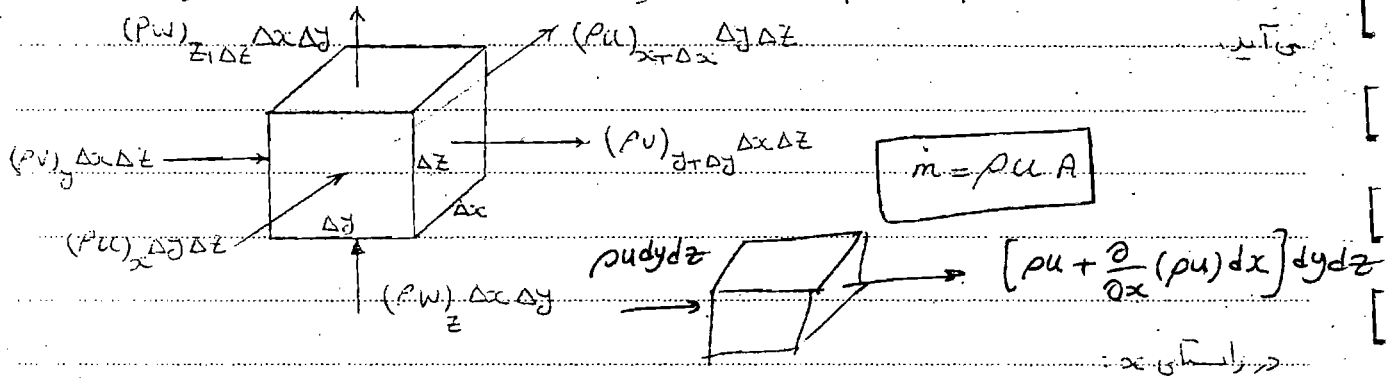


معادله پیوستگی Continuity

با یکارگیری اصل بقا جرم در سیستم مضطرب کارتزین (x, y, z) در سه راستای x, y, z این معادله بدست می آید



- (1-6) جرم جری ورودی: $(\rho u)_x \Delta y \Delta z |_x$
- (1-7) جرم جری خروجی: $(\rho u)_x \Delta y \Delta z |_{x+\Delta x}$
- (1-8) تغییرات: $(\rho u)_x \Delta y \Delta z |_{x+\Delta x} - (\rho u)_x \Delta y \Delta z |_x$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

در راستای z نیز معادلات و روابط مشابه وجود دارند.

$\text{div}(\rho \vec{v}) = \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ و $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$
 $\text{div} \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

- (1-15) جرم حجم کنترل در زمان t : $(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) |_t$
- (1-16) جرم حجم کنترل در زمان $t+\Delta t$: $(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) |_{t+\Delta t}$
- (1-17) تغییرات: $(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) |_{t+\Delta t} - (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) |_t$

با ترکیب نمودن ابعاد حجم کنترل و اصل بقا جرم، معادله پیوستگی (بقا جرم) بدست می آید. (ستایی تواند بعنوان تکلیف بدست آورید)

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z) = 0 \quad (1-18)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + w_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right] = 0 \quad (1-19)$$

معادله فوق تغییرات سرعت و چگالی را در بر می گیرد

subject:

Year. 87 Month. 6 Date. 26/12

$$\nabla: \text{del. (Gradient)} \quad \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad (1-20)$$

$$\nabla \cdot U = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \quad (1-21)$$

$$(1-19) \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot U = 0 \quad (1-22)$$

حرکت سیال تراکم پذیر باشد: $\rho = \text{cte} \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot U = 0$
 با استفاده از معادله پیوستگی می توان معادله حرکت را ساده تر کرد.

$$\rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

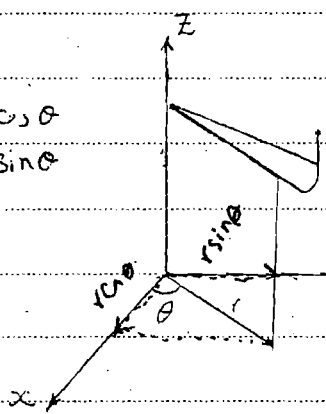
معادله پیوستگی در سیستم استوانه ای و کروی:

با انرژی ارائه شده در مختصات کارتزین، می توان معادله پیوستگی را در مختصات استوانه ای و کروی نیز

بدست آورد

در شبکه مختصات استوانه ای - $\Delta Z, r \Delta \theta, r \Delta r$ (الانی بناماد)

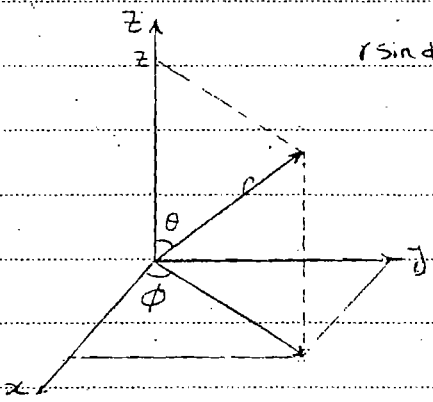
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin \theta & \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned}$$

در شبکه مختصات کروی - $r \sin \theta \Delta \phi, r \Delta \theta, r \Delta r$ (الانی بناماد)



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0 \quad (1-25)$$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}; \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

مکان حرکت

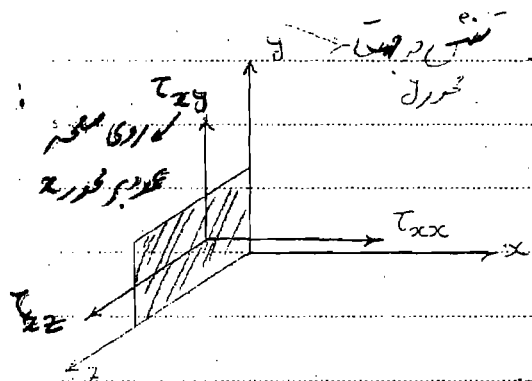
* تنش برشی در جهت زیر بر روی سطح عمود

بر محور نشان می دهد

تنش نیروی برشی از برای واحد سطح است

اگر نیروی وارد شده به سطح عمود بر آن باشد، تنش نرمال است

اگر نیروی وارد شده به سطح مماس بر آن باشد، تنش برشی است



τ_{xy} & τ_{yx} : Shear stress

τ_{xx} : Normal stress

نکته: جهت Normal stress برخلاف جهت فشاری باشد

جهت Shear stress موجب تغییر شکل زاویه ای می شود

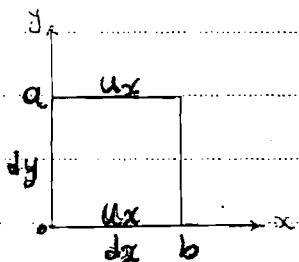
در حالت کلی می توان نوشت: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ & $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ & $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

تغییر شکل زاویه ای

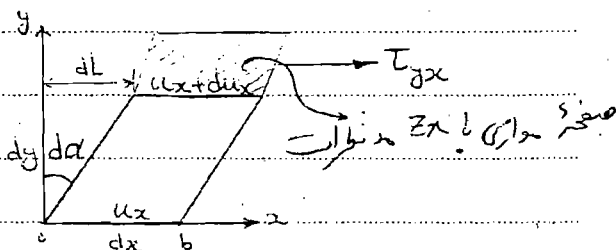
هنگامی که تنش برشی به سیال وارد شود، لایه های آن در راستای تنش قرار شده، متر و ربع به حرکت می آید

ملاحظه از تغییر شکل زاویه ای، تغییرات سرعت لایه های سیال در راستای عمود بر جهت تنش برشی وارد شده بد آن می باشد

اگر اختلاف سرعت در راستای آن باشد:



دارد آنرا می توان
در راستای x



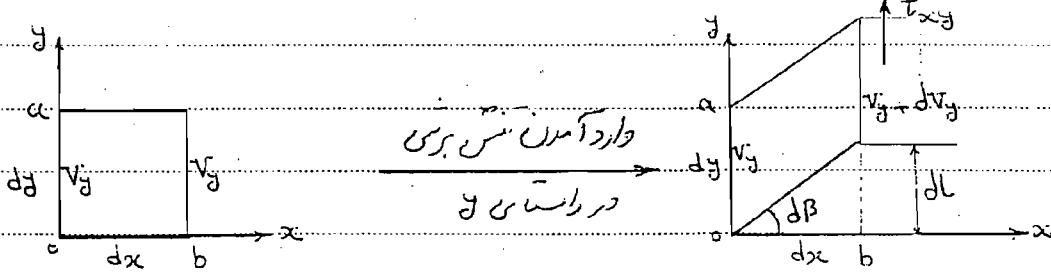
تغییر شکل زاویه ای: $\frac{du_x}{dy}$

با توجه به تغییرات شکل زاویه‌ای ایجاد شده بر اثر اعمال تنش برشی می‌توان نوشت:

$$dL = du_x \cdot dt = dy \cdot \text{tg}(\alpha) \quad \& \quad \text{tg}(\alpha) \cong d\alpha$$

$$\Rightarrow du_x \cdot dt = dy \cdot d\alpha \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{du_x}{dy} \Rightarrow \tau_{xy} \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \tau_{xy} \alpha \frac{du_x}{dy} \quad (1-26)$$

اگر اختلاف سرعت در راستای y باشد:



تغییر شکل زاویه‌ای: $\frac{dv_y}{dx}$

با توجه به تغییر شکل زاویه‌ای ایجاد شده بر اثر وارد آمدن تنش برشی می‌توان نوشت:

$$dL = dv_y \cdot dt = dx \cdot \text{tg}(\beta) \quad \& \quad \text{tg}(\beta) \cong d\beta$$

$$\Rightarrow dv_y \cdot dt = dx \cdot d\beta \Rightarrow \frac{d\beta}{dt} = \frac{dv_y}{dx} \Rightarrow \tau_{xy} \alpha \frac{d\beta}{dt} \Rightarrow \tau_{xy} \alpha \frac{dv_y}{dx} \quad (1-27)$$

در هر دو حالت (وجود تغییرات برشی در راستای x و راستای y) مشاهده می‌شود که تنش مناسب با تغییرات زاویه‌ای سرعت است و این تغییرات نسبت به هر دو راستای x و y متقارن است.

* شکل برمی ماند حرکت فقط برای سیالات نیوتونی است اما شکلش برای سیالات گامبرد دارد

11 Subject:

Year: 87 Month: 6 Date: 31 (3)

مکانیک سیالات پیشرفته

$$M \frac{Dv}{Dt} = \sum F$$

ثابت این معادلات با شکل اند قانون هم نیوتن بگادی مایل غم می باشد:

با استفاده از روابط مربوط به تنش های نرمال و برشی برای سیال های نیوتونی می توان شکل برمی معادله حرکت را

$$\rho \left[\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + W_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x \quad (1-35)$$

همچنین با استفاده از معادله تنش می توان معادله حرکت در راستای y را نیز بصورت زیر نوشت:

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = \frac{dP}{dy} - \rho g + \mu \left[\frac{d^2 V_y}{dx^2} + \frac{d^2 V_y}{dy^2} + \frac{d^2 V_y}{dz^2} \right] + \frac{1}{3} \mu \frac{d}{dy} \left[\frac{dU_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} + \frac{dW_z}{dz} \right] \quad (1-36)$$

توهم آخر است راست برای سیال توکام آیزر صفر می باشد:

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = \frac{dP}{dy} - \rho g + \mu \nabla^2 V_y \quad (1-37)$$

$$\rho \frac{DU_x}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 U_x$$

بطور کلی می توان معادلات Navier-Stokes را بدین شکل زیر نوشت:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_x w_z) \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx}$$

در راستای x نرخ افزایش اندازه حرکت در واحد حجم

$\nabla \cdot \rho v v$: نرخ ورود مومنتم با جریان حرکت در واحد حجم

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_x) + v \nabla^2 u = \frac{Du}{Dt}$$

$\nabla \cdot P$: نیروی فشاری وارد شده در واحد حجم

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_x) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x v_y) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x w_z) = \frac{Du}{Dt}$$

$\nabla \cdot T$: نرخ ورود مومنتم با جریان ویگوز در واحد حجم

ρg : نیروی گرانشی وارد شده در واحد حجم

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_x) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_x w_z) \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

باز شده معادله نامبر استوکس در راستای x را می توان به صورت زیر نوشت

Fully developed Flow

جریان توسعه یافته یا مبرهنه کاملاً مبرهنه
توزیع سرعت در این نوع جریان تغییر نمی کند



Subject:

7 Year: 87 Month: 6 Date: 26/2

از اینجا به بعد توزیع سرعت به همین شکل خواهد بود

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

رابطه تنش برشی و تنش برشی

با در نظر گرفتن ویکولوزیمت سیال به عنوان ضریب تناسب در معادلات (1-26) و (1-27) آنها در مورد

سیال های نیوتنی در مورد تنش برشی می توان نوشت:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[\frac{du_x}{dy} + \frac{dv_y}{dx} \right] \quad (1-28)$$

در مورد تنش برشی می توان نوشت:

$$\tau_{xx} = \mu \left[2 \frac{du_x}{dx} + \frac{2}{3} \left(\frac{du_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dw_z}{dz} \right) \right] \quad (1-29)$$

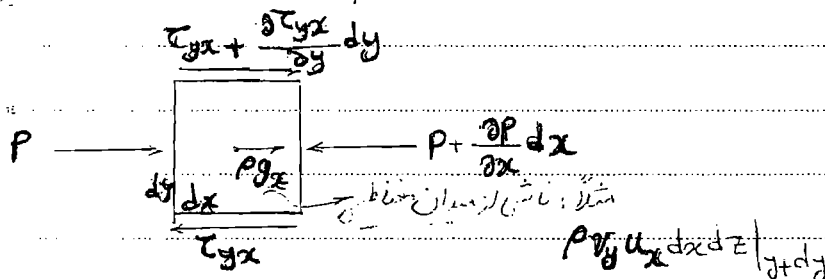
ترم اول در جریان توسعه یافته (Fully Developed) صفر است. ترم دوم برای سیال تراکم ناپذیر

صفر است. بنابراین معمولاً Normal Stress صفر است. $\rho = cte \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$

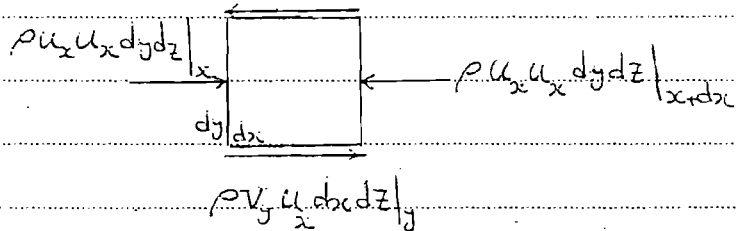
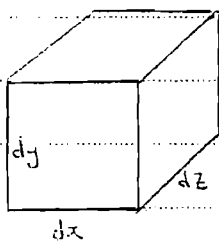
معادله حرکت

در مختصات کارتزین، نیروها و اندازه حرکت های وارد شده بیک انسان کوچک در راستای x به ترتیب زیر

نوشتنی شوند:



* سن در راستای x است



مستقیم

در حجم $\rho u_x u_x$ جهت حرکت

$$\rho U_x U_x dy dz |_x \longrightarrow \rho U_x U_x dy dz |_{x+dx}$$

$$\rho V_y U_x dx dz |_y \longrightarrow \rho V_y U_x dx dz |_{y+dy}$$

$$\rho W_z U_x dx dy |_z \longrightarrow \rho W_z U_x dx dy |_{z+dz}$$

$$\tau_{xx} dy dz |_x \longrightarrow \tau_{xx} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dx$$

$$\tau_{yx} dx dz |_y \longrightarrow \tau_{yx} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) dy$$

$$\tau_{zx} dx dy |_z \longrightarrow \tau_{zx} + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dz$$

$$P \longrightarrow P + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx$$

$$\rho g_x$$

Accumulation: $\frac{\partial(\rho U_x dx dy dz)}{\partial t}$

موازنه اندازه حرکت بصورت زیر نوشته می شود:

جمع دینروهای وارد شده بر سیستم + نرخ خروج - نرخ ورود = نرخ انباشتن

اندازه حرکت اندازه حرکت اندازه حرکت

acc

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho U_x dx dy dz)}{\partial t} &= \rho U_x U_x dy dz |_x + \rho V_y U_x dx dz |_y + \rho W_z U_x dx dy |_z \\ &+ \tau_{xx} dy dz |_x + \tau_{yx} dx dz |_y + \tau_{zx} dx dy |_z \\ &- \rho U_x U_x dy dz |_{x+dx} - \rho V_y U_x dx dz |_{y+dy} - \rho W_z U_x dx dy |_{z+dz} \\ &- \left(\tau_{xx} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right) dx\right) dy dz |_{x+dx} - \left(\tau_{yx} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) dy\right) dx dz |_{y+dy} - \left(\tau_{zx} + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dz\right) dx dy |_{z+dz} \\ &+ P dx dy dz - \left(P + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx\right) dy dz + \rho g_x dx dy dz \end{aligned}$$

مطابق موازنه بصورت زیر می آید:

$$\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho U_x U_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y U_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W_z U_x) \right]$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \quad (1-2a)$$

9

Subject:

Year: 27 Month: 6 Date: 2012

اگر دانه میل ثابت باشد $\rho = c$.

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho \left[\frac{\partial (u_x u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y u_x)}{\partial y} + \frac{\partial (w_z u_x)}{\partial z} \right]$$

$$= \rho \frac{D u_x}{D t} = \left[\frac{\partial \tau}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \tau_{zx} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (1-31)$$

بهمین ترتیب در جهت Z و J نیز می توان اندازه حرکت را نوشت:

$$\frac{\partial (\rho v_y)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x v_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z v_y) \right]$$

$$= \left[\frac{\partial \tau}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \tau_{zy} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (1-32)$$

$$\frac{\partial (\rho w_z)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x w_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y w_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z w_z) \right]$$

$$= \left[\frac{\partial \tau}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \tau_{zz} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (1-33)$$

ناشن عبری معادله حرکت با استفاده از مشتق گیری اجسی بصورت زیر در می آید:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \rho G - \nabla T \quad (1-39)$$

مجموع ثابتها

اگر سیال نیوتنی باشد می توان نوشت:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \rho G + \mu \nabla^2 V \quad (1-40)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

معادله ادر Euler: سیال نیوتنی، چگالی ثابت، و سلزویته صفر

هرگاه از تاثیر ویسکوزیته صرف نظر شود، در سیال ایده آل می توان نوشت:

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \quad (1-41) \quad \leftarrow \rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \rho g$$

3.5 $\frac{\partial u_y}{\partial t} = 0$

در حالت پایا معادله حرکت بصورت زیر در می آید: $\rho \left[u_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \quad (1-42)$

برای سیال ایده آل می توان نوشت: $\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} ; \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial y} ; \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial x}$

این روابط برای سیال غیر چرخشی (سیال ایده آل) صادق می باشند و در بخش 3 اثبات می شوند.

انتگرال گیری $u^2 \rightarrow \rho u du$ $\rho \left[u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \quad (1-43)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho [u_x^2 + v_y^2 + w_z^2] + P + \rho g y = cte \Rightarrow \frac{1}{2} \rho u^2 + P + \rho g y = cte$

معادله برنولی $\Rightarrow \frac{u^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + y = \frac{u_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + y_1 \quad (1-44)$

شرایط معادله برنولی:

۱) سیال ایده آل و سلزویته صفر (نیوتنی و چگالی ثابت)

۲) steady state

۳) بردار سطح و سرعت بر هم عمود باشند

مخادلات حرکت در مختصات استوانه‌ای و کروی:

معادلات حرکت در راستای z و θ (مختصات استوانه‌ای) و r و ϕ (مختصات کروی) در پیوسته B کتاب مرجع آمده است.

نکته: وقتی بیان غیر بیضی باشد، باید از شکل کنشی آن استفاده کرد.

تذکره: منظور حل مسائل مربوط به دینامیک سیالات، لزوماً است معادلات پیوستگی و حرکت Navier - Stokes حل شوند.

- با حل این معادلات، توزیع سرعت تعیین می‌شود.
- تشخیص جهت (جهات)، اصلی حرکت، مطابق جهت جریان و مرزهای اصلی (غیر صغیر) سرعت، بسیار اهمیت دارد.

تمرین: توزیع سرعت سیالی را که میان دو صفحه استی موازی حرکت می‌کند، تعیین کنید.

برضایات: جریان یک بعدی فرض می‌شود. ($v_y = 0$) • جریان توسعه یافته فرض می‌شود. ($U_x \neq 0$)

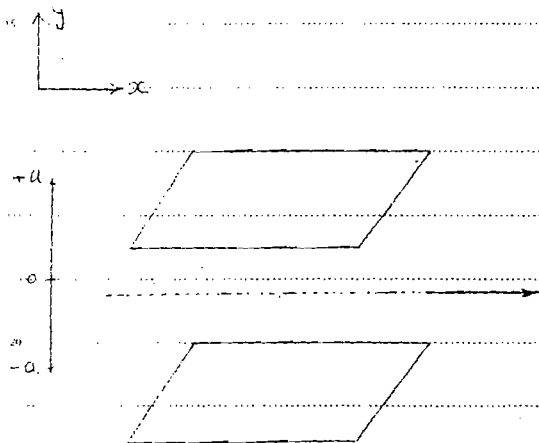


Fig. 1-9

$$\rho \frac{\partial U_x}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \rho g_{ox} + \mu \nabla^2 U_x \quad \text{حل تریجی}$$

$$\rightarrow \rho \left[\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right] = -\frac{dp}{dx} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right]$$

مقطع در راستای x تغییرات سرعت داریم. جریان توسعه یافته جریان توسعه یافته جریان پایا

$$\rightarrow a = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \quad \& \quad \frac{dp}{dx} = c \rightarrow c = \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \quad \& \quad \text{B.C.} \begin{cases} y=+a : U_x = U_T \\ y=-a : U_x = U_B \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = \frac{c}{\mu} \quad \text{استخوان گیری} \rightarrow \frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{c}{\mu} y + b_1 \quad \text{استخوان گیری} \rightarrow U_x = \frac{c}{2\mu} y^2 + b_1 y + b_2$$

$$\text{در این معادله برای تعیین ثابت‌ها، از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم.} \quad b_1 = \frac{U_T - U_B}{2a} \quad \& \quad b_2 = \frac{(U_T + U_B)}{2} - \frac{c}{2\mu} a^2$$

$$\rightarrow U_x = \frac{c}{2\mu} \left[y^2 - a^2 \right] + \frac{U_T - U_B}{2a} y + \frac{U_T + U_B}{2}$$

در این معادله برای تعیین ثابت‌ها، از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = c \rightarrow \text{جریان توسعه یافته است}$$

$$U_m = \frac{c}{2\mu} y^2 + b_1 y + b_2 \quad \begin{cases} y=+a & U_m = U_T \\ y=-a & U_m = U_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_T = \frac{c}{2\mu} (a)^2 + b_1 a + b_2 \\ U_B = \frac{c}{2\mu} (a)^2 - b_1 a + b_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2b_2 &= U_T + U_B \\ b_2 &= \frac{(U_T + U_B)}{2} \end{aligned}$$

$$2b_1 a + \frac{ca}{\mu} = U_T - U_B \Rightarrow b_1 = \frac{(U_T - U_B) - \frac{ca}{\mu}}{2a}$$

~~$$a = \frac{U_T - U_B}{2b_1 + \frac{c}{\mu}} = \frac{\mu(U_T - U_B)}{2b_1 \mu + c}$$~~

~~$$U_m = \frac{c}{2\mu} y^2 + \frac{(U_T + U_B)}{2} y +$$~~

$$U_m = \frac{c}{2\mu} y^2 + \left(\frac{U_T - U_B}{2a} - \frac{c}{2\mu} \right) y + \frac{(U_T + U_B)}{2}$$

حل تقریبی جدید: (۱)

$$\rho \frac{DU_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left[\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \right] + \rho g_x$$

معادله در راستای x سرعت داریم

$$\frac{\tau}{zx} = -\mu \left[x \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{2}{3} \mu - k \right] \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] = 0 \quad \frac{\tau}{\partial x} = -\mu \left[\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial U_x}{\partial x} \right] \Rightarrow \tau = -\mu \frac{\partial U_x}{\partial x}$$

توسعه یافته

$$\nabla U = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_x}{\partial z} = 0 \quad \frac{\tau}{zx} = -\mu \left[\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_x}{\partial x} \right] = 0$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی حل خواهد شد

$$\frac{-\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[-\mu \frac{\partial U_x}{\partial y} \right] = 0, \mu = \text{cte} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$$

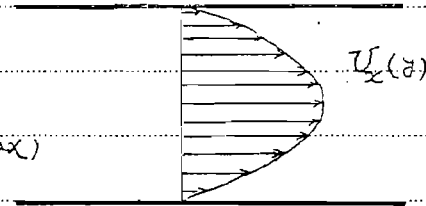
B.C.1: $y = +a \rightarrow U_x = 0$

B.C.2: $y = -a \rightarrow U_x = 0$

$$\Rightarrow U_x = \frac{a^2}{2\mu} \left[\frac{-\partial p}{\partial x} \right] \left[1 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \bar{U}_x = \frac{2}{3} U_{x(\max)}$$

& $U_{x(\max)} = \frac{a^2}{2\mu} \left[\frac{-\partial p}{\partial x} \right] \quad (\text{at } y=0)$

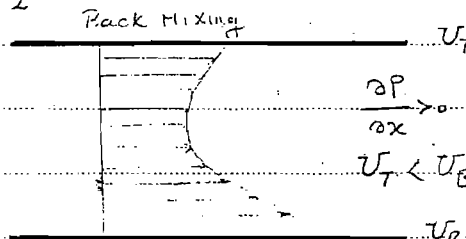
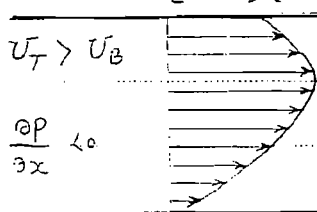


در این حالت اگر انت فشار وجود نداشته باشد، جریان برقرار خواهد شد

B.C.1: $y = +a \rightarrow U_x = U_T$

B.C.2: $y = -a \rightarrow U_x = U_B$

$$U_x = \frac{a^2}{2\mu} \left[\frac{-\partial p}{\partial x} \right] \left[1 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] + \frac{U_T - U_B}{2a} y + \frac{U_T + U_B}{2}$$

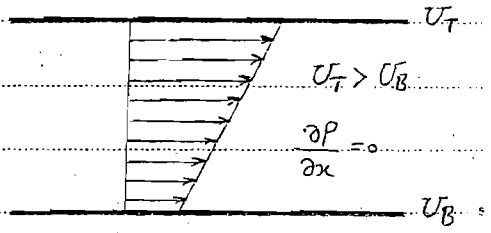


در این حالت، حتی اگر انت فشار وجود نداشته باشد، جریان برقرار خواهد بود

حرکت از در صفحه با سرعت ثابت حرکت کنند، اما لغت ثابتی وجود ندارد.

B.C.1: $y = +a \rightarrow U_x = U_T$

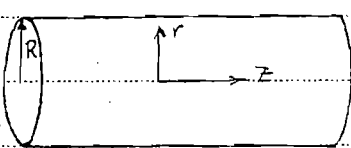
B.C.2: $y = -a \rightarrow U_x = U_B$



$$U_x = \frac{U_T - U_B}{2a} y + \frac{U_T + U_B}{2}$$

فرضیات: توزیع سرعت میان داخل یک لوله استقراری را بررسی کنید.

فرضیات: جریان یک بعدی در راستای z و توسعه یافته فرض می شود.



$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) \right] + \rho g_z$$

بعد از ساده سازی معادله: $\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = 0$; $\tau_{rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$

حرکت در راستای z.

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

در حالت جاری توسعه یافته، لغت ندارد.

ثابت می باشد، بنابراین:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} \Rightarrow \frac{dp}{dz} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

معادله ساده شده حرکت در راستای z. در صورت زیر در می آید:

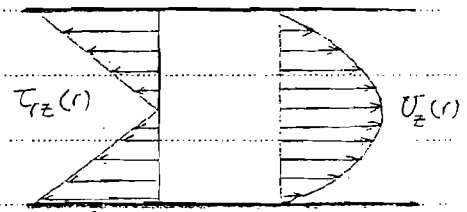
$$\frac{r^2}{2} \frac{dp}{dz} + A = \mu r \frac{\partial v_z}{\partial r} \Rightarrow \frac{r}{2\mu} \frac{dp}{dz} + \frac{A}{\mu r} = \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

در هر دو لوله به دلیل تقارن تغییرات سرعت وجود ندارد.

B.C.1: at $r=0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow v_z = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} + B$

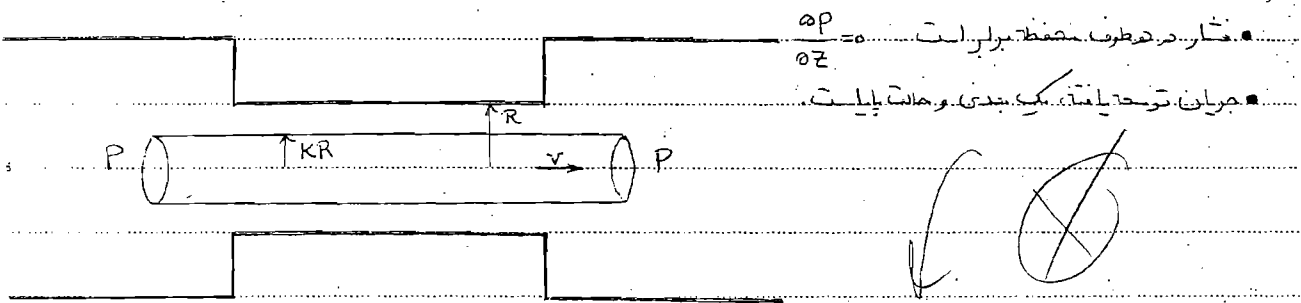
B.C.2: at $r=R \Rightarrow v_z = 0$

$$\Rightarrow v_z = \frac{R^2}{4\mu} \left[- \frac{dp}{dz} \right] \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$



$$v_{z,max} = \frac{R^2}{4\mu} \left[- \frac{\partial p}{\partial z} \right] \text{ at } r=0 \quad \& \quad \bar{v}_z = \frac{1}{2} v_{z(max)} = \frac{\int_A v_z dA}{\int_A dA} \quad dA = 2\pi r dr$$

تقریباً در جبهه جریان آرام، پتانسیل تراکم ناچیز در فضای بین پیلدها و پیستون است. در صورتیکه حرکت پیستون بی انتها آهسته پیستون با سرعت V بدست راست حرکت می کند.



حل: با توجه به معادله حرکت در راستای z در مختصات استوانه ای و نیز فرض اینکه پتانسیل جریان نوشته شود (فشار هر دو سمت یکسان می باشد، در نتیجه انتگرال برابر صفر است).

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (r \tau) = A \Rightarrow \tau = \frac{A}{r} \Rightarrow \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

$$\Rightarrow v_z = -\frac{A}{\mu} \ln r + B \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{B.C.1: at } r=R : v_z=0 \\ \text{B.C.2: at } r=KR : v_z=V \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{v_z}{V} = \frac{\ln r/R}{\ln K} \quad \left(\rho \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau) \right] \dots \dots \dots \right.$$

$$Q = \int U_z dA = \int_{KR}^R \frac{\ln r/R}{\ln K} 2\pi r dr \Rightarrow Q = \frac{\pi R^2 V}{2} \left[\frac{1-K}{\ln \frac{1}{K}} - 2K \right] = \bar{U}_z A$$

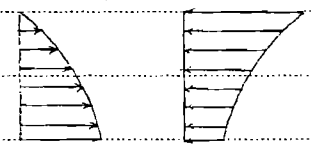
$$\frac{v_z}{V} = \frac{\ln(r/R)}{\ln(K)}$$

اگر $K \rightarrow 1$ رابطه سرعت خطی می شود. اگر $K \rightarrow \infty$ دی صغری می شود.

$$U_z = \frac{V}{\ln K} \ln \frac{r}{R} \quad \tau_{rz} = \frac{A}{r}$$

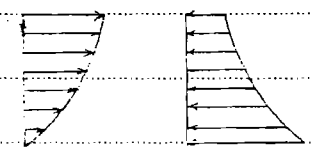
$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

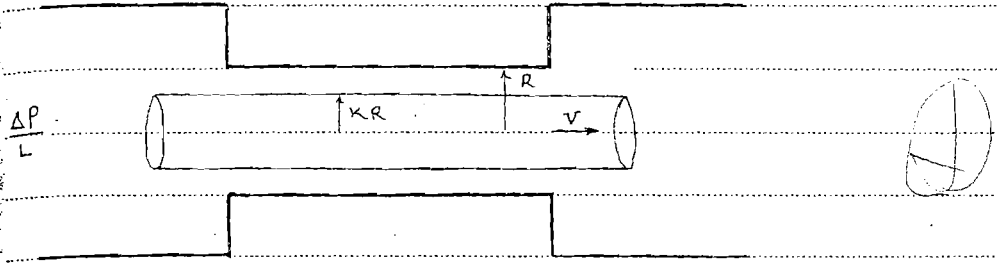


توزیع تنش τ توزیع سرعت U_z

Integration By Part: $\int u dv = uv - \int v du$



تمرین: دبی حجمی جریان آب را در میان تراکم ناپذیر در داخل فضای بین سینی در پیستون که تحت تاثیر حرکت پیستون می باشد. در چه سرعتی از پیستون (V) با وجود اختلاف فشار در دو سمت پیستون (ΔP)، صفر خواهد شد؟



$$\frac{\Delta P}{L} = C = \mu \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \Rightarrow v_z = \frac{C r^2}{4\mu} + B \ln r + A$$

اعمال شرایط مرزی:

$$\Rightarrow v_z = \frac{C r^2}{4\mu} + \left[\frac{4\mu V}{C R^2 (K^2 - 1) \ln K} \right] \ln r + \frac{C R^4 (1 - K^2) \ln K - 16\mu^2 V}{4\mu C R^2 (K^2 - 1) \ln K}$$

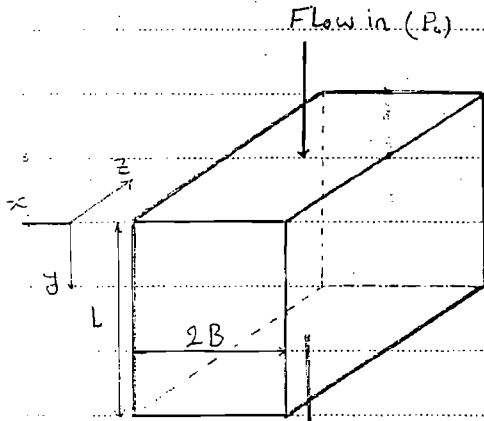
* نیروی که به پیل وارد می شود همان نیروی و اسکالری است که به سطح جانبی پیل وارد می شود

$$F = \tau A = \mu \frac{dv_z}{dr} A = \mu \left(\frac{r}{K R \ln K} \right) 2\pi R L$$

$$Q = \int v_z dA = \dots$$

$$r = KR \rightarrow v_z = \frac{C K^2 R^2}{4\mu} - \left(\frac{C R^2 + 4\mu A}{4\mu \ln R} \right) \ln KR + A$$

تجزیه: در موی جریان را برای جریان آرام سیال تراکم ناپذیر در داخل فضای کانال مطابق شکل، که نسبت آن به اختلاف فشار و جاذبه تعالی باشد، بیست آورید.
 narrow slit



فرضیات: ۱. جریان یک بصری است و نسبت بر ۱، ۲، ۳
 بسیار کوچک است

۱.۲ اثرات استرجاعی صرف نظر شود

حل: با بردن معادله حرکت در راستای x می توان نوشت:

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{dp}{dy} + \rho g + \mu \nabla^2 v_y$$

در دست راست؟

$$\Rightarrow \frac{dp}{dy} - \rho g = \mu \frac{d^2 v_y}{dx^2} \Rightarrow \frac{(P_1 - P_2) + \rho g L}{L} = \mu \frac{d^2 v_y}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_y}{dx} = -\frac{k}{\mu} x + a \quad ; \quad v_y = -\frac{k}{2\mu} x^2 + ax + b$$

B.C.S: $x = \pm B \Rightarrow v_y = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \& \quad b = \frac{k}{2\mu} B^2$

$$\Rightarrow v_y = \frac{k B^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{B}\right)^2 \right]$$

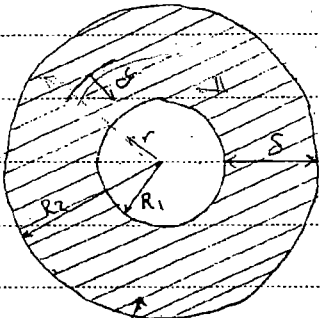
$$Q = \int v_y dA = 2 \int_0^B \frac{k B^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{B}\right)^2 \right] w dx \Rightarrow Q = \frac{2 k B^3}{3\mu} = \frac{2 [P_1 - P_2 + \rho g L] w B^3}{3 L \mu}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \left[\frac{\partial z}{\partial x} x_y + \frac{\partial z}{\partial y} y_y + \frac{\partial z}{\partial z} z_y \right] + \rho g_y$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]$$

$$\rightarrow 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \rho g_y \rightarrow \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}$$

توزیع سرعت را برای جریان آرام میان تراکم‌ناپذیر و بی‌غیرت در فضای بین دو لوله مطابق شکل بالا بکشید. آیا می‌توان لوله درونی را برداشت و همچنین توان مورد نیاز را محاسبه کرد.



اختلاف فشار داریم.

بین دو لوله است. (تخمین متغیر)

این حالت برای جریان ویسکوز کارایی دارد.

با ساده کردن معادله حرکت در راستای θ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_\theta) \right] = \frac{\Delta p}{4\mu L} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_\theta) = A \Rightarrow v_\theta = \frac{A}{2} r^2 + \frac{B}{r}$$

B.C.I: at $r=R_1$: $v_\theta = R_1 \omega$

B.C.I: at $r=R_2$: $v_\theta = 0 \Rightarrow v_\theta = \frac{R_1^2 \omega}{R_1^2 - R_2^2} \left[r - \frac{R_2^2}{r} \right]$

اگر سیال غیر نیوتن باشد، باید از شکل تنش معادله حرکت استفاده کرد.

با علت توجه ایکنگی، سرعت در R_1 های مختلف متفاوت است و سرعت نتایج r می‌باشد.

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] \Rightarrow \tau_{r\theta} = \frac{-2R_1^2 \omega \mu}{R_1^2 - R_2^2} \frac{R_2^2}{r^2}$$

at $r=R_1$: $\tau_{r\theta} = \frac{2R_2^2 \omega \mu}{R_2^2 - R_1^2}$

at $r=R_2$: $\tau_{r\theta} = \frac{2R_1^2 \omega \mu}{R_2^2 - R_1^2}$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta$$

نقطه هرگاه ضخامت سیال (در این جا فاصله بین دو لوله) بسیار کوچک باشد، سرعت با فاصله بصورت خطی تغییر می کند.

با تعریف کردن تغییر جدید بصورت زیر می توان نوشت: $R_2 - R_1 = \delta$ & $y + r = R_1 + \frac{\delta}{2}$

از آنجایی که در مقابل R_1 مقابل صرف نظر کردن می باشد. یعنی در رابطه y و r را حذف می کنیم:

$$y = R_1 - r \Rightarrow dy = -dr, \quad \frac{1}{R_1 - y} \frac{d}{dy} [(R_1 - y) V_\theta] = A$$

B.C1: at $y = +\frac{\delta}{2} \Rightarrow V_\theta = R_1 \omega$

B.C2: at $y = -\frac{\delta}{2} \Rightarrow V_\theta = 0$

$$V_\theta = \frac{R_1 \omega}{\delta} y + \frac{R_1 \omega}{2}$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \frac{R_1 \omega}{\delta}$$

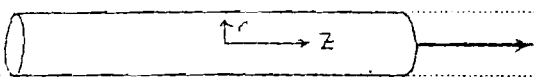
- چون سرعت خطی است، تنش برشی نیز ثابت می باشد.
- میدان سرعت با افزایش R کاهش می یابد.
- برای محاسبه تیران مورد نیاز بر واحد طول می توان نوشت:

$$P = F * V, \quad F = \tau_{r\theta} * A = \mu \frac{R_1 \omega}{\delta} * 2\pi R_1 * L \Rightarrow F = 2\pi \mu \frac{R_1^2 \omega}{\delta}$$

$$V = R_1 \omega \Rightarrow P = 2\pi \mu \frac{R_1^3 \omega^2}{\delta}$$

توزیع سرعت سیال را در لوله با جریان لغزشی (Slip Flow) بدست آورید.

