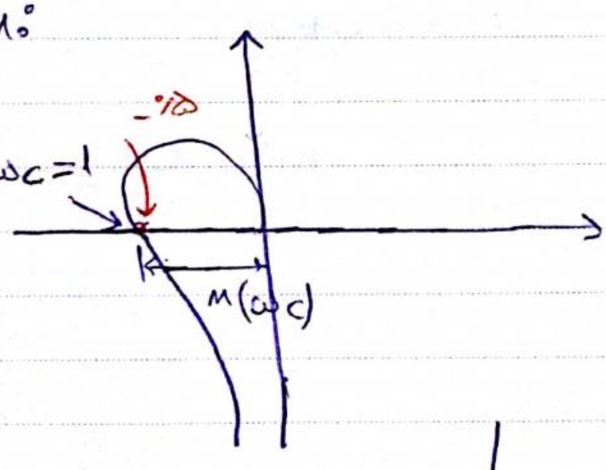
$$0 - \angle j\omega c - 2\angle (j\omega c+1) = -180$$

$$-90 - 2\tan^{-1}\omega c = -180^\circ$$

$$2\tan^{-1}\omega c = 90$$

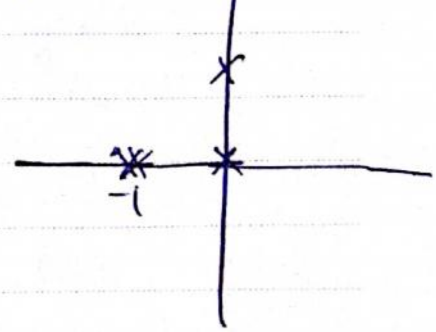
$$\tan^{-1}\omega c = 45$$

$$\omega c = 1$$



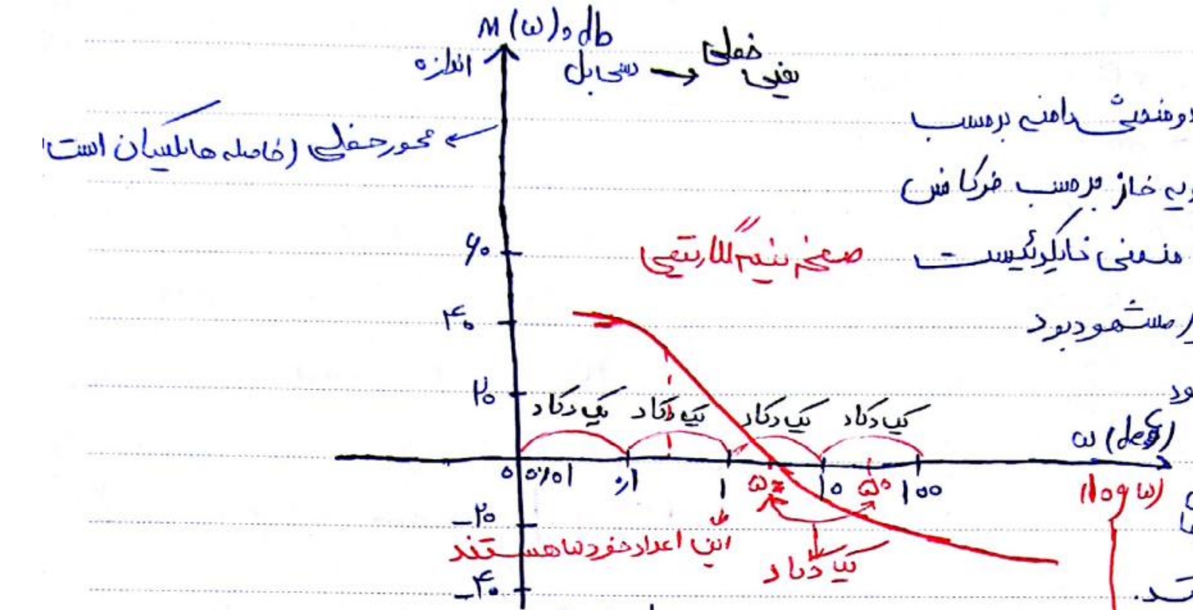
$$\frac{K=1}{|j\omega c||j\omega c+1|^2} = M(\omega c)$$