حل با استفاده کردن معادله حرکت در راستای Z می توان نوشت:



$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz})$$

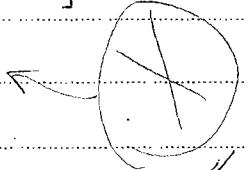
جریان توسعه یافته نیز می شود، بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$$

از سرری یا توسعه بر لغزشی بودن جریان می توان نوشت: چون لغزشی است در دیواره توزیع سرعت داریم.

$$\tau_{rz} = \left[\frac{dp}{dz} \right] \frac{r}{2} + \frac{A}{r}; \quad \text{at } r=0 \Rightarrow \tau_{rz} = 0 \Rightarrow A=0 \quad \& \quad \tau_{rz} = \left[\frac{dp}{dz} \right] \frac{r}{2} = \mu \frac{dv_z}{dr}$$

$$v_z = \left[\frac{dp}{dz} \right] * \frac{-r^2}{4\mu} + B \Rightarrow v_z = \frac{R^2}{4\mu} \left[\frac{dp}{dz} \right] \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{2\mu}{\beta R} \right]$$

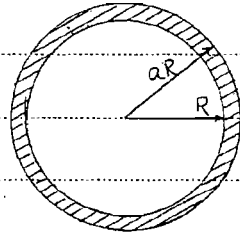
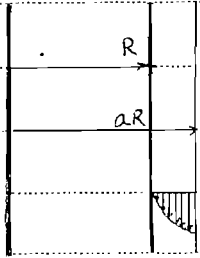


هرگاه $\beta \rightarrow \infty$ شرط مرزی بر شرط No-Slip Flow تبدیل می شود.

$$\tau_{rz} = -\mu \left[\frac{dv_z}{dr} + \frac{dv_z}{dz} \right]$$

* در سطح سیال آزاد باشد تنش منفرست
* در سطح آزاد، فشار متساوی نماند

توزیع سرعت را برای جریان آرام سیال تراکم ناپذیر سقوط کننده در پیرن لوله عمودی، مطابق شکل که تصدیق آن نیز جاذبه مقصود باشد، بدست آورید. (falling film)



حل: با استفاده از معادله حرکت در راستای Z

$$\rho g a R = \mu \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_z}{dr} \right) + \rho g$$

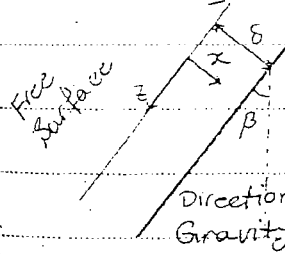
$$\frac{dP}{dz} = 0 \rightarrow \text{در عرض لوله تغییر ندارد}$$

$$\Rightarrow \tau_{rz} = \frac{-\rho g r}{2} + \frac{A}{r} \quad \text{B.C.1: at } r=aR \Rightarrow \tau_{rz} = 0 \Rightarrow \tau_{rz} = \frac{-\rho g a R}{2} \left[\frac{r}{aR} - \frac{aR}{r} \right]$$

$$\tau_{rz} = \mu \frac{dU_z}{dr} \Rightarrow U_z = -\frac{\rho g a R}{2\mu} \left[\frac{r^2}{2aR} - aR \ln r \right] + B$$

$$\text{B.C.2: at } r=R \Rightarrow U_z=0 \Rightarrow U_z = \frac{\rho g a^2 R^2}{4\mu} \left[\frac{1}{a^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + 2 \ln \frac{r}{R} \right]$$

در حالت پایا، دبی جری سیال، میروی وارد شده از طرف سیال و میانگین سرعت را برای جریان آرام سیال تراکم ناپذیر سقوط کننده مطابق شکل بدست آورید.

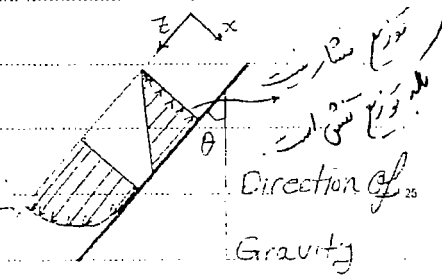


$$\frac{dP}{dz} - \rho g \cos \beta = \mu \frac{d^2 U_z}{dx^2} \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g \cos \beta = \mu \frac{d^2 U_z}{dx^2} \Rightarrow \frac{dU_z}{dx} = -\frac{\rho g \cos \beta}{\mu} x + A$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} x^2 + Ax + B = U_z \quad \text{B.C.1: } \left[\frac{dU_z}{dx} \right]_{x=0} = 0 \quad \text{B.C.2: } (U_z)_{x=\delta} = 0$$

$$\Rightarrow U_z = \frac{\delta^2 \rho g \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \Rightarrow \dot{m} = \dot{w} = \int_0^\delta \rho U_z dA = \int_0^\delta \rho \frac{\delta^2 \rho g \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] w dx$$

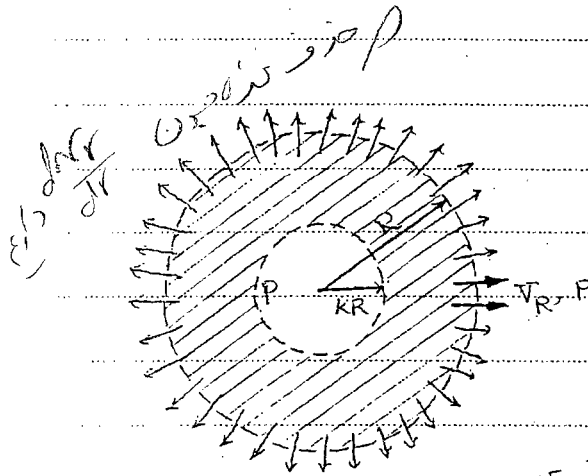
$$\Rightarrow \dot{w} = \frac{\rho^2 g \cos \beta \delta^3 w}{2\mu} \quad ; \quad w \text{ is the plate width.}$$



همان طور که در شکل دیده می شود x زیاد آهسته آهسته سرعت جریان نسبت است
از این نکته در پدیده تپانگی استفاده می شود

(8)

تجزیه جریانی از سیال تراکم ناپذیر در حالت هیدرواستاتیسم در اثر اختلاف فشار بین دو استوانه هم محور متفاصل مطابق شکل وجود دارد. جریان سیال را با توجه به وجود سرعت در سطح جامد و صرف نظر از طول استوانه بررسی و توزیع فشار و سرعت را در شعاع R بدست آورید.



حل: معادله بیرونی در سیستم مختصات استوانه ای بصورت زیر نوشته می شود: ماکسویت v_r تغییر نمی کند.

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d(v_r r)}{dr} \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{d(v_\theta)}{d\theta} \right] + \frac{d(v_z)}{dz} = 0$$

با توجه به فیزیک سیالی توان نوشت: $v_\theta = 0$ و $v_z = 0$

$$r v_r = f(\theta, z) \Rightarrow r v_r = C \Rightarrow \rho (2\pi r L) = W$$

$$\Rightarrow C = \frac{W}{2\pi L \rho}$$

توجه: v_r تابع θ و z نیز نمی باشد. ثابت است. ρ هم ثابت است.

$$\rho v_r \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) \right]$$

$$\rho v_r \left[v_r \frac{d(v_r)}{dr} \right] = - \frac{dP}{dr} \Rightarrow \rho \left[\frac{C}{r} \left(\frac{d(C)}{dr} \right) \right] = - \frac{dP}{dr}$$

$$v_r = \frac{C}{r} = \frac{W}{2\pi L \rho r} \Rightarrow \mu \left[\frac{\partial C^2}{\partial r^3} \right] = - \frac{dP}{dr} \Rightarrow P = \mu \left[\frac{C^2}{2r^2} \right] + D$$

• اگر دانستیم که پتانسیل توان از ρg هم نظر کرد

• اگر چنانچه را هم نظر کنیم تغییرات درجهت θ نیز وجود دارد.

BCs: $P = P_R$ and $v_r = v_R$ at $r = R$

$$\frac{d(v_r r)}{dr} = 0 \text{ تانس از } r$$

$$\Rightarrow D = P_R + \frac{\rho C^2}{2R^2} \text{ و } C = R v_R$$

نیست و تانس از θ است اگر دانسته سیال

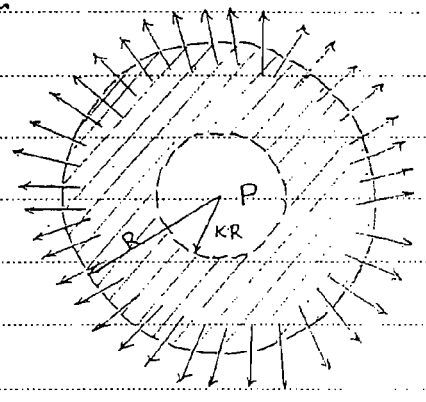
زاد باشد و با دوران دامنه با هم θ اثرش ندارد.

$$\Rightarrow P = P_R + \frac{1}{2} \rho v_R^2 \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]$$

تجزیه جریانی از سیال تراکم ناپذیر در حالت همدا با دانسیته در اثر اختلاف فشار بین دو کوره هم مرکز متخلخل مطابق شکل موجود دارد. جریان سیال را با توجه به وجود سرعت در سطح جامد و جریان آرام بر روی نماینده و توزیع فشار و سرعت را بدست آورید:

معادله پیوستگی در سیستم مختصات کروی بصورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{d(r^2 v_r)}{dr} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{d(v_\theta \sin \theta)}{d\theta} \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{d(v_\phi)}{d\phi} \right] = 0$$



با توجه به نسیزگی و اثری توان نوشت: $v_\theta = 0$ and $v_\phi = 0$

$$r^2 v_r = f(\theta, \phi) \quad ; \quad r^2 v_r = c \quad ; \quad \rho [4\pi r^2 v_r] = W$$

$$\Rightarrow c = \frac{W}{4\pi\rho}$$

با استفاده از معادله حرکت در راستای r می توان نوشت:

$$\rho \left[v_r \frac{d(v_r)}{dr} \right] = - \frac{dp}{dr} \quad ; \quad v_r = \frac{c}{r^2} = \frac{W}{4\pi\rho r^2}$$

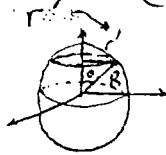
$$\Rightarrow \rho \left[\frac{c^2}{r^5} \right] = - \frac{dp}{dr} \Rightarrow p = \frac{1}{2} \rho \left[\frac{c^2}{r^4} \right] + D$$

B.C.s: $p = p_R$ and $v_r = v_R$ at $r = R$

$$D = p_R - \frac{\rho c^2}{2R^4} \quad ; \quad c = R^2 v_R \Rightarrow p = p_R - \frac{\rho v_R^2}{2} \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right]$$

اگر می استوانه (بره) در آن دماسته باشد + نیرو وارد می شود
اگر دماسته سیال زیاد دماسته + نیرو وارد می شود

سرعت زاویه‌ای \times شعاع حلقه‌ای از بره در سیال \Rightarrow سرعت زاویه‌ای سیال

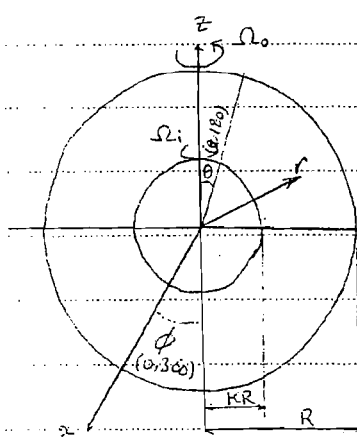


$$r' = R \sin \theta$$

2 Subject:

Year: 87 Month: 7 Date: 16/7

(15) جریان از سیال تراکم‌ناپذیر در حالت هم‌دم و آرام بین دو کره هم‌مرکز با سطح در حال چرخش مطابق شکل قرار دارد. توزیع سرعت سیال را در حالت پایا با فرض کوچک بودن مقادیر سرعت چرخش (جریان خزشی) بدست آورید.



$$\text{حفاظت پیوستگی: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (V_\phi) = 0$$

با توجه به اینکه ما برای توان سرعت $V_r = 0$ و $V_\theta = 0 \Rightarrow V_\phi = V_\phi(r, \theta)$

$$r\text{-Component: } 0 = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\theta\text{-Component: } 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

ϕ -Component:

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V_\phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (V_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right]$$

B.C.1: at $r = KR$; $V_\phi = \Omega_i KR \sin \theta$

B.C.2: at $r = R$; $V_\phi = \Omega_o R \sin \theta$

$$\Rightarrow V_\phi(r, \theta) = f(r) g(\theta) = f(r) \sin \theta$$

با در نظر گرفتن $r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - 2f = 0$; Suppose that: $f(r) = r^n$

$$n^2 + n - 2 = 0 \Rightarrow n = 1, -2$$

$$\Rightarrow f(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \text{ and } V_\phi(r, \theta) = \left[C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \right] \sin \theta$$

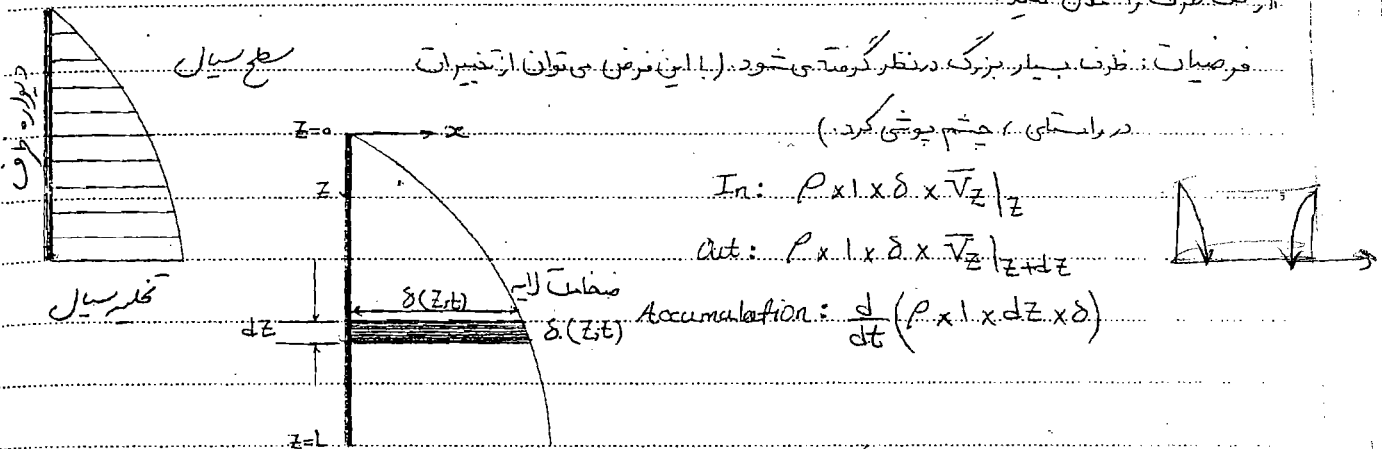
$$\Rightarrow \Omega_i KR = C_1 KR + \frac{C_2}{K^2 R^2} \text{ and } \Omega_o R = C_1 R + \frac{C_2}{R^2}$$

$$C_1 = \frac{\Omega_o - \Omega_i K^3}{1 - K^3} \text{ and } C_2 = (\Omega_i - \Omega_o) \frac{K^3 R^3}{1 - K^3}$$

$$V_\phi = \left[\frac{\Omega_o - \Omega_i K^3}{1 - K^3} r + (\Omega_i - \Omega_o) \frac{K^3 R^3}{1 - K^3} \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta = \frac{KR}{1 - K^3} \left[(\Omega_o - \Omega_i K^3) \left(\frac{r}{KR} \right) + (\Omega_i - \Omega_o) \left(\frac{KR}{r} \right)^2 \right] \sin \theta$$

$$\Rightarrow V_\phi = \left[\frac{\Omega_o KR}{1 - K^3} \left(\frac{r}{KR} - \frac{K^2 R^2}{r^2} \right) + \Omega_i \frac{K^3 R^3}{1 - K^3} \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{r}{R} \right) \right] \sin \theta$$

تقریباً: طرف بسیار بزرگی را در نظر بگیریم. در یک لحظه کف طرف به یکباره برداشته می شود. خالی شدن آب از کف طرف را مدل کنید.



فرضیات: طرف بسیار بزرگ در نظر گرفته می شود. (با این فرض می توان از تغییرات در راستای x چشم پوشی کرد.)

In: $\rho \cdot x \cdot \delta \cdot x \cdot \bar{V}_z |_x$

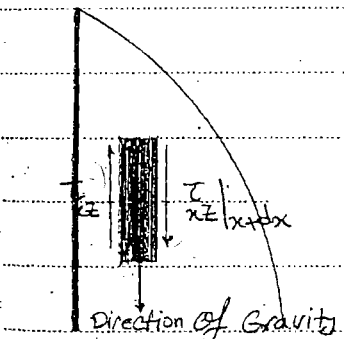
Out: $\rho \cdot x \cdot \delta \cdot x \cdot \bar{V}_z |_{x+dx}$

Accumulation: $\frac{d}{dt} (\rho \cdot x \cdot \delta \cdot dx \cdot x)$

Input - Output = Accumulation

$\frac{d}{dx} [\delta \bar{V}_z] = - \frac{d\delta}{dt}$

باتوجه اصل بقا جرم (معادله پیوستگی) می توان نوشت:
 • ریزش تقریباً شیب نداشت و فشار داخل آن همگن می باشد.
 * تنش در جهت حرکت سیال نیست



$\tau_{xz} * dx * \delta * 1 |_x$

$\tau_{xz} * dx * \delta * 1 |_{x+dx}$

$\rho g dx * dx * \delta * 1$

$\sum F_z = 0 \Rightarrow \frac{d\tau_{xz}}{dx} = -\rho g \Rightarrow \tau_{xz} = -\rho g x + C$

باعاض کردن شرایط مرزی می توان نوشت:

B.C.1: at $x = \delta \Rightarrow \tau_{xz} = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \rho g (\delta - x)$

$\tau_{xz} = \mu \frac{dv_z}{dx}$; $\mu \frac{dv_z}{dx} = \rho g (\delta - x) \Rightarrow v_z = \frac{\rho g}{\mu} \left[\delta x - \frac{x^2}{2} \right] + B$

B.C.2: at $x = 0 \Rightarrow v_z = 0 \Rightarrow B = 0$ $\therefore v_z = \frac{\rho g}{\mu} \left[\delta x - \frac{x^2}{2} \right]$

$\bar{v}_z = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{\rho g}{\mu} \left[\delta x - \frac{x^2}{2} \right] dx = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu}$

$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$

$\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \rho g = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = - \frac{\rho g}{\mu} x + B$

$x = \delta \rightarrow c = - \frac{\rho g}{\mu} \delta + B \rightarrow B = \frac{\rho g}{\mu} \delta$

$v_z = - \frac{\rho g}{2\mu} x^2 + \frac{\rho g}{\mu} \delta x + C_1$

$\therefore - \frac{\rho g}{\mu} \left(\delta x - \frac{x^2}{2} \right)$

PAPCO

با جایگزینی سرعت مایکین فرم دیفرانسیلی مدل این تیرین بدگلی زیر در می آید:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\rho g \delta^3}{3\mu} \right] = - \frac{d\delta}{dt} \Rightarrow \frac{d\delta}{dt} + \frac{\rho g}{\mu} \delta^2 \frac{d\delta}{dz} = 0$$

با توجه به فرم حادلا دیفرانسیلی برت آمده و نیز امکان استفاده از روش جدایی متغیرها Separation of variables می توان نوشت:

$$\delta(z,t) = Z(z) T(t)$$

$$\Rightarrow Z \frac{dT}{dt} + \frac{\rho g}{\mu} Z^2 T^2 \frac{dZ}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{\rho g}{\mu} Z T^2 \frac{dZ}{dz} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T^3} \frac{dT}{dt} + \frac{\rho g}{\mu} Z \frac{dZ}{dz} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{B.C: } z=0 \Rightarrow \delta=0 \Rightarrow Z=0 \\ \text{I.C: } t=0 \Rightarrow \delta=\infty \Rightarrow T=\infty \end{array} \right.$$

زمانی که هنوز در سوال
بدانته شده است.

$$\frac{1}{T^3} \frac{dT}{dt} = - \frac{\rho g}{\mu} Z \frac{dZ}{dz} = \beta \quad ; \quad \beta = \pm \lambda^2, \quad \lambda: \text{eigen value}$$

β می تواند صفر مثبت یا منفی باشد که تنها علامت منفی آن پذیرفتنی است در حالت β < 0 می توان نوشت:

$$\frac{dT}{dt} + \lambda^2 T^3 = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\lambda^2 T^3 \xrightarrow{\frac{dT}{T^3} = dt} \frac{1}{2} T^{-2} = \lambda^2 t + A$$

$$\text{I.C: } t=0 \Rightarrow T=\infty \Rightarrow e^A=0 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{1}{2\lambda^2 t}}$$

اگر λ مثبت شود باید با استفاده از
شرایط مرزی باید تعیین شود.

$$\frac{\rho g}{\mu} Z \frac{dZ}{dz} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{\rho g}{\mu} Z dZ = \lambda^2 dz \Rightarrow \frac{\rho g}{\mu} Z^2 = \lambda^2 z + B$$

$$\text{B.C: } z=0 \Rightarrow Z=0 \Rightarrow B=0 \Rightarrow Z = \sqrt{\frac{2\mu\lambda^2 z}{\rho g}}$$

$$\Rightarrow \delta = Z(z) T(t) = \sqrt{\frac{\mu z}{\rho g t}}$$

SaTid

می توان بدون در دست داشتن λ² = β = ... را حل کرد و به جواب رسید.

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$W = \rho \bar{v} A$$

سرعت متوسط

$$dW = \rho v dA$$

سرعت

$$dW = \rho v r dr d\theta \rightarrow W = \int_0^{2\pi} \int_R^{aR} \rho v r dr d\theta = 2\pi \rho \int_a^{aR} v r dr$$

$$\epsilon = \frac{r}{R} \rightarrow d\epsilon = \frac{dr}{R} \quad \frac{\epsilon}{R} \quad \frac{1}{R} \quad a \quad aR$$

$$W = 2\pi R \rho \int_1^a \frac{\rho g R^2}{4\mu} [1 - \epsilon^2 + 2a^2 \ln \epsilon] \epsilon d\epsilon$$

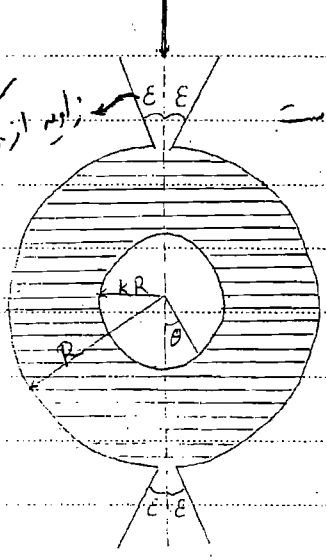
$$W = \frac{\pi \rho^2 g R^4}{2\mu} \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 - \frac{1}{4} \epsilon^4 + 2a^2 \left[-\frac{1}{4} \epsilon^2 + \frac{1}{2} \epsilon \ln \epsilon \right] \right) \Big|_1^a$$

$$W = \frac{\pi \rho^2 g R^4}{8\mu} (4a^2 - 3a^4 + 4a^2 \ln a - 1)$$

چرا در حل این مایل از پیوستگی استفاده کردیم؟

(۱۲) جریان عرضی سیال تراکم ناپذیر (در اثر اختلاف فشار) بین دو کره هم مرکز مطابق شکل موجود دارد. دبی حجمی سیال را بدست آورید.

Fluid Flow, in



• در جریان عرضی، سرعت سیال به یکسان است. رهی توان

از نرم μ فرض می‌کنیم. عدد رینولدز Re می‌دارد. جریان منبسط و سکولور است. بنابراین $\rho g \theta$ وجود ندارد. حل: با نوشتن معادله پیوستگی نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial v}{\partial r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r v \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r v \frac{\partial v}{\partial \phi}) = 0$$

$$\Rightarrow \rho v \sin \theta = c t e \Rightarrow v \theta = f(r) \neq g(\theta)$$

دلیل تبار تابع θ نمی‌باشد. با در نظر گرفتن معادله حرکت در راستای θ می‌توان نوشت:

Fluid Flow, out

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r} (v \sin \theta)) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta \frac{\partial v \theta}{\partial \theta}] - \frac{v \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right]$$

برای حذف کردن از معادله پیوستگی کمک می‌گیریم. با توجه به اینکه $v \theta = f(r)$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{f(r)}{\sin \theta} \right) \right] = \frac{f(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left[\frac{1}{\sin \theta} \right] \right] = \frac{f(r)}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{v \theta}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial v \theta \sin \theta}{\partial r} \right] \right] \Rightarrow \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] = B$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\sin \theta} = \frac{B}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \Rightarrow dp = B \ln \tan \frac{\theta}{2} + c \Rightarrow dp = B \ln \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} + c$$

بنابراین می‌توان نوشت: $\cos \theta = \cos(-\theta) \ \& \ \cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$

$$\Delta p = -B \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = -B E(\theta)$$

لاگاریتم است. این است $\frac{\partial v \theta}{\partial r}$ که متن است. لاگاریتم می‌باشد.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) = \frac{B r}{\mu} \Rightarrow \frac{\partial f(r)}{\partial r} = \frac{B}{2\mu} + \frac{A}{r^2}$$

$$\theta = \pm \epsilon \quad \Delta p = 0 \\ \theta = R \pm \epsilon \quad \Delta p = \Delta p$$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{B}{2\mu} r - \frac{A}{r} + D$$
 ;

$$\begin{cases} \text{B.C.1: } r=R \Rightarrow v=0 \\ \text{B.C.2: } r=KR \Rightarrow v=0 \end{cases}$$
 سرعت با شار مناسب است.

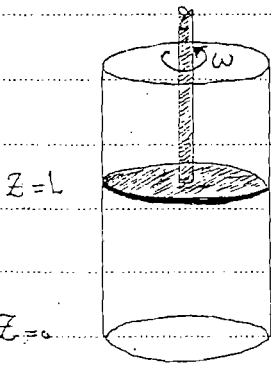
$$\Rightarrow f(r) = -\frac{BP}{2\mu} \left[\left(1 - \frac{r}{R}\right) + k \left(1 - \frac{R}{r}\right) \right] \Rightarrow v_{\theta} \sin\theta = \frac{R\Delta P}{2\mu E(\theta)} \left[\left(1 - \frac{r}{R}\right) + k \left(1 - \frac{R}{r}\right) \right]$$

برای محاسبه Q با در نظر گرفتن سطح افقی $\theta = 90^\circ$ می توان نوشت: $dA = 2\pi r dr$, $v_{\theta} \sin\theta = v_{\theta}$

$$\Rightarrow Q = \int_0^R \frac{\pi R \Delta P}{\mu E(\theta)} \left[\left(1 - \frac{r}{R}\right) + k \left(1 - \frac{R}{r}\right) \right] r dr \Rightarrow Q = \frac{\pi R^3 \Delta P}{6\mu E(\theta)} (1-k)^3$$

چون سیال خنثی است لزومی ندارد که سطح مقطع در نظر گرفته شده برای محاسبه Q با سطح مقطع خروجی سیال باشد. (13)

تجزیه سیال در داخل یک استوانه بر اثر چرخش دیسک در بالای آن با سرعت زاویه ای ω به حرکت در می آید. توزیع سرعت جریان را در حالت پایا بدست آورید. سطح پایینی استوانه ساکن می باشد.



حل: با توجه به ضربه زاویه ای ω می توان دریافت که جریان یک بعدی (در راستای z) را با شدت v_z در هر نقطه (r, θ, z) می توانیم معادله $\nabla^2 v_z = 0$ را حل کنیم. چون مسئله است در z نداریم.

$v_r = 0$ و $v_z = 0$

حل تمرین 13:

معادله پیوستگی: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

از روی تناظر همی تراستیم: این دو معادله را نسبت به θ میگیریم

معادله حرکت در راستای θ : $0 = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}$

B.C.1: at $z=0$ and any r : $v_\theta = 0$

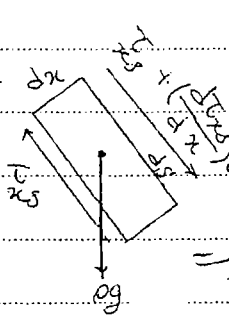
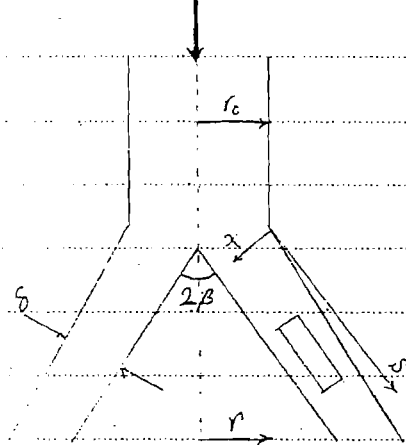
B.C.2: at $z=l$ and any r : $v_\theta = r\omega \rightarrow v_\theta = r\omega \frac{z}{l}$

از این شرایط می توانیم حدس بزنیم که جواب $v_\theta = r f(z)$ است.
 Based on B.C.2: $v_\theta(r, z) = r f(z)$

$\frac{d^2 f}{dz^2} = 0 \Rightarrow \frac{df}{dz} = C_1 \Rightarrow f(z) = C_1 z + C_2 \Rightarrow v_\theta = \frac{r\omega z}{l}$

تمرین (14): حتی از سیال بر روی یک مخروط (برای شکل) جاری می شود. ضخامت لایه فیلم بر روی مخروط را تعیین نمایید.

Fluid Flow (V_0)



لا به موازات مخروط در راستای x که برای فیلم متوسط کشنده نوشته می شود.
 سرعت در راستای x که V_s فرض می شود.
 وقتی x زیاد می شود سرعت کم می شود پس یکسره نسبی منفرجه خواهد بود.

جمع جبری نیروهای روی لایه سیال: $0 = \rho g \delta \cos \beta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\tau}{x \delta} \right)$

$\Rightarrow \tau_{x\delta} = \rho g x \delta \cos \beta + A$ B.C.1: at $x=0 \Rightarrow \tau_{x\delta} = 0 \Rightarrow \tau_{x\delta} = \mu \frac{dV_s}{dx} = \rho g x \delta \cos \beta$

$\Rightarrow V_s = -\frac{\rho g x^2 \delta \cos \beta}{2\mu} + B$ B.C.2: at $x=\delta \Rightarrow V_s = 0 \Rightarrow V_s = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$

$\Rightarrow \bar{V}_s = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu}$ در هر مقطع از طول سیال پیش از برخورد آن با مخروط نوشته می شود.

دبی جری سیال پس از برخورد آن با مخروط: $\dot{m} = \rho V_0 \pi r_0^2$

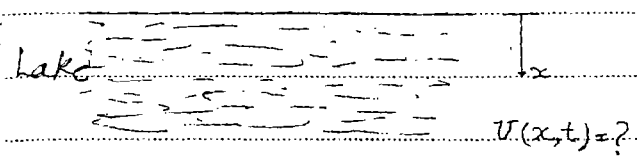
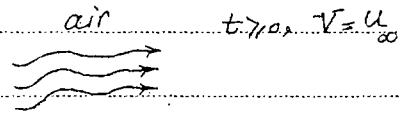
دبی جری سیال پس از برخورد آن با مخروط: $\dot{m} = \rho \bar{V}_s \pi \delta$

$\rho V_0 \pi r_0^2 = \rho \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu} 2\delta \pi \sin \beta \Rightarrow \delta = \sqrt[3]{\frac{3\mu r_0^2 V_0^2}{\rho g \delta \sin 2\beta}}$

Subject:

Year. 87 Month. 7 Date. 28/10

یک سوال در زمینه

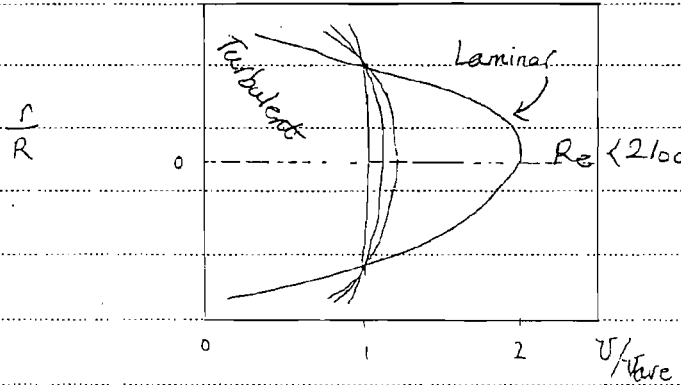


quiz

Scale up or Dimensional Analysis

با برقراری تاسیساتی و برابری اعداد بدون بعد حاکم، توزیع سرعت، فشار و دما برای نمونه اصلی و مدل یکسان خواهد شد و می توان Scale up انجام داد.

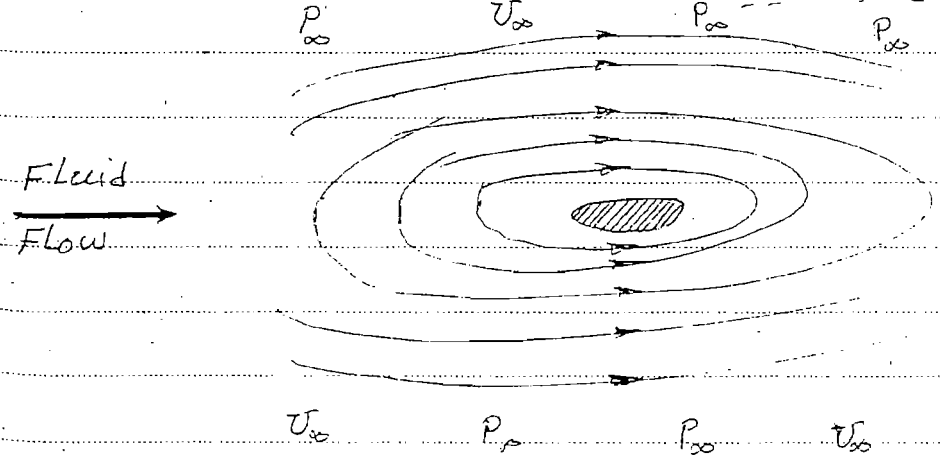
به عنوان مثال، برای جریان در یک لوله افقی که در آن طول مشخص، قطر لوله و سرعت مشخص است می گوییم می باشد، با بدون بعد کردن فاصله از مرکز لوله $(\frac{r}{R})$ ، توزیع سرعت $\frac{u}{U_{ave}}$ مستقل از قطر لوله می شود.



معادلات حرکت Navier-Stokes برای سیستم فرجیدی و در راستای x بصورت ذیل می توان نوشت:

$$\rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right]$$

در حرکت نسی سیال و جسی به طول مشخص ما (نسبت به سیستم می تواند طراز و پنا، بلندی، قطر و ... باشد) می توان کت های سیستم را که از جنس درازا باشند بدون بعد نمود. همچنین از مقادیر مشخص سرعت و فشار و ... می توان برای بدون بعد سازی سایر کسب های فیزیکی استفاده کرد.



همگنی‌های موجودی توانمند بصورت بدون بعد نوشته شوند.

$$u'_x = \frac{u_x}{U_\infty} ; v'_y = \frac{v_y}{U_\infty} ; \rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty}$$

$$x' = \frac{x}{L} ; y' = \frac{y}{L} ; t' = \frac{t}{\tau}$$

در این روابط ρ_∞ و U_∞ به ترتیب فشار و سرعت در نقاط بی‌نهایت دور از جسم و سرعت نسبی جسم باشد. همچنین τ زمان مشخصه سیستم باشد.

اثر بردن بدون معادله Navier-Stokes در عبارت $\frac{L}{\rho U_\infty^2}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{L}{\rho U_\infty^2} \left[\frac{\partial u'_x}{\partial t'} + u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y'} \right] = \frac{Eu}{\rho U_\infty^2} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + \frac{1}{Fr} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y'^2} \right]$$

ضرایب بدون آینه در این شکل از معادله اعداد بدون بعد می‌باشند و هر یک نسبت دوربردی خاص را بیان می‌کند.

$\frac{L}{\rho U_\infty^2}$ Strouhal Number: St	$\frac{U_\infty^2}{g L}$ Froude Number: N_F	$\frac{\rho U_\infty L}{\mu}$ Reynold Number: NR
$\frac{P_\infty}{\rho U_\infty^2}$ Euler Number: N_E	اینها برای شباهت هندسی و دینامیک سیال استفاده می‌شوند.	

هر یک از این اعداد بدون بعد به یکی در تغییر جریان سیال نقش تعیین کننده دارد.

بعضی از این اعداد خاص اشیاء به شکل های دیگر استفاده می‌شوند اما از آنجایی که ما اینجا به آنها برای در دسترس مورد نظرات این تفاوت شکل برآیندی در حسابات نداریم مثلاً

$$Fr = \frac{U_\infty}{\sqrt{g L}} ; Eu = \frac{\sqrt{1/2 \rho U_\infty^2}}{\rho_\infty}$$

تجزیه ⁽¹⁾ یک مدل هواپیما در داخل تونل هوا مورد آزمایش قرار گرفته است. نمونه به شکل پروتایپ (آتشخوار) است.

مدل (P_m) را حساب کنید. $P_p = 14.7 \text{ Psia}$ و $T_m = T_p = 60 \text{ F}$ و $\frac{L_p}{L_m} = 20$ و $U_m = U_p = 100 \text{ mph}$

زیرا: در یکوزنیمه نقطه شایع ما بیشتر چون نیروی دارد شش به شکل، نیروی در یک است و سیال وصل را در برزیده جای برای فرود با آن هم باشد.

$$\frac{NR_m}{NR_p} = \frac{\rho_m L_m U_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p L_p U_p}{\mu_p} \Rightarrow \rho_m L_m = \rho_p L_p$$

$$\frac{P}{\rho} = RT = cte \Rightarrow \frac{P_m}{\rho_m} = \frac{P_p}{\rho_p} \Rightarrow \frac{P_m}{P_p} = \frac{L_p}{L_m} \Rightarrow P_m = P_p * \frac{L_p}{L_m} = 14.7 * 20$$

$$\Rightarrow P_m = 294 \text{ Psia}$$

Subject:

Year. 87 Month. 7 Date. 23 (9)

تمرین: اگر در ترمین 1 بجای هوا در داخل ترمین 12 Fecon در دما 150 F استفاده شود، در آن صورت فشار

نمود (Pm) را حساب کنید.

$$\mu_m = 2.5 \times 10^{-7} \text{ lbps} \quad \mu_p = 3.75 \times 10^{-7} \text{ lbps}$$

$$R_m = 12.8 \text{ and } R_p = 53.3 \text{ Psia } \frac{\text{ft}^3}{\text{lbm} \cdot \text{R}}$$

حل: در این حالت برای برقراری شباهت و بکارگیری اصول افزایش مقیاس، باید برای دو عدد بدون بعد بسیار ظریف
هر یک در ترمین 1 اعداد لویس و رینولدز prototype یکسان است و برابر آن لکن هر عمل با آن می کنند. اگر در ترمین 1
از هوا استفاده می کردیم به فرض گاز ایده آل در برابری

$$N_{Eu}^m = N_{Eu}^p \Rightarrow \left[\frac{P}{\rho U^2} \right]_m = \left[\frac{P}{\rho U^2} \right]_p \Rightarrow \left[\frac{RT}{U^2} \right]_m = \left[\frac{RT}{U^2} \right]_p$$

$$\Rightarrow U_m = U_p \sqrt{\frac{R_m T_m}{R_p T_p}} = 100 + \sqrt{\frac{12.8 \times 560}{53.3 \times 520}} = 51 \text{ mph}$$

$$N_{Re}^m = N_{Re}^p \Rightarrow \left[\frac{\rho U L}{\mu} \right]_m = \left[\frac{\rho U L}{\mu} \right]_p \Rightarrow \left[\frac{P U L}{\mu R T} \right]_m = \left[\frac{P U L}{\mu R T} \right]_p$$

$$P_m = P_p \frac{R_m T_m \mu_m U_p L_p}{R_p T_p \mu_p U_m L_m} = 102 \text{ Psia}$$

هدف بخش: دانشجو باید بتواند:

(1) نیروهای وارده بر جسم سختی را که در سیر هیران میانی قرار دارد بشناسد.

(2) تأثیر متقابل جسم سخت و میال ناشی از حرکت نسبی جسم و میال را تعیین دهد.