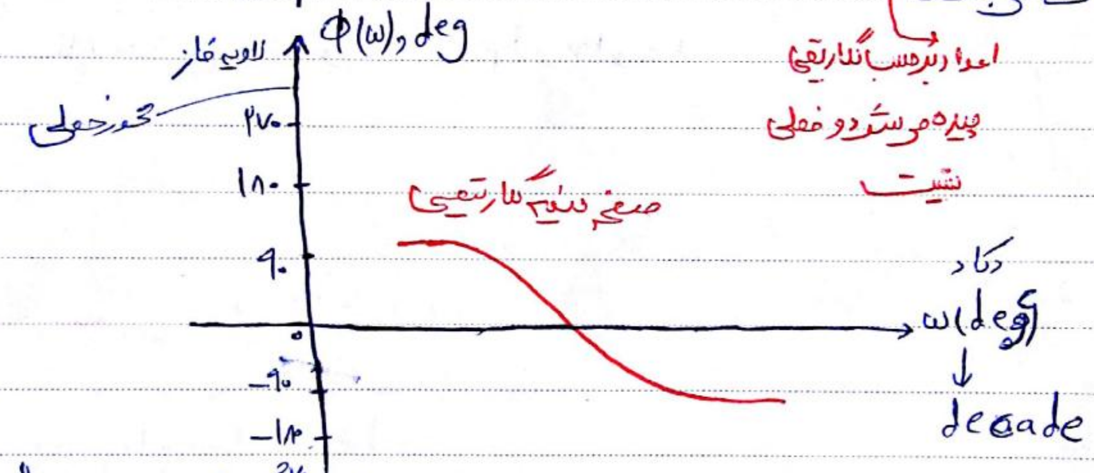
$$\frac{1}{1\times 2} = M(\omega c) \qquad M(\omega c) = 0.5$$



دیاگرام بود:

دیاگرام بود شامل دو منحنی دامنه برحسب فرکانس ها و زاویه فاز برحسب فرکانس می باشد برخلاف منحنی نایکوئیست که ω پارامتری غیر مشهود بود در اینجا ω مشهود می شود و به عنوان یکی از محورهای مختصات می باشد.





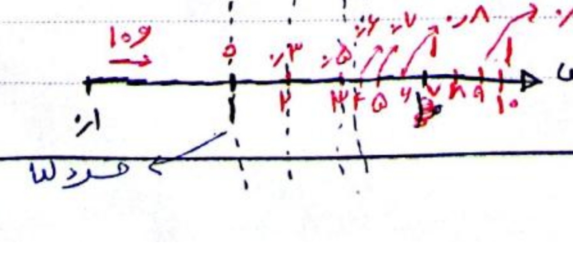
$$M(\omega)^{db}_{\text{بود}} = 20\log|G(j\omega)| = 20\log \underbrace{M(\omega)}_{\text{نایکوئیست}}$$

$$\Phi(\omega)\Big|_{\text{بود}} = \underbrace{\Phi(\omega)}_{\text{نایکوئیست}} = \text{زاویه فاز}\ \angle G(j\omega)$$

محور افقی: محور فرکانس ω

برحسب ω لگاریتم تعیین می شود

فاصله بین هر فرکانس تا ۱۰ برابرش = ۱ دکاد



$\log ۲ = ۰٫۳$

$\log ۳ = ۰٫۵$

$\log ۵ = ۰٫۷$

$\log ۷ = ۰٫۸۵$

- رسم منحنی اندازه بود (مجانب‌ها)

- منحنی اندازه (مجانب) ⟵ تابع تبدیل استاندارد

- ثابت‌های خطا از منحنی اندازه بودی K_p و K_v و K_a

- حاشیه فاز - حاشیه بهره

روش رسم منحنی برد (مجانب اندازه):

* ابتدا بایستی تابع تبدیل به فرم استاندارد تبدیل شود.

نمونه $G(s)H(s) = \dfrac{K(1+T_1 s)(1+T_2 s)(\dots)}{s^N (1+T_a s)\left(\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi s}{\omega_n}+1\right)+\dots}$

~~عددهای ثابت به هر شکلی چیزی~~

در تابع تبدیل فرم استاندارد عددهای ثابت داخل پرانتزها بایستی ۱ باشد

در این شرایط: بهره = K

(Gain)

مثال

$$G(s) = \frac{1000(s+2)}{s(s+50)(s^2+2s+100)} \qquad \cancel{K = 1000}$$

باید ابتدا مدار را تیپ کرد و بعد بهره را بدست آورد.

$$G(s)_{\text{استاندارد}} = \frac{10000 \times 2\left(1+\frac{1}{2}s\right)}{50 \times 100\, s\left(1+\frac{1}{50}s\right)\left(\frac{s^2}{100}+0.02s+1\right)} \Rightarrow G(s)_{\text{استاندارد}} = \frac{4(1+0.5s)}{s(1+0.02s)\times(0.01s^2+0.02s+1)}$$