(3) نیروهای درگ، ریاضت و تأثیر حرکت را بر نیروی اجسام بشناسد.

▣ حرکت میال بر روی اجسام:

آزمایش های تجربی نشان داده است که در حرکت میال از روی اجسام نیروهای فشار و ویسکوزیته تعیین کننده می باشند. ویسکوزیته جاذبه تأثیر بیشتری بر نیروی حرکت میال دارد. بدین معنی عدت اعداد رینولدز و اولفر در سواری که میال بصورت کامل اطراف جسم را احاطه کرده باشد (حرکت هیران مانند هیرا پیاده و حرکت اترسپیل و راکت) حائز اهمیت می باشند.

$$N_R = \frac{\text{Inertia}}{\text{Viscous}} \quad N_E = \frac{\text{Pressure}}{\text{Inertia}}$$

در حالت عمود نوردید معمولاً در سواری که سطح آزا میال محدود نمی باشد (کمان های باز، همین ها و حرکت تانک ها و کشتی ها) تعیین کننده است.

$$N_F = \frac{\text{Inertia}}{\text{Gravity}}$$

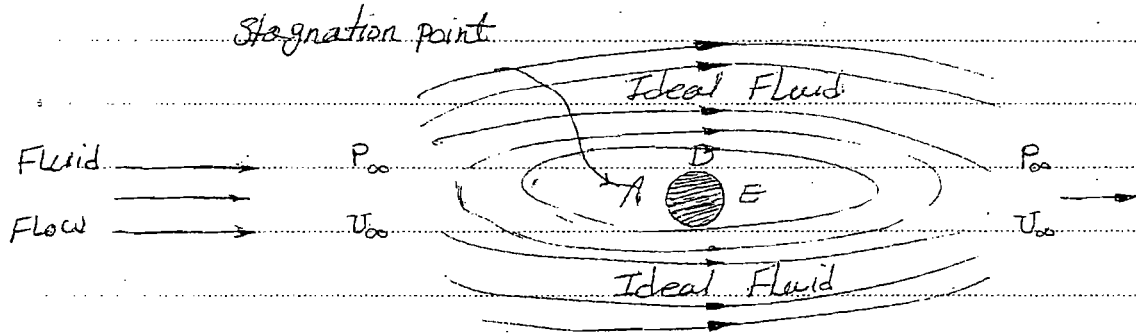
در حالت جهت حرکت مس

نیروی درآگ: نیروی وارد شده از طرف سیال واقعی به جسم در راستای حرکت نمی چم و سیال را نیروی درآگ می نامند.

$$F_{drag} = F_D + F_B \quad ; \quad F_D = \frac{1}{2} C_D \rho U_{\infty}^2 A$$

Friction Pressure

ضریب درآگ (C_D) تابعی از Re و نسبت عدد اولری باشد.



* از آنجا که سرعت در نقطه A صفر است، فشار به بیشینه میزان خود می رسد. در این حالت با حرکت سیال در امتداد جسم (به سمت بالا یا پایین) انرژی فشاری به انرژی جنبشی تبدیل می شود.

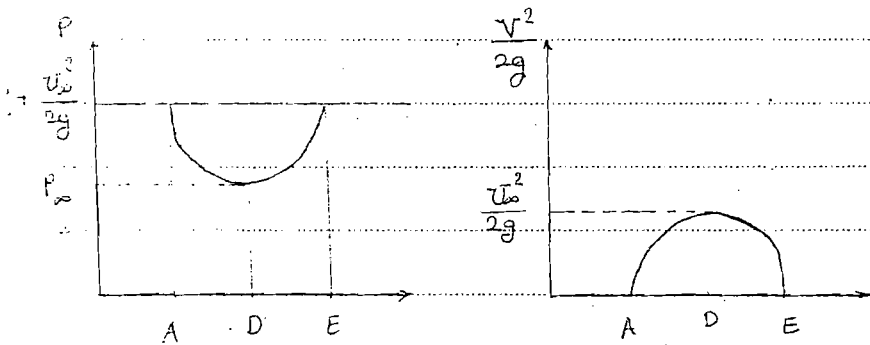
* خطوط جریان، خطوط فشار روی سیستم ستوان می تند (چون انرژی تلف نمی شود).

* در نقطه D فشار کمینه در سرعت بیشینه می شود. در این حالت، سیال در پشت جسم شروع به حرکت می کند. در امتداد عمقی جسم جریان می یابد. هرچه سیال به نقطه E نزدیک تر باشد، سرعت کمتر و فشار بیشتر می شود.

* در نقطه E دوباره سرعت صفر و فشار بیشینه می شود.

نکته: مطالب فوق برای سیال ایده آل ($\mu = 0$) صادق می باشد.

توزیع انرژی های فشاری و جنبشی



* در حالت سیال ایده آل (غیر چسبناک) اختلاف انرژی وجود ندارد. جابجاری دیگر تمام انرژی فشاری در نقطه A به انرژی جنبشی در نقطه D تبدیل می شود. بنابراین در نقطه نوری سرعت 0 می باشد.

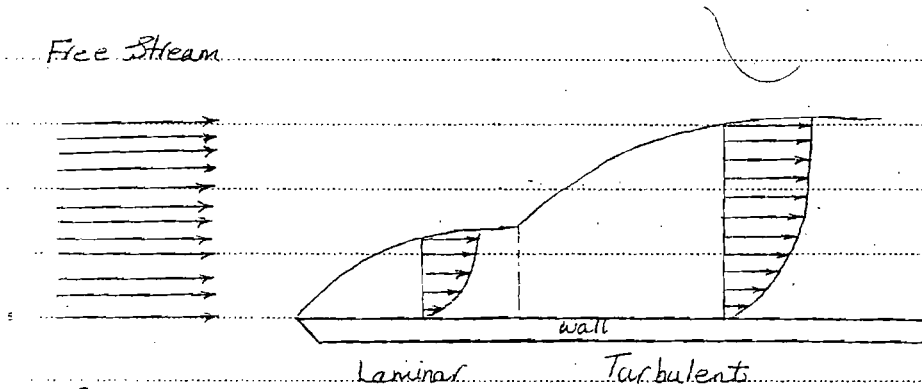
یا ترتیب تمام لیزری جنبی در نقطه D به لیزری فشاری در نقطه E تبدیل می شود و سرعت در نقطه E صفر می شود. در این توزیع فشار و سرعت در دو طرف جسم تقریباً است (خطوط جریان) تقریباً می باشد) بد علت نبود نیروی تنش (A=0) حالت تنها نیروی عمل کننده نیروی فشاری می باشد که آن هم بصورت متقارن بر جسم وارد می شود. در این حالت نیروی درآگ وجود ندارد. بد عبارت دیگر برای سیال غیر ویسکوز (غیر لزج) نیروی درآگ منفی باشد و عمل چسبندگی بریده ای رخ نمی دهد. (A ≠ 0).

روی لبه ها: هرگاه جسمی درون یک سیال واتی قرار گیرد، در صورت وجود حرکت نسبی بین جسم و سیال، از طرف نیروی درآگ بر جسم در خلاف جهت حرکت نسبی وارد می شود. در این صورت توزیع فشار و سرعت در دو طرف جسم می باشد. روی وارد شده بر جسم در جهت عمود بر راستای حرکت نسبی جسم و سیال را نیروی لیفت می نامند.

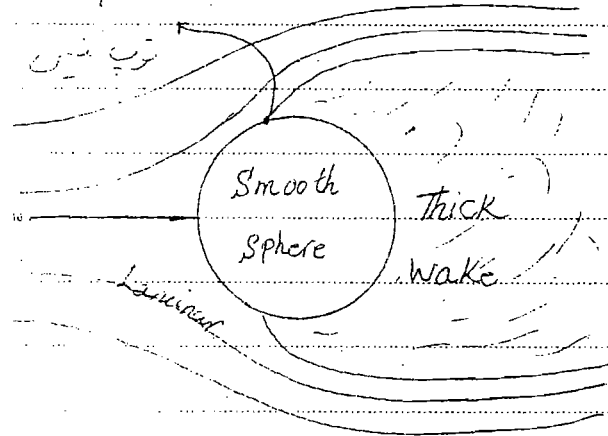
$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho U_{\infty}^2 A$$

عملاً C_L بصورت تابعی از Re در منحنیهای Lift & Drag Coefficient ارائه می شود. گمانه های رویاروی زمانیکه سرعت نسبی در حدود سرعت صوت باشد، ضرایب مربوطه تابعی از اعداد فرود (N_F) ماخ (M) نیز می باشد. طراحی اجسام متحرک توجه به مقادیر نیروهای درآگ و لیفت از اهمیت زیادی برخوردار است. بت های این نیروها برای Model و Prototype با استفاده از نسبت تابه و برابری اعداد بدون بعد قابل مقایسه می باشد.

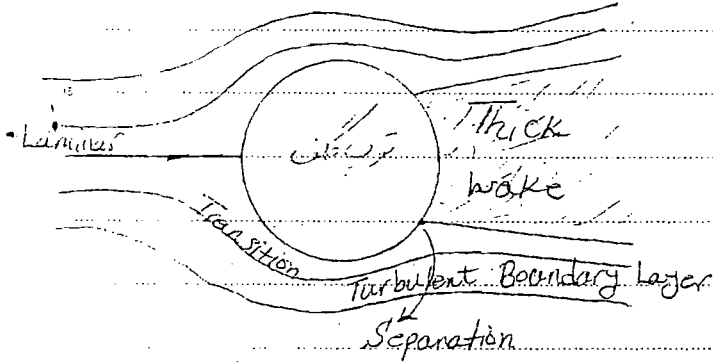
Free Stream



Separation

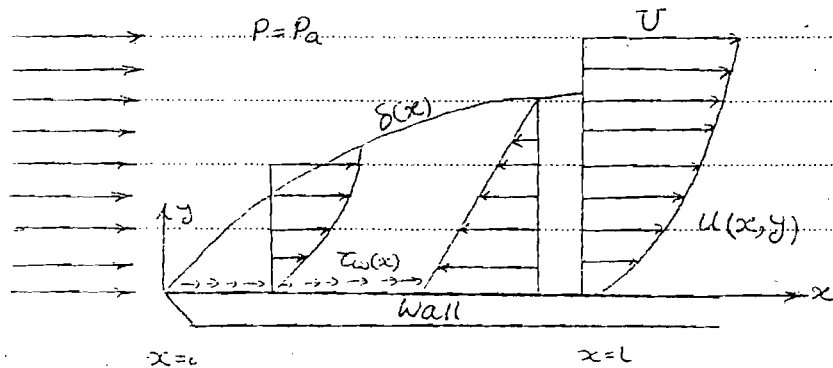


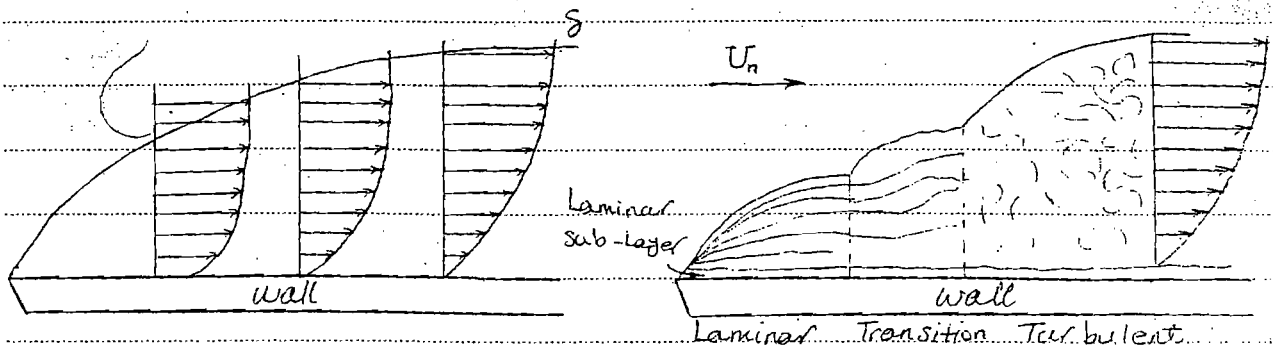
* در این حالت خطوط جریان به هم می‌کنند و در آنجا توربولانس ایجاد می‌شود.
* توربولانس



* در این حالت به هم می‌کنند و در آنجا توربولانس ایجاد می‌شود.
* توربولانس

لايه مرزى: همانطورى كه در بخش هاى پيشين نيز گفته شد، در اثر مقاومت سيال (ويكونيتي) در ناحيه اي نزديك جسم سخت در داخل سيال، كمانه با نام لايه مرزى شناخته مى شود. توزيع سرعت بوجود مى آيد.

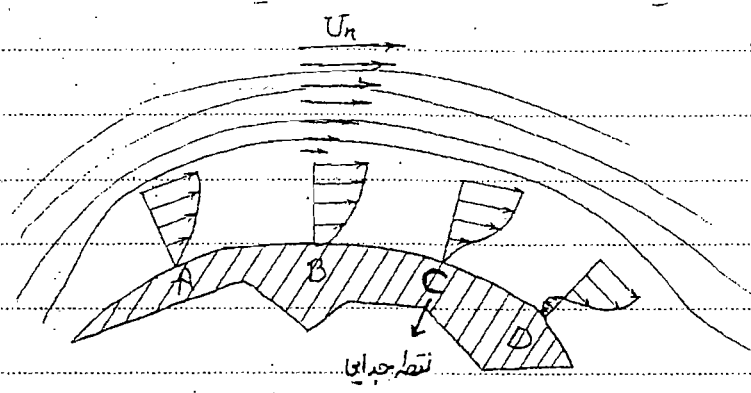




* در لایه مرزی تأثیر نیروی تنش قابل ملاحظه است و توزیع سرعت مشاهده شده نیز به همین علت می باشد اما در خارج از این لایه نیروی تنش تأثیر قابل توجهی بر جریان سیال ندارد لذا میزان سرعت در این ناحیه حاصل میزان سرعت قبل از گن گیری لایه مرزی می باشد.

- ✓ ضخامت لایه مرزی در امتداد صفحه افزایش می یابد.
- ✓ در امتداد صفحه لایه مرزی از حالت آرام به حالت آشفتگی انتقال می یابد.
- ✓ سرعت در امتداد صفحه تأخیر می یابد.
- ✓ سیستم در جری است.

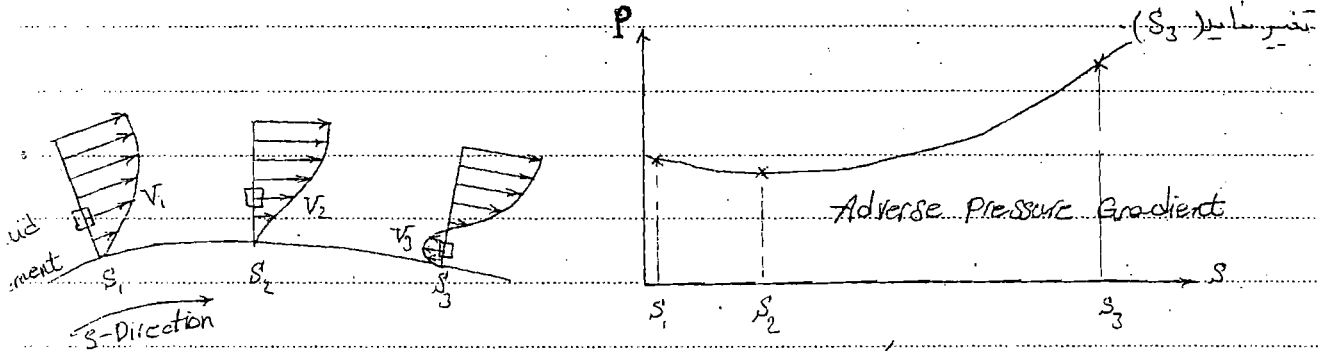
* حرکت سیال بر روی جسم سخت از نقطه A تقریباً بدون اصطکاک است اما در ادامه مسیر لایه مرزی شکل می گیرد.
 * با علت وجود نیروی تنش (اصطکاک) بخشی از انرژی سیال در طول مسیر طی A-B و C-B تحلیل می رود در نتیجه انرژی سیال برای رسیدن به نقطه D کافی نباشد و به همین علت سیال در نقطه ای در طول مسیر حرکت A-D نقطه C را از جسم عبور می دهد این نقطه را نقطه جدایی می نامند.



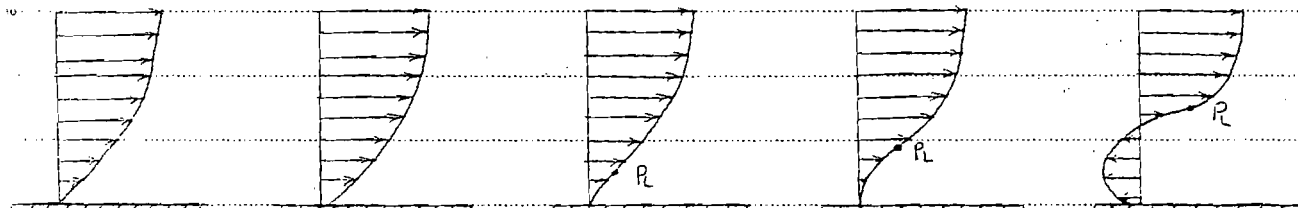
Subject :

Year: 87 Month: 7 Date: 30/11/11

هناك نظريه ان شامه ان شود، كانه ان از رشي جيتن ميال در جهت حركت بد علت بيروي، تنش و افزايش ميزان فشار و در جهت مخالف حركت بد علت انحنا سطح (كه از بيرون لايه مرزي وارد مي شود) موجب مي شود كه بعد از نقطه جريان (P) جهت جريان



در لايه مرزي به علت تفاوت، انرژي كه كم مي شود



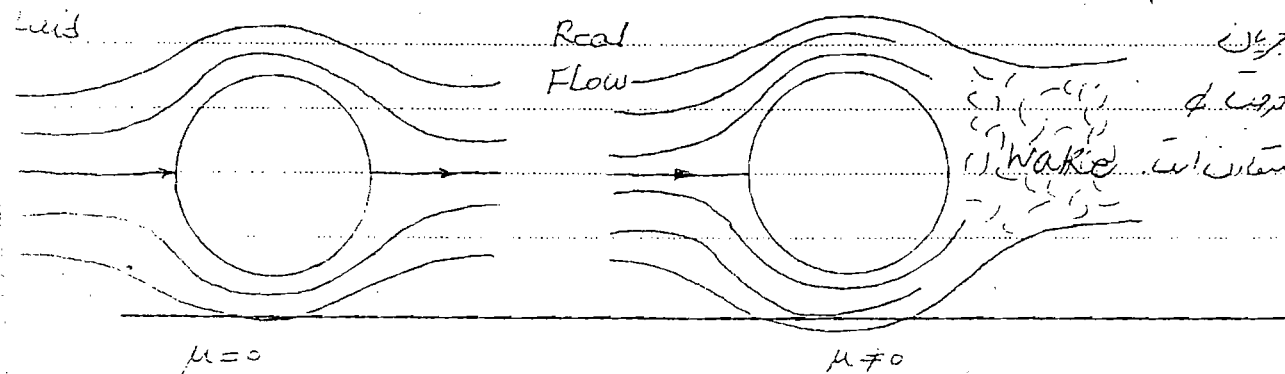
گردايان مطلوب	گردايان معكوس	گردايان شامه معكوس	گردايان معكوس بجران	گردايان معكوس افراطي
$\frac{du}{dx} > 0$	$\frac{du}{dx} = 0$	$\frac{du}{dx} < 0$	بعضي صفر	جريان برگشتي در كنار
$\frac{dp}{dx} < 0$	$\frac{dp}{dx} = 0$	$\frac{dp}{dx} > 0$	آغاز جريان	بيقراره
نقطه جريان وجود ندارد	نقطه جريان وجود ندارد	نقطه جريان وجود ندارد	جريان بارزيم جريانه	
نقطه عطف درون	نقطه عطف روي ديواره	نقطه عطف در جريان		

نقطه P_L Point of inflection

در دو شكل زير، تفاوت ميال ايده آل و ميال واقعي نشان داده شده است.

در شكل اول، به علت تراشيدن اصطكاك (با همزبون شدن) خطوط جريان متقارن مي باشند.

در شكل دوم، به علت وجود اصطكاك (قابل توجه بودن تنش) خطوط جريان نامتقارن است.



$\mu = 0$

$\mu \neq 0$

Subject:

Year: 87 Month: 7 Date: 30 (11)

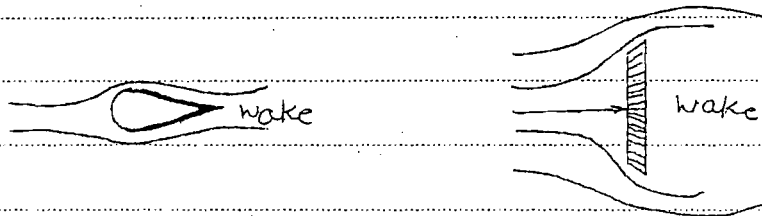
نیروی دراز: به علت وجود نیروی تنش، تقارن توزیع های فشار و سرعت در اطراف جسم بر هم می خورد و گاه در نتیجه آن بر جسم نیرویی در راستای حرکت نبی جسم و سیال وارد می شود. بخشی از این نیرو که به علت نامتوازن بودن توزیع فشار بر جسم وارد می شود Pressure Drag نامیده می شود.

* از سوی دیگر به علت وجود نیروی تنش (و توزیع سرعت) بخش دیگری از این نیرو بر جسم وارد می شود که

$$Friction Drag \text{ نامیده می شود. } Drag = Friction Drag + Pressure Drag$$

* راستای این نیرو به گونه ای است که با حرکت نبی جسم و سیال مقابله می کند، در این حالت در نقاط عقبی جسم

چرخه هایی از سیال به وجود می آید که Wake نامیده می شوند.



مانند پوری که اشاره شد، در بررسی حرکت نبی جسم و سیال اعداد N_E و N_R اهمیت دارند.

$$N_E = \frac{P}{\rho U^2} ; P = \frac{F_D}{A}$$

در این روابط A مساحت تصویری شده در راستای عمود بر جریان است که برای استوانه و کره عبارت است از:

$$Cylinder: A = L * D \quad \& \quad Sphere: A = \frac{\pi}{4} D^2 ; \quad N_E = \frac{F_D}{\rho U^2 A} = \frac{1}{2} C_D$$

$$C_D = Drag Coefficient, \quad C_D = f(N_R)$$

یونید تغییرات C_D بر حسب N_R برای یک کره و تغییرات نزدیکی است.

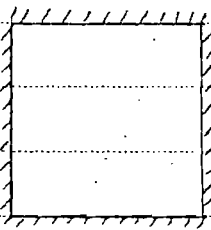
یونید تغییرات C_D بر حسب N_R برای یک استوانه نیز به همین شکل می باشد و تنها تفاوت در این است که مقدار C_D برای

استوانه تقریباً نصف مقدار آن برای کره می باشد.

کمترین توزیع سرعت بیرون بعد از در یک کانال مستطیل شکل بدین آید:

* No Slip Flow

* Fully Developed



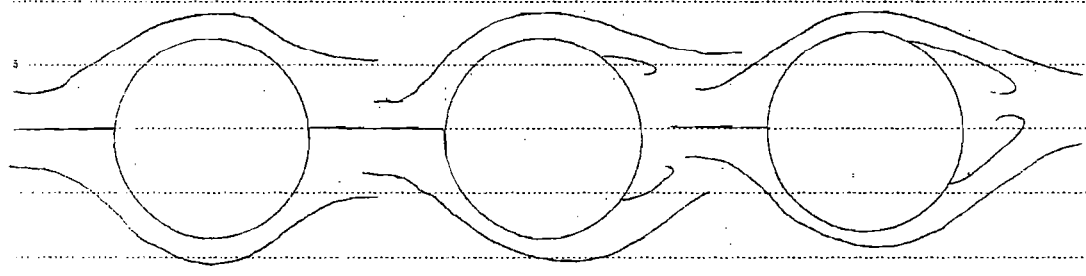
PAPCO

$$\frac{F_D}{F_L} = \frac{C_D}{C_L} \rightarrow$$

نسبت نیروهای لاینت و دردد نسبت اندام به طول نه شکل دارد

تغییرات نیروی درآگ با N_{Re}

تغییرات نیروی درآگ و میزان Wake شکل شده در پشت جسم با عدد رینولدز ارتباط دارد در انتقال آرام بد در هم با افزایش عدد رینولدز، Wake کم می شود و کاهش C_D



$Re < 0.5$

$Re: 2 \text{ to } 30$

$Re: 40 \text{ to } 70$

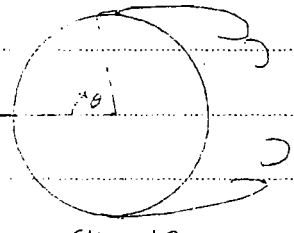
در این دکلن تغییر انتقال از حالت آرام بحالت آشفته می شود.

$\theta = 22^\circ$

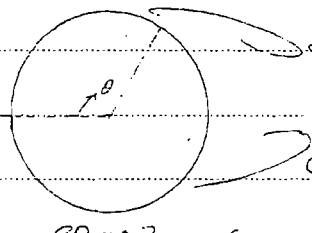
Separation

$\theta = 120^\circ$

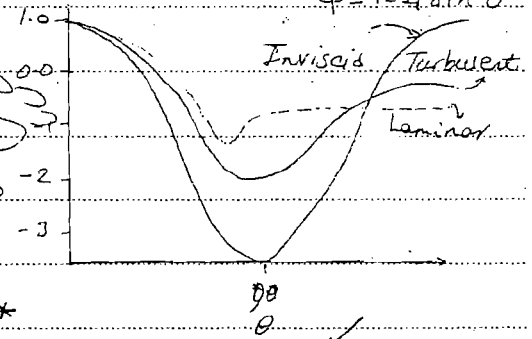
$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta$



$C_D = 1.2$

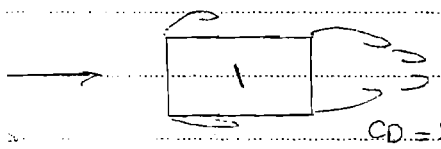


$C_D = 0.3$

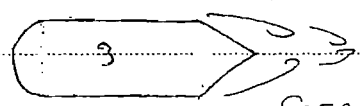


* هر چه C_p کمتر، نقطه جدایی در پرتابمان می آید

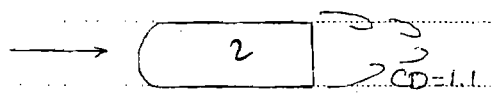
تغییرات نیروی درآگ با شکل هندسی اجسام، اجسام با شکل های مختلف، ضرایب درآگ متفاوت دارند.



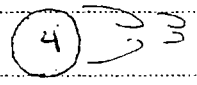
$C_D = 2.0$



$C_D = 0.15$



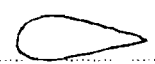
$C_D = 1.1$



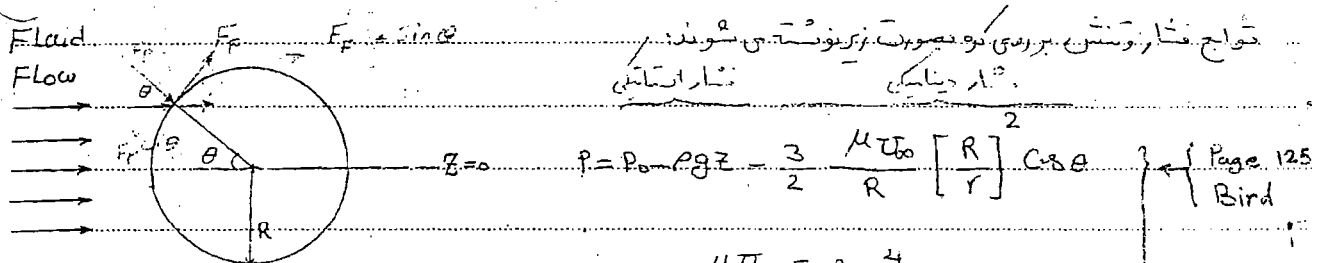
$C_D = 0.58$

با ایجاد نیم دایره در انتها، C_p تقریباً نصف

* کمتر C_p مربوط به شکل زیر است (در آزمون C_p اندازه گیری است)



جریان خزشی - در صورت سیال کم باشد به نحوی که سیال در جسم را لمس کند آن گاه جریان خزشی است
قانون استاکس (Stokes Law) حرکت خزشی سیال بر روی گویها ($Re < 0.1$) را بیان می کند



تغییرات تنش

$$\tau_{\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \left[\frac{R}{r} \right]^4 \sin \theta$$

* عبارت $(p_0 - \rho g z)$ در دو سمت گوی در حالی که جریان نمی آید، برابر است.

* در سطح گوی ($r=R$) می توان نوشت: $F_D = F_p$ \Rightarrow $F_D = F_p$

$$F_D = \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} C_D \theta$$

* در سطح گوی $(r=R)$ می توان نوشت: $F_D = F_p$ \Rightarrow $F_D = F_p$

$$\tau_{\theta} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \sin \theta$$

* برای آن سطح گوی $dA = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ \Rightarrow $dA = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$

$$F_D = F_p + F_p$$

$$\Rightarrow F_p = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\left(-\frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \cos \theta \right) \cos \theta \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

بردار سطح جهت برزون و بردار فشار جهت داخل است
علایق منفی به علت اختلاف راستای بردار سطح و بردار فشاری باشد
چرا؟

علت استاندارد $C_D \theta$ جهت آوردن تصویر نیرو در راستای z می باشد

$$F_p = \pi A C_D U_{\infty}^2$$

$$F_p = 2\pi \mu R U_{\infty}$$

$$F_D = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{R} \sin \theta \right) \sin \theta \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$F_D = 4\pi \mu R U_{\infty} \Rightarrow F_D = 6\pi \mu R U_{\infty} = 3\pi \mu D U_{\infty}$$

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho U_{\infty}^2 \cdot \pi R^2 \Rightarrow C_D = \frac{24}{Re} \text{ in which } Re = \frac{\rho U_{\infty} D}{\mu}$$

$$x = a r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = b r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = c r \cos \theta$$

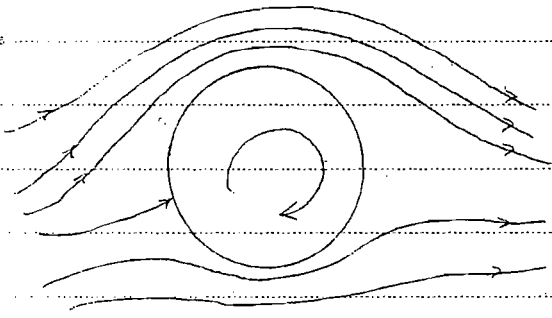
$$dA = abc r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

PAPCO $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$

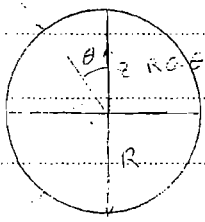
نیزوی امیت:

بعلت استقامت بودن توزیع های فشار و سرعت در اطراف جسم و اعمال فشار بیشتر است پایین بر جسم نیزوی در راستای عمود بر حرکت نمی چم و سیال واروی شود این نیز در حقیقت است که با پایین آسین جسم قابل می کند



* حرکت نمی چم و سیال منراست
 برای جسم بکلی

$$P_1 = P_0 - \rho g z \quad , \quad P_2 = P_0 - \rho g R \cos \theta$$



where: Gravity force is $\rho g R \cos \theta$

$$F_L = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (P_0 - \rho g R \cos \theta) \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

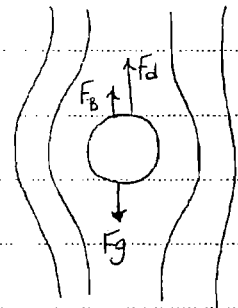
$$\Rightarrow F_L = P_0 \pi R^2 + \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g$$

سیال ρ

نیزوی ها نظری که با خطای کمتری در حالتی که جسم در سیال دارای حرکت نمی باشد نیزوی Lift همان نیزوی دریایی می باشد

* تکلیف: نیزوی امیت را در شرایط جریان معاند بنویسید

حرکت نسی جسم در سیال و نیروی وارده بر جسم از طرف سیال
 ترمینال یا پایدار گیری اصول مکانیک سیالات و کوزینت سیالی را که دگولاد در درون آن با سرعت ثابت در ستوه
 می کند تعیین کند



حل: زمین می شود که بگوید با سرعت ثابت (\$V_t\$; Terminal Velocity) است
 این حرکت کند در سرعت ثابت موازنه نیروها بصورت زیر در می آید:

Weight = Buoyant + Drag

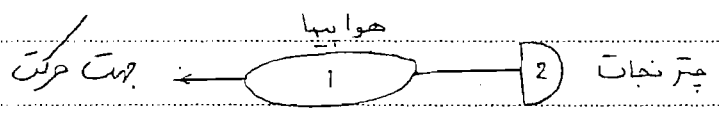
$$\sum F = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{solid} g = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 6 \pi \mu R V_t \Rightarrow \mu = \frac{2R^2(\rho - \rho')g}{3V_t}$$

\$N_{Re} = \frac{\rho V_t (2R)}{\mu} < 0.1\$

در نظر گرفتن از بررسی ترمینال شرط جریان غریبی استخوان شود

ترمینال: هواپیمایی به منظور توقف سریع در حرکت بر روی سطح افقی، از سیستم چتری استفاده می کند. آن نصب شده است.
 استفاده می کند تا توجه به شرایط داده شده، مدت زمانی که طول می کشد تا هواپیمایی از سرعت 1.05 به 5% برسد، محاسب
 کنید

\$C_{D1} = 0.5\$ \$A_1 = 20m^2\$ \$Air \rho = 1.2 kg/m^3\$ \$V_0 = 100 m/s\$
 \$C_{D2} = 2.25\$ \$A_2 = 40m^2\$ \$V = 50 m/s\$ \$M_1 = 4000 kg\$



\$F_D = \frac{1}{2} \times 1.2 \times (C_{D1} A_1 + C_{D2} A_2) V^2 = 60 V^2\$

\$\Rightarrow -M \frac{dV}{dt} = F = 60 V^2 \Rightarrow \frac{1}{V} = \frac{1}{V_0} + 0.01t \Rightarrow t = 1.5\$

\$t = 1.5 s\$

حجم چتر چنان خف می شود، مدت زمان چتر خواهد بود؟

برای مدت زمان لازم جهت توقف، می توان از معادله بسیار بزرگی سرعت (0.01) بر جای \$V\$ استفاده کرد

\$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D V^2 A = 4 V^2\$

Subject:

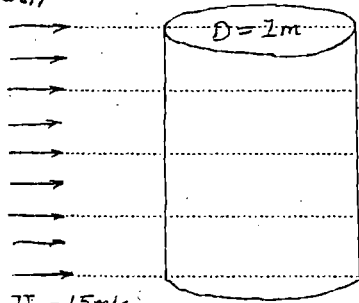
Year: 67 Month: 8 Date: 7 (13)

تمرین ۳: بر روی یک شکل استوانه با ارتفاع 25 m و قطر 1 m در معرض باد با سرعت 15 m/s قرار می‌گیرد. میزان

$$P = \rho R T$$

گتاور مقام مرج را حساب بنمایید.

حل:



$$T = 15^\circ\text{C} \quad \& \quad P = 101.0 \text{ kPa}$$

$$\Rightarrow \rho = 1.23 \text{ kg/m}^3 \quad \& \quad \mu = 1.78 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$$

$$\Rightarrow N_{Re} = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} = 1.04 \times 10^6$$

با استفاده از نمودارهای مربوطه می‌توان مقدار C_D و ضریب زود C_D را تعیین کرد.

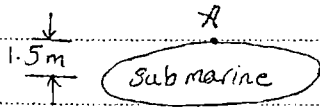
$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho U_\infty^2 A \quad \& \quad A = L \cdot D \Rightarrow F_D = 1.21 \text{ kN}$$

$$U_\infty = 15 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow M_o = F_D \cdot \frac{L}{2} = 15.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

ممان حول مرکز ثقل

تمرین ۱۰: اختلاف فشار کل و اختلاف فشار دینامیکی بین نقاط A و N روی یک زیردریایی را حساب کنید. فرضیات: ۱. کل انرژی ثابت فرض می‌شود.



P_∞ ثابت است و تغییر نمی‌کند (چون بر مبنای اختلاف سطح هستیم).

$$U_\infty = 10 \text{ m/s} \quad \& \quad V_A = 15 \text{ m/s}, \quad V_N = 0 \text{ (stagnation point)}$$

$$E = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2g}$$

$$\& \quad E_\infty = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U_\infty^2}{2}, \quad P_\infty = 0$$

$$\Rightarrow E_\infty = 50 \text{ J/kg}; \quad E_N = E_\infty = \frac{P_N}{\rho} \Rightarrow P_N = 50 \cdot 1000 = 50 \text{ kPa}$$

لایه فشار در نقطه A خالص است در واقع $P_A = E_\infty \Rightarrow \frac{P_A}{\rho} = 50 - \frac{15^2}{2} \Rightarrow P_A = 62.5 \text{ kPa}$

نیست و این فشار نسبی است.

$$P_A - P_N = 62.5 - 50 = 12.5 \text{ kPa}$$

Total Dynamic Pressure Difference = 12.5 kPa

$$g z_A + \frac{P_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} = g z_N + \frac{P_N}{\rho} + \frac{V_N^2}{2}$$

$$\Rightarrow P_A - P_N = 1000 \left[1.5 \cdot 9.8 - \frac{15^2}{2} \right] = -127.2 \text{ kPa}$$

Total Pressure Difference = -127.2 kPa

$$\text{Total Pressure Difference} = gh + \text{Dynamic pressure Diff.}$$

۵. بی‌خواهم با توجه به اطلاعات داده شده سرعت نسبت حرکت یک هواپیمای جنگ را محاسب کنید.
 نکته: در موتورهای جنگ، نیروی جلو برنده (Thrust) متناسب با المتراتق سوخت می‌باشد. لذا برای یک Thrust ضمن بهترین شرایط درین سرعت می‌باشد. در شرایط Steady State ر Horizontal می‌توان نوشت:

$$Prag = Thrust \quad \& \quad weight = Lift$$

مختلای که عدد مانع کوچک باشد (0.6) (M_1) اثر تراکم پذیری ناچیزی می‌باشد و می‌توان از این رابطه زیر وین نمودارهای

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A_r} \quad ; \quad A_r: \text{Aspect Ratio} \quad \text{مربوطه استفاده کرد}$$

$$A: \text{Platform Area} = 1600 \text{ ft}^2 \quad , \quad A_r = 0.5$$

$$V_1 = 250 \text{ ft/s} \quad , \quad V_2 = 650 \text{ ft/s} \quad ; \quad C_{D_0} = 0.018 \quad ; \quad W = 150,000 \text{ lbf}$$

$$\rho = 24 \times 10^{-4} \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} \quad ; \quad 1 \text{ slug} = 32.174 \text{ lbfms}$$

* سرعت یعنی باید نیروی باسنده در حواله بالاترین سرعت را داشته باشد. به عنوان دیگر کمترین F_D را داشته باشد.
 بنابراین باید کمترین F_D را محاسب کنیم.