بهره $K = 4$ (ثابتی که در تابع تبدیل بی تغییرات آن مد نظر ما است)

* طریقه‌ی رسم منحنی اندازه:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| \Rightarrow M(\omega)^{db} = 20\log|G(j\omega)|$$

فرم تجزیه شده تابع تبدیل

$$G(s) = \overset{1}{4} \times \overset{2}{\frac{1}{s}} \times \overset{3}{(1+0.5s)} \times \overset{4}{\frac{1}{1+0.02s}} \times \overset{5}{\frac{1}{\frac{s^2}{100}+0.02s+1}}$$

ابتدا منحنی اندازه تک تک عبارت‌های تجزیه شده در تابع تبدیل استاندارد را به طور جداگانه رسم نموده و سپس با جمع آن‌ها منحنی اندازه کل بدست می‌آید.

انواع عبارت‌های تجزیه شده در تابع تبدیل استاندارد:

۱- بهره ثابت K ← ۴ (1)

۲- صفر یا قطب (ساده یا مکرر در مبدأ مختصات) ← $\frac{1}{s}$ (2)

۳- صفر یا قطب حقیقی (ساده یا مکرر) ۳، ۴

$1+0.5s$ ، $1+0.02s$

۴- صفر یا قطب مختلط مزدوج (ساده یا مکرر) (5)

$$\frac{1}{\frac{s^2}{100}+0.02s+1}$$

۱ـ منحنی بود بهره ثابت K:

در فرم استاندارد

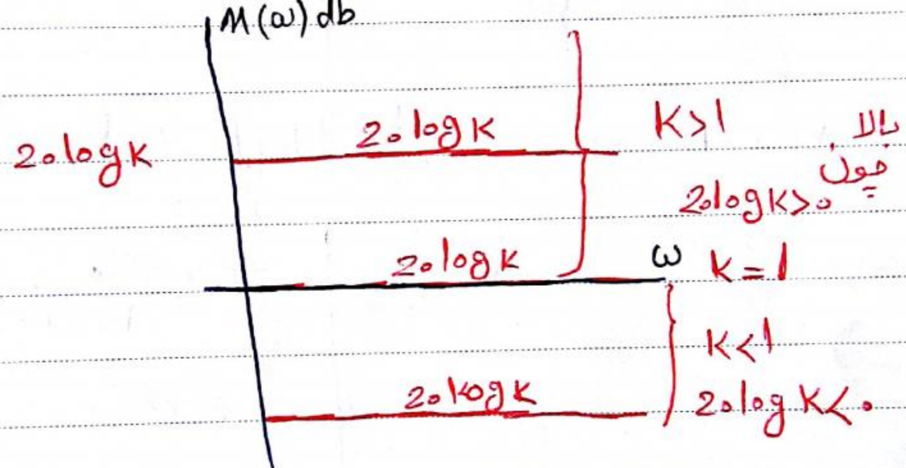
فرض $G(s) = K$

$$s = j\omega \Rightarrow G(j\omega) = K \begin{cases} M(\omega) = 20\log K \ \text{db} \\ \phi(\omega) = 0 \end{cases}$$

منحنی دامنه خطی است موازی محور ⇐ فرکانس به فاصله $20\log K$ از آن محور

$K>0$ ← زاویه فاز هر عدد حقیقی مثبت $= 0$

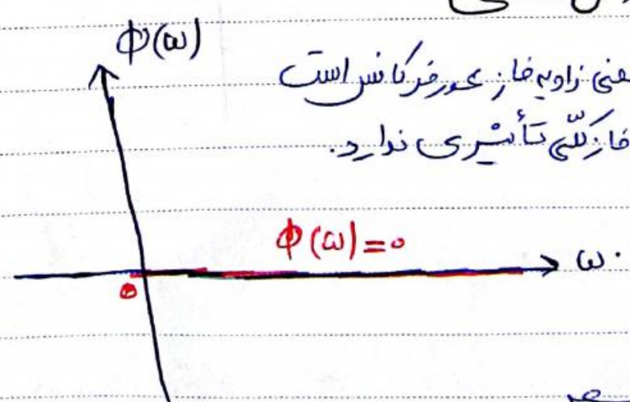
$$M(\omega) = |G(j\omega)| = K$$



بهره‌ی K سبب شیفت منحنی اندازه به سمت بالا یا پایین یا بدون شیفت می‌شود

$K=1 \quad K<1 \quad K>1$

بدون تغییر در شکل منحنی



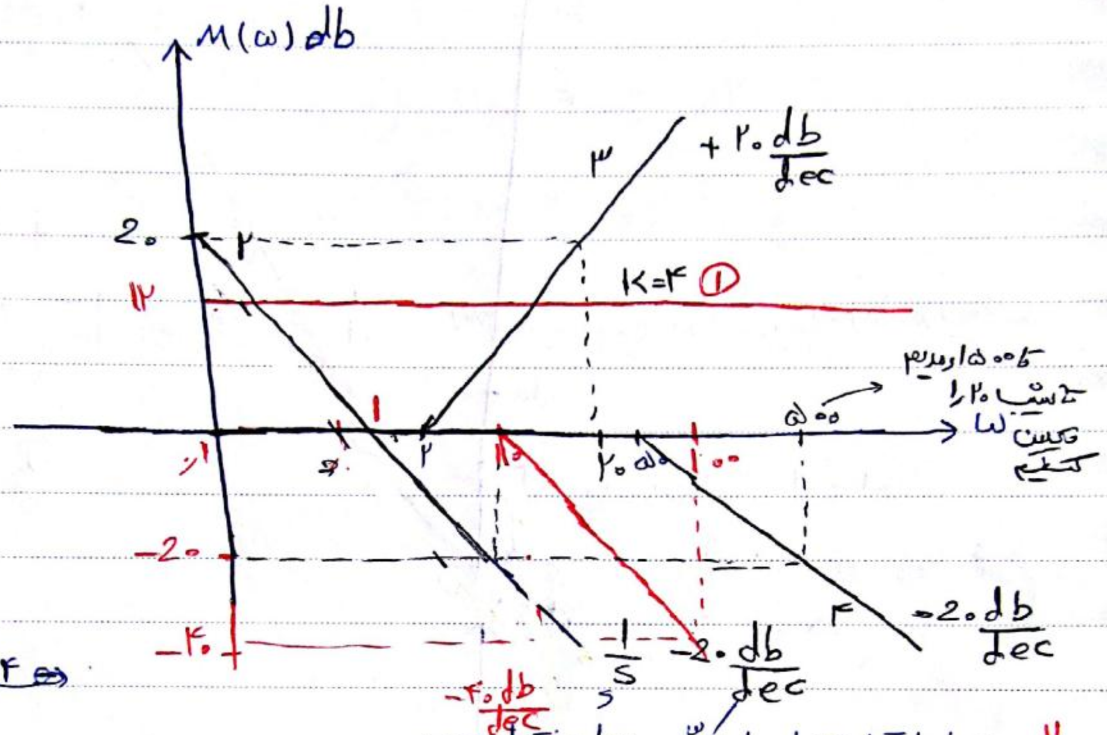
برای $K>0$ منحنی زاویه فاز، محور فرکانس است یعنی K بر منحنی فاز کلاً تأثیری ندارد.

K منفی نداریم

Subject
Date

مثبت ← صفرها
منفی ← قطب ها

$\boxed{\text{شیفت} = 20\log K}$ $\quad K = 4 \Rightarrow 20\log 4 = 12db$



K=24 ⇒

۲ــ صفر یا قطب ساده یا مکرر در مبدا مختصات:

$G(S) = S, \frac{1}{S}, S^2, \frac{1}{S^2}, \ldots$ شکل های G(s) در این حالت

صفر ساده در مبدا $G(S) = S$: فرض

روش رسم : $S = j\omega \Rightarrow G(j\omega) \begin{cases} M(\omega) = \omega \\ \phi(\omega) = \pi/2 = 90° \end{cases}$