معادلات حرکت یا پیراستوکس Navier-Stokes

در منظور برونسبی دقیق تر حرکت سیال بر روی سطح مختلف و محل محاطات حرکت لایمات ما هم خط جریان

Stream Line، آج جریان، Stream Function، پتانسیل سرعت، Velocity Potential، جزئی شوند

همه حرکت سیال و جزئی جزئی می شود

مثالین ذکر است. یک کارگیری چنین پاراسترهای حل محاطات حرکت را آسان بر می کند

یادآوری

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$i \times i = 0 \quad j \times j = 0 \quad k \times k = 0$$

حاصل جبری است عمود بر صفحه هم‌طور اولیه

$$i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$$

$$i \times k = -j \quad j \times i = -k \quad k \times j = -i$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) i - (a_x b_z - a_z b_x) j + (a_x b_y - a_y b_x) k$$

خط جریان، خط فرضی، راکت، در هر نقطه بر روی سرعت در خط، محور دقتی ملین باشد، خط جریان می نویسد، لازم به یاد آوری است

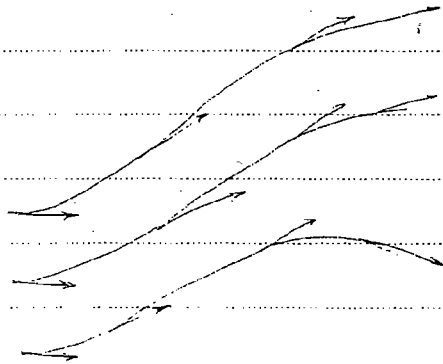
که Euler حرکت سیال را در ریاضی خط جریان بر روی کرده است

$$\vec{U} \times d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow [U_x \vec{i} + U_y \vec{j}] \times [dx \vec{i} + dy \vec{j}] = 0$$

$$\Rightarrow (U_x dy - U_y dx) \vec{k} = 0 \Rightarrow \frac{U_x}{dx} = \frac{U_y}{dy}$$

پایه این می توان نوشت:



$$\frac{U_x}{dx} = \frac{U_y}{dy}$$

معادله خط جریان

تاج جریان: با استفاده از تاج جریان معادله پیوستگی از بین می رود و معادله حرکت آمدن مرحله می شود بد عبارت دیگر تاج جریان بد شکلی تعریف می شود که در معادله پیوستگی صادق باشد.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\nabla \cdot \rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial x} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \psi = \psi(x, y)$$

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

هرگاه $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ در آن صورت می توان گفت که ψ یک دیرانسیل کامل است. این شرط را رابطه پیوستگی می نامند برای خط جریان می توان نوشت:

$$v_x dy - v_y dx = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial \psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0 \Rightarrow d\psi = 0 \Rightarrow \psi = c$$

در طول خط جریان، مقدار تاج جریان ثابت است.

$$\mathbf{U} = -a y \mathbf{i} + a x \mathbf{j}$$

تجرین ا: برای جریان با سرعت داده شده، تاج جریان را مطابق کنید:

ابتدا باید شرط برقراری دیرانسیل کامل بررسی شود.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 + 0 = 0 \quad \text{دیرانسیل کامل است}$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad ; \quad \psi = \int v_y dx + f(y) = \int a x dx + f(y)$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{ax^2}{2} + f(y) \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = f'(y) = -v_x = -ay \Rightarrow f'(y) = -ay \Rightarrow f(y) = -\frac{ay^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{a}{2} (x^2 - y^2) + C$$

با حل بخش این مثال باید u رسم

C برای جابجایی بین خطوط جریان مایه مختلف است.

تاج جریان برای سیستم استوانه ای:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad ; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

برای سیستم استوانه ای، تاج جریان بد شکلی بر تعریف می شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

تاثیر سرعت: استفاده از پتانسیل سرعت برای شرط جریان غیر چرخشی. Irrrotational Flow به کار می رود.
 بعد از آن مطمئن شود که جریان غیر چرخشی همان جریان ایده آل است.

سرعت می توانیم اینست

$$\vec{U} = \phi(x, y, z) \quad ; \quad \boxed{U_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}} \quad \boxed{V_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}}$$

در دو بار هم حالت می آید

حاصل ضرب بردار بر بردار (Cross) بیان ∇ و بردار سرعت \vec{U} را $\text{Curl } \vec{U}$ می نامند.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad ; \quad \nabla \times \vec{U} = \text{Curl } \vec{U}$$

$$\nabla \times \vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & V_y & W_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \end{bmatrix} \vec{i} + \begin{bmatrix} \frac{\partial W_z}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial y} \end{bmatrix} \vec{j} + \begin{bmatrix} \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \\ \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \\ \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \end{bmatrix} \vec{k}$$

هرگاه $\text{Curl } \vec{U} = 0$ داریم:

$$\frac{\partial W_z}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{\partial W_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{\partial y}$$

این روابط همان طور که قبلاً اشاره شد، مربوط به بیان ایده آل (جریان غیر چرخشی) می باشد.

تمرین 2: حاصل $\nabla \times \nabla \phi$ را بیابید.

$$\nabla \times \nabla \phi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} \vec{i} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \end{bmatrix} \vec{j} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \end{bmatrix} \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0$$

شرط برقراری جریان غیر چرخشی:

کتاب: جهت برقراری شرط جریان غیر چرخشی لازم است $\nabla \phi$ حاصل بردار سرعت نیز می شود:

$$\vec{\nabla} \phi = \vec{U} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} = U_x \vec{i} + V_y \vec{j} + W_z \vec{k}$$

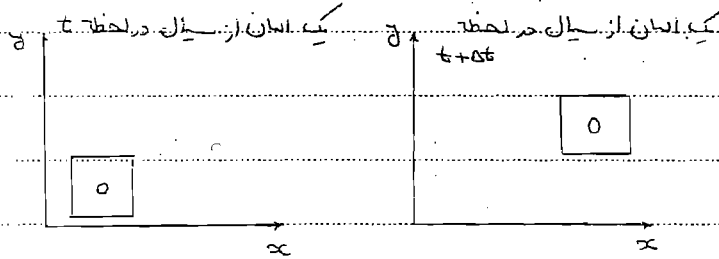
$$\Rightarrow U_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad ; \quad W_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

در سیستم استوانه ای روابط بدین شکل زیر استفاده می شود:

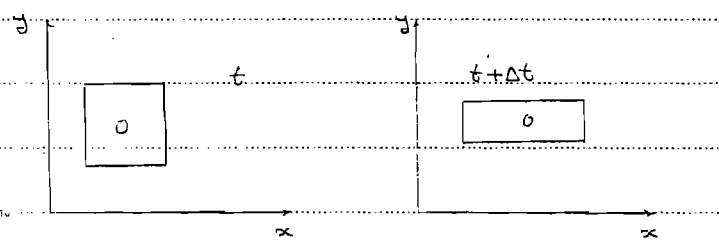
$$\boxed{U_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}} \quad \boxed{V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}}$$

1. بررسی جریان غیر چرخشی: Irrotational Flow

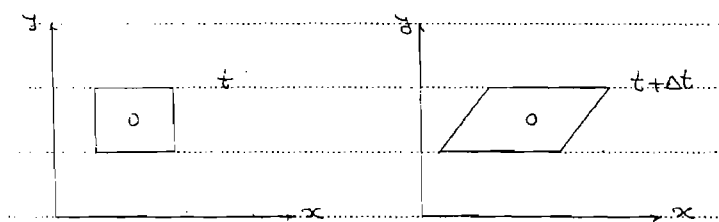
حرکت ذرات نمی تواند به شکل های گوناگونی انجام پذیرد



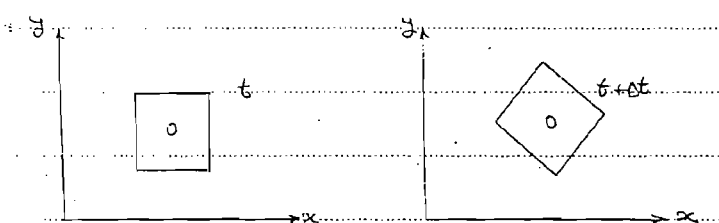
1- انتقال
transient



2- تغییر شکل
Linear



3- زاویه ای
Angular



4- چرخش
Rotation

نکته: چرخش تنها در اثر اعمال تنش برشی می باشد

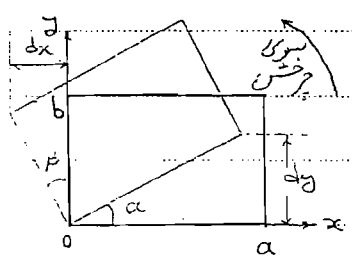
5. بررسی چرخش سیال:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

چرخش (ω) کمیت برداری است که بصورت زیر تعریف می شود:

و عبارت از سرعت زاویه ای متوسط دو خط عمود بر یکدیگر در یک جزء سیال

به منظور آسانی تحلیل، چرخش سیال در صفحه xy در نظر گرفته می شود.



صورتی که سرعت در نقاط a و b سرعت در نقطه 0 متطابق باشد، ایوان شروع پذیرش می کند
در مورد پذیرش در راستای $0a$ می توان نوشت:

+ مولد سرعت در راستای y در نقطه 0 : V_{y0}

Taylor series: $V_{y\alpha} = V_{y0} + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \dots$ $V_{y\alpha}$: مولد سرعت در راستای y در نقطه α

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} dx$$

$$dy = \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \cdot dt$$

$$w_{0a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dx}{dt}; \quad dx \approx \frac{\partial V_y}{\partial x} dx = \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow w_{0a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dy/dx}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{[(\partial V_y / \partial x) dx dt] / dx}{dt} \Rightarrow w_{0a} = \frac{\partial V_y}{\partial x}$$

در مورد پذیرش در راستای $0b$ می توان نوشت:

+ مولد سرعت در راستای x در نقطه 0 : V_{x0}

Taylor series: $U_{xb} = U_{x0} + \frac{\partial U_x}{\partial y} dy + \dots$ U_{xb} : مولد سرعت در راستای x در نقطه b

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} dy$$

$$dx = \frac{\partial U_x}{\partial y} dy \cdot dt$$

$$w_{0b} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dy}{dt}; \quad dy \approx \frac{\partial U_x}{\partial y} dy = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow w_{0b} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{[-(\partial U_x / \partial y) dy dt] / dy}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{-dx}{dt} \Rightarrow w_{0b} = -\frac{\partial U_x}{\partial y}$$

توران در صفحه xy (حول محور Z) برابر است با سرعت زاویه ای متوسط در راستای عمود بر هم $(0b, 0a)$.

$$w_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right]$$

در سطح کلی بردار $\vec{\omega}$ برابر است با :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

بنابراین : $\vec{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{U}) = \frac{1}{2} \text{Curl } \vec{U}$

Vorticity = $2\vec{\omega} = \text{Curl } \vec{U}$

همچنین می توان نوشت :

در سیستم استوانه ای رابطه بدین شکل زیر استفاده می شود :

$$\text{Vorticity} = \text{Curl } \vec{U} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] \vec{i} + \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right] \vec{j} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \vec{k}$$

چونکه در این جريان غير چرخشی چیست و بیان سرعت کدام است ؟

• جریانی که هیچ گونه دوران نداشته باشد (در واقع اثرش در آن مشاهده نمی شود)

$$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial x} \quad \& \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial y}$$

• بیان سرعت رابطه ای است که در محلهای شرط جريان غير چرخشی متن می کند :

$$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \text{Curl } \vec{U} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{U} = 0 ; \quad \nabla \phi = \vec{U} \Rightarrow \nabla \times \nabla \phi = 0$$

در نتیجه رابطه Velocity Potential (ϕ) در محلهای جريان غير چرخشی متن می کند

نکته : سیال تحت تأثیر نیروی گرانشی (Gravity)، فشار (Pressure) نمی تواند دوران (چرخشی) کند. لایه چرخشی، وجود

شش برشی (Shear stress) می باشد.

• فرض جريان غير چرخشی برای تعیین از سیال که در آن می توان از نیروی مقاومت (تأثیر رگوزیته) چشم پوشید، کار می رود

مثلاً در خارج از لایه مرزی در جریان حرکت سیال بر روی یک جسم جامد و یا در شرایطی که سیال ایده آل باشد ($\mu = 0$) جریان غير چرخشی

فرض می شود.

سیال ایده آل $\Leftrightarrow \mu = 0 \Leftrightarrow$ سیال غير چرخشی

تمرین: اند برای توزیع سرعت زیر، پتانسیل سرعت را بدست آورید.
 • ابتدا باید مشخص کرد که جریان غیر چرخشی است یا نه. چون فقط جریان غیر چرخشی می توان پتانسیل سرعت را تعریف کرد.

$$\vec{V} = (x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^2 & -2xy & 0 \end{vmatrix} = (-2y + 2y)\vec{k} = 0 \rightarrow \text{جریان غیر چرخشی}$$

$$\Rightarrow u_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow d\phi = -u_x dx \Rightarrow \phi = y^2 x - \frac{1}{3} x^3 + f(y)$$

$$v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow -2xy = -2xy - f'(y) \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = C = c$$

$$\Rightarrow \phi = y^2 x - \frac{1}{3} x^3 + C$$

معادلات لا پلاس $\nabla^2 \phi = 0$

در معادلات بیوستکس صاف می کند

در معادلات جریان غیر چرخشی صاف می باشد

معادلات فوق بران جریان هو بادی استفاده می شوند

با حل معادلات فوق، تابع جریان و پتانسیل سرعت و در نتیجه تابع توزیع سرعت بدست می آید

با استفاده از آن و همچنین با استفاده از معادلات حرکت، تابع توزیع فشار قابل محاسبه می باشد

یکی از روش های حل معادلات فوق، روش جداسازی متغیرها Separation of variables می باشد

خود را باین رابطه میان تابع جریان و پتانسیل سرعت را تعیین کنید

در سیستم هو بادی و برای جریان غیر چرخشی در شرایط پایا، ψ و ϕ تعریف پذیری باشند

هر دو هم حالت اما ψ ثابت و ϕ متغیر است

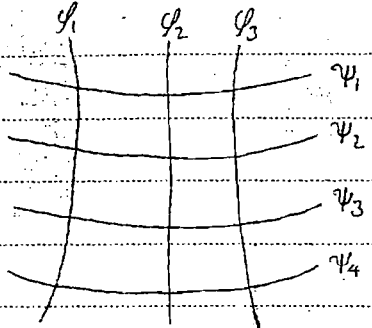
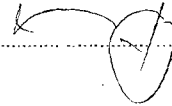
$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v_y = +\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ; \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = v_y dx - u_x dy$$

$$u_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad ; \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = -u_x dx - v_y dy$$

• توابع ψ و ϕ برهم عمودند، مانند خطوط دما ثابت و آریا ثابت در انتقال حرارت

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\psi=c} = \frac{V_y}{U_x}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\psi=c} = -\frac{U_x}{V_y}$$



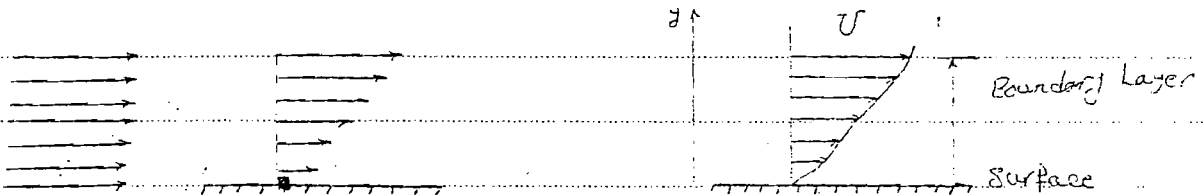
حاصل ضرب این دو سبب معادله "ا" می باشد. بنابراین خطوط بر یکدیگر عمودی باشند این خطوط در تمامی نقاط به غیر از نقطه ایستایی (Stagnation) بر یکدیگر عمودند.
 های که سرعت منفی شود. (در محل برخورد با سطح)
 داخل معادلات لاپلاس، نتایج توزیع سرعت بدست می آید.

مانند انتقال حرارت در خطوط آدیاباتیک $q = 0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial n} = 0$

بررسی حرکت سیال بر روی سطح تخت:

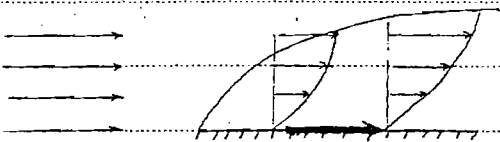
Friction Drag

1. حرکت سیال بر روی یک صفحه تخت (Flat). موازی با جریان سیال: در این حالت خطوط جریان ندرتاً تخت تا شیب سخت رانج می شوند و معمولاً موازی سطح می باشد.



• فشار کمواخت خارج از لایه مرزی تا شیری بر روی جریان داخل لایه مرزی ندارد و در نتیجه تغییر فشار قابل توجهی در داخل لایه مرزی مشاهده نمی شود.

نتیجه: نیروی دران (Drag) منبسطی از وجود اصطکاک (Friction) می باشد.



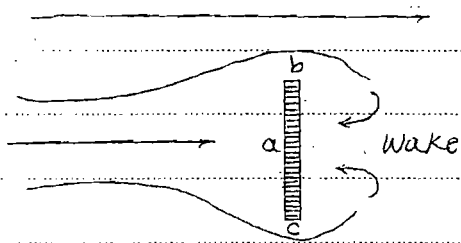
نت (نیروی واردی صفحه از طرف سیال)

$$F_D = \int T_w dA$$

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} = f(Re)$$

A در این روابط سطح صفحه می باشد.

۱۲) حرکت سیال بر روی یک صفحه تخت (Flat) عمود بر جریان سیال Pressure Drag
 در مختلف حالت قبل، در این حالت، تنها نیروی وارده شده بر سطح، نیروی فشار است. بد عبارت دیگر نیروی Drag حاصل
 تنها بد علت وجود گرادیان فشار بوجود می آید. نیروی حاصل از اصطکاک یا تنش برشی (Friction, shear stress) که بر
 صفحه اعمال می شود، در جهت عمود بر حرکت سیال است و تأثیر بر نیروی Drag وارد بر صفحه ندارد.



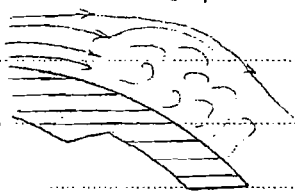
نقطه 'a'، نقطه ایستایی (Stagnation) می باشد. در نقطه 'a'، فشار
 بیشینه می باشد. سیال تا اب می گردد و فشار کاهش می یابد و سیال بد
 جهت نقاط b, c حرکت می کند. در طول مسیر، جریان separation
 وجود ندارد.

- * در بخش جریان آشفته، اختلاف ρ, μ و ν وجود می آید. در این حالت C_D با C_f متفاوت است و در این حالت C_D با C_f متفاوت است.
- * در این حالت، گرادیان فشار در لایه مرزی به اندازه ای زیاد است (چه در حالت جریان آرام و چه در حالت جریان آشفته) که نسبت
 موجب بوجود آمدن Wake در پشت صفحه می شود.
- * بد همین علت جریان بد نوع جریان بگلی ندارد. در نتیجه C_D بد شکل و ایجاد صفحه بگلی دارد و تابع N_R می باشد ($N_R > 1000$)

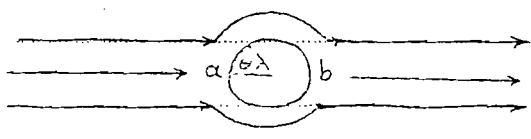
$$F_D = \int P dA \Rightarrow C_D \neq f(N_R) \quad ; \quad C_D = \frac{F_D}{\left(\frac{1}{2}\right) \rho U_\infty^2 A}$$

A در این رابطه سطح صفحه می باشد.

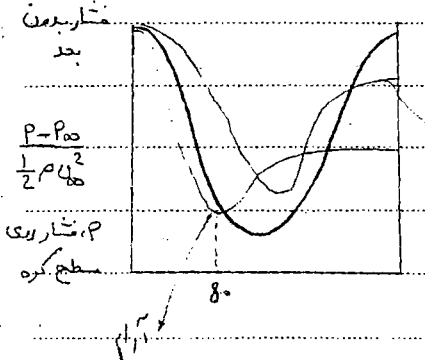
۱۳) حرکت سیال بر روی سطح غیر سطح (Curved) Friction & pressure Drag
 تفاوت بین جریان بر روی یک صفحه غیر سطح بد تغییرات فشاری
 که بد علت آنها در سطح بوجود می آید مربوط می شود
 بر روی حرکت سیال



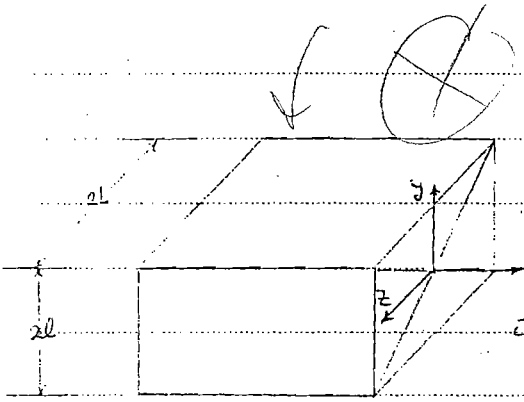
در حرکت سیال غیر ویگوز (جریان ایده آل) خطوط جریان در دو طرف کره یا استوانه قریب به ایستند. در این حالت
 لایه مرزی که موجب جابجایی این خطوط می شود، تشکیل می شود. در این حالت نقاط a, b، نقاط ایستایی Stagnation
 می باشند و سرعت سیال در این نقاط صفر می باشد.



تیسرا
 در حالی که برای جریان ایده آل توزیع فشار متقارن است، توزیع فشار در عمل در میان سیال مایع متقارن نمی باشد.
 اگر منحنی تغییرات فشار بر روی سطح کره بصورت تجربی ترسیم شود، در جریان های آرام و آنستة منحنی های خط چین
 (در شکل) بدست می آید.



نتایج تجربی در جریان آنستة مطابق بتری با جریان ایده آل دارد.
 تا وقتی از زاویه 80، اتلاف انرژی کم است.



توزیع سرعت بدون چرخش
 (1) تنش در مرکز صفر است
 (2) میان میزنی و غیر قابل تراکم است
 $(V_x = U; V_y = V; V_z = W)$
 $u = u(y, z)$

Continuity $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

ملاحظات: $M_x: 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$

$M_y: 0 = \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \rightarrow P = \rho g y + f(x)$

$M_z: 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \rightarrow P = P(x, z)$

$P = \rho g y + f(x) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 + \frac{df(x)}{dx}$

طول چپ آج، در طرف راست آج (y, z) می آید بنابراین هر دو طرف با عنوان ثابت برابری است

$\frac{df}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{\Delta P}{\Delta x} \Rightarrow$ BCs: $u(l, z) = 0$ & $\frac{\partial u(0, z)}{\partial y} = 0$ & $u(z, h) = 0$ & $\frac{\partial u(z, 0)}{\partial z} = 0$

مخارج براسون $\phi = \frac{u}{(-\Delta P) \frac{l^2}{\mu}}; \bar{z} = \frac{z}{l}; h = \frac{z}{l} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2} = -1$

BCs: $\left\{ \begin{array}{l} \phi(l, h) = 0 \quad \& \quad \frac{\partial \phi(0, h)}{\partial \bar{z}} = 0 \\ \phi(\bar{z}, \frac{l}{2}) = 0 \quad \& \quad \frac{\partial \phi(\bar{z}, 0)}{\partial h} = 0 \end{array} \right.$ هر دو بر حسب یک طول بی بود سنده اند

حاده دینر اینیل را برین صورت می کشیم
 برای امکان پذیر کردن

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} + \frac{d^2 \theta}{dz^2} = -1 \Rightarrow$ BCs & Eq. ① $\frac{d^2 \theta}{dz^2} = -1$ & $\theta(1) = 0, \frac{d\theta(0)}{dz} = 0$

حل با غیر صفر کردن می از شرایط میزی
 همون کردن معادله

$\Rightarrow \theta = -\frac{\bar{z}^2}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \left(1 - \bar{z}^2 \right)$

③ $\nabla^2 \psi = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \psi(l, h) = 0 \quad \& \quad \frac{\partial \psi(0, h)}{\partial \bar{z}} = 0 \\ \psi(\bar{z}, \frac{l}{2}) = -\theta(\bar{z}) \quad \& \quad \frac{\partial \psi(\bar{z}, 0)}{\partial h} = 0 \end{array} \right.$ Boundary Conditions
 Checking $\left\{ \begin{array}{l} \phi(l, h) = \psi(l, h) + \theta(1) = 0 \\ \phi(\bar{z}, \frac{l}{2}) = \psi(\bar{z}, \frac{l}{2}) + \theta(\bar{z}) = 0 \end{array} \right.$

sep of var $\psi = \psi_1(\bar{z}) \cdot \psi_2(h) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = A_1 \sin \lambda \bar{z} + A_2 \cos \lambda \bar{z} \\ \psi_2 = B_1 \sinh \lambda h + B_2 \cosh \lambda h \quad : B_1 e^{-\lambda h} + B_2 e^{+\lambda h} \end{array} \right.$

BCs: $\left\{ A_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = A_2 \cos \lambda \bar{z} \right\}$ & $\left\{ B_1 = 0 \Rightarrow \psi_2 = B_2 \cosh \lambda h \right\} \Rightarrow \psi_2 = \psi_1 \psi_2 = A_2 B_2 \cos \lambda \bar{z} \cosh \lambda h$

$\Rightarrow \psi = \sum \psi_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n \bar{z} \cosh \lambda_n h$

Subject:

Year 87 Month 3 Date 21/7

درجه اول: $\frac{\partial \psi(z, 0)}{\partial h} = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n=0, 1, 2, \dots$

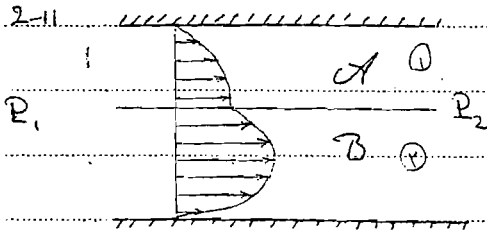
$\Rightarrow \psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} z \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2} h$

$\psi(z, \frac{L}{2}) = -\phi(z) = -\frac{1}{2} (1 - z^2) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} z \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2} h = \frac{1}{2} (z^2 - 1)$

از شرط بیابان انتگرال بگیریم:

$\Rightarrow \int_{-1}^1 a_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} z \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2} h dz = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (z^2 - 1) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} z dz$

$\Rightarrow a_n = \frac{-n \sin \lambda_n}{\lambda_n \cosh \lambda_n \frac{L}{2}} \Rightarrow \phi = \frac{1}{2} (1 - z^2) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \frac{\cosh \lambda_n h}{\cosh \lambda_n \frac{L}{2}} \cos \lambda_n z, \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$

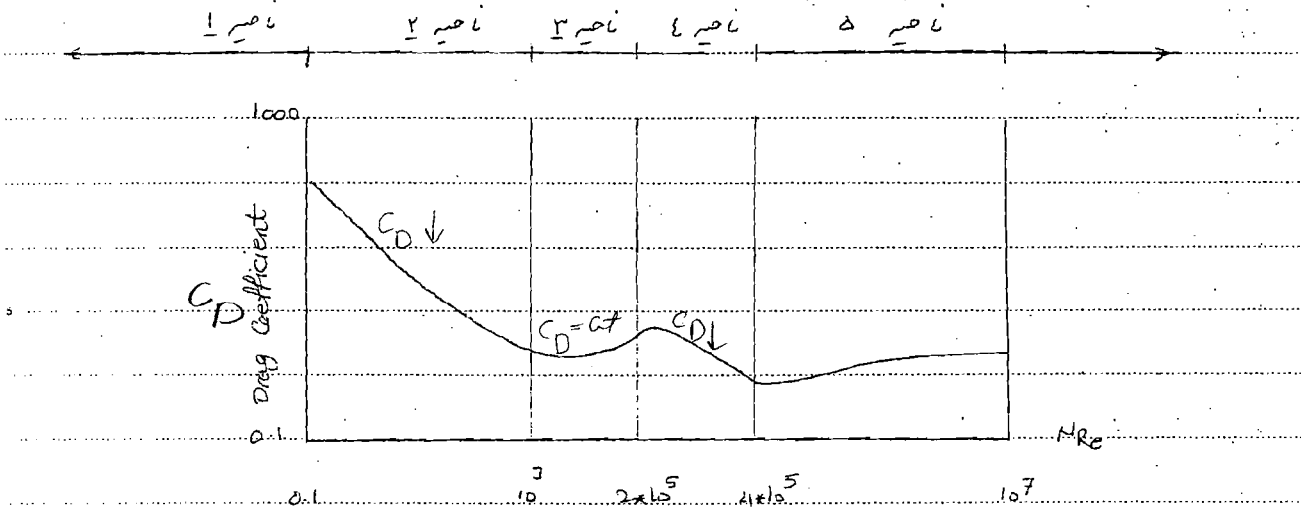


حصول شرایط بیابان منتهی می شود و یکوزتری باشند
 سوال با چگالی و یکوزری کمتر، رانندگی جریان می آید و ما کمترین
 سرعت در میان چگالی کمتر اتفاق می افتد. بنابراین جریان صحیح نیست.

$(\frac{dp}{dx})_1 = \mu_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} \quad \& \quad (\frac{dp}{dx})_2 = \mu_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dx} = \mu_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} \\ \frac{dp}{dx} = \mu_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} \end{cases}$

BCs: $\begin{cases} \text{at } y=0: u_{1,x}(0) = 0 \\ \text{at } y=h: u_{2,x}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{at interface: } \begin{cases} u_1 = u_2 \\ \frac{du_1}{dy} = \frac{du_2}{dy} \end{cases}$

$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh \frac{(2n-1)\pi}{2} h = \frac{\sin \pi n^2}{2L} - \frac{\sin(\pi n)}{2L} = \frac{\cos \pi n^2 - \cos \pi n}{L^2} = \frac{\sin \pi n^2}{L^2}$
 $= \frac{\sin \pi}{L^2} - \frac{\sin \pi}{L^2} + \frac{\cos \pi}{L^2} - \frac{\sin \pi}{L^2} = \frac{1}{L^2}$
 $a_n = \frac{1}{L^2 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{2} h}$



$$C_D = \frac{24}{Re}$$

امیداً: در این ناحیه $Re < 1$ سیال با بدنه جریان سیال، جریان خزشی (Creeping Flow) می باشد. در این حالت کل Drag بصورت Friction می باشد. با افزایش Re ، نقش Pressure بیشتری شود، مقدار C_D کاهش می یابد.

$$C_D = \frac{12.5}{Re^2}$$

[85 Friction, 15 Pressure]

امیداً: در این ناحیه $1 < Re < 10^3$ می باشد.

امیداً: در این ناحیه $10^3 < Re < 2 \times 10^5$ می باشد، جریان آرام، Laminar Boundary Layer، C_D تقریباً ثابت است.

$$C_D \approx 0.4 - 0.6$$

جدايي Separation Point در زاویه ای حاد 90° اتفاق می افتد. میزان Wake در پشت برهه در این اختلاف فشارهای عقب جلویی کوه نیز قابل توجه می باشد. در نتیجه Pressure Drag قابل ملاحظه می باشد.

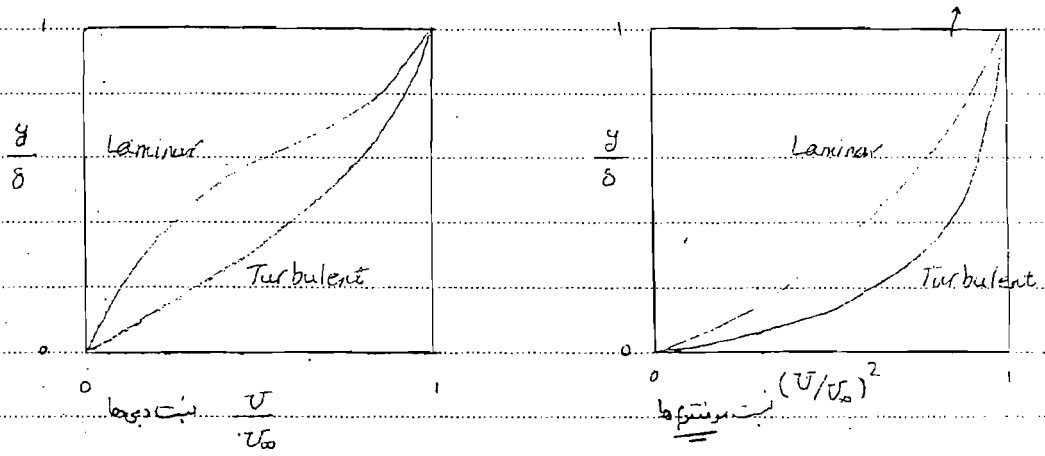
امیداً: در این ناحیه $2 \times 10^5 < Re < 4 \times 10^5$ می باشد، جریان انتقال Transition است.

این ناحیه مربوط به انتقال از جریان آرام به جریان آشفته است. در این حالت جریان کمی با تاخیر اتفاق می افتد و زاویه ای بزرگتر از 90° متعلق می شود. در این حالت میزان Wake کاهش می یابد. بنا بر این فشار بر روی کوه نیز کم می شود و میزان C_D بطور قابل ملاحظه ای کاهش می یابد. زیرا نقطه جریانی از زاویه کوچکتر از 90° به زاویه ای بزرگتر از 90° منتقل می شود.

نقطه ۵: در این ناحیه $Re > 4 \times 10^5$ می باشد و جریان آشفته Turbulent Boundary layer می باشد.
 در این حالت، به علت بیشتر بودن اندازه حرکت Flamenter سیال لایه مرزی در مقابل اختلاف فشار، جابجایی بیشتری از خود نشان می دهد و لذا نقطه جدایی بیشتر به آخری می افتد و در زاویه ای معادل 120° رخ می دهد.
 در نتیجه میزان Wake کاهش می یابد. لذا میزان C_D نیز بسیار کمتر از مقدار مربوط به جریان آرام می باشد زیرا گویایان نشان کاهش می یابد.
 نکته: در هوای Re بحرانی (2.3×10^5) میزان C_D برای جریان آشفته پنج برابر کوچکتر از مقدار آن برای جریان آرام می باشد.

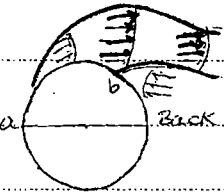
این جمله ایراد ندارد.
 برداشتی حرکت سیال بر روی سطح غیر منطبق

در جریان آشفته با افزایش Re میزان C_D افزایش می یابد. علت آن نیز افزایش اندازه حرکت سیال و بیشتر بودن آن در جریان آشفته در مقایسه با جریان آرام می باشد. در حالی که نقطه جدایی تغییر نمی کند.
 در آرام حتماً نیروی اندر زده می شود.



نکته: تغییرات C_D بر حسب Re برای جریان سیال بر روی استوانه تقریباً مانند کره است. فقط مقدار C_D برای کره در هر مقدار Re تقریباً تغییرات استوانه است.
 مانترا هیچ من درم نه در جریان آشفته باشیم چون C_D کاهش می یابد اما F_D بیشتر است.
 مورد سطوح جریان غیر منظم کننده و نیروی دارد. ناشی از تنگی می باشد. در حالی که در مورد سطوح مورد خطوط جریان به سمت آبی می کشد و نیروی دارد و ناشی از فشار می باشد.
 آرامه آشفته موجب کاهش نیروی مزبور می شود.

بررسی لایه مرزی بر روی یک استوانه



لایه مرزی از نقطه $\theta = 0$ شروع می شود و به تدریج سراسر استوانه را فرا می گیرد.

نشار در جهت جریان کاهش می یابد. $(\frac{dp}{dx} < 0)$

در خارج از لایه مرزی نیز سیال متاب می گیرد. (بر اساس رابطه برنولی) متاب

$$\frac{dp}{dx} < 0 \quad \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = 0 \quad \frac{dp}{dx} > 0$$

سیال در داخل لایه مرزی که باعث کاهش فشار سیال می باشد. باعث ورود

تشن (اصطلاحاً) کمتر از متاب سیال در داخل و خارج از لایه مرزی می باشد.

در قسمت عمیق استوانه... فشار در جهت جریان افزایش می یابد. $(\frac{dp}{dx} > 0)$ این امر موجب کنده شدن سیال در داخل و خارج از لایه مرزی

می شود. اما سیال داخل لایه مرزی به علت ازدست دادن اندازه حرکت بهاشی از وجود نیروی تشن می باشد. فشار نسبت بر روی

نشار سیال خارج از لایه مرزی غلبه می یابد. بنابراین در نقطه ای بر روی استوانه پدیده جدایی **Separation** رخ می دهد تا این معنی

مرزی از حرکت باز می ایستد و فشار خارج از لایه مرزی موجب می شود که سیال لایه مرزی در حالت گون متعصبیت دهد

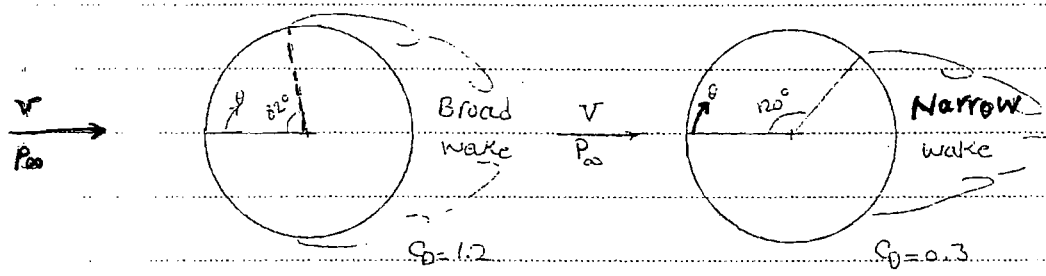
و حالت Back Flow رخ دهد.

در این حالت در عقب استوانه wake تشکیل می شود که این موجب جابجایی خطوط جریان و تغییر توزیع فشار می گردد.

حداصلی که تپلا اشاره شده در جریان آشفته باعث ایجاد حالت اندازه حرکت می شود. داده نقطه جدایی تا آخر می ایستد و این امر موجب

کاهش wake و کاهش گرافیک فشار در خطوط استوانه می شود. در نتیجه نیروی Drag دارد شده. بر استوانه در جریان آشفته

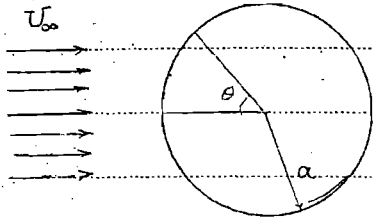
کوچکتر از نیروی وارد شده در جریان آرام می باشد.



Subject:

Year: 87 Month: 8 Date: 26 (18)

توزیع سرعت و فشار سیال اطراف یک استوانه را بدست آورید.



سیال ایده آل Inviscid Flow در نظر گرفته می شود.

معادلات برنولی قابل استفاده می باشد.

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$v_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

پتانسیل جریان $\psi(x,y) = f(x) \cdot g(y)$

$$\nabla^2 \psi = 0 \Rightarrow f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)} = -\lambda^2$$

ψ با ϕ تفاوتی ندارد

$$\begin{cases} f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0 \\ g''(y) - \lambda^2 g(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \\ g(y) = C \exp(\lambda y) + D \exp(-\lambda y) \end{cases}$$

مقادیر A, B, C, D, λ با توجه به شرایط مرزی تعیین می شوند.

حل: معادلات لاپلاس $(\nabla^2 \psi = 0)$ برای سیستم استوانه ای نوشته می شود. نتایج جریان ψ در حالت بی محدودیت صادق است.

در آن ψ با ϕ تفاوتی ندارد

پتانسیل سرعت در شرایط غیر چرخشی صاف است

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

با استفاده از $\psi = \psi(r, \theta) = F(r) + G(\theta) \Rightarrow G(\theta)F'(r) + \frac{1}{r} G(\theta)F(r) + \frac{1}{r^2} F(r)G''(\theta) = 0$

$$\Rightarrow \frac{r^2 F''(r) + r F'(r)}{F(r)} = -\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = \lambda^2$$

$$\Rightarrow G(\theta) = A \sin \lambda \theta + B \cos \lambda \theta \quad ; \quad F(r) = C r^\lambda + D r^{-\lambda}$$

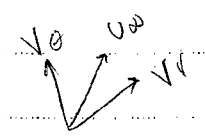
$$\Rightarrow \psi(r, \theta) = (C r^\lambda + D r^{-\lambda}) (A \sin \lambda \theta + B \cos \lambda \theta)$$

BC1: at $r=a$: $v_r = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \Rightarrow C a^\lambda + D a^{-\lambda} = 0 \Rightarrow D = -C a^{2\lambda}$

BC2: at $\theta=0$: $v_\theta = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow B = 0$

BC3: at $r \rightarrow \infty$: $v_r^2 + v_\theta^2 = U_\infty^2 \Rightarrow U_\infty^2 = \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \right]^2 \Rightarrow \lambda = 1$

BC4: at $r \rightarrow \infty$: $U = U_\infty \Rightarrow AC = U_\infty$



$$\psi = (AC \cos \theta) \left(\frac{1}{r} \cos \theta + C a^2 \frac{1}{r} \cos \theta \right)$$

Subject:

Year 87 Month 8 Date 26/11/8

$$\Rightarrow \psi(r, \theta) = U_{\infty} r \sin \theta \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \Rightarrow V_r = -U_{\infty} \cos \theta \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \quad \& \quad V_{\theta} = U_{\infty} \sin \theta \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \right]$$

at $r = a$: $V_r = 0$ & $V_{\theta} = 2U_{\infty} \sin \theta$

Stagnation points: $\theta = 0$ & $\pi \Rightarrow U_{\infty} = 0$

432

در استوانه در هم

$$P + \rho \frac{V^2}{2} = \text{cte} \Rightarrow P_{\infty} + \rho \frac{U_{\infty}^2}{2} = P + \rho \frac{V^2}{2}$$

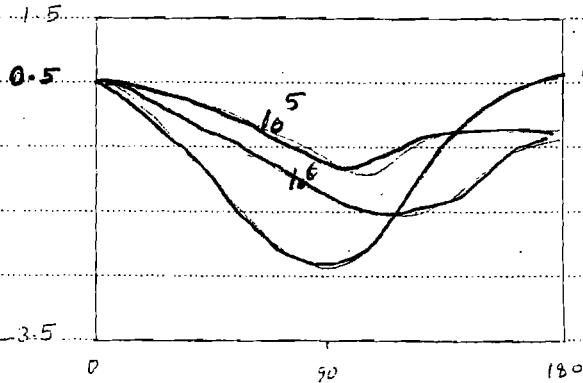
با توجه به رابطه برابری می توان نوشت:

$$P_{\infty} + \rho \frac{U_{\infty}^2}{2} = P + \frac{1}{2} \rho * 4 U_{\infty}^2 \sin^2 \theta$$

U, P بر ترتیب فشار و سرعت بر روی استوانه می باشد.

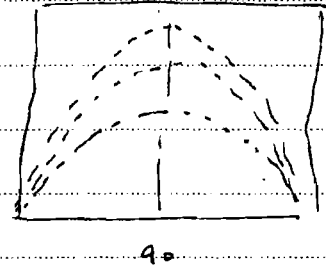
$$\Rightarrow \frac{P - P_{\infty}}{\rho U_{\infty}^2 / 2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

(اختلاف فشار بدون بعد)



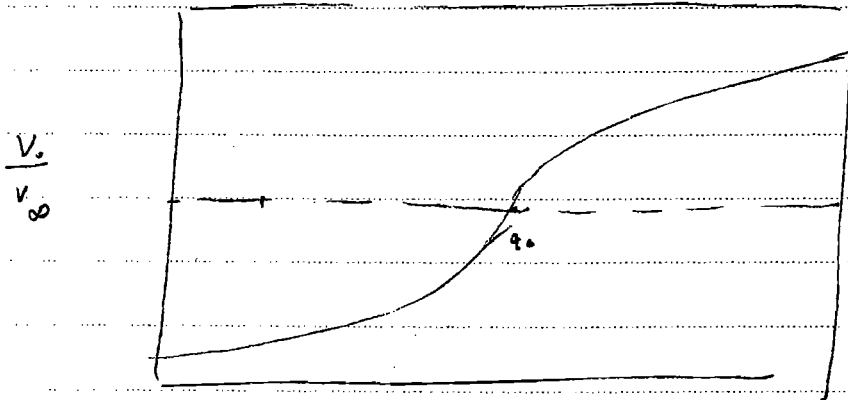
inviscid Flow

شکل بدون بعد در استوانه



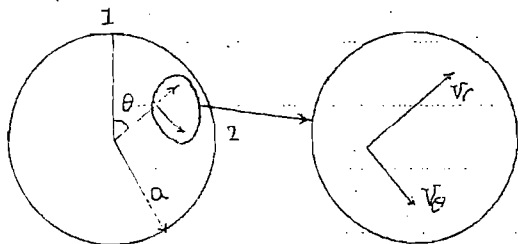
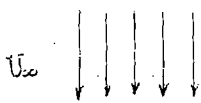
at $\theta = 30^\circ$ & $150^\circ \Rightarrow P = P_{\infty}$

شکل بدون بعد



theta

تمرین ۲: توزیع سرعت و فشار سیال در اطراف یک کره را تعیین کنید.
فرض: سیال غیر چرخشی (Irrotational Flow) در نظر گرفته می شود.



$$V_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

حل:
معادله لاپلاس: $(\nabla^2 \psi = 0)$ برای سیستم کوئسی نوته می شود:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] = 0$$

شرایط مرزی:

BC.1: at $r=a$: $V_r=0$, $\frac{\partial \psi}{\partial r}=0$ بر روی سطح نبود دماغ به داخل سطح

BC.2: at $r \rightarrow \infty$: $V_r = -U_\infty \cos \theta$, $V_\theta = U_\infty \sin \theta$

BC.3: at $\theta=0$: $V_\theta=0$, $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}=0$, $V_\theta=0$

$$\psi = \psi(r, \theta) = U_\infty F(r) \cos \theta \Rightarrow V_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty F'(r) \cos \theta \quad \& \quad V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \frac{F(r)}{r} \sin \theta$$

$\Rightarrow \nabla^2 \psi = r^2 F''(r) + 2r F'(r) - 2F(r) = 0$; Euler or Cauchy Equation

$$F(r) = r^t \Rightarrow r^2 + (t-1)r^{t-2} + 2tr^{t-1} - 2r^t = 0 \Rightarrow t(t-1) + 2t - 2 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad \& \quad t_2 = -2 \Rightarrow F(r) = Ar + \frac{B}{r^2} \Rightarrow \psi = U_\infty \left[Ar + \frac{B}{r^2} \right] \cos \theta$$

BC.1: $r=a$: $A = \frac{2B}{a^3}$

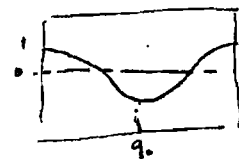
BC.2: $r \rightarrow \infty$: $B = \frac{a^3}{2} \Rightarrow \psi = U_\infty \left[r + \frac{a^3}{2r^2} \right] \cos \theta$

$$\Rightarrow V_r = -U_\infty \left[1 - \frac{a^3}{r^3} \right] \cos \theta \quad \& \quad V_\theta = U_\infty \left[1 + \frac{a^3}{2r^3} \right] \sin \theta$$

$r=a$: $V_r=0$; $V_\theta = \frac{3}{2} U_\infty \sin \theta$; $P_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2$

$$\Rightarrow \frac{P - P_\infty}{\rho U_\infty^2 / 2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \quad ; \quad P_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2$$

$$U_1 = 0 \quad \& \quad U_2 = \frac{3}{2} U_\infty \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{9}{8} \rho U_\infty^2$$



اختلاف فشارین نقاط ۱ و ۲

۴. یا حل حالات لایس را استفاده از محاسبه برنولی. توزیع سرعت و فشار سیال ایده آل در اطراف استوانه
 رگه برداشت آمد.

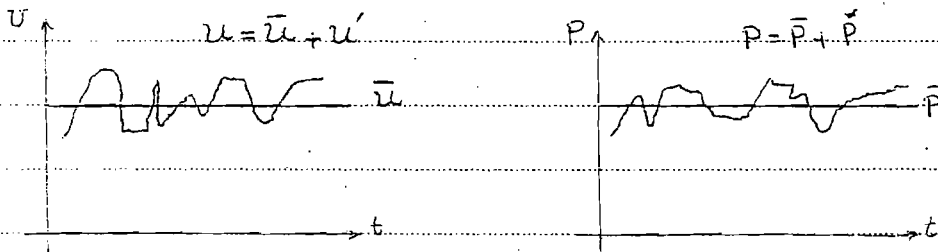
جرای زانیه از آرام به آشفته می رود ρ کتری شود. U^2 منطقی بیستری شود. به نحوی که F_D برای
 جریان آشفته منطقی بیستری از آرام است. اما در سه تلفات انرژی برای جریان آشفته کمتر خواهد بود. اما خود
 تلفات بیستری خواهد بود.

جریان آشفتگی

در جریان آشفتگی تلفات کمتری است، اما شکل در پیچیدگی آن است.

در بیشتر موارد منحنی جریان، شکل بصورت آشفتگی است.

استفاده از مفهوم Time Average در بسیاری از مدل سازی ها مانند مدل سازی جریان آشفتگی کاربرد دارد.



میان جریان آشفتگی

همانگونه که بیشتر نیز اشاره شد، در جریان آرام، انتقال اندازه حرکت در اندازه کوچکتری صورت می گیرد، در حالی که در جریان

آشفتگی در عمل بیشتر رخ می دهد. انتقال اندازه حرکت بصورت خودهای (Macroscale) اتفاق می افتد و گریزهایی (Eddy)

از سیال از نقطه ای به نقطه دیگر منتقل می شوند.

برای نخستین بار Reynolds با تجربین ماده رنگی در جریان آب در یک لوله ای کشیدنی، پدیده ای جریان های آرام را آشفتگی را

بررسی کرد. برای عدد بدون بعدی را تعریف کرد که با آن می توان نوع جریان سیال را مشخص نمود (مکلا). روی همین نشان

داد که سیال در گذر از حالت آرام به حالت آشفتگی از حالت انتقالی Transition می گذرد.

در جریان آرام، یک سیال نیوتنی، قانون ویسکوزیته نیوتنی حکم فرم است $\tau = \mu \frac{du}{dy}$

بر اساس این معادله حد لای برای جریان آشفتگی نیز در نظر گرفته شد است $\tau = -(\mu + \eta) \frac{du}{dy}$

که در این حد لای μ مربوط به جریان آرام η ویسکوزیته گردابی است (Eddy Viscosity) مربوط به جریان آشفتگی

می باشد که بسته به میزان آرامش یا آشفتگی جریان سیال، یکی از این دو تخمین فته می باشند.

در جریان آشفتگی داریم $\epsilon = \frac{1}{\rho} \frac{d^3 \rho}{dt^3}$ و $\eta \gg \mu$

ϵ (Eddy Kinematic Viscosity) نیاز به شرح جریان است. واضح است نیست.

همانگونه که اشاره شد در عمل بیشتر جریان ها آشفتگی می باشند (بذلت کمتر بودن ضریب اصطکاک و در آن در جریان

آشفتگی با جریان آرام) در این حالت نوسان های غیر منظم در سطحها بطور پیوسته در جریان اصلی وجود دارد.

در جریان های آشفتگی همواره یک انتقال پیوسته انرژی میان جریان اصلی و جریان گردابی می وجود دارد.

اگرچه آشفته و تصادفی بودن حرکت گرماها و اختلاط آنها (Mixing Eddy) در حباب بزرگ مثل تابلو شکر و ریاضی را بسیار دشوار می کند اما از سوی دیگر کمتر بودن ضرایب مقاومت در این جریان میزان انتقال انرژی و کاهش می دهد (گامش f, C_D, N_g)

Prandtl Mixing - Length theory

تئوری طول اختلاط برانسل

یکی از بهترین تئوری ها ارائه شده برای بررسی جریان آشفته Mixing - Length theory می باشد که توسط Prandtl طرح شده است

در این تئوری، جریان آشفته بصورت میانگین زمانی (Time Average) بررسی شده است. با بررسی های بعمل آمده مشخص شده است که در جریان آشفته مقادیر فشار و سرعت در یک نقطه نسبت به زمان ثابت نیستند و دارای نوسان های (Fluctuation) غیر منظم با فرکانس بالا می باشد

مدل ریاضی جریان های آشفته نیز باید در نظر گرفتن این نوسان ها گسترش یابد است

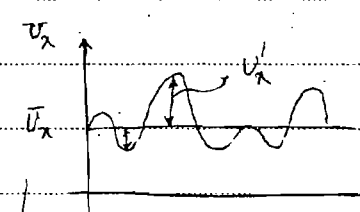
$$U_x = \bar{U}_x + U'_x \quad V_y = \bar{V}_y + V'_y \quad W_z = \bar{W}_z + W'_z \quad P = \bar{P} + P'$$

بدین ترتیب مرتبه اول نوسان ها در اندازه های درناگون بوده ای Macroscopic و بصورت گرماها (Eddy) و رفته در اندازه های میکروگون موجود می آیند که اندازه این گرماها را میزان نوسان آنها مشخصه ای از آشفتگی جریان می باشد

مقادیر $\bar{P}, \bar{U}_x, \bar{V}_y, \bar{W}_z$ بصورت میانگین زمانی بیان می شوند و مقادیر P', U'_x, V'_y, W'_z نوسان ها را مشخص می کند

در شرایط پایا Steady state مقادیر میانگین وابسته به زمان نمی باشند ← ok ?

$$\bar{U}_x = \frac{1}{t} \int_b^{b+t} U_x dt$$



\bar{U}_x : time average velocity
 U'_x : instantaneous

Subject: _____
 Year 37 Month 9 Date 3 20

در این رابطه نسبت زمان طولانی تر از سرعت زمان نوبان ها می باشد

\bar{U}_x : Time Averaged Velocity U'_x : Instantaneous Velocity

تقریباً همان هستند که میانگین سرعت نوبان جریان در راستای x (در راستای دیر و راستای) برابر صفر است: ($\bar{U}_x = 0$)

$$\bar{U}_x = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} \bar{u}_x dt + \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} u'_x dt \Rightarrow \bar{U}_x = \bar{u}_x + \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} u'_x dt = \bar{u}_x + \bar{u}'_x$$

$\Rightarrow \bar{u}'_x = 0$ & $\bar{U}_x = \bar{V}_y = \bar{W}_z$ * برآیند نوبان زمانات برابر صفر باشد

$$f = \bar{f} + f' \quad \& \quad g = \bar{g} + g'$$

هرگاه ثابت باشیم
 یکنواختی

1) $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$

2) $\overline{f' + g'} = 0$ زمان نوبان

ی توان نوشت

3) $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$

4) $\bar{f} = \bar{f}$ Arrange

در جریان آشفته، نیروی معادله نوسان سرعت بر مقدار میانگین سرعت به گونه ای است که سبب افزایش تغییر شکل می شود

بنابراین دیگر وجود نوبان ها سبب افزایش ویسکوزیته ظاهری α Apparent Viscosity می شود

$$F = -(\mu + \eta) \frac{du}{dy}$$

استفاده از رابطه دلخواه

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\overline{f \times g'} = \overline{f} \times \overline{g'}$$

$$\overline{f' \times g'} = ? \quad ?$$

بررسی محادله پیوستگی برای سیال تراکم ناپذیر در جریان آشفته.

$$\nabla u = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot p v$$

$$\frac{\partial(\bar{u}_x + u'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y + v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w}_z + w'_z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial z} + \frac{\partial w'_z}{\partial z} = 0$$

هرگاه از رابطه فوق Time Average گرفته شود، می توان نوشت:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial z} + \frac{\partial w'_z}{\partial z} = 0 \quad (I)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}'_x}{\partial x} \Rightarrow \bar{u}'_x = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}$$

پس می توان گفت محادله پیوستگی هم برای سرعت متوسط و هم برای Fluctuation برقرار است:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial z} = 0 \quad (II) \quad \text{I-II} \quad \& \quad \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial w'_z}{\partial z} = 0 \quad (III)$$

سرعت های متوسط و نوسان هر دو در محادله پیوستگی صدق می کنند.

مثال: محادله پیوستگی را برای جریان درهم و تراکم پذیر محاسبه کنید. (جریان یک بعدی فرض می شود)

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} = 0 \quad (st. st) \\ \Rightarrow (\bar{\rho} + \rho') \frac{\partial(\bar{u}_x + u'_x)}{\partial x} + (\bar{u}_x + u'_x) \frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \rho' \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \rho' \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + u'_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + u'_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$$

هرگاه از این رابطه Time Average گرفته شود، می توان نوشت:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \rho' \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \rho' \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho' u'_x) = 0$$

سرعت متوسط جریان \rightarrow مرتبه اول \rightarrow جریان ضامری

بررسی معادله حرکت برای بیان تراکم ایندین (p. cte)

Navier-Stokes:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right]$$

Time Average می گیریم

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = (\bar{u}_x + u'_x) \frac{\partial (\bar{u}_x + u'_x)}{\partial x} = \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + u'_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} = 0$$

ok ... آنگاه مقادیر صفر است ← ok.

تا می توانیم برای استراتژی صورت متوسط بیان می شود. لیکن هر کدام از ترم های سمت چپ تبدیل به ترم می شوند. در نتیجه در هر جهت، ستارم به معادله اصلی اضافه می شود. هرگاه این ترم ها به سمت راست منتقل شوند. خواهیم داشت:

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{w}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{g}_x + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} \right]$$

$$- \underbrace{u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + v'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y} + w'_z \frac{\partial u'_x}{\partial z}}_{\text{Shear Stress Fluctuation}}$$

Shear Stress Fluctuation

به آسانی نشان داده می شود که ستارم فرق می تواند بصورت تنش بیان شوند.

نکته: تنها تفاوت جریان آرام و درهم در این ستارم اضافی می باشد.

$$u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + v'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y} + w'_z \frac{\partial u'_x}{\partial z} = \frac{\partial u'^2_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_x v'_y}{\partial y} + \frac{\partial w'_z u'_x}{\partial z} - u'_x \left[\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial w'_z}{\partial z} \right]$$

$$\bar{u}'_x \frac{\partial \bar{u}'_x}{\partial x} + \bar{v}'_y \frac{\partial \bar{u}'_x}{\partial y} + \bar{w}'_z \frac{\partial \bar{u}'_x}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}'^2_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'_x \bar{v}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'_x \bar{w}'_z}{\partial z}$$

با توجه به معادله پیوسته می توانیم بنویسیم

با جایگزینی این رابطه در معادله حرکت می توان نوشت: $(\rho = cte) \rightarrow$ غیر تراکم پذیر.

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{w}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{g}_x + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u_x'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{u_x' v_y'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{u_x' w_z'}) \right]$$

همچنین می توان معادلات مشابهی در جهات z و y برای حالت حرکت بدست آورد. لذا، اگر تمام اصابی که بیان کننده تنش می باشد در معادله حرکت جریان در هم ظاهر و با عنوان **Turbulent stress** دیده می شوند.

Turbulent ; Reynolds ; Apparent stress.

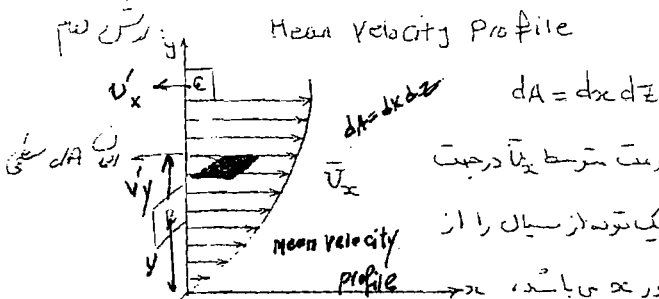
Additional stress

تنش اضافی $(\rho \overline{u_x' v_y'})$

جهت نشان دادن ادعای مذکور از بحث Momentum Transfer استفاده می شود.

در این مدل:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{C.V} v_x \rho dV + \int_{C.S} v_x \rho v_y dA \right] \quad \text{و} \quad \frac{F}{A} = \rho \overline{v_x' v_y'} = \tau_{xy}$$



این dA عمود بر محور z در نظر گرفته می شود و دارای سرعت متوسط \bar{v}_y در جهت

محور x می باشد. مولفه نوسانی سرعت در جهت z ، v_y' می تواند یک توده از سیال را از

نقطه B به نقطه C که دارای سرعت متوسط بیشتری در جهت محور x می باشد، هدایت

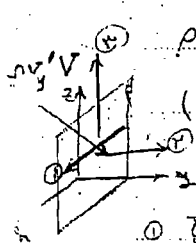
انتقال می دهد. مقدار سیال انتقال یافته در اثر حرکت این توده، از سطح مقطع dA عبور می کند.

این انتقال این مقدار سیال به نقطه C ، یک انتقال اندازه حرکت رخ می دهد، که سبب بر وجود آمدن یک

مولفه نوسانی سرعت در جهت محور x (u_x') در نقطه C می شود.

نکته: این انتقال سیال می تواند موجب به وجود آمدن مولفه های نوسانی سرعت در سایر جهات (v_y' و w_z') نیز شود.

میزان انتقال اندازه حرکت در جهات مختلف برابر است با: $\rho u_x' \cdot \text{Volume Flow rate } V_y \cdot dA \text{ m}^3/s$



$\rho V_y' dA u_x'$; $\rho V_y' dA v_y'$; $\rho V_y' dA w_z'$
 میزان تغییرات اندازه حرکت معادل نیرویی است که موجب تغییرات شده است. در نتیجه محادل تنش (Stress) می باشد، لذا می توان نوشت: $dF' = \rho V_y' v_y' dA$ $\frac{dF'}{dA} = \rho V_y' v_y'$ $\tau_{xy} = -\rho V_y' v_y'$
 $\tau_{yx} = -\rho u_x' v_y'$ $\tau_{yy} = -\rho v_y'^2$ $\tau_{yz} = -\rho w_z' v_y'$

مانظری که مشاهده می شود، در تمام اجزای در محادلات حرکت دیگرانین، Stress می باشد. نکته: علامت منفی با این علت ظاهری شود که هرگاه علامت v_y' مثبت باشد، سیال در نقطه ای که دارای سرعت متوسط بیشتری می باشد منتقل می شود. و این امر سبب بوجود آمدن مولفه های نوسانی سرعت با علامت منفی می شود. لذا عبارت $u_x' v_y'$ همواره منفی می باشد، به عبارت دیگر در این حرکت، این انتقال اندازه حرکت سبب کاهش اندازه حرکت در نقطه C می

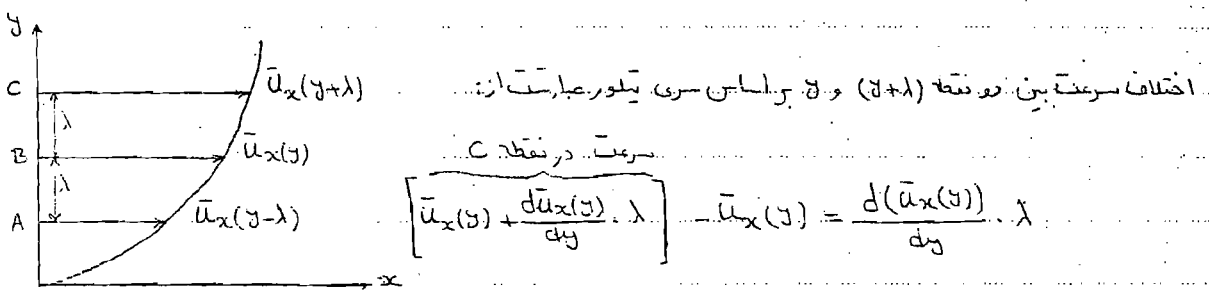
نظریه پراتل دوفرض دارد: مقدار متوسط سرعت نوسانی بصورت قدر مطلق، در یک نقطه مشخص درین سیال متناسب با فاصله متوسط است که یک توده سیال در حال نوسان بین دو برخورد متوالی طی می کند. عبارت دیگر مقدار متوسط سرعت نوسانی بصورت قدر مطلق محادل متوسط تغییرات سرعت متوسط سیال می باشد.

۲- مؤلفه های نوسانی سرعت که بر یکدیگر عمودند، از یک درجه بزرگی و ناهمبندی متناسب می باشند: (یعنی وقتی در یک جهت درحس داریم؛ حتماً در سایر جهات نیز داریم، البته می توانند در یک جهت کمتر از سایر جهات و یا بیشتر از آن ها باشند)

در فرض نمود توده ای از سیال از نقطه λ دارای سرعت (u, v, w) در حال نوسان به نقطه دیگر $(\lambda + \delta)$ دارای سرعت $(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w)$ منتقل شود. فاصله طول متوسطی است که توده سیال بین دو برخورد متوالی بدون از دست دادن هرگونه اندازه حرکت طی می کند.

Prandtl mixing length

This is the path on which the Fluid element loses its individuality by turbulent mixing with the surrounding liquid.



سرعت در نقطه A

$$u_x(y) - \left[u_x(y) - \frac{du_x(y)}{dy} \cdot \lambda \right] = \frac{d(u_x(y))}{dy} \cdot \lambda$$

فرض اول:

$$|u'_x| = \frac{1}{2} \left(\frac{d(u_x(y))}{dy} \cdot \lambda + \frac{d(u_x(y))}{dy} \cdot \lambda \right) \Rightarrow |u'_x| = \lambda \left| \frac{du_x}{dy} \right|$$

فرض دوم: A: برزیلی $|v'_y|$ و $|u'_x|$ را به هم ربط می دهیم.

$$|v'_y| = A \lambda \left| \frac{du_x}{dy} \right|$$

$$\Rightarrow |u'_x| \cdot |v'_y| = A \lambda^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2$$

حرفه کسری:

$$\bar{u}'_x \cdot \bar{v}'_y = -\frac{B}{\rho} \frac{|u'_x| |v'_y|}{\rho} ; \bar{u}'_x \cdot \bar{v}'_y = -BA \lambda^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2$$

طول اختلاط برزلی

$$\frac{\tau}{xy} = -\rho u'_x v'_y = AB \rho \lambda^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 ; L = \sqrt{AB} \lambda ; L: \text{Mixing Length}$$

با سیال است:

$$\left(\frac{\tau}{xy} = \rho L^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 \right) \rightarrow \frac{\tau}{xy} = \eta \frac{du_x}{dy} \rightarrow \eta = \rho L^2 \frac{du_x}{dy}$$

Eddy viscosity η برای جریان سیال. kinematic Eddy viscosity $\epsilon = \eta / \rho$ فقط برای جریان است.

$$\eta = \rho L^2 \frac{du_x}{dy} \leftarrow \text{Eddy Viscosity}$$

$$\epsilon = \frac{\eta}{\rho} = L^2 \frac{du_x}{dy} \leftarrow \text{kinematic Eddy Viscosity}$$

$$\epsilon = \frac{\eta}{\rho} = L^2 \left(\frac{d^2 \bar{u}_x}{dy^2} \right)$$

شکل جریان \rightarrow \leftarrow نوع جریان

- پیرایش برای مطالباتش در جریان در هم فرض نمود L بصورت خطی با آن تغییر کند هرچه از صفحه برتر

نوع Fluctuation بیشتر می شود: k : Essential or Universal Constant $L = k y$ (فرض باشد)

τ_w : Shear Stress at wall = cte \rightarrow در نزدیکی دیواره ثابت باشد

$$\tau_w = \rho k^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy} \right)^2 \rightarrow \frac{d\bar{u}_x}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{ky}$$

سرعت متوسط در جریان در هم: $\bar{u}_x = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \int \frac{dy}{ky}$
فاصله از سطح یا دیواره لولا \leftarrow تقریبی

$$\Rightarrow \bar{u}_x = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + C$$

$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$: Shear Stress Velocity or Friction Velocity

$$\Rightarrow \bar{u}_x = u^* \left(\frac{1}{k} \ln y + \frac{C}{u^*} \right) \quad \text{B.C. 1 @ } y = y_0 \approx 0 : \bar{u}_x = 0$$

$$\left(\frac{1}{k} \ln y_0 + \frac{C}{u^*} \right) = 0 \rightarrow C = -\frac{u^*}{k} \ln y_0$$

at $y = y_0 \approx 0 \rightarrow \bar{u}_x = 0$ ~~(تعیین نوع نیروی حسی در نزدیکی دیواره)~~

فرض No-Slip در روی دیواره در این جا جواب می دهد چون y_0 به ازای $y = 0$ جواب می دهد پس فرض

$\bar{u}_x = 0$ @ $y \rightarrow y_0$ $y_0 \approx 0$ \rightarrow در محدوده ای (0-y) جریان No-Slip داریم.

$$\frac{\bar{u}_x}{u^*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{y_0} = \frac{1}{k} (\ln y - \ln y_0)$$

$$u^+ = \frac{1}{k} \left[\ln y \cdot \frac{u^*}{v} - \ln y_0 \cdot \frac{u^*}{v} \right] \quad \frac{y}{v/u^*} = \left(\frac{v}{u^*} \cdot \frac{m^2/s}{m/s} \right)$$

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + D \quad y^+ = \frac{y}{v/u^*}$$

سرعت بدون بعد
طول بدون بعد

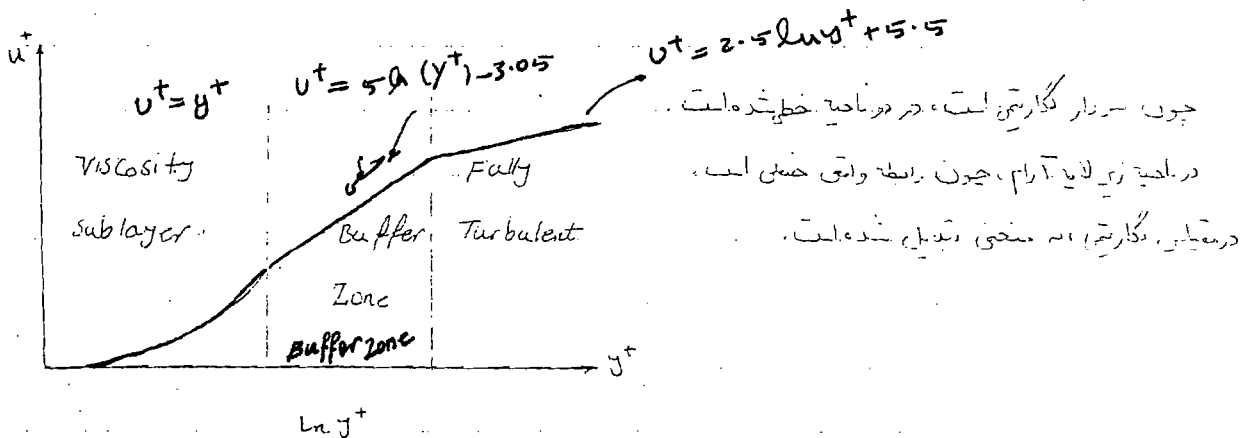
$$u^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + D \quad y^+ = \frac{y}{\nu} u^+$$

ضرایب معادله فوق که بصورت تجربی بدست آمده اند. برای جریان سیال روی صفحه صاف عبارتند از:

$$u^+ = 2.54 \ln y^+ + 5.56$$

همچنین ضرایب معادله فوق بصورت تجربی توسط Nikuradse برای لوله های نرم تعیین شده اند:
 $4 \times 10^3 < Re < 3.2 \times 10^6$

$y^+ < 5$	$u^+ = y^+$	→	حالی نزدیک دیواره
$5 < y^+ < 30$	$u^+ = 5 \ln y^+ - 3.05$	→	حالت میانی
$y^+ > 30$	$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$	→	بهرگز لوله رسیده ام



ماده میزبانی:
 ۱- در نزدیکی دیواره ($y^+ < 5$) نوسانات کمتری است، در این حالت نوسانات در راستای لوله بیشتر از نوسانات در جهت عمودی باشد. رتای نوسانات در سطح دیواره مغزی شوند. در این ناحیه میکروتی حاصل تعیین کننده جریان سیال است و رابطه بدست آمده معادله جریان آرام است.

$$\frac{\bar{u}_x}{u^+} = \frac{y u^+}{\nu} = y^+ \Rightarrow \bar{u}_x = y \cdot \frac{\tau_0}{\nu} = y \frac{\tau_0}{\mu}$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \mu \frac{\bar{u}_x}{y}$$

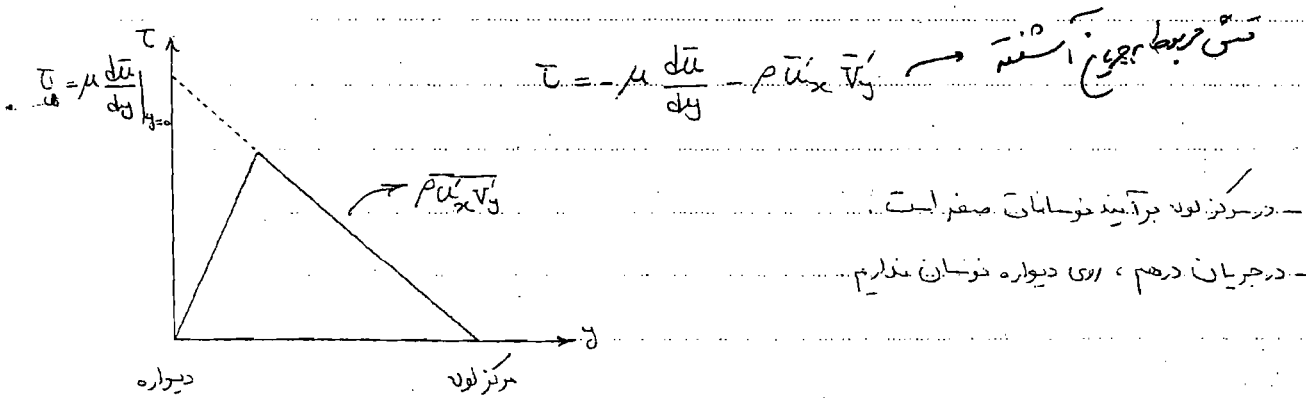
$$\tau = -(\mu + \mu) \frac{d\bar{u}}{dy} \rightarrow \tau = -\mu \frac{d\bar{u}}{dy} - n \frac{d\bar{u}}{dy} \Rightarrow \tau = -\mu \frac{d\bar{u}}{dy} - n \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$\tau = -\mu \frac{d\bar{u}}{dy} - n \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$\tau = \frac{\tau_0}{y} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} = \mu \frac{d}{dy} \left(\frac{u^+}{y} \right)$$

۲- در حالت میان ($30 < y^+ < 5$) تأثیرات جریان آرام و جریان درهم همزمان مشاهده می شوند.

۳- در مرکز لوله ($y^+ > 30$) میزان نوسانات بسیار قابل توجهی باشد و جریان درهم نقش اساسی خواهد داشت.



با توجه به مطالب ذکر شده و مکن معلوم می شود که انتقال اندازه حرکت در ناحیه وسیعی ناشی از جریان درهم می باشد و فقط در ناحیه همجوار دیواره انتقال اندازه حرکت در سطح مولکولی انجام می گیرد.

Nikuradse همچنین برای لوله های زبر رابطه تجربی زیر را پیشنهاد داده است:

$$u^+ = 2.5 \left(\ln y^+ - \ln \frac{\epsilon u^*}{\nu} \right) + 8.5$$

$$\frac{\epsilon u^*}{\nu} > 80$$

زبری بدون بعد

در شرایطی که $\frac{\epsilon u^*}{\nu} < 4$ باشد، رفتار لوله های زبر شبیه لوله های نرم می شود.

تا جایی که توزیع سرعت داریم، بهشت انتقال مرموم و نوسان می شود. اگر هر جایی توزیع سرعت نداشته باشیم، مانند مرکز لوله، در این صورت حتی اگر سیال منتقل شود، تأثیری ندارد و نوسان ایجاد نمی کند.

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 2.5 \ln \frac{y}{\epsilon} + 8.5$$

مهم: هر جا توزیع سرعت نداشتهسیم؛ مثلاً مرکز لوله ←

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

Subject

Date 87.9.10 (22)

مسئله: بررسی جریان آب داخل لوله:

$v = 1.1 \times 10^{-5} \frac{ft^2}{s}$ $\rho = 1.94 \frac{slug}{ft^3}$ $Q = 15 \text{ cfs}$

$D = 8'$ $\epsilon = 0.00085'$ $T_0 = 9.5 \frac{lb}{ft^2}$

(a) مطابق کتاب در مرکز لوله. (b) مطابق حداکثر ماصلاهی که در آن ناحیه سرعت صفر می باشد.

(c) تکرار قسمت (a) فرض لوله نرم.

a) $r=0$; $y = (\frac{R}{12})' = (\frac{4}{12})' \rightarrow \frac{ft}{12}$

$U^* = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{9.5}{1.94}} = 2.2 \frac{ft}{s}$; $\frac{\epsilon U^*}{\nu} = \frac{0.00085 \times 2.2}{1.1 \times 10^{-5}} = 170 > 30 \Rightarrow$

$\bar{U} = U^* [2.5 \ln \frac{y}{\epsilon} + 3.5] = 2.2 [2.5 \ln \frac{1/3}{0.00085} + 3.5] \Rightarrow \bar{U} = 51.6 \frac{ft}{s}$

جدا؟
یکمونه

b) $\bar{U}=0 = 2.2 [2.5 \ln \frac{y}{0.00085} + 3.5] \rightarrow y = 2.2 \times 10^{-5} \text{ ft}$

جواب چهارم یابین صفحه 87

همی سرعت آب در ناحیه $y = 2.2 \times 10^{-5}$ صفر می باشد.

c) $y^* = \frac{y U^*}{\nu} = 66666 > 30$

$\bar{u} = U^* [2.5 \ln y^* + 5.5] = 73.2 \frac{ft}{s}$



لایه مرزی

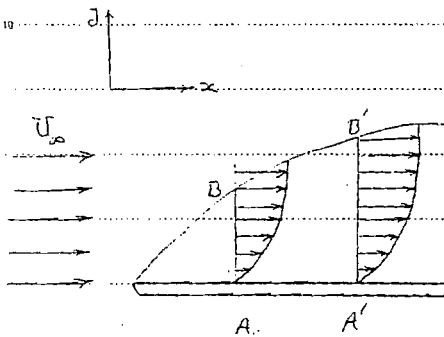
برای اولین بار Prandtl نشان داد که در اکثر جریان های ویسکوز دو ناحیه متمایز وجود دارد:

- ۱- ناحیه ای نزدیک به سطح جامد که در آن اثرات ویسکوزیته شاهده می شود
- ۲- ناحیه ای که در آن اثرات ویسکوزیته دیده نمی شود

سیال در ناحیه اول (لایه مرزی) ویسکوز در نظر گرفته می شود در حالی که در ناحیه دوم غیر ویسکوز فرض می شود.

نکته: در ناحیه ای که نردبان سرعت زیاد باشد، از اثرات ویسکوزیته نمی توان صرف نظر کرد.

ابتدا باید مقدار $\frac{dP}{dx}$ با فرض جریان غیر چرخشی (در خارج از لایه مرزی) محاسبه شود، سپس توزیع سرعت در داخل لایه مرزی قابل محاسب می باشد.



شکل لایه مرزی روی اجسام صاف: $\frac{dP}{dx} = 0$

B.C.1: at $x, x', y=0$: $U=0$ (No-Slip)

B.C.2: at B : $y=\delta_1$: $U=U_\infty$ یا $0.99 U_\infty$

B.C.3: at B' : $y=\delta_2$: $U=U_\infty$

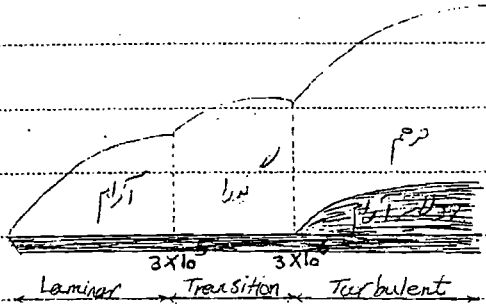
هدف: مطالعه ضخامت لایه مرزی است

از صفحه سطح این است که سرعت سیال را در نقطه تماس (یا شرط No-Slip) صفر می کند. لیکن با افزایش فاصله در راستای آن سرعت افزایش می یابد و در نقطه ای (مرز لایه مرزی) به حداکثر میزان خود (U_∞) می رسد.

هرچه فاصله از ابتدای صفحه بیشتر می شود، ضخامت لایه مرزی نیز افزایش می یابد: $\delta_2 > \delta_1$: $\delta = \delta(x)$

پیرایش: خیرا $Re > CD$
Laminar Turbulent

علت: با توجه به تعریف عدد رینولدز $(\frac{U_\infty x}{\nu})$ ، با افزایش فاصله x ، مقدار Re افزایش یافته و مقدار Re کاهش می یابد در نتیجه نیروی دگن (بلندارنده) کاهش می یابد، این امر موجب کاهش گرادیان سرعت و افزایش ضخامت لایه مرزی می شود. این استدلال برای احتمال از جریان آرام به درهم نیز صادق می باشد. عبارت دیگر با افزایش فاصله انتقال از لایه مرزی آرام به لایه مرزی درهم نیز صورت می گیرد. در نتیجه ضخامت لایه مرزی درهم بیشتر از ضخامت لایه مرزی آرام است.



در مقایسه بین جریان روی صفت تخت و داخل لوله، اثر جاذبه ایستاده طولی روی صفت از لوله بسیار بزرگتر است، بنابراین در Re بزرگتری جریان تبدیل می شود.

حل معادلات حرکت (سیستم دو بعدی)

Prandtl - Blasius روش

معادله زیر را در لایه مرزی، در نظر می گیریم.

معادله پیوستگی:
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

همیشه باید معادله پیوستگی را در نظر بگیریم، اما در بعضی موارد به نتایج بدیسی می ریم.

معادله حرکت در جهت x :
$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right]$$

این معادله را حذف می کنیم.

معادله حرکت در جهت y :
$$u_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right]$$

برای ارزیابی از روش Order of Magnitude استفاده کرده ایم.

نسبت $u_x \gg v_y$ و $x \gg y$ است. نسبت ها را در کنار هم مقایسه می کنیم و آنکه کوچکتر است را نادیده می اندازیم. $u_x \gg x \approx 1$ و $v_y \gg y \approx 0$ در نظر می گیریم.