زاویه $(1-j\omega) = -90$

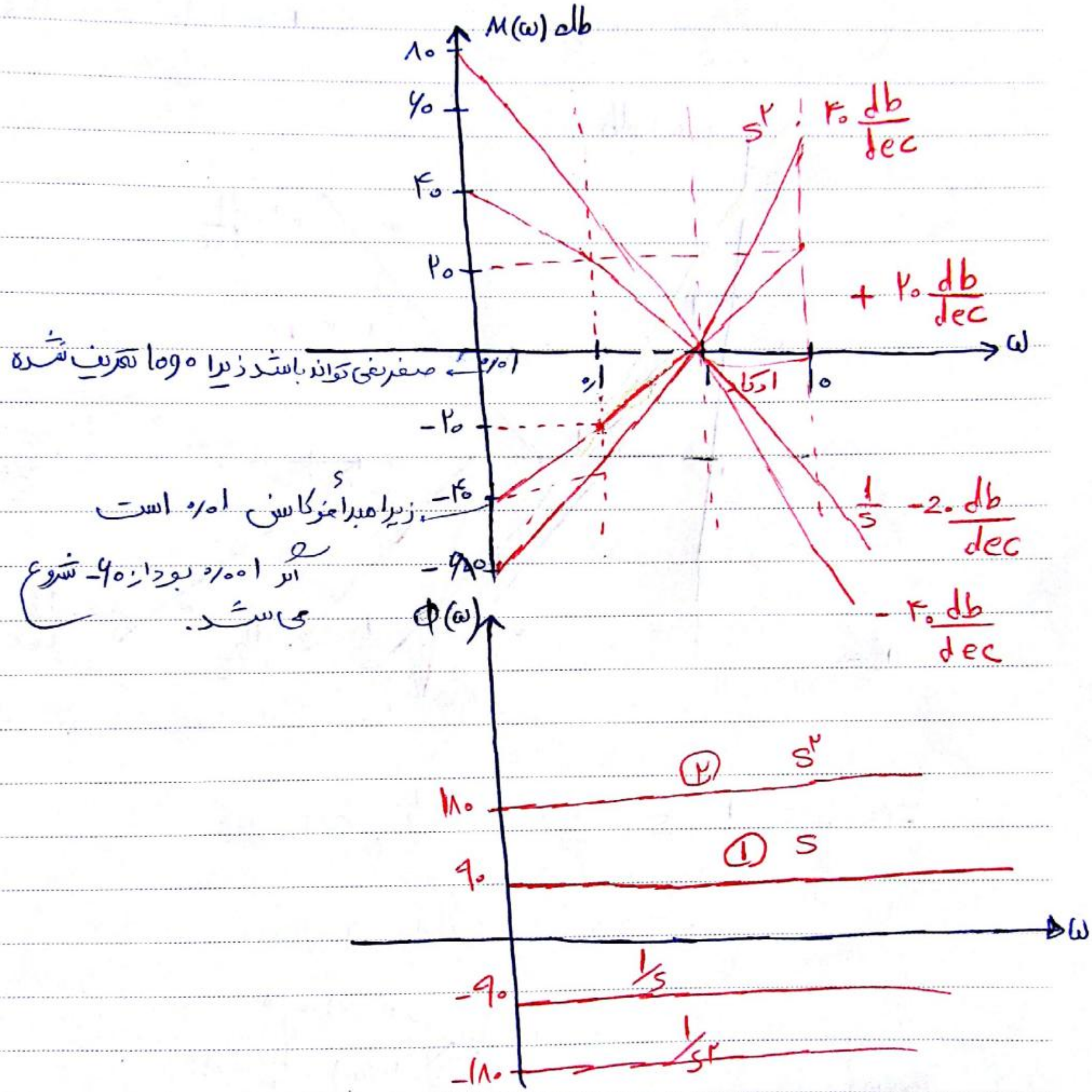
$M(\omega)^{db} = 20\log\omega$

ω	20 log ω
۰/۱	-۲۰
۱	۰
۱۰	۲۰

$\log 0.1 = -1$

خط از سه نقطه رد می شود

Subject
Date



منحنی دامنه صفر ساده عبارت است از خطی با شیب $+20\frac{db}{dec}$ که محور فرکانس را در $\omega=1$ قطع می‌کند.

Subject
Date

$G(s) = s^2$ صفر مکرر در مبدا

$G(\omega) = j\omega$ ، $M(\omega) = \omega^2$ ، $\phi(\omega) = ۱۸۰$

$M(\omega) \stackrel{db}{=} ۴۰ \log \omega$

ω	۴۰ log ω
۰/۱	-۴۰
۱	۰
۱۰	+۴۰

منحنی دامنه کلیه صفرها (ساده و مکرر) محور فرکانس را در $\omega = 1$ قطع می کند و خطی هستند

با شیب

شیب منحنی دامنه صفرها = +(مرتبه تکرار صفر در مبدا) $\left(20 \frac{db}{dec}\right)$

s^4 شیب منحنی دامنه = $+ ۸۰ \frac{db}{dec}$

قطب $G(s) = \frac{1}{s}$

$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ $\quad M(\omega) = \frac{1}{\omega}$

$M(\omega)^{db} = -20 \log \omega$

ω	$M(\omega)$ db
۰/۱	۲۰
۱	۰
۱۰	-20