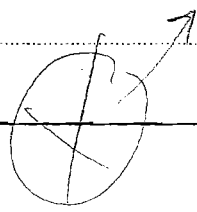
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

می توان یکی از آن ها را حذف کرد: $(\frac{1}{\rho} + 0)$

معادله حرکت در جهت x ، چون ρ کم است، از اختلاف فشار استاتیکی صرف نظر می کنیم.

معادله حرکت در جهت x :
$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$



روی سطح صاف از تغییرات شتاب جاذبه صرف نظری شود. (با توجه به اینکه ضرایب آن زیاد نیست)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P = f(x) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx}$$

رابطه برنولی:
$$\frac{P_\infty}{\gamma} + \frac{V_\infty^2}{2g} = Cte \Rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{dP_\infty}{dx} + \frac{V_\infty}{g} \frac{dV_\infty}{dx} = 0$$

سرعت بیرونی لایه مرزی

سرعت بیرونی لایه مرزی
$$\frac{dP_\infty}{dx} = 0$$

اگر فرض کنیم باشد، فرض کامل صحیح است. اختلاف فشار در راستای عمودی

وجود ندارد. اختلاف انرژی زیاد باشد. می توان این فرض را انجام داد.

تغییرات فشار خارج از لایه مرزی با تغییرات فشار داخل لایه مرزی یکسان است.

یعنی اصطکاک باعث تغییر فشار می شود. و تنها باعث تغییر سرعت در لایه مرزی می شود.

در یک نقطه:
$$V_x = V_y = 0 \quad V_x = V_y = 0$$

تاج جریان در محادله پیوستگی صاف است. این رابطه برای Potential Flow صحیح است که خارج لایه مرزی؟

استفاده از تاج جریان باعث حذف محادله پیوستگی می شود. ψ هم خاصیت ϕ را می بیند.

در محادلات ψ و ϕ از هم مستقلند.

در محادله ψ و ϕ از هم مستقلند.
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

جهت حل این محادله استفاده از اجزای بدین بدین به کل زیر پیشنهاد شده است.

متغیری تعریف کرده اند که اجزای هر دو مختصر طول و استیج (z) $(\frac{U_\infty x}{\nu} = Re(z))$

سرعت بیرون لایه مرزی
$$H(z) = \frac{U_x}{U_\infty} \Rightarrow U_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty H(z)$$

در هر خط جریان مقدار تاج جریان ثابت است.
$$\psi = - \int U_\infty H(z) dy + G(x)$$

B.C.I: در هر خط جریان مقدار تاج جریان ثابت است.

در $y=0$ $(at y=0 \Rightarrow U_x = 0) \rightarrow at (z=0 \Rightarrow H(z)=0) \rightarrow \psi|_{y=0} = G(x)$

در $y=0$ خط جریان وجود دارد. مقدار $G(x)$ تاج x می باشد. به منظور سادگی مقدار ثابت $G(x)$ حاصل صفر در نظر

مقدار ثابت

$$\psi = - \int U_\infty H(z) dy$$

حلی هم

Subject:

Year. 87 Month. 9 Date. 12 23

$$H(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

تعريف من كتاب: $\frac{df(z)}{dz}$ بتحويل كوكب

$$dz = \left(\frac{U_0}{Vx}\right)^{0.5} dy \rightarrow dy = \left[\frac{Vx}{U_0}\right]^{0.5} dz$$

$$\Rightarrow \psi = \int U_0 \frac{df(z)}{dz} \left[\frac{Vx}{U_0}\right]^{0.5} dz = \left(\frac{U_0 Vx}{U_0}\right)^{0.5} f(z)$$

$$\textcircled{1} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{U_0 Vx}{U_0}\right)^{0.5} f'(z) \left(\frac{U_0}{Vx}\right)^{0.5} = U_0 f'(z)$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial z}{\partial x} = y \left(\frac{U_0}{V}\right)^{0.5} (-0.5x^{-1.5}) = -0.5y \frac{1}{x} \left(\frac{U_0}{Vx}\right)^{0.5} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -0.5 \frac{z}{x}$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[U_0 f'(z) \right] = U_0 \frac{\partial f'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = U_0 f''(z) \left(-0.5 \frac{z}{x}\right) = -0.5 U_0 \frac{z}{x} f''(z)$$

$$\textcircled{3} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{U_0 Vx}{U_0}\right)^{0.5} f(z) \right] = \left(\frac{U_0 V}{U_0}\right)^{0.5} (0.5x^{-0.5}) f(z) + \left(\frac{U_0 Vx}{U_0}\right)^{0.5} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= 0.5 \left[\frac{U_0 V}{x}\right]^{0.5} f(z) + 0.5 \frac{z}{x} \left(\frac{U_0 Vx}{U_0}\right)^{0.5} f'(z) = 0.5 \left[\frac{U_0 V}{x}\right]^{0.5} (z f'(z) + f(z))$$

$$\textcircled{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[U_0 f'(z) \right] = U_0 \frac{\partial f'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = U_0 f''(z) \left[\frac{U_0}{Vx}\right]^{0.5}$$

$$\textcircled{5} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[U_0 f''(z) \left(\frac{U_0}{Vx}\right)^{0.5} \right] = U_0 \left[\frac{U_0}{Vx}\right]^{0.5} f'''(z) \frac{\partial z}{\partial y} = U_0 \left(\frac{U_0}{Vx}\right)^{0.5} f'''(z) \left(\frac{U_0}{Vx}\right)^{0.5}$$

$$= U_0 \left(\frac{U_0}{Vx}\right) f'''(z)$$

در حالت حرکت است x
 $0.5 U_{\infty} \frac{f' U_{\infty} z}{x} f'' - 0.5 \left(\frac{U_{\infty} U}{x} \right)^{0.5} (zf' - f) U_{\infty} f'' \left(\frac{U_{\infty}}{U_{\infty}} \right)^{0.5} = - \frac{U_{\infty}^2}{x} f'''$

$\Rightarrow 0.5 \frac{U_{\infty}^2 z}{x} f' f'' - 0.5 \frac{U_{\infty}^2 z}{x} f' f'' + 0.5 \frac{U_{\infty}^2}{x} f f'' - \frac{U_{\infty}^2}{x} f'''$

$\Rightarrow 0.5 \frac{U_{\infty}^2}{x} f f'' + \frac{U_{\infty}^2}{x} f''' = 0 \Rightarrow 0.5 f f'' + f''' = 0$

شرایط مرزی

$y=0 \rightarrow z=0: \begin{cases} u_x=0 \xrightarrow{\frac{\partial \psi}{\partial y}=0} f'=0 \\ v_y=0 \xrightarrow{\frac{\partial \psi}{\partial x}=0} f=0 \end{cases}$

$z=5 \rightarrow z = \frac{\delta}{x} Re^{0.5} : U_x = U_{\infty} \rightarrow f'=1$

در این حالت $\begin{cases} U_x = - \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_{\infty} f' \\ V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.5 \left(\frac{U_{\infty} U}{x} \right)^{0.5} (zf' - f) \end{cases}$

$f = A_0 + A_1 z + \frac{A_2}{2!} z^2 + \dots + \frac{A_n}{n!} z^n$
 جواب حالات فوق بصورت زیر ارائه شده است:

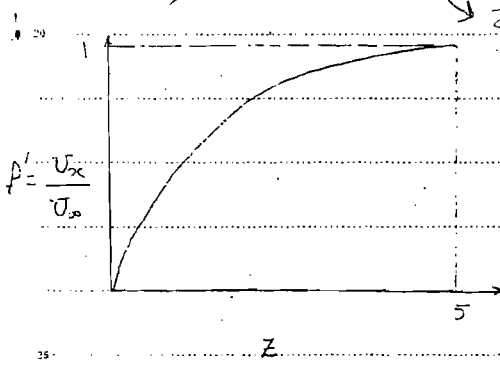
پس با استفاده از شرایط مرزی داریم، بنابراین از این شرایط می توان نوشت:

چرا این بر توان 8.5.2 ؟

$f = (0.166603) z^2 - (4.59 \times 10^{-4}) z^5 + (2.42 \times 10^{-6}) z^8 + \dots$
 (از بقیه ضرایب اطلاعات نداریم)

$\frac{U_x}{U_{\infty}} = f' = 0.333206 z - 2.295 \times 10^{-3} z^4 + 1.992 \times 10^{-5} z^7$
 $\Rightarrow f''|_{z=0} = 0.333206$

شکل نموداری مولفه سرعت در راستای x بصورت زیر می باشد:



$z = z_f(x, y)$

$z = 5 = \frac{y}{x} Re^{0.5} : \frac{U_x}{U_{\infty}} = 1 \Rightarrow y = 8$

$\frac{8}{x} = \frac{5}{Re^{0.5}}$

توان 8.5.2

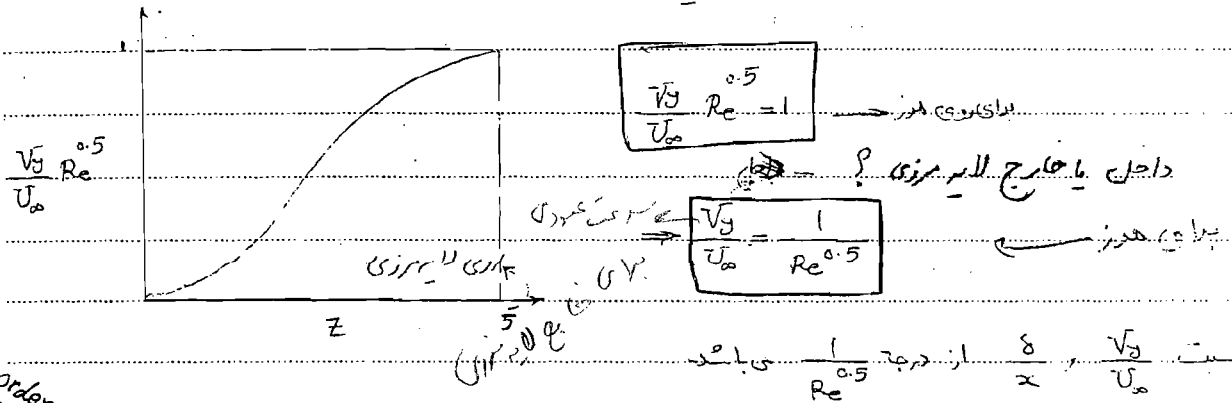
تقریب مناسب از این برای توان 8.5.2

Subject:

Year: 67 Month: 9 Date: 12/23

$$V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{0.5} \cdot 0.5 [Z P' - P] \Rightarrow \frac{V_y}{U_\infty} Re^{0.5} = 0.5 (Z P' - P)$$

شکل نموداری مؤلفه سرعت در راستای Z بصورت زیر می باشد.



Order of magnitude

تقریباً (مطلوب است) محاسبه C_D , C_F و C_p برای یک صفحه تخت.

$$C_p = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \frac{\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right]}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

تکین
شیر (چینش)

$$C_p = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(U_\infty P' \right) \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} = \mu U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} P'$$

برای x مساوی 0.333206 از P' برت 0.333206 می باشد

$$C_p = C_p \Big|_{y=0} = \mu U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} P' \Big|_{z=0} \Rightarrow C_p = 0.333206 \mu U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5}$$

ضریب درگ محلی

$$C_D = \frac{\tau_0}{0.5 \rho U_\infty^2} = \frac{0.666}{Re^{0.5}} \quad \text{نسبت رابطه است } \frac{\delta}{x}$$

ضریب درگ بر واحد عرض صفحه

$$F_D = \int_0^L \tau_0 dx = \int_0^L 0.333 \mu U_\infty \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{0.5} dx \quad (\text{کلی})$$

$$F_D = 0.666 (\rho \mu U_\infty L)$$

$$\bar{C}_D = \frac{F_D}{0.5 \rho U_\infty^2 L} = \frac{1.332}{\left(\frac{U_\infty L}{\nu} \right)^{0.5}} = \frac{1.332}{Re^{0.5}}$$

$$\bar{C}_D = \frac{1}{L} \int_0^L C_D dx$$

\bar{C}_D : یک ضریب درگ کلی برای تمام صفحه به سبب می دهد

نسبت $\frac{\delta}{x}$ برابر است

تعیین ضخامت لایه مرزی جریان اشباع:

برای تعیین ضخامت لایه مرزی در جریان اشباع از معادله Von Karman استفاده می شود.

در این حالت می توان از معادله توزیع سرعت سیال در داخل لایه مرزی استفاده کرد.

$$\left(\frac{u_x}{u_\infty}\right) = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

اشکال معادله پراستل این است که فقط برای رژیم آرام صحیح است.

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{u_\infty}{7 \delta^{1/7} y^{1/7}}$$

$$\left. \frac{du_x}{dy} \right|_{y=0} \approx \text{نامعین}$$

این رابطه نیز این معنی در رابطه تعیین با سطح جامد را به ما می دهد.

چون y در مخرج است امکان تعیین τ_0 وجود ندارد بنابراین جهت محاسبه τ_0 از روابط تجربی استفاده می

$$\tau_0 = \frac{1}{8} f \rho \bar{u}_x^2 \quad ; \quad f = \frac{0.316}{N_{Re}^{0.25}} \quad ; \quad N_{Re} = \frac{D \bar{u}_x \rho}{\mu} = \frac{2\delta \cdot \bar{u}_x \cdot \rho}{\mu}$$

$$\bar{u}_x = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u_x dy = 0.817 u_\infty$$

$$N_{Re} = \frac{2\delta \cdot 0.817 u_\infty \cdot \rho}{\mu} = \frac{1.634 \delta \rho u_\infty}{\mu}$$

$$\tau_0 = 0.0225 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta}\right)^{0.25}$$

$$\text{درج: } \tau_0 = \rho u_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \frac{u_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{u_x}{u_\infty}\right) dy \right]$$

Von Karman

$$\rightarrow 0.0225 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta}\right)^{0.25} = \rho u_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right) dy \right]$$

$$\rightarrow 0.0225 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta}\right)^{0.25} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{7}{72} \delta\right) = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}$$

$$\rightarrow \delta^{0.25} \times d\delta = 0.231 \left(\frac{\nu}{u_\infty}\right)^{0.25} dx$$

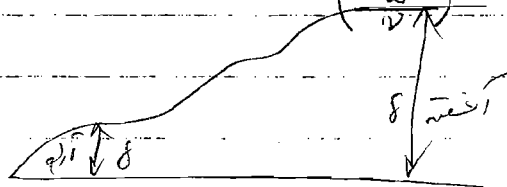
$$\rightarrow 0.8 \delta^{1.25} = 0.231 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{0.25} x + A$$

BC: @ $x=0$; $\delta=0 \rightarrow A=0$

نکته: این شرط مرزی صحیح نیست. متعاقباً در مورد آن صحبت می‌شود.

$$\rightarrow \delta = 0.37 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{0.2} x^{0.8} \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{(u_\infty x)^{0.2}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{N_{Re}^{0.2}}$$



نکته: مشاهده این رابطه با رابطه جریان آرام، مشاهده می‌شود. ضخامت لایه مرزی در جریان آشفته بیشتر است.

تقریباً f: مطلوب است محاسبی F_D , \bar{C}_D , C_D در جریان آشفته روی یک صفحه تخت.

$$F_D = \int_0^L \tau_0 dx = \int_0^L 0.0225 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta} \right)^{0.25} dx = 0.0225 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{0.25} \int_0^L \left(\frac{N_{Re}^{0.2}}{0.37 x} \right) dx$$

$$= 0.0288 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{0.25} \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{0.05} \int_0^L x^{-0.2} dx$$

$$= 0.0288 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{0.2} (1.25 L^{0.8}) = 0.036 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty L} \right)^{0.2} L$$

$$\rightarrow F_D = \frac{0.036 \rho u_\infty^2 L}{N_{Re}^{0.2}}$$

$$\bar{C}_D = \frac{0.072}{N_{Re}^{0.2}}$$

$$\bar{C}_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 L}$$

$$C_D = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} \rightarrow \boxed{C_D = \frac{0.057}{N_{Re}^{0.2}}}$$

همچنین می‌توان مقدار \bar{C}_D را از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\bar{C}_D = \frac{1}{L} \int_0^L C_D dx$$

Schlichting برای جریان آشفته رابطه تجربی زیر را پیشنهاد کرده است

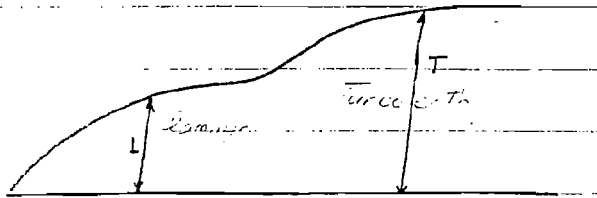
$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_R^{0.2}}$$

دقت بیشتری دارد

نکته: همانطور که اشاره شد، فرض تشکیل لایه مرزی آشفته از ابتدای صفحه درست نیست و در عمل لایه مرزی آرام ابتدا تشکیل می‌گردد و سپس به لایه مرزی آشفته تبدیل می‌شود. انتقال از لایه مرزی آرام به

لایه مرزی آشفته به N_R بستگی دارد

* انتقال (Transition) برای صفحه مسطح در محدوده $3 \times 10^5 < N_{R,L}^* < 3 \times 10^6$ (روی بی‌ده)



نظر: برای محاسبه $\overline{C_D}$ واقعی چون در ابتدای صفحه جریان آرام است ولی ما متلام گرفتیم. به اندازه آرام اضافه و متلام کم می‌کنیم

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} + \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} + \frac{1.332}{N_{R,L}^{0.5}}$$

عمل تغییر داریم

$\overline{C_D} > C_D$ آرام

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} \left[\frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} + \frac{1.332}{N_{R,L}^{0.5}} \right]$$

کمی بیشتر کم

وجود لایه مرزی آرام در ابتدای صفحه سبب افزایش نیروی دراز می‌شود زیرا

$$C_{D,Laminar} > C_{D,Turbulent}$$

به منظور اصلاح رابطه ابتدا باید نیروی دراز از ابتدای صفحه تا نقطه L^* (نقطه بحرانی) را از کل نیروی دراز کم و

پس مقدار معادل آن (حاصل از لایه مرزی آرام) را به کل نیروی دراز اضافه کنیم

$$\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{A}{N_{R,L}}$$

تقریب: نشان دهید

فردی کل سرعت را با هم با هم اشتباه

A	1050	1700	3300	8700
$N_{R,L}^*$	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6

$$\checkmark \text{ حل: } \overline{C_D} = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 L} = \frac{1}{\rho u_\infty^2 L} \left[\frac{0.074 \rho u_\infty^2 L}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{0.074 \rho u_\infty^2 L^*}{N_{R,L}^{0.2}} + \frac{1.332 \rho u_\infty^2 L}{N_{R,L}^{0.5}} \right]$$

$$\rightarrow \overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \left[\frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{1.332}{N_{R,L}^{0.5}} \right] \frac{L^*}{L}$$

$$\frac{L^*}{L} = \frac{N_{R,L}^*}{N_{R,L}} \rightarrow \overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{1}{N_{R,L}} \left(0.074 N_{R,L}^{0.8} - 1.332 N_{R,L}^{0.5} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{\overline{C_D} = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} - \frac{A}{N_{R,L}}}$$

این رابطه در محدوده‌ای می‌تواند صحیح می‌گردد. $\star 5 \times 10^5 < N_{R,L} < 10^7 \star$

Schlichting رابطه تجربی زیر را برای محاسبه نیروی دراز در محدوده $10^7 < N_{R,L}$

$$\boxed{\overline{C_D} = \frac{0.455}{(\log N_{R,L})^{2.58}}}$$

محدوده منظور در نظر گرفتن تشکیل لایه مرزی آرام در ابتدای صفحه باید رابطه Prandtl - Schlichting مورد استفاده قرار

$$\boxed{\overline{C_D} = \frac{0.455}{[\log N_{R,L}]^{2.58}} - \frac{A}{N_{R,L}}}$$

Where $\star N_{R,L} < 10^9 \star$

تقریب 5: بررسی جریان آب بر روی یک صفحه صاف در جریان آشفته و تعیین ضریب نیروی دراز

$$A = 1 \times 1 \text{ ft}^2, \quad u_\infty = 50 \frac{\text{ft}}{\text{s}}, \quad \nu = 10^{-5} \frac{\text{ft}^2}{\text{s}}, \quad \rho = 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}, \quad N_{R,L}^* = 5 \times 10^5$$

\bar{C}_D , $F_{D \text{ Laminar}}$, F_D , L^* ↓
 (تقریباً) \leftarrow (تقریباً) \leftarrow (تقریباً) \leftarrow (تقریباً) \leftarrow

$$\checkmark \text{ حل: } N_{R,L} = \frac{u_\infty \cdot L}{\nu} = \frac{50 \times 1}{10^{-5}} = 5 \times 10^6$$

$$\bar{C}_D = \frac{0.074}{N_{R,L}^{0.2}} \cdot \frac{1700}{N_{R,L}} = 0.003$$

$$F_D = \frac{1}{2} \bar{C}_D \rho u_\infty^2 A = 7.4 \text{ lbf}$$

$$L^* = \frac{N_{R,L}^* \times \nu}{u_\infty} \rightarrow L^* = 0.1'$$

$$\bar{C}_{D \text{ Laminar}} = \frac{1.332}{N_{R,L}^{*0.5}} \rightarrow \bar{C}_{D \text{ Laminar}} = 0.0019$$

$$F_{D \text{ Laminar}} = \frac{1}{2} \bar{C}_D \rho u_\infty^2 A^* \rightarrow F_{D \text{ Lam}} = 0.46 \text{ lbf}$$

A^* و $L^*/10$ از طول است

A. 1700

تقریباً 4: بررسی حرکت هواپیما در جریان آشفتگی و تعیین توان مورد نیاز آن (با توجه به اطلاعات داده شده)

$$L = 785'$$

$$\rho = 0.0017 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}$$

$$D = 123'$$

$$\mu = 3.7 \times 10^{-7} \frac{\text{lb} \cdot \text{s}}{\text{ft}^2}$$

$$u_{\infty} = 123 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

حل: $N_{R,L} = \frac{\rho \cdot D \cdot u_{\infty}}{\mu} = \frac{0.0017 \times 123 \times 785}{3.7 \times 10^{-7}} = 4.4 \times 10^8$ محدوده مع

$$\overline{C_D} = \frac{0.455}{(\log N_{R,L})^{2.58}} \frac{1700}{N_{R,L}} = 0.0017$$

برای $N_{R,L}$ بزرگتر از 1700

$$F_D = \frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2 \overline{C_D} (\pi D L)$$

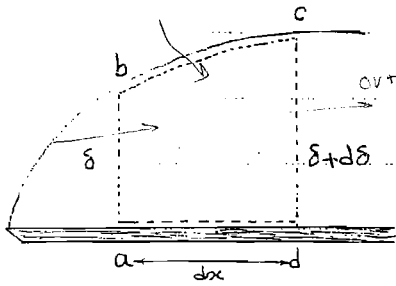
$$F_D = \frac{1}{2} \times 0.0017 \times 0.0017 \times 123^2 \times \pi \times 123 \times 785 = 7500 \text{ lb}$$

سطح در تماس با مایع هواپیما

$$P = \frac{F_D}{D} \times V = 1677 \text{ hp}$$

Page No. Name

اوجش در کاربن

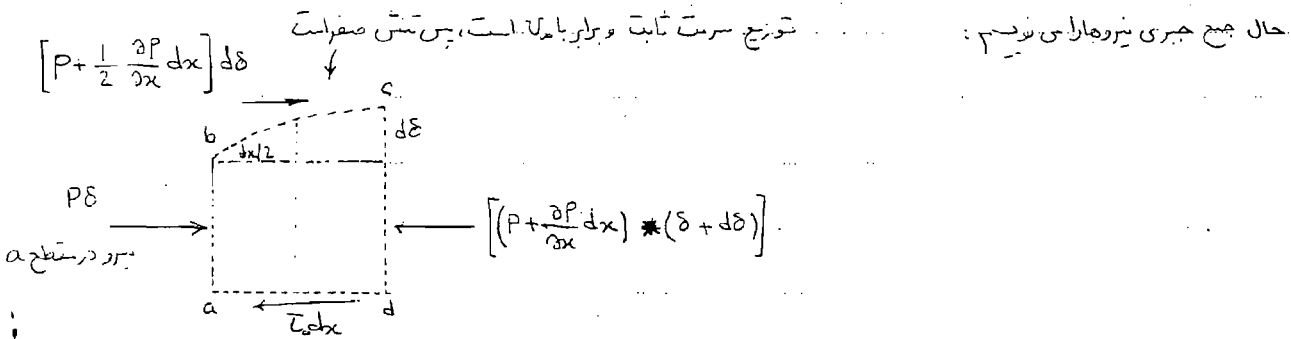


یک تکه از لایه مری و یک تکه از سطح را در نظر می گیریم و جمع جبری جرم در صورتی را برای این المان می نویسیم: موازنه لحاظ مختلف را در این المان + عرض صفحه و واحد در نظر گرفته می شود. انجام دارا

جرم ورودی به المان: $m_{ab} = \int_a^{\delta} \rho u_x dy$

جرم خروجی از المان: $m_{cd} = \int_a^{\delta} \rho u_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^{\delta} \rho u_x dy \right) dx$

جمع جبری جرم ها: $m_{bc} = m_{cd} - m_{ab} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^{\delta} \rho u_x dy \right) dx$ موازنه جرم



$$\sum f_x = P\delta + P d\delta + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} dx d\delta - P\delta - P d\delta - \frac{\partial P}{\partial x} dx \delta - \frac{\partial P}{\partial x} dx d\delta - \tau dx$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} dx d\delta - \frac{\partial P}{\partial x} dx \delta - \tau dx$$

$$dx d\delta \ll dx \delta \Rightarrow \sum f_x = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta + \tau \right) dx$$

موازنه نیرو

مومن ورودی از ab: $F_{m_{ab}} = \int_a^{\delta} \rho u_x^2 dy$

مومن خروجی از cd: $F_{m_{cd}} = \int_a^{\delta} \rho u_x^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^{\delta} \rho u_x^2 dy \right) dx$

مومن ورودی از bc: $F_{m_{bc}} = \rho u_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^{\delta} \rho u_x dy \right) dx$

Subject

Date

حاله حرکت: $\Sigma F = \text{Momentum out} - \text{Momentum in}$

منفی های طرفین حذف شد

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \delta + \tau_w \right) dx = \left[u_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u_x dy \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho u_x^2 dy \right) \right] dx$$

بسیار از معادله برنولی

سطح مقطع است $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \rightarrow u_\infty = \text{const.}$

δ : Momentum thickness

$$\Rightarrow \tau_w = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u_x u_y dy - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u_x^2 dy \Rightarrow \tau_w = \rho u_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \frac{u_x}{u_\infty} \left[1 - \frac{u_x}{u_\infty} \right] dy$$

* معادله وین کاربن در حالت کلی:

زمانی است که $\frac{\partial p}{\partial x}$ را حذف نکنیم و با استفاده از رابطه برنولی جوی $\frac{\partial p}{\partial x}$ را جاگذاری می کنیم. در صفحه سطح

عمق جزئی $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_\infty}{\partial x} \neq 0$

$\frac{\partial u_\infty}{\partial x} = 0$ بوده و مثل معادله قبل می شود.

$$\tau_w = \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u_\infty^2 \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty} \right) dy \right) + u_\infty \left(\frac{\partial u_\infty}{\partial x} \right) \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\infty} \right) dy \right]$$

δ^* : Displacement thickness

momentum thickness

* سطحی است که تا اثر کم شدن دبی جری را بیان می کند. وجود صفحه باعث ایجاد تلاطمی می شود که منجر به کاهش

دبی می شود. یک فضای فرضی است که دبی ای که در آن ضخامت متغیر می شود برابر با میزان کم شدن دبی به علت وجود

صفحه می باشد. اگر صفحه پهن باشد δ^* دبی بیشتر می شود

⑤ ضخامت فرضی است که کاهش مومنتم در اثر وجود صفحه را نشان می دهد، مومنتم که در آن جابجا می شود، برابر با افتادن

بین مومنتم عرقی صفحه وجود دارد و وقتی صفحه وجود ندارد.

II *

$$\int_0^{\delta} \rho u_{\infty} dy = \rho u_{\infty} \delta$$

در جری سیال در حالتی که جسم جامد نداریم

$$\int_0^{\delta} \rho u dy$$

در حالتی که جسم جامد داریم

اختلاف دبی جری

$$\int_0^{\delta} \rho (u_{\infty} - u) dy$$

گاهش دبی

میزان کاهش دبی جری سیال باعث وجود جسم جامد

الرحیم خواهد بود این دبی با سرعت u_{∞} برابر است

δ^* حرف ضخامت از لایه مرزی است که معروف این کاهش دبی می باشد. وقتی صفحه نداریم با ضخامت δ^*

یعنی وجود صفحه باعث شده که اندازه δ^* از لایه مرزی کمتر شود

$$\rho u_{\infty} \delta^* = \int_0^{\delta} \rho (u_{\infty} - u) dy \rightarrow \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) dy$$

اختلاف دبی وجود صفحه در عدم وجود آن

وقتی دبی جری سیال در اثر حضور جسم جامد کاهش می یابد گوی سیال از ضخامت کمتری برابر با $(\delta - \delta^*)$ عبور می کند.

II *

وجود جسم جامد تأثیراتی در کاهش اندازه حرکت سیال عبوری از روی جسم جامد دارد. هرگاه کاهش دبی جری سیال معادل

$$\int_0^{\delta} \rho (u_{\infty} - u) dy$$

باشد میزان کاهش اندازه حرکت معادل $\int_0^{\delta} \rho u (u_{\infty} - u) dy$ خواهد بود.

معادل ضخامت از لایه مرزی است که در آن مقدار اندازه حرکت سیال معادل مقدار کاهش یافته اندازه حرکت می باشد.

$$\rho u_{\infty}^2 \delta^* = \int_0^{\delta} \rho u (u_{\infty} - u) dy \Rightarrow \delta^* = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) dy$$

بمعادلات دیگر اگر جسم جامد بر دانه شود باید بداند اندازه δ^* از لایه مرزی کم کنیم تا مقدار اندازه حرکت بدون تغییر باقی بماند.

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left[\frac{u}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) \right] dy$$

عدم توجه به δ^*

اجسام مسطح: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$

اجسام غیر مسطح (و در داخل لوله ها): $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$ در داخل لوله پیرا سیل

جهت حل باید δ^* را دانسته باشیم و همچنین توزیع سرعت را دانسته باشیم، تا در نهایت تابع δ بدست آید.

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -\frac{u_{\infty}}{g} \frac{du}{dx}$$

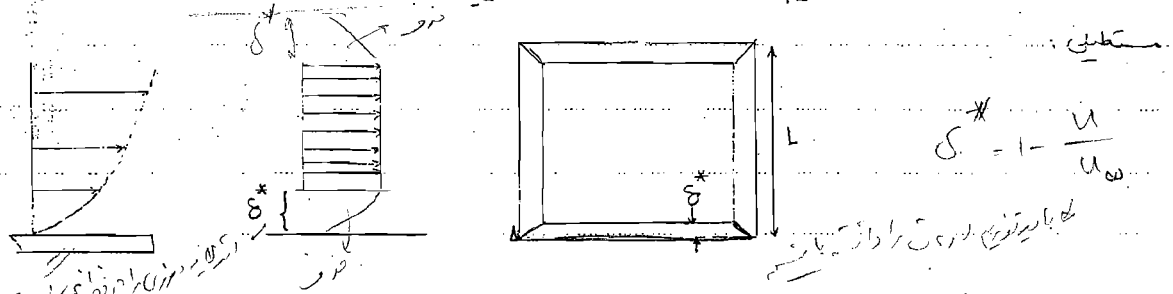
با استفاده از رابطه برابری

در همین نسبت که گذری از آن است و باید توجه کرد که در این تابع باید توجه کرد که در این تابع

Subject

Date

مسئله: کانال مربع شکلی داریم، مطلوب است محاسبه تغییرات فشار (بدون بجز) در داخل تورنل هوا با مقطع



$A = L \times L = (305)^2 \text{ mm}^2$; $u_{\infty 1} = 26 \text{ m/s}$; $\delta_1^* = 1.5 \text{ mm}$; $\delta_2^* = 2.1 \text{ mm}$; $u_{\infty 2} = ?$

$A_1 = (L - 2\delta_1^*)^2 = 302 \times 302$; $A_2 = (L - 2\delta_2^*)^2 = 300.8 \times 300.8$

$C_1 = A_1 u_{\infty 1} = A_2 u_{\infty 2} \implies u_{\infty 2} = 26.2 \text{ m/s}$

بروزی: $\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2g} \implies \text{افت فشار بر سر} = \frac{P_1 - P_2}{\frac{1}{2}\rho u_{\infty 1}^2} = \left(\frac{u_{\infty 2}}{u_{\infty 1}}\right)^2 - 1 = 0.016$

16% کاهش یافته است، نسبت به سرعت در سطح مقطع 1.

برای پویای نسبی به 3 مرکز استرس میزنیم.

حل معادله ون-کارمن

با منظور حل معادله ون-کارمن یا از یک معادله توزیع سرعت سیال می باشد. ابتدا توزیع سرعت بصورت چندجمله‌ای

$u_x = a + by + cy^2$

درجه یک در نظر گرفته می شود. این نسبت کردن به دردی بعدی می خورد.

حالا، نیاز به سه شرط مرزی داریم:

$$\begin{cases} y=0 \rightarrow u_x = 0 \rightarrow a=0 \\ y=\delta \rightarrow u_x = u_{\infty} \\ \frac{du_x}{dy} \Big|_{y=\delta} = 0 \end{cases} \implies \frac{u_x}{u_{\infty}} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

این رابطه را می توان در اوتنوال معادله قبل قرار می دهیم: $\tau_0 = \mu \frac{du_x}{dy} \Big|_{y=0} = 2\mu \frac{u_{\infty}}{\delta}$ فرض سیال نیوی

در ون-کارمن τ_0 رابطه داشت چرا این

باید از این معادله استخراج باید معادله حرکت حل شود دوبدی page 848

$\implies \frac{u_{\infty}}{u_{\infty}} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$

Subject

Date 87.09.26

الروت بر روی صفحه باشد نه در صورت $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u_{\infty}}{\partial x} = 0$

$$2\mu \frac{u_{\infty}}{\delta} = \rho u_{\infty}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} \left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right] \left(1 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right) dy \right) \quad \left(\frac{y^2}{\delta} - \frac{5y^3}{3\delta^2} + \frac{y^4}{\delta^3} - \frac{y^5}{5\delta^4} \right)$$

$$\Rightarrow 2\mu \frac{u_{\infty}}{\delta} = \rho u_{\infty}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta - \frac{5}{3}\delta + \delta - \frac{1}{5}\delta \right) = \rho u_{\infty}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{15}\delta \right) \rightarrow 2\mu \frac{u_{\infty}}{\delta} = \rho u_{\infty}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{15}\delta \right)$$

OK از جواب؟

$$\rightarrow \frac{15\mu}{\delta} = \rho u_{\infty} \frac{d\delta}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{15\mu}{\rho u_{\infty}} dx = \delta d\delta \rightarrow \frac{15\mu}{\rho u_{\infty}} x = \frac{1}{2}\delta^2 + A \quad \text{at } x=0: \delta=0 \Rightarrow A=0$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2}{x^2} = \frac{30}{\frac{\rho u_{\infty} x}{\mu}} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5.5}{Re^{0.5}}$$

این مقدار ۵۰ درصد از مقدار بدست آمده قبلی (پراوند - بلانویس)

مستقیم است

$$C_D = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho u_{\infty}^2} = \frac{2\mu \frac{u_{\infty}}{\delta}}{\frac{1}{2}\rho u_{\infty}^2} = \frac{4\mu}{\rho u_{\infty} \delta} = \frac{4\mu}{\rho u_{\infty} x} \frac{x}{\delta}$$

$$\Rightarrow C_D = \frac{4}{Re} \frac{Re^{0.5}}{5.5} \Rightarrow \boxed{C_D = \frac{0.73}{Re^{0.5}}}$$

در این مرحله توزیع سرعت را بصورت چند جمله‌ای درجه ۳ در نظر گرفته می‌شود. در این حالت باز یک شرط برتری

BC4: $\delta=0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$u_x = a + by + cy^2 + dy^3$$

دیگر داریم:

$$\frac{u_x}{u_{\infty}} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.6}{Re^{0.5}}$$

$$C_D = \frac{0.65}{Re^{0.5}}$$

$$\frac{1}{\delta} = a + b\delta + c\delta^2 + d\delta^3 \quad \text{at } \delta=0 \rightarrow a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta = 1$$

$$3a\delta^2 + 2b\delta + c = 1 \rightarrow c = 1 - 3a\delta^2$$

$$6a\delta + 2b = 0 \quad \text{at } \delta=0 \rightarrow \boxed{b=0}$$

$$\rightarrow a\delta^3 = 1 + 3a\delta^3 \rightarrow \boxed{a = \frac{-1}{2\delta^3}}$$

$$\rightarrow \boxed{c = \frac{3}{2} \frac{1}{\delta^3}}$$

Subject _____

Date _____

مسئله: مطلوب است محاسبه ضرایب لایه مرزی و نیروی درازگ وارد بر صفحه:

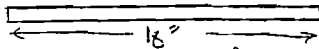
$$\rho/\rho_w = 0.925 \frac{lb}{ft^3} \quad ; \quad w = 6'' \quad ; \quad \nu = 0.001 \frac{ft^2}{s}$$

$$u_\infty = 2 \frac{ft}{s}$$



oil

$$Re = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{2 \times 1.5}{0.001} = 3000$$



چون رینولدز در انتهای صفحه 3000 بدست آمده پس جریان در کل صفحه آرام می باشد.
 پس ابتدا رینولدز در انتها محاسبه می شود. براس Re_D

$$C_D = \frac{1.332}{Re_L^{0.5}} = 0.00243$$

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho u_\infty^2 A = \frac{1}{2} \times 0.00243 \times 0.925 \times 1.94 \times 2^2 \times 0.5 \times 1.5 = 0.0654 \text{ lbf}$$

$$\tau_w = \frac{F_D}{A} = 0.0873 \frac{lbf}{ft^2}$$

این مقدار متوسط است

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho u_\infty^2 A$$

$$F_D = \tau_w \cdot A$$

$$\text{از مدل Blasius} \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5}{Re^{0.5}} \rightarrow \delta = 1.5 \times \frac{5}{3000^{0.5}} = 1.64''$$

ضرایب ضریب

$$\text{از مدل Blasius} \quad x=1'' \rightarrow Re_x = \frac{2 \times 1/2}{0.001} = 166.67$$

رینولدز را باید در همان نقطه حساب کنیم

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{1.6667 \times 16^2}} \Rightarrow \delta = 0.39''$$

$$\Rightarrow C_D = \frac{0.666}{\sqrt{Re}} = 0.0516$$

محلی

$$u_{\infty} = \frac{1}{2} \frac{U}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{2} \right)^3$$

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = \mu \frac{3U_0}{2\delta} =$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_0^{\delta} \left(\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{3}{2} \frac{y^3}{\delta^3} \right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right) dy$$

$$= \frac{\rho U_{\infty}^2}{2} \int_0^{\delta} \left(\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{9}{4} \frac{y^2}{\delta^2} - \frac{1}{2} \frac{y^3}{\delta^3} + \frac{3}{2} \frac{y^4}{\delta^4} - \frac{y^6}{4\delta^6} \right)$$

$$= \frac{\rho U_{\infty}^2}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4} \frac{y^3}{3} - \frac{1}{8} y^4 + \frac{3}{108} y^5 - \frac{1}{222} y^7 \right) \Big|_0^{\delta}$$

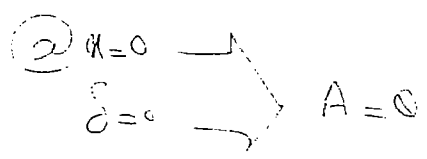
$$\frac{\tau_0}{\rho U_{\infty}^2} = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{4} \delta - \frac{1}{8} \delta + \frac{3}{10} \delta - \frac{1}{28} \delta \right) = \delta$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu u_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \left(\frac{39}{222} \right)$$

$$\frac{1}{2} \frac{U^2}{\delta} = \nu \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{U^2}{\delta} \cdot dx = \nu d\delta$$

$$\frac{1}{2} \frac{U^2}{\delta} = \nu \frac{d^2 \delta}{dx^2} \quad \text{or} \quad \delta = \frac{1}{2} \nu x^2 + A$$



$$\frac{1}{2} \frac{U^2}{\delta} = \nu \frac{d^2 \delta}{dx^2} \quad \frac{U^2}{\delta} = \frac{220 \nu^2}{13 \rho U_{\infty}^2 \delta}$$

$$\frac{U^2}{\delta} = \frac{220 \nu^2}{13 \rho U_{\infty}^2 \delta} \Rightarrow \frac{U^2}{\delta} = \frac{4.64}{13 \rho U_{\infty}^2 \delta}$$

$$= \frac{3 \nu U_{\infty}}{2 \delta} = 3 \frac{\nu}{\delta} = 3 \frac{\nu}{U_{\infty} \delta} = \frac{3}{13} \frac{\nu}{U_{\infty} \delta}$$

$$= \frac{0.646}{13}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$$

$$u_x = \frac{3}{2} \frac{y}{z} - \frac{1}{2} \frac{y^3}{z^3}$$

$$\varepsilon = \frac{4.6 x}{\left(\frac{\rho u x}{\mu}\right)^{0.5}} = \frac{4.6}{\left(\frac{\rho u}{\mu}\right)^{0.5}} \sqrt{x} \Rightarrow u_x = \frac{3}{2} u_{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{y^3}{x^{3/2}}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{3}{2} u_{\infty} y \frac{1}{k} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} - \frac{1}{2} y^3 u_{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \frac{-3}{2} x^{-5/2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{3}{4} \frac{u_{\infty}}{k} y x^{-3/2} + \frac{3}{4} \frac{u_{\infty}}{k^3} y^3 x^{-5/2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_x}{\partial x} \Rightarrow u_y = \left[\frac{3}{8} \frac{u_{\infty}}{k} y^{-3/2} z^2 - \frac{3}{6} \frac{u_{\infty}}{k^3} y^3 z^4 \right]$$

$$\left[\frac{3}{8} \frac{\left(\frac{\rho u x}{\mu}\right)^{0.5}}{4.6} u_{\infty} \frac{1}{x^{0.5}} z^2 - \frac{3}{16} \frac{\left(\frac{\rho u x}{\mu}\right)^{1.5}}{(4.6)^3} u_{\infty} \frac{y^3}{x^{1.5}} z^4 \right]$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4.6} Re^{0.5} \frac{z^2}{x^{0.5}} - \frac{3}{16} \frac{1}{(4.6)^3} Re^{1.5} \frac{z^4}{x^{1.5}}$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4.6} \frac{(0.5)(4.6)^2}{(4.6)^3} z^2 - \frac{3}{16} \frac{1}{(4.6)^3} Re^{1.5} \frac{(4.6)^4 z^4}{(4.6)^4}$$

$$Re^{-0.5} \left[\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4.6} (4.6)^2 z^2 - \frac{3}{16} \frac{1}{(4.6)^3} (4.6)^4 z^4 \right]$$

$$Re^{-0.5} \left[\frac{3}{8} \cdot \frac{1236}{4.6} - \frac{3}{16} \sqrt{\frac{1236}{4.6}} \right] =$$

$$0.87017 Re^{-0.5}$$

سیال های غیر نیوتن :

در غش های بیش یا قانون ویسکوزیته نیوتن است که شایع است.

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{du_x}{dy}$$

چنین سیال نیوتن خوانده می شود:

- برای گازها یا لایه های نازک (آ) ویسکوزیته با افزایش دما کاهش می یابد.
- سیال های غیر نیوتن غش از دانش جریان تغییر شکل ماده σ و ϵ یا γ وابسته است.

به بیان ساده می توان گفت در گازها که مولکول ها بین دو برخورد پیاپی شان فاصله های طولانی تر می رانند.

دایکستل μ به دمای T گازها :

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy}$$

برای یک ذره گازی با جرم m ، میانگین پیمایش آزاد برابر λ ، تعداد برخوردها N سرعت میانگین ذره برابر C می باشد.

$$C = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

k ثابت بولتزمن

با در نظر گرفتن سرعت میانگین ذره C ، می توان نوشت:

$$\frac{1}{2} N C \alpha m \times \lambda \times \frac{du}{dy} = \mu \frac{du}{dy}$$

BC: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho v} \frac{dU_x}{dy} \right) = \mu \frac{d^2 U_x}{dy^2}$ ~~BC: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho v} \frac{dU_x}{dy} \right) = \mu \frac{d^2 U_x}{dy^2}$~~

@ $y=0$: $U_x=0 \Rightarrow 0 = \left[\frac{\mu}{\rho v} \right]^2 \exp(C_1) + C_2$

@ $y=B$: $U_x=0 \Rightarrow 0 = \left[\frac{\mu}{\rho v} \right]^2 \exp \left[\frac{\rho v}{\mu} B + C_1 \right] + \frac{\mu}{\rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B + C_2$

$$\Rightarrow \left[\frac{\mu}{\rho v} \right]^2 \exp(C_1) = \frac{\frac{\mu}{\rho v} \frac{P_0 - P_L}{\mu L} B}{\left[\exp \left(\frac{\rho v}{\mu} B \right) - 1 \right]} \Rightarrow C_2 = \frac{\frac{\mu}{\rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left[\exp \left(\frac{\rho v}{\mu} B \right) - 1 \right]}$$

$$\Rightarrow U_x = - \frac{\frac{\mu}{\rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left[\exp \left(\frac{\rho v}{\mu} B \right) - 1 \right]} \exp \left[\frac{\rho v}{\mu} y \right] + \frac{\mu}{\rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y + \frac{\frac{\mu}{\rho v} \frac{P_0 - P_L}{\mu L} B}{\left[\exp \left(\frac{\rho v}{\mu} B \right) - 1 \right]}$$

$$\Rightarrow U_x = \frac{\frac{\mu}{\rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left[\exp \left(\frac{\rho v}{\mu} B \right) - 1 \right]} \left[- \exp \left(\frac{B \rho v}{\mu} \frac{y}{B} \right) + 1 \right] + \frac{B \mu}{B \rho v} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$$

$A = \frac{B \rho v}{\mu} \Rightarrow U_x = \frac{\frac{1}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2}{(\exp(A) - 1)} \left[- \exp \left(A \frac{y}{B} \right) + 1 \right] + \frac{B}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$

$$\Rightarrow U_x = \frac{P_0 - P_L}{\mu L} B^2 \frac{1}{A} \left[\frac{- \exp(A y / B) + 1}{\exp A - 1} \right] + \frac{B^2}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} \frac{y}{B}$$

$$\Rightarrow U_x = \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2 \frac{1}{A} \left[\frac{y}{B} - \frac{\exp(A y / B) - 1}{\exp A - 1} \right]$$

b) $w = \int_0^B \rho U_x w dy = \int_0^B \rho \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2 \frac{1}{A} \left[\frac{y}{B} - \frac{\exp(A y / B) - 1}{\exp(A) - 1} \right] w dy =$

$$= \rho \frac{(P_0 - P_L) B^2}{\mu L} \frac{1}{A} \int_0^B \left[\frac{y}{B} - \frac{\exp(A y / B) - 1}{\exp A - 1} \right] w dy$$

$$= \rho \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2 \frac{1}{A} \left[\frac{y^2}{2B} - \frac{\frac{B}{A} \exp(A y / B) - y}{\exp A - 1} \right] \Big|_0^B$$

$$= \rho \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} \frac{1}{A} \left[\frac{B^2}{2} - \frac{B^2 (\exp(A) - 1) - B^2}{\exp(A) - 1} \right]$$

تعداد ذرات $\frac{Nc}{2}$ ، $m\lambda \frac{d\mu}{d\lambda}$ به ترتیب در هر پهنای شعاعی، ذراتی که با یکدیگر در تماس
 زمان دوام در سطح

$$\mu = \frac{1}{2} (N m \lambda)$$

$$\mu = \frac{1}{2} N m \lambda \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

میانگین مسافت پیمایش آزادانه را می توانیم به دست آوریم:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 N}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m k T}{\pi^3}}$$

تفسیر و معنی عبارت بالا

$$\mu = \frac{N h}{V} \exp\left(\frac{3.8 T_B}{T_0}\right)$$

N تعداد ذرات در حجم

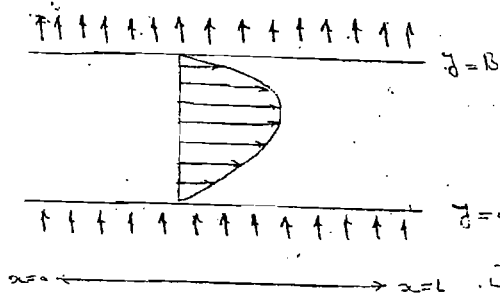
h ثابت پلانک

V حجم سونی

T_B دمای مطلق

برای تعیین اینکه کاشی در یک پهنای شعاعی
 با انرژی دما خفیه شود

problem 38.16



Part a):

$$0 = \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + w_z \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

این جریان ریزی و خردی همی در مقابل جریان همی مایل همی یونی است. $x=0$ $x=L$

① $v_y = 0$: $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow v_y = v_0$

steady state liquids motion: $\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$

one dimensional: $v_y = v_0, w_z = 0$

Fully developed $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$ & $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = \frac{(P_0 - P_L)}{L}$

no motion in z direction: $\frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$ & $\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0$ & $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0$

There is no gravity field acceleration in x direction. $g_x = 0$

$$\Rightarrow \rho \left[v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right] \Rightarrow v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = v_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{(P_0 - P_L)}{\rho L} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{d^2 u_x}{dy^2}; \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{du_x}{dy} \Rightarrow v_0 \frac{du_x}{dy} = \frac{(P_0 - P_L)}{\rho L} + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u_x}{dy^2}$$

suppose: $H = \frac{du_x}{dy}$; $v_0 H = \frac{(P_0 - P_L)}{\rho L} + \frac{\mu}{\rho} \frac{dH}{dy} \Rightarrow \frac{dH}{dy} = \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} + \frac{\rho v_0}{\mu} H$

if $P = \frac{P_0 - P_L}{\mu L} + \frac{\rho v_0}{\mu} H \Rightarrow \frac{dP}{dy} = \frac{\rho v_0}{\mu} \frac{dH}{dy} \Rightarrow \frac{dH}{dy} = \frac{\mu}{\rho v_0} \frac{dP}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\rho v_0} \frac{dP}{dy} = P \Rightarrow \ln P = \frac{\rho v_0}{\mu} y + C_1 \Rightarrow P = \exp \left[\frac{\rho v_0}{\mu} y + C_1 \right] = \frac{\rho v_0}{\mu} H + \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L}$$

$$\Rightarrow H = \frac{du_x}{dy} = \frac{\mu}{\rho v_0} \exp \left[\frac{\rho v_0}{\mu} y + C_1 \right] - \frac{\mu}{\rho v_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L}$$

$$\Rightarrow u_x = \left[\frac{\mu}{\rho v_0} \right]^2 \exp \left[\frac{\rho v_0}{\mu} y + C_1 \right] + \frac{\mu}{\rho v_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} + C_2$$

برای بیشتر سیالات نمی توان نوشت

$$\tau_{ym} = -\eta \frac{dU_m}{dy}$$

η تابعی از τ_{ym} یا $\frac{dU_m}{dy}$ است.

اگر η با افزایش نرخ تنش برشی ($\frac{dU_m}{dy}$, Shear Rate) کاهش یابد

سیال پلاستیک است. اگر افزایش τ_{ym} باعث افزایش η باشد، سیال دilatant است.

اگر η تابعی از تنش برشی باشد، سیال نیوتن است.

$$\eta = \mu$$

در این رابطه، μ ضریب چسبندگی است (viscosity) تنش برشی $\frac{dU_m}{dy}$ و $\tau = -\mu \frac{dU_m}{dy}$ تنش برشی است.

$$\tau_{ym} = -\mu \frac{d}{dy} \frac{dU_m}{dt} = -\mu \frac{d}{dt} \frac{dU_m}{dy} = -\mu \frac{d}{dt} \gamma$$

$$\tau_{ym} = -\mu \dot{\gamma}$$

$$\frac{\tau}{\mu} = \text{Fluidity} \rightarrow \gamma$$

$\psi = 0$ _____

$\psi = 0$ _____

$\psi = 0$ _____

وغيره

المعادلة: $\sin = 0$

$$\sin h_n = \frac{e^{\tilde{m}} - e^{-\tilde{m}}}{2}$$

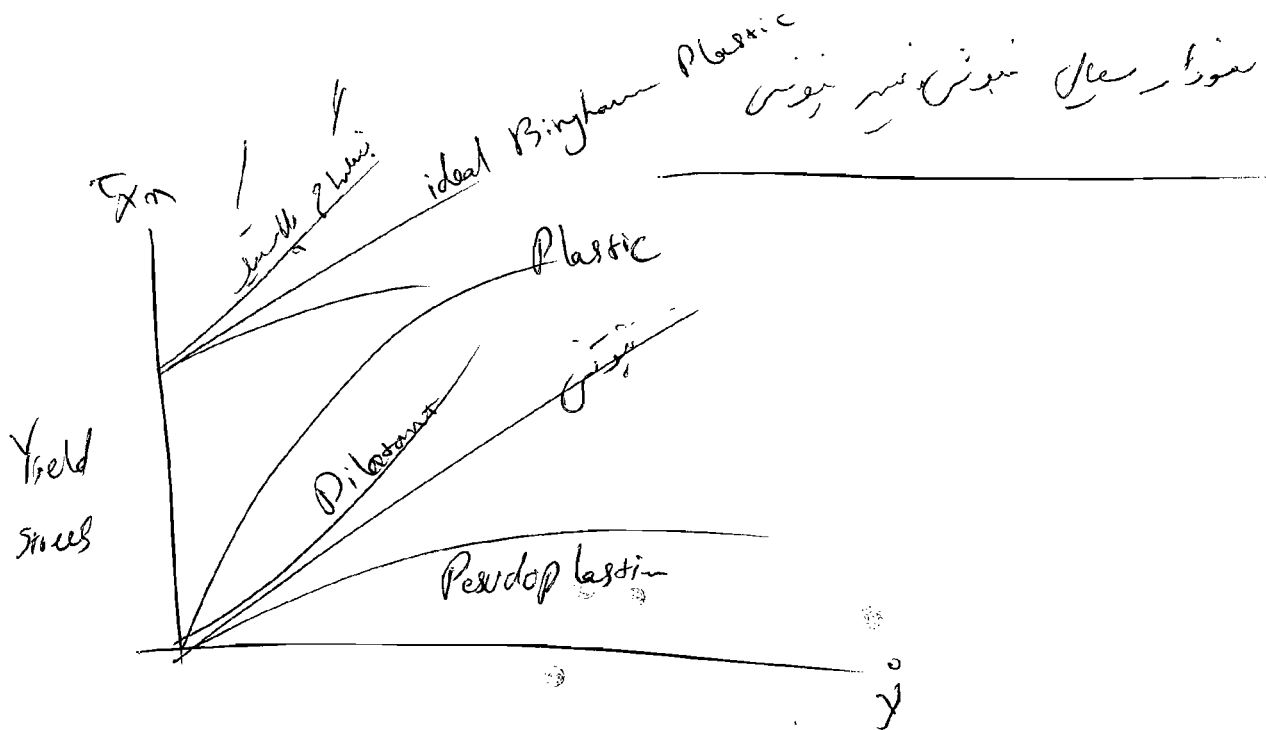
$$\cos h_n = \frac{e^{\tilde{m}} + e^{-\tilde{m}}}{2}$$

$$\psi = 0 \rightarrow u_n = 0 \rightarrow 0 = \left(\frac{H}{A_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{A_0}{H} b + C_1\right) - \frac{H}{A_0}$$

دسته بندی سیال غیر نیوتن

بنابر طبق رفتار سیال در برابر کاربرد تنش برشی می توان دسته های درناگونی درنا گرفت بنونه های از این گونه است

- ① polymeric liquid
- ② Emulsions
- ③ Paints
- ④ Blood
- ⑤ suspension
- ⑥ Food sus-



$$U_m = \frac{\frac{\mu}{P_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left(\exp\left(\frac{\mu P_0}{\mu} B\right) - 1\right)} \left(-\exp\left(\frac{\mu P_0}{\mu} y\right) + 1\right) + \frac{\mu}{P_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$$

If $A = B P_0 / \mu$, then it can be written:

$$U_m = \frac{\frac{\mu}{B P_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2}{\left(\exp\left(\frac{B P_0}{\mu}\right) - 1\right)} \left(-\exp\left(\frac{B P_0}{\mu} \cdot \frac{y}{B}\right) + 1\right) + \frac{B \mu}{B P_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$$

$$U_m = \frac{\frac{1}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2}{\left(\exp(A) - 1\right)} \left(-\exp\left(A \frac{y}{B}\right) + 1\right) + \frac{B}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$$

$$\Rightarrow U_m = \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B^2 \frac{1}{A} \left(\frac{-\exp(A y / B) + 1}{\exp(A) - 1} \right) + \frac{B}{A} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y$$

$$U_m = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{\mu L} \frac{1}{A} \left(\frac{y}{B} - \frac{\exp(A y / B) - 1}{\exp(A) - 1} \right)$$

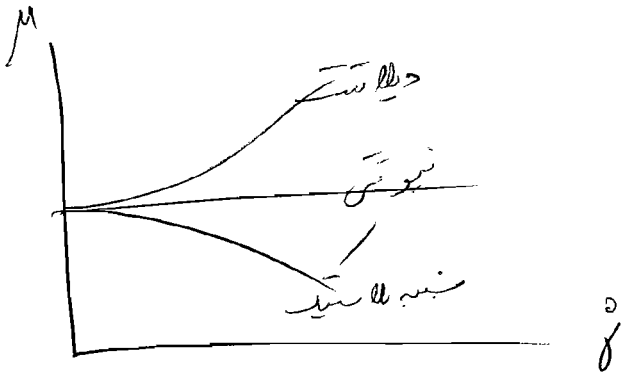
part b:

$$W = \int_0^B P U_m W dy \Rightarrow W = P \frac{(P_0 - P) B^2}{\mu L} \frac{1}{A} \left(\frac{B}{2} - \frac{\frac{1}{A} (\exp(A) - 1) P_0 B}{\exp(A) - 1} \right)$$

تجزیه و تحلیل: $A \rightarrow \dots$

$$U_m = - \frac{(P_0 - P_L)}{2 P L} y^2 + C_1 y + C_2$$

سیکویتم میان پلاستید سا بالفزایش تنش برشی دارد اما من کاهش می یابد (Shear Thinning)
 اولی و سیکویتم میان دلا نت بالفزایش تنش برشی افزایش می یابد



عایات پلاستید

در این عایات بیشتر مولکول های بزرگ (Macrom) در حالت آستایی (در صورت محلول های
 کوچک) معیبت Random قرار دارند به همین علت در آغاز حرکت در اثر وارفتن تنش برشی
 آستایی زیادی در برابر خود دارند و سیکویتم بالا اما پس از جریان یافتن سیال و بیشتر شدن
 نرخ تنش برشی مولکول ها همگرا می شوند در سوی جریان آرایش می یابند و آستایی کمتر در برابر

عایات دلا نت

این گونه سیال ها معمولاً در برگیرنده ذره های جامد کوچک یا سوس ... Rigid
 در shear های کوچک میگویم به عنوان روان ساز (lubricant) میان ذره های مخلوط عمل می کنند
 اما در shear های بزرگ تأثیر روان ساز کاهش یافته و در نتیجه اصطکاک میان ذره های مخلوط
 بیشتر

$$\frac{w}{(P_1 - P_2) B^3 W_1^2}$$

$$\frac{1}{A} \left(\frac{1}{2} - A + \frac{1}{2} A^2 \right)$$

$$\frac{1}{(1 - A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A^3 - \dots) - 1} \quad A^2 - \frac{1}{2} A^3$$

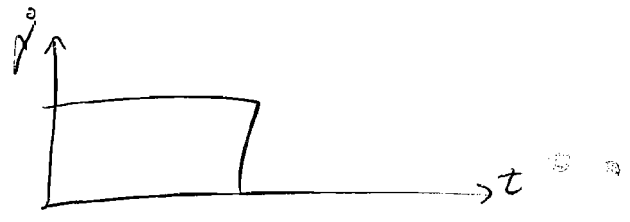
$$= \frac{1}{A} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{A} + \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} A^2 \right]$$

جابجایی در سیال الاستیک

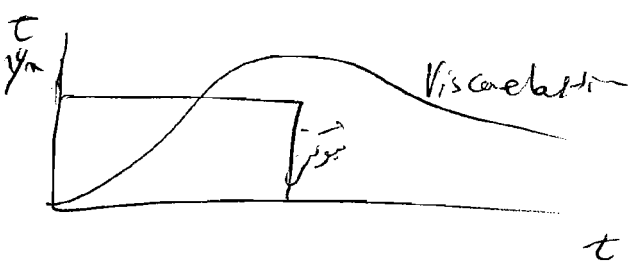
جابجایی سیوه الاستیک

در این گونه میان ماده‌های الاستیک (Elastic) با ویژگی ویسکوزیته همراه است همه جابجایی
 بی‌سیری در این ماده قرار می‌گیرند. این جابجایی نه گونه‌های متفاوتی در برابر داده‌ها
 تنش بیش از حد را می‌تواند بر این ماده وارد کند.

پدیده‌های سیال غیر نیوتنی



در سیال‌های نیوتنی و غیر نیوتنی
 هسته انارد سیال‌ها (viscoelastic)
 این دو اختلاف نامزد دارند



$$P = (P_0 - P_L) / \mu L + \frac{\rho V_0}{\mu} H \Rightarrow \frac{dP}{dy} = \frac{\rho V_0}{\mu} \frac{dH}{dy} \Rightarrow \frac{dH}{dy} = \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{dP}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{dP}{dy} = P \Rightarrow \ln P = \frac{\rho V_0}{\mu} y + C_1 \Rightarrow P = \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} y + C_1\right) = \frac{\rho V_0}{\mu} H + P_0$$

$$\Rightarrow H = \frac{dU_m}{dy} = \frac{\mu}{\rho V_0} \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} y + C_1\right) - \frac{\mu}{\rho V_0} (P_0 - P_L) / \mu L$$

$$\Rightarrow U_m = \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} y + C_1\right) + \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y + C_2$$

B.C.

$$y=0 : U_m=0 \Rightarrow 0 = \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp(C_1) + C_2$$

$$y=B : U_m=0 \Rightarrow 0 = \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B + C_1\right) + \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B + C_2$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B + C_1\right) + \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B - \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp(C_1)$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp(C_1) \left[\exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B\right) - 1 \right] + \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B$$

$$= \left(\frac{\mu}{\rho V_0}\right)^2 \exp(C_1) = \frac{\frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left(\exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B\right) - 1 \right)}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left(\exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B\right) - 1 \right)}$$

$$\Rightarrow U_m = - \frac{\frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left(\exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B\right) - 1 \right)} \exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} y\right) + \frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} y + \frac{\frac{\mu}{\rho V_0} \frac{(P_0 - P_L)}{\mu L} B}{\left(\exp\left(\frac{\rho V_0}{\mu} B\right) - 1 \right)}$$

① نوش چمن آب، هوا، روغن، مایعات آبی و پلیمرین

② پلاستیک چمن پلیمرها، گلوله در آینه

③ دلا نت چمن ابروسون ها، سوپا

④ پلاستیک Bingham چمن مایعات با ویسکوزیته کمتر از زمان

⑤ $\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma}$

تفاوت های سیالهای نیوتن و غیر نیوتن

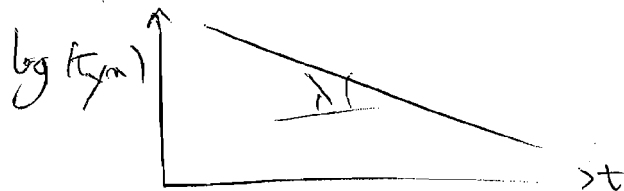
① ویسکوزیته میان سیالهای نیوتن ثابت است اما ویسکوزیته سیالهای غیر نیوتن تغییر میکند

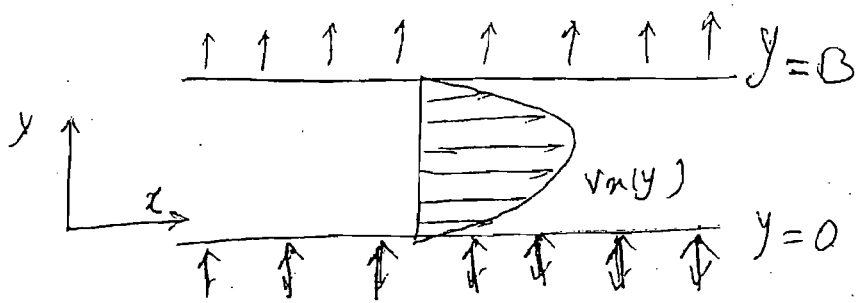
② زمان استرخش τ_{relax} و τ_{max} برای سیالهای نیوتن در مدل $\tau = \mu \dot{\gamma}$ برابر است

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = 0 \quad \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -P$$

تفاوت های سیالهای نیوتن و غیر نیوتن:

سرعت آن مشابه ماکسولان آزانسی \times Relaxit τ_{relax}





a) show that the velocity profile for the system

solution:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + w_z \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \underline{v_y = v_0}$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

$$\rho \left[v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \Rightarrow v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = v_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} = (P_0 - P_L) / L + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{d^2 u_x}{dy^2} \Rightarrow v_0 \frac{du_x}{dy} = (P_0 - P_L) / L + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u_x}{dy^2}$$

• suppose $H = du_x/dy$ then it can be write

$$v_0 H = (P_0 - P_L) / L + \mu \frac{dH}{dy} \Rightarrow \frac{dH}{dy} = \frac{v_0 H - (P_0 - P_L) / L}{\mu}$$

کاهش نیامده نیاز کاربرد باسی مقایسه ای در استخوان در نحوه تغییر دادیم بتوان

مدل ناسون

مقاومت، چسبندگی، جریان و غیره در حالت
بیان می کنند

قانون هور

Viscous, Elastic, و غیره

$$\tau_E = E \gamma_E \text{ (Young Model)}$$

$$\tau_V = \mu \dot{\gamma}_V$$

مدل ناسون

فرض می کنند

$$A) \tau_E = \tau_V = \tau$$

$$B) \gamma_E + \gamma_V = \gamma$$

$$Fr_1 = \left(\frac{y_c}{y_1} \right)^{3/2} = 0.4$$

$$2 + \frac{u_1^2}{2g} = 0.3 + y_2 + \frac{u_2^2}{2g} = H + h \rightarrow 0.3$$

$$Q = 27 = 4 \times 2 \times u_1 = 4 \times y_2 \times u_2$$

$$\Rightarrow u_1 = 3.4 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \quad u_2 = 4.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \quad y_2 = 1.6 \text{ ft}$$

$$Fr_2 = 0.57$$

ارتفاع باب 0.1 ft (تساوي)

$$2 + \frac{u_2^2}{2g} = h_c + 1.1 + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$u_2 = \frac{Q}{4 \times 1.1} = 6.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \quad \rightarrow h_c = 0.5 \text{ ft}, Fr_2 = 1$$

$$u|_{y=y_c} = \frac{Q}{y_c w}$$

$$H_{\infty} = H + h$$

ارتفاع باب
ارتفاع باب

$$H = y + \frac{(Q/w)^2}{2gy^2}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_E}{dt} + \frac{d\gamma_V}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{M}$$

$$\Rightarrow \tau + \frac{M}{E} \frac{d\tau}{dt} = \mu \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{M}{E} = \lambda \quad \text{زمان آرامی}$$

$$\lambda \dot{\tau} + \tau = \mu \dot{\gamma} \quad \text{معادله مانکول}$$

نشان
Shear
Strain

هرگاه میان مدت تأثیر بدین تغییر شکل ثابت (Shear Rate) $\dot{\gamma}$ قرار بدهد

$$\dot{\gamma} = \text{cte} \Rightarrow \dot{\tau} + \frac{1}{\lambda} \tau = \frac{\mu}{\lambda} \dot{\gamma}$$

$$\Rightarrow \tau = \mu \dot{\gamma} (1 - \exp(-t/\lambda)) \quad (I)$$

و در آن زمان تنش برش برداشته شود هر توان نوشت:

$$\lambda \dot{\tau} + \tau = 0, \quad \text{at } t = 0 \quad \tau = \tau_0 \quad \dot{\gamma} = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \tau_0$$

$$u_1 = \frac{(Q/w)}{y_1} = \frac{1.49}{n} \left[\frac{wy_1}{w+2y_1} \right]^{2/3} S_1^{1/2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 2.2 \text{ ft}$$

$$y_2 = 4.8 \text{ ft}$$

در هر جایی از کانال که عدد فریدریش

بزرگتر (یا) کوچکتر از ۱ باشد

می توانیم از فرمول $(sup - sub)$ استفاده کنیم

$$y_c = \left(\frac{(Q/w)^2}{g} \right)^{1/3} = 3.7 \text{ ft}$$

← تابع دی جریان

$$Fr_1 = \left(\frac{y_c}{y_1} \right)^{3/2} = 2.18$$

$$Fr_2 = \left(\frac{y_c}{y_2} \right)^{3/2} = 0.68$$

در تصدیف می بینیم که در هر نقطه ای رخ داده است

$$\frac{y_0}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1 \right) \rightarrow y_0 = 5.8 \text{ ft}$$

عزیمت کمتر $y_2 < y_0$ →

عزیمت قابل کنترل است زیرا از y_2 بزرگتر است

$$\frac{Fr_0}{Fr_2} = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 Fr_0^2} - 1 \right) \right]^{3/2}$$

$$Fr_2 = 0.68 \rightarrow \boxed{Fr_0 = 1.53}$$

$$Fr_0 = \left(\frac{y_c}{y_0} \right)^{3/2} \rightarrow y_0 = 2.8 \text{ ft}$$

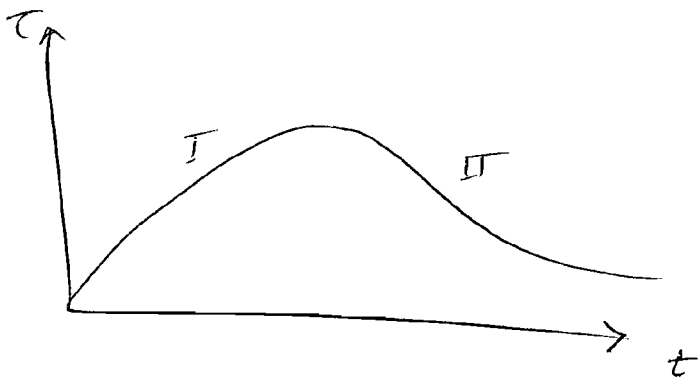
جریان قابل کنترل است

مثال: مطلوب است به طرز ارتفاع هر جایی مانع ریختن سطح آب است ← ارتفاع رودی مانع

$$Q = 27 \text{ cfs}$$

$$h = 0.3 \text{ ft}$$

$$w = 4 \text{ ft} \quad y_1 = 2 \text{ ft} \quad y_c = \left[\frac{(Q/w)^2}{g} \right]^{1/3} = 1.1 \text{ ft}$$



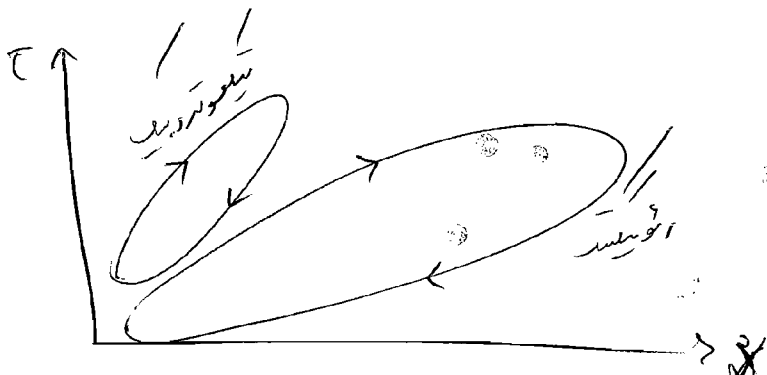
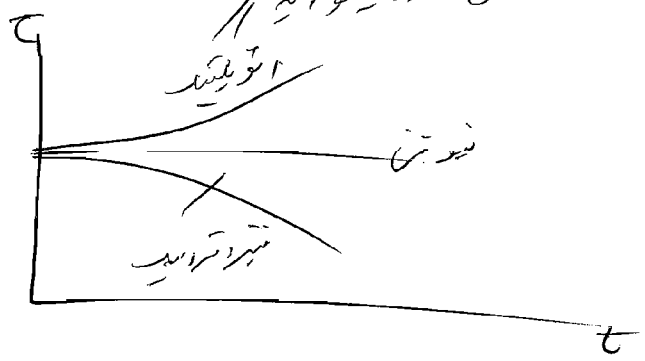
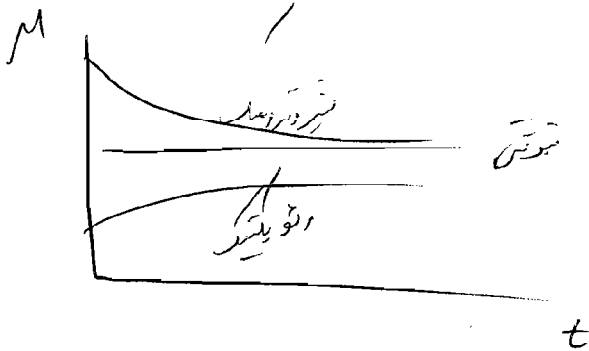
تفسیر دیکوتومی با زمان

در برخی سیاه چاه دیکوتومی با زمان تغییر می کند

هرگاه دیکوتومی با زمان کاهش یابد سیاه چاه بسیار راحتمید

Thixotropic نامتجان گونه سیاه چاه

در حالتی که دیکوتومی با زمان



از دسته سیاه چاه دیکوتومی با زمان گریس ها، مایه کاری ها، گلی صفای، رانده پرده های بنسوزید
 و ادوات آموغنی برخی از سوسپانسیون ها در دسته سیاه چاه Repeat برای آن است

نکته: در هر مدار به مقدار g معادل 32 در نظر بر می آید

معادله Manning

روابطی که برای معادله C بیان می‌دهد کلی از روابط تجربی برای معادله f در داخل لوله‌ها مشتق شده است

مقدار C برای اولین بار Manning رابطه‌ای را به منظور تعیین C در داخل کانال‌های بزرگ در رودخانه‌ها ارائه داده است:

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n} \rightarrow R_h : m$$

$$C = 1.49 \frac{R_h^{1/6}}{n} \rightarrow R_h : ft$$

$$u = \sqrt{\frac{8f}{g}} \sqrt{R_h S}$$

$$u = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S^{1/2}$$

$$u = C \sqrt{R_h S}$$

$$\frac{Q}{w} = u = \frac{1.49}{n} R_h^{2/3} S^{1/2}$$

$$u = \sqrt{\frac{8f}{g}} \sqrt{R_h S}$$

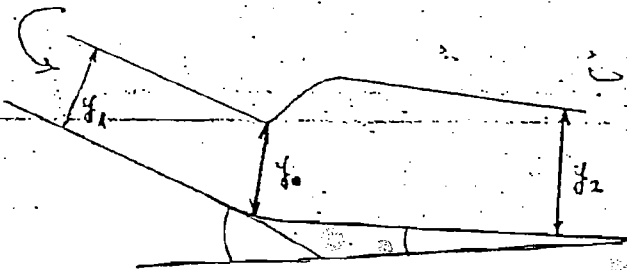
n بیانگر زبری کانال می‌باشد

متریک $\rightarrow n = 0.11 F^{1/2} R_h^{1/6}$

English unit $\rightarrow n = 0.093 F^{1/2} R_h^{1/6}$

$n \cdot TL^{-1/3}$

مثال: منظور از C تعیین توزیع سطح آب



$$\frac{Q}{w} = 40 \frac{ft^3}{s}$$

$$n = 0.013$$

$$S_1 = 0.015$$

$$w = 10 ft$$

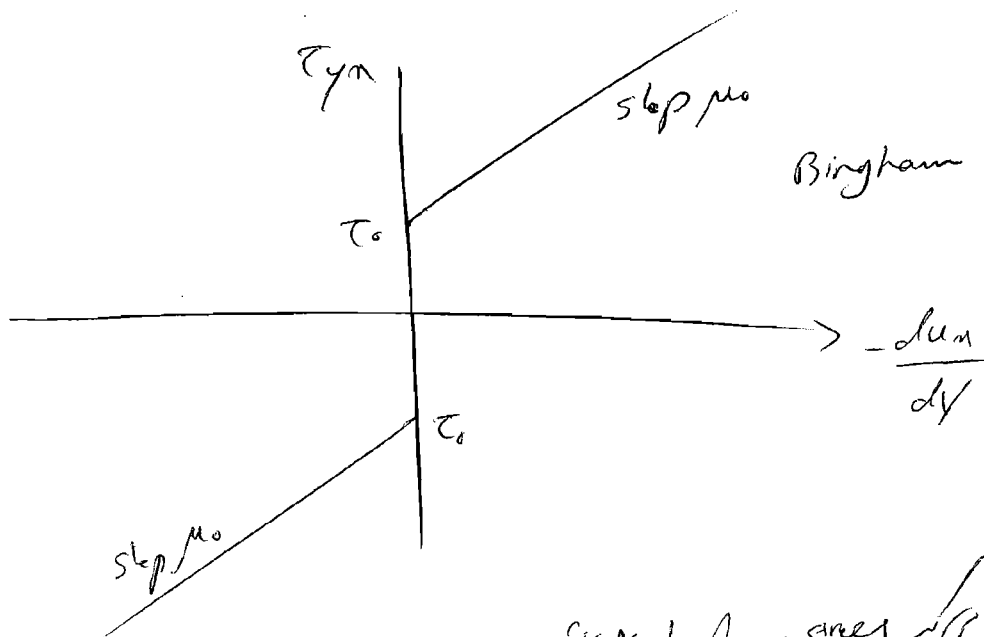
$$S_2 = 0.0016$$

$$\frac{Q}{w} = u_1 y_1 = u_2 y_2$$

1) Bingham Model

$$\tau_{ym} = -\mu_0 \frac{du_m}{dy} \pm \tau_0 \quad \text{if } |\tau_{ym}| > \tau_0$$

$$\frac{du_m}{dy} = 0 \quad \text{if } |\tau_{ym}| < \tau_0$$



دو پارا مٹرل فلوئید کے لیے
 ... τ_0 ...

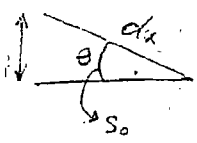
2) Oswald-de waele n

$$\tau_{ym} = -m \left| \frac{du_m}{dy} \right|^{n-1} \frac{du_m}{dy} \quad (\text{Power law})$$

if $n=1 \rightarrow m=\mu$

$n < 1 \rightarrow$ *shear thinning*

$n > 1 \rightarrow$ *shear thickening*



رابطه Chezy رای تریان به شکل نظریه ای است ^{برای تریان} استفاده از Darcy-Weizbach ^{برای تریان}

$$h_f = S dx \quad \downarrow \text{Energy slope}$$

$$h_f = f \frac{dx}{D_h} \frac{u^2}{2g}$$

$$D_h = 4R_h = 4 \frac{A}{P}$$

$$S dx = f \frac{dx}{4R_h} \frac{u^2}{2g} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{8g R_h S}{f}} = C \sqrt{R_h S}$$

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}}$$

برای مایه های نرم (Smooth) تریان f از رابطه Blasius تعیین شود:

$$f = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \quad Re < 10^5$$

$$\Rightarrow C = 28.6 Re^{0.125} = 28.6 \left[\frac{u D_h}{\nu} \right]^{0.125} \rightarrow \frac{\mu}{\rho}$$

g = 32

کابل نرم

برای مایه های زرد (Rough) تریان f از رابطه Colebrook تعیین

مدن رابطه چون Re معنی نیست و f در هر دو طرف است

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left[\frac{\left(\frac{E}{D}\right)}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right]$$

حالتی که f در بالا نرمی هم Re باشد

partially rough حالتی می باشد. نرم درم برای

این رابطه برای ناحیه

Fully rough $(Re > 10^5)$ قابل مبرهنه نظر کردن می باشد

ناحیه Fully rough

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left[\frac{\left(\frac{E}{D}\right)}{3.7} \right] \rightarrow g = 32$$

در این حالت با رسم f بر حسب $\left(\frac{E}{D}\right)$ و استفاده از Power Law تریان فرمت

$$\rightarrow f = 0.18 \left(\frac{E}{D}\right)^{1/3}$$

$$SI \rightarrow C = 26.607 \left(\frac{R_h}{E}\right)^{1/6}$$

$$D = 4R_h \rightarrow f = 0.113 \left(\frac{E}{R_h}\right)^{1/3} \Rightarrow C = 47.7 \left(\frac{R_h}{E}\right)^{1/6}$$

کابل نرم

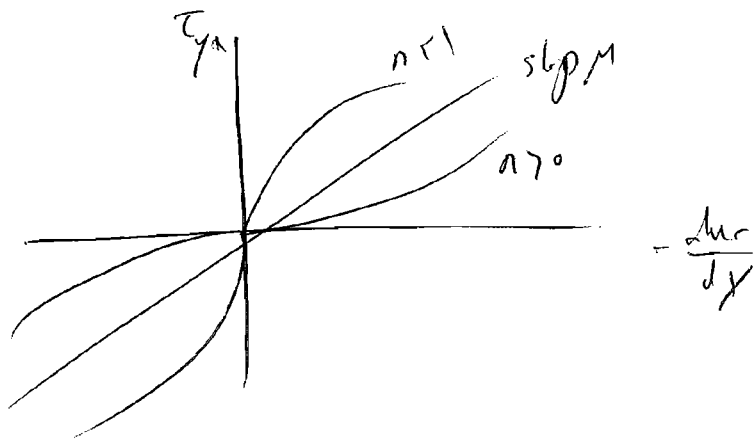
g = 32

برای Sys انگلیسی

$$g = 32 \frac{ft \cdot s^2}{s^2}$$

برای SI خودت محاسب کن

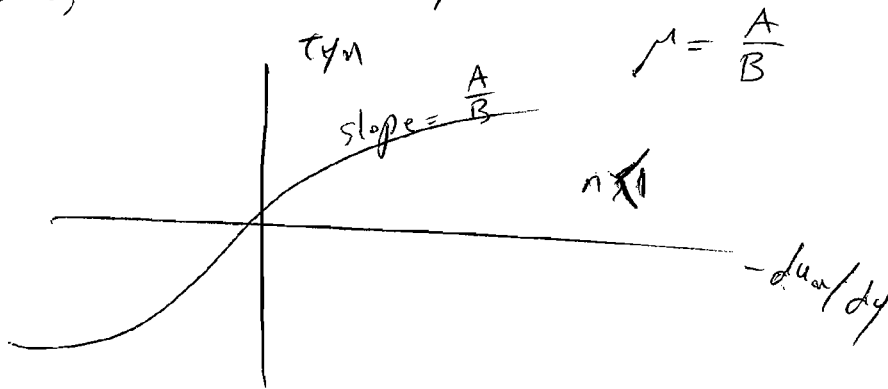
$$\frac{8}{0.1} \left(\frac{ft}{s}\right)^2$$



③ Eyring Model

$$\tau_{yx} = A \sinh\left(-\frac{1}{B} \frac{du_x}{dy}\right)$$

بیشترین این مدل برای اندازه‌های کوچک τ_{yx} باقی‌مانده است و برای τ_{yx} بزرگ‌تر از τ_{yx} به سمت راست می‌رود.



این مدل برای لایه‌های نازک کاربرد دارد زیرا شیب آن بالتر است.

④ Ellis Model

$$-\frac{du_x}{dy} = \left(\phi_0 + \phi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha} \right) \tau_{yx}$$

اگر $\alpha > 1$ باشد و τ_{yx} کوچک باشد، این مدل به سمت راست می‌رود.

نوشته $\mu = \frac{1}{\phi_0}$ است که در $\alpha < 1$ باشد.

$$\rho g A dx \sin \theta - \tau_o P dx = \rho \frac{d}{dx} (u^2 A) dx$$

$$\rho g A \sin \theta - \tau_o P = \rho \left[2Au \frac{du}{dx} + u^2 \frac{dA}{dx} \right]$$

$$R_h = \frac{A}{P}$$

$$\tau_o = \rho g R_h \sin \theta - \rho \left[2R_h u \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{P} \frac{dA}{dx} \right]$$

$$Q = UA = \text{cte} \implies A \frac{du}{dx} + u \frac{dA}{dx} = 0$$

معادله پیوستگی

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0 \implies \frac{dA}{dx} = -\frac{A}{u} \frac{du}{dx}$$

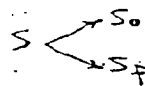
$$\tau_o = \rho g R_h \sin \theta - \rho \left[2R_h u \frac{du}{dx} - R_h u \frac{du}{dx} \right]$$

$$\tau_o = \rho g R_h \sin \theta - R_h u \rho \frac{du}{dx} = \rho g R_h \left[\frac{\sin \theta}{S_o} - \frac{u}{g} \frac{du}{dx} \right]$$

$$\implies \tau_o = \rho g R_h S_f$$

$$\tau_o = \rho g R_h S$$

Energy Slope



معادله Chezy در کانال‌های باز با اصطکاک

در این معادله مانند جریان در خم از رابطه تجربی زیر استفاده می‌گردد

از معادله بلاز پوس

$$\tau_o = \frac{1}{8} f \rho u^2$$

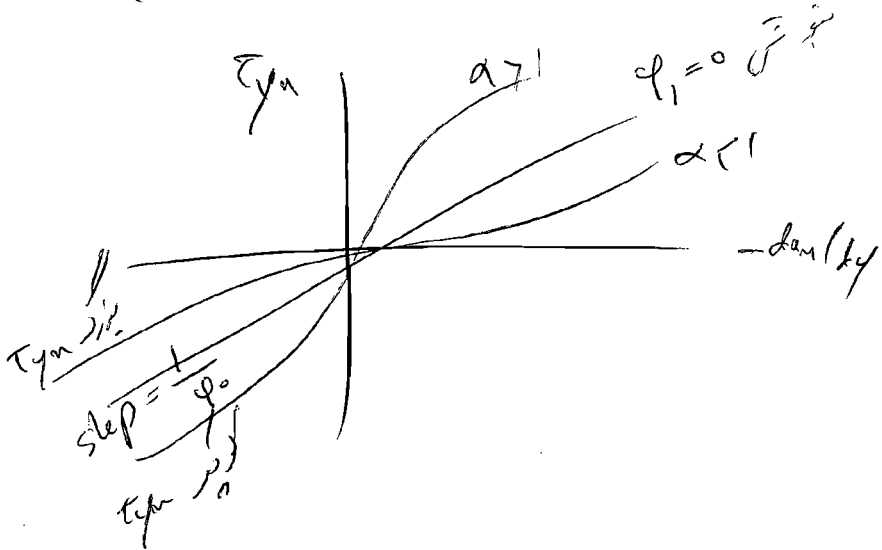
در این حالت f تابع Re ، $\frac{\epsilon}{D}$ ، و شکل مقطع کانال است.

$$u = \sqrt{\frac{8 \tau_o}{f}} = C \sqrt{R_h S}$$

که تابعی از Re ، $\frac{\epsilon}{D}$ ، و شکل مقطع کانال است.

C. Chezy Coefficient

در این مدل اگر $\phi_1 = 0$ یا نه مدل همان مدل قانون ویسکوزیته نیوتون است و اگر $\phi_0 = 0$ یا نه مدل همان قانون پاور (Power Law) است

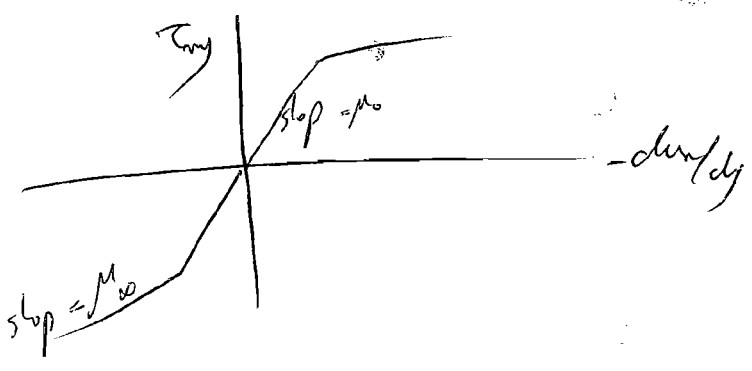


مدل پاور لایه

Reiner-philippoff ...

$$-\frac{du}{dy} = \left(\frac{1}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau_{yx}/\tau_s)^2}} \right) \tau_{yx}, \quad \mu_\infty < \mu_0$$

این رابطه بیان می‌کند که Shear Rate، در این مدل ویسکوزیته نیوتون



$$H_1 = 5 - h_f = 2.9 \text{ m}$$

$$H_3 = H_2 - h$$

$$F_{r3} = 0.53$$

$$H_3 = \frac{\left(\frac{Q}{w}\right)^2}{2g y_3^3} + y_3$$

$$y_3 = 2 \text{ m}$$

$$H_3 = 1.97 \rightarrow H_3 = H_{1 \text{ min}} \quad h_c = 0.93$$

$$y_3 = y_c = 1.31$$

$$H_{2 \text{ min}} = H_2 = 2.9$$

$$\Rightarrow H_3 = 2.3 \text{ m} \rightarrow h = 0.6 \text{ m}$$

$$F_{r3} = 1 \rightarrow h = h_c$$

$$y_3 = y_c = 1.31$$

$$H_3 = 1.97 \text{ m}$$

$$h_c = 2.9 - 1.97 \Rightarrow h_c = 0.93 \text{ m} \quad H_1 = H_2 + h_f \quad H_3 = H_2 - h$$

در این حالت $H_3 = H_2 - h$ و اگر $H_3 = H_2$ باشد، h_f را نیز می‌توانیم بیابیم.

2) جریان در کانالهای باز با اصطکاک:

در کانال نسبی، تنش لنگری (تشی) در سطح مقطع و اصطکاک علاوه بر نیروی تابع شکل کانال هستند.

نیروی $shear$ موجب افت انرژی می‌شود. این نیرو در لوله‌ها و کانالهای باز عمل می‌کند. علت عمده افت انرژی در این موارد در دو نقطه می‌باشد: اولاً کانالهای باز دارای مقطع مستطیل و مربعی می‌باشد. ثانیاً نیروی $shear$ ناشی از تماس سیال با اجزای فیبری $shear$ ناشی از تماس سیال با کانالها متعارف است. در این حالت ضریب اصطکاک تابعی از Re و شکل مقطع می‌باشد.



Shear Force $\tau_0 P dx$

Gravity force $\rho g A dx \sin \theta$

خط کانال که با سیال در تماس است wetted perimeter

در حالت تعادل جمع جبری نیروها معاد است و سرعت در سیال ثابت می‌ماند.

$$\rho g A dx \sin \theta - \tau_0 P dx = 0$$

$$\tau_0 = \rho g \frac{A}{P} \sin \theta = \rho g R_h S_0$$

Hydraulic radius

$$S_0 = \sin \theta$$

P : wetted perimeter

R_h : Hydraulic Radius

S_0 : slope

در حالت تعادل نیروها معاد است و سرعت در سیال تغییر نمی‌کند.

unsteady
steady

تغییرات در زمان

① Falling sphere

چگونه که پیش از این نیز دیده شد، در این روش برای اندازه گیری دیسکوزیته یا فرقی آنکه شدایف جریان خونی برقرار است (۲۵.۱) ضریب درازگاری

$$\sigma_D = \frac{w}{Re} \quad \text{بین مانتو}$$

فاز استولس $F = 6\pi\mu V_e R$

$$\sum F = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$$

$$-6\pi\mu V_e R = 0 \Rightarrow \mu = \frac{2}{9} \frac{\rho R^2}{V_e} (\rho_s - \rho)$$

که در این رابطه V_e سرعت پتانسی (سرعت حد) شعاع گویه R شعاع گویه است و ρ_s و ρ به ترتیب چگالی گویه و سیال است

تمرین ۱۰

یک گویه با شعاع $50 \mu m$ در یک نمونه نفت با درجه API برابر 50 بسوزانید. حرکت آن در سیال پتانسی و شیب گویه برای تعیین قانون استوکس را بیان کنید.

حل

$$API = 141.5 / sp \cdot G_{60}^{60} - 131.5$$

$$sp \cdot G_{60}^{60} = 0.78 \Rightarrow \rho = 780 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_s = 2300$$

اگر سوال تصحیح دلی ندهد

بهترین مدل قابل استفاده

در $low \text{ } \rho_{\text{fluid}}$ است

$$u_2 = \frac{u_1 y_1}{y_2} \rightarrow u_2 = 2.9 \frac{m}{s} \quad Fr_2 = 0.5$$

مقدار انرژی از دست داده شده بر حسب متر head

$$h_f = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} \Rightarrow h_f = 0.63 \text{ m}$$

$$E_1 = H_1 = y_1 + \frac{u_1^2}{2g} \rightarrow H_1 = 4.5 \text{ m}$$

$$\% \text{ Loss} = \frac{h_f}{H_1} \times 100 = \% 14 \quad \text{Power} = Q \rho H$$

$$\text{Power} = \rho g Q h_f$$

توان تلف شده به ازای واحد عرض کانال

به ازای عرض $\frac{Q}{W}$

$$P = \frac{Q}{W} \rho g h_f \Rightarrow \rho = 61.3 \frac{kg}{m^3}$$

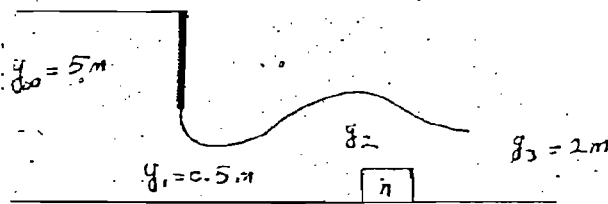
$$P = 9800 \frac{N}{m^3} \times 10 \frac{m^3}{m \cdot s} \times 0.625 \text{ m}$$

$$P = m \cdot c_p \Delta T \rightarrow P = \rho \frac{Q}{W} c_p \Delta T \Rightarrow \Delta T = 0.0015 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$m \cdot c_p = 10000 \frac{kg}{m^3} \times 10 \frac{m^3}{m \cdot s} = 10000 \frac{kg}{m \cdot s}$$

$$\text{Power Dissipated: } P = m \cdot c_p \Delta T \rightarrow 61300 \frac{W}{m} = 10000 \frac{kg}{m \cdot s} \times 4200 \frac{J}{kg \cdot ^\circ\text{C}}$$

مقادیر h_c و Fr_3 ، h در نظر گرفته شده است



$$\frac{Q}{W} = y_1 \sqrt{2g(y_2 - y_1)} \quad \frac{Q}{W} = 4.7 \frac{m^2}{s}$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{(Q/W)^2}{g}} \rightarrow y_c = 1.31 \text{ m}$$

$$Fr_1 = \sqrt{\left(\frac{y_c}{y_1}\right)^3} \rightarrow Fr_1 = 4.24$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1 \right) \Rightarrow y_2 = 2.76 \text{ m} \quad Fr_2 = 0.33$$

$$h_f = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} \rightarrow h_f = 2.1 \text{ m} \quad H_1 = H_2 = 5 \text{ m}$$

$$\mu = 33.1 \text{ kg/m.s} = 33.1 \text{ N.s/m}^2$$

$$N_R = \frac{\rho V D}{\mu} = 0.4770.1$$

تقریباً بی اثر است.

کشیته شکل لوله

$$N_R = 0.1 \Rightarrow VD = 4.24 \times 10^3$$

$$33.1 = \frac{2}{9} \frac{\rho g}{V_{ED}} R^2 (\rho - \gamma) \Rightarrow R = 27.7 \text{ mm}$$

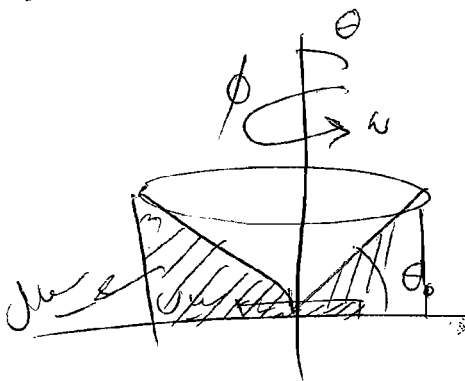
با مقدار 2 نسبت صبر است.

$$V_c = 0.15 \text{ m/s}$$

② Cone and Plate Viscometer

این دستگاه در برگیرنده صفحه تخت است و مخروط و این دو را با هم می‌چرخانند و در هر لحظه تغییر شکل می‌دهند به کار می‌روند.

مخروط با سرعت زاویه‌ای می‌چرخد. با داشتن تعداد وارده می‌توان ویسکوزیته



سیال را بدست آورد

هر چه غلظت ویسکوزیته بالایی داشته

یا نه آنقدر کم باشد برای چرخاندن

دید لازم است ویسکوزیته را

$$V_{\omega} = \frac{D^2 (\omega_1 - \omega_2)}{18 \mu}$$

$$Fr_1 = \frac{u_1}{\sqrt{g y_1}} \quad \frac{1}{2} g (y_1^2 - y_2^2) = u_2^2 y_2 - u_1^2 y_1$$

$$\Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1)$$

است ارتفاع بعد از پرش
برای پرش باید $N_{Fr_1} > 1$

$$\frac{Q}{w} = cte = y_1 u_1 = y_2 u_2$$

معادله پیوستگی

$$y_1 + \frac{u_1^2}{2g} = y_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_F$$

معادله انرژی

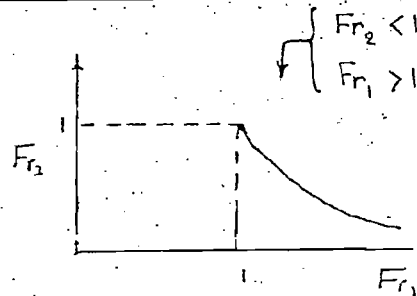
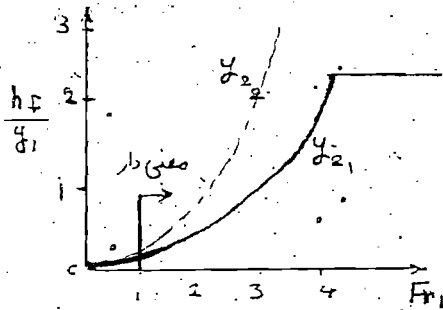
مقدار تلفات $\Rightarrow h_F = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2}$ واحد طول (m)

$$\frac{h_F}{y_1} = \frac{[(\frac{y_2}{y_1}) - 1]^3}{4 (\frac{y_2}{y_1})} \rightarrow \frac{h_F}{y_1} = f(N_{Fr_1})$$

$$\rightarrow \frac{Fr_1}{Fr_2} = \left[\frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1) \right]^{3/2}$$

با بزرگتر شدن تلفات افزایش پیدا می کند

با افزایش y_2 شیب بالایی رود $y_{22} > y_{21}$



برای تعیین y_2

مثال: مطلق است مناسبه h_F , Fr_2 , u_2 , y_2 در هر تلفات انرژی Q درون

$$\frac{Q}{w} = 10 \frac{m^3}{s} \left(\frac{m^2}{s} \right) y_1 = 1.25 m$$

تلف شده؟ و افزایش ما احتمالی

$$C_p = 4200 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$$

$$u_1 = \frac{(Q/w)}{y_1} = 8 \text{ m/s}$$

$$Fr_1 = \frac{u_1}{\sqrt{g y_1}} = 2.28 > 1$$

این مکان در قعر پرش هیدرولیکی وجود دارد

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1) \rightarrow y_2 = 3.46 m$$

ارتفاع محدوداً برابر شده است

* به دلیل اینکه N_{Fr} همچنان بزرگ است پس در نتیجه پرش همچنان بزرگ خواهد بود

با داده کردن معادله حرکت در راستای r, θ, ϕ می توان نوشت:

$$r\text{-direction: } -\rho \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{dP}{dr}$$

$$\theta\text{-direction: } -\rho r \omega \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dP}{d\theta}$$

$$0 = -\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + 2r \omega \frac{\tau_{\theta\phi}}{r} \right)$$

در صورتی فرض می‌کنیم

$$B.C.s: v_r = v_\theta = 0 \Rightarrow v_\phi = 0$$

$$v_\phi = 0 \Rightarrow v_\phi^2 = 0$$

v_ϕ نوسان

$$\phi \text{ راسته: } v_\phi = v(r, \theta) = \omega f(\theta)$$

علت انتخاب این شکل آن

این صفر می‌شود

$$\text{at } \theta = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \Rightarrow v_\phi = r\omega$$

$$\text{at } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_\phi = 0$$

در صورتی فرض می‌کنیم

$$\frac{v_\phi}{r} = f(\theta) \neq g(r) \Rightarrow \tau_{r\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau_{\theta\phi}}{d\theta} = -2r\omega \tau_{\theta\phi} \Rightarrow \tau_{\theta\phi} = \frac{A}{\sin^2 \theta}$$

با در نظر گرفتن w به عنوان پهنای کانال می توان حرکت برانوسیت

9
شروع
سبع / معادله

$$\left[\frac{1}{2} \rho g y_1 (y_1, w) - \frac{1}{2} \rho g y_2 (y_2, w) \right] = \rho (u_2 y_2 w u_2 - u_1 y_1 w u_1)$$

موتور

$$\frac{1}{2} \rho [y_1^2 - y_2^2] = u_2^2 y_2 - u_1^2 y_1$$

$$N_{F,1} = \frac{u_1}{\sqrt{g y_1}}$$

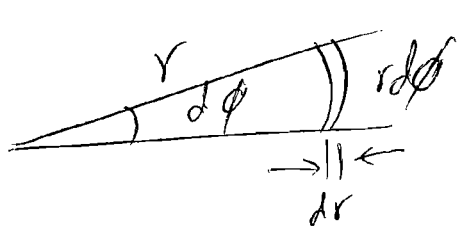
$$\frac{Q}{w} = cte = y_1 u_1 = y_2 u_2$$

معادله پیوستگی

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 N_{F,1}^2} - 1 \right]$$

پس حتما باید جهت برش $y_1 < y_2$; حتما از لب بزرگتر باشد

برای حساب A فرض می‌کنیم که در دایره به نصف ثابت τ (تعمیرات)



$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^R r (\tau_{\theta\phi} | r dr d\phi)$$

$$\Rightarrow A = \frac{3T}{2\pi R^3} \Rightarrow \tau_{\theta\phi} = \frac{3T}{2\pi R^3 \sin^2 \theta}$$

درسته کردی :-

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_{\phi}}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \phi} \right]$$

برای حالت کره ای

$$\left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_{\phi}}{\sin \theta} \right) \right]^{n-1}$$

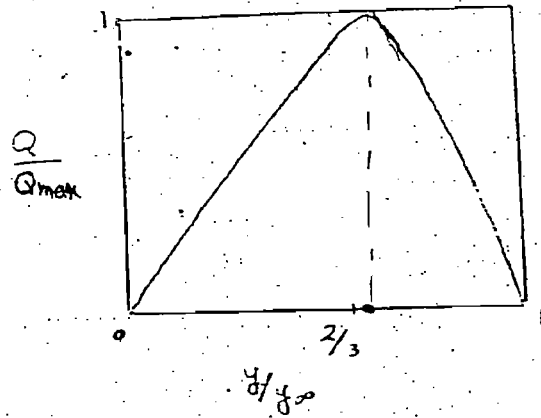
$$\Rightarrow \frac{3T}{2\pi R^3 \sin^2 \theta} = -\mu \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_{\phi}/r}{\sin \theta} \right) \Rightarrow \frac{3T}{2\pi R^3} = A$$

$$\frac{V_{\phi}}{r} = f(\theta) \rightarrow \frac{A}{\sin^2 \theta} = -\mu \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{f(\theta)}{\sin \theta} \right)$$

$$\Rightarrow f'(\theta) \sin \theta - f(\theta)$$

$$y = 4 \text{ m} \rightarrow \frac{Q}{w} = 17.7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \rightarrow y_c = 3.17 \text{ m} \Rightarrow Fr = 0.7$$

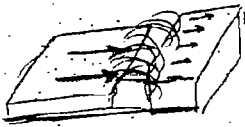
امکان حل با مستقیم گیری
از $\frac{Q}{Q_{max}}$ از یک
هم وجود داشت



Hydraulic jump

پرش هیدرولیکی

* از Fr بزرگتر Fr کم می‌رود



پرش هیدرولیکی پدیده‌ای است که بین تغییر حالت جریان
subcritical جریان می‌شود. روابط بار زیاد انرژی جریان است و به همین
علت کاربرد ندارد. در حالت
جریان مثال می‌توان از تکیه کردن انرژی در جریان بالای سد یا بازتابی ارتفاع سطح آب

چون از لحاظ
لایه مرزی صرف نظر کردیم
پس سرعت حرکت
Uniform دارن



$$Fr_1 > 1$$

$$Fr_2 < 1$$

پرش هیدرولیکی در طول مسیر کانه‌ها (معدن y_2) رخ می‌دهد. لذا مقدار اعلان تابی از shear
درت قابل تأخیر است.

نیای کابل w

$$\frac{1}{2} \rho g y_1^2 w - \frac{1}{2} \rho g y_2^2 w = \rho (u_2 y_2 w u_2 - u_1 y_1 w u_1)$$

$$f(\theta) = V(\theta) \times V(\theta)$$

$$V(\theta) = \exp \left[- \int \left(\frac{-\omega \theta}{\sin \theta} \right) d\theta \right] = \sin \theta$$

$$U(\theta) = \int \left(\frac{-A/\mu \sin \theta}{\sin \theta} \right) d\theta + B$$

$$U(\theta) = \frac{A}{\mu} \omega \theta + B \quad \rightarrow \quad f(\theta) = \sin \theta \left[\frac{A}{\mu} \omega \theta + B \right]$$

$$\frac{V_\phi}{r} = \sin \theta \left[\frac{A}{\mu} \omega \theta + B \right]$$

$$\text{B.C. 1: at } \theta = \frac{\pi}{2} ; V_\phi = 0$$

$$\text{B.C. 2 at } \theta = \frac{\pi}{2} - \theta_0 ; V_\phi = r\omega \Rightarrow B = 0$$

$$\omega = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \left[\frac{A}{\mu} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \right] \rightarrow \omega = \omega \theta_0 \left[\frac{A}{\mu} \theta_0 \right] = \omega$$

$$= \frac{A}{\mu} \sin \theta_0$$

$$\Rightarrow \frac{V_\phi}{r} = \sin \theta \frac{\omega}{\sin \theta_0} \text{ at } \theta_0 = \omega \frac{\omega \theta_0}{\sin \theta_0}$$

$$\Rightarrow \frac{V_\phi}{r} = \omega \frac{\omega \theta_0}{\sin \theta_0} \Rightarrow \mu = \frac{A \sin \theta_0}{\omega} = \frac{3I \sin \theta_0}{2\pi R^3 \omega}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{3I \sin \theta_0}{2\pi R^3 \omega}$$

برای مقدار μ (کشادگی) در این حالت θ_0 را می‌توانیم از این معادله پیدا کنیم (معادله 10)

فلت : خرگاه ارتفاع مانع از h_c بیشتر باشد خیال نمی تواند از روی مانع عبور نماید به منظور
 عبور دادن خیال دائم $\frac{Q}{w}$ بر روی y افزایش یابد تا مقدار H به حداقل مقدار لازم (H_{min})

$H_{tot} = H_{min} + h_c$ برسد

عبور عبور خیال از مانع بیشتر h_c می شود

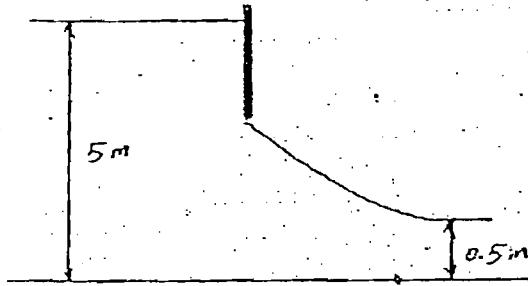
مثال : مطلوب است محاسبه $(\frac{Q}{w})_{max}$

چون مانع ندارد ، همین انرژی کم نمی شود

$H_{tot} = H + h$ قبل از مانع

← صورتی چون مانع ندارد

$\frac{Q}{w} = y \sqrt{2g(H-y)}$



درجه استمر (مانع) نریج کاهش H نمی شود

خرگاه مقدار آب زیاد باشد می توان فرض کرد y_c ثابت است و مقدار H نیز معینی باشد

$H_{tot} = H = 5m$ ← عدم تغییر ارتفاع

$y_c = 0.5m$

$\frac{Q}{w} = y \sqrt{2g(H-y)}$



$\frac{Q}{w} = 4.7 \frac{m^2}{s}$

$y_c = \left[\frac{(\frac{Q}{w})^2}{g} \right]^{1/3} = 1.31 m$

$Fr = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{3/2} = 4.24$

محل شدن با درجه کوچک Fr بالا
 می دهد یعنی برسد زیاد

جاباز شدن درجه (افزایش y) مقدار Fr کاهش مقدار $\frac{Q}{w}$ افزایش می یابد

درجه ای 0.5 (اندازه) بازیم
 محاسبه y_c زمانی است که
 $y = \frac{2}{3} H = 3.33 m \rightarrow (\frac{Q}{w})_{max}$
 در H

مخالفت محلیه ، Fr برابر 1 رخ می دهد

$(\frac{Q}{w})_{max} = \sqrt{\frac{8}{27} g H^3} = 19.05 \frac{m^2}{s}$

خرگاه درجه پس از این باز شود مقدار $\frac{Q}{w}$ کاهش می یابد

$(\frac{Q}{w}) = 19.05 \frac{m^2}{s}$

$y_c = 3.33 m \rightarrow Fr = 1$

با بیشتر بارش درجه مثلا $y = 4$ ، $y_c = 3.17 m$ ، $N_F = 0.7$

امکان ندارد حالت الف رخ دهد یعنی Fr از یک بزرگتر شود زیرا ،

در صورت

داده های زیر را با یکدیگر مقایسه کنید (Cone & Plate)
 $\theta_0 = 0.1 \text{ rad}$
 $R = 2.5 \text{ cm}$

برای سائل بدمت (برای سائل با ویسکوزیته بالا و ویسکوزیته پایین) این دو حالت را مقایسه کنید

ω (rad/s)	T (N.m)
0.0001	0.0033
0.001	0.03
0.01	0.26
0.1	1
1	2.2
10	9.3
100	66

ط

$$\tau_{r\theta} = \frac{3T}{2\pi R^3 \sin^2 \theta}$$

$$\gamma = \frac{\tau_{r\theta}}{\mu}$$

$$\mu = \frac{3T \sin \theta_0}{2\pi R^3 \omega}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\omega}{\sin \theta_0}$$

$\theta = 90$ \cup $\theta_0 = 5.73^\circ$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\omega}{\sin \theta_0}}$$

$$\frac{Q}{w} = 5 \frac{ft^2}{s} ; y_{\infty} = 2 ft$$

مثال: جریان آب در داخل کانال

$$y_c = \left[\frac{(Q/w)^2}{g} \right]^{1/3} = 0.92 ft$$

$$Fr_{\infty} = \left(\frac{y_{\infty}}{y_c} \right)^{3/2} = 0.31 < 1$$

$$H_{\infty} = \frac{(Q/w)^2}{2g y_{\infty}^2} + y_{\infty} = 2.1 ft$$

$$H_{min} = \frac{3}{2} y_c = 1.38 ft$$

$$H_{\infty} = H_{min} + h_c \Rightarrow h_c = 0.72 ft$$

$$H = H_{\infty} - h = 2.1 - 0.5 = 1.6 ft$$

ارتفاع سبیل سرریز

$$h = 0.5$$

ارتفاع مانع

$$\frac{H}{y_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y} \right)^2 + \frac{y}{y_c} \rightarrow y = 1.4 ft$$

$$Fr = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{3/2} = 0.53$$

ردی مانع



کوتاه: ارتفاع مانع معادل ارتفاع متعاقب (h_c) باشد در حالت ممکن ارتفاع دهد

$$h_c + y_c = 0.72 + 0.92 = 1.64 ft$$

$$\Rightarrow 2 - 1.64 = 0.36 ft$$

$$H_{\infty} = 2.1 \rightarrow \frac{H_{\infty}}{y_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y} \right)^2 + \frac{y}{y_c}$$

$$y = 2 \rightarrow Fr = 0.31$$

$$y = 0.49 \rightarrow Fr = 2.56$$



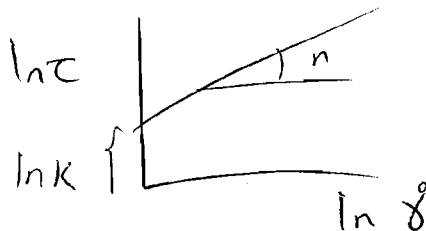
بعد از مانع به صورت $H = H_{\infty}$ در این حالت

در افتادن سبیل این رخ می دهد

δ	τ	μ
101		100680
917		91554
7945		79323
30558		30529
67227		

$$\tau = 18895.2 \delta^{0.672}$$

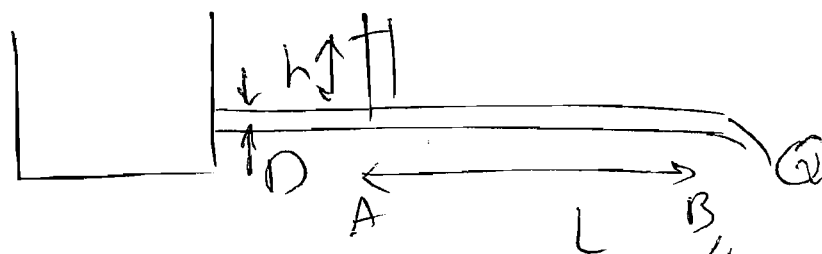
$$\tau = k \delta^{n+1}$$



بنابراین منحنی پلاستیسیته است چون $n = 0.672 < 1$

③ Capillary rheometer (Viscosimeter)

این دستگاه برای اندازه گیری ویسکوزیته مایعات نیوتونی و غیر نیوتونی در فشار بالا و دما بالا استفاده می‌شود. در این دستگاه برای نزع فشار تنش برشی سید، برقیته مایعات



با توجه به فشار زیاد این دستگاه در مخزن و در این حالت می‌توان از معادله Hagen-Poiseuille، نوشت:

$$P_A - P_B = \frac{128 Q L \mu}{\pi D^4}$$

از دیدگاه تفاوت فشار در نقطه A, B می‌توان برابری ارتفاع ستون مایع را نوشت:

$$P_A - P_B = \rho g h$$

مثال: جریان آب در داخل کانال با مساحت داده شده صورت می گیرد. جریان سیل را بررسی کنید:

$h = 0.5$ $\frac{Q}{w} = 5 \frac{ft^2}{s}$ $y_{\infty} = 2 ft$

$y_c = \left[\frac{(Q/w)^2}{g} \right]^{1/3} = 0.92 ft$

$Fr_{\infty} = \left(\frac{y_c}{y_{\infty}} \right)^{3/2} = 0.31 < 1$

$H_{\infty} = \frac{(Q/w)^2}{2g y_{\infty}^3} + y_{\infty} = 2.1 ft$

$H_{min} = \frac{3}{2} y_c = 1.38 ft$

$H_{\infty} = H_{min} + h_c \Rightarrow h_c = 0.72 ft$

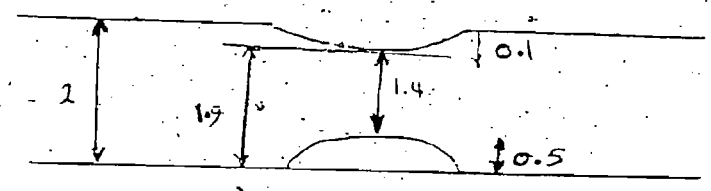
اگر h برابر h_c شود Fr برابر 1 می شود.

ارتفاع سیل $H = H_{\infty} - h = 2.1 - 0.5 = 1.6 ft$

ارتفاع مانع $h = 0.5$

$\frac{H}{y_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y} \right)^2 + \frac{y}{y_c} \rightarrow y = 1.4 ft$

$Fr = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{3/2} = 0.53$ روی مانع



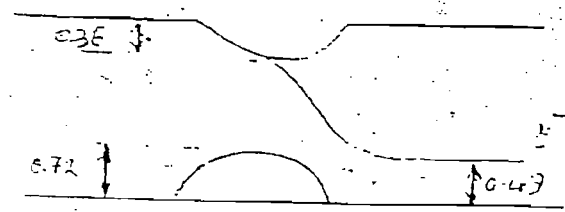
حرکت ارتفاع مانع معادل ارتفاع بحرانی (h_c) باشد دو حالت ممکن است رخ دهد

روی مانع Fr برابر 1 شود

$h_c + y_c = 0.72 + 0.92 = 1.64 ft$

$\Rightarrow 2 - 1.64 = 0.36 ft$

$H_{\infty} = 2.1 \rightarrow \frac{H_{\infty}}{y_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y} \right)^2 + \frac{y}{y_c} \left\{ \begin{array}{l} y = 2 \rightarrow Fr = 0.31 \\ y = 0.48 \rightarrow Fr = 2.56 \end{array} \right.$



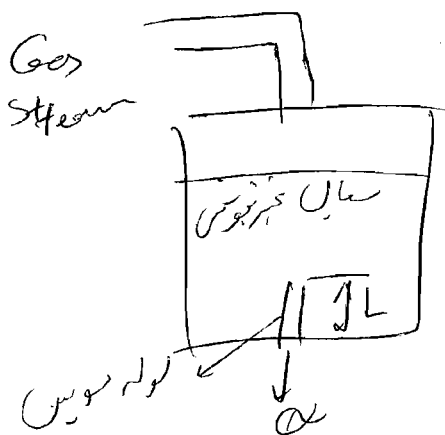
بعد از مانع مجدداً $H = H_{\infty}$ می شود در این حالت

دو امکان ممکن است رخ دهد

ما برابر خواهد بود این دو رابطه می توان نوشت :

$$\mu = \frac{\pi D^4 \rho g \left(\frac{h}{L}\right)}{128 Q}$$

ضمیمه و سیکورته نمیشود این نام Oswald Viscosity مترها شناخته شده است. این دستگاه
 این دستگاه برابر شکل زیر بصورت عمودی مترهاست.



با در نظر گرفتن همدگر و نیز گاهی از برای جریان می توان رابطه نوین مناسبی را استخراج نمود
 مترها در دستگاه کوپولوموئین به صورت آرد در

$$\Delta P \pi \frac{d^2}{4} = \tau_0 \pi d L \Rightarrow \tau_0 = \frac{\Delta P d}{4 L}$$

در این دستگاه
 در این دستگاه
 می توان
 نوشت

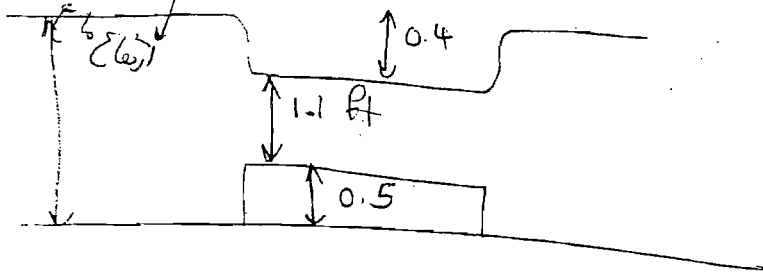
$$\tau_{\text{max}} = \frac{\Delta P r}{2 L} \Rightarrow \tau_{\text{max}} = \tau_0 \frac{r}{R}$$

$$N_{F,2} = 1 \quad y_2 = y_c = 1.1 \text{ ft}$$

$$u_2 = \frac{Q}{4 \times 1.1} = 6.2 \text{ ft/s}$$

$$2 + \frac{u_1^2}{2g} = h_c + 1.1 + \frac{u_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h_c = 0.5 \text{ ft}$$



* اگر تک ذره ارتفاع مانع بیشتر شود تده سیل ردهی شود و

در آن ایستگ سیل نب این مانع ارتفاع بالای رود و بعد عبوری که

$$y_c = 1.1$$

$$h_c = 0.5$$

$$y_2 = \frac{27}{4 u_2}$$

Steady state rate at wall $\Rightarrow \left(-\frac{du}{dr}\right)_{u(r=R)} = \frac{8V}{D} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{d \ln \left(\frac{8V}{D} \right)}{d \ln \left(\frac{D \Delta P}{4L} \right)} \right]$

Power law $\Rightarrow n = \frac{d \ln \left(\frac{D \Delta P}{4L} \right)}{d \ln \left(\frac{8V}{D} \right)} \Rightarrow \left(-\frac{du}{dr}\right)_w = \frac{8(n+1)V}{4n(D)}$

نقطة $n=1$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{32\mu V}{D^2} \Rightarrow \frac{D \Delta P}{4L} = \frac{8V}{D} \mu$$

$$\Rightarrow \ln \frac{D \Delta P}{4L} = \ln \frac{8V}{D} + \ln \mu$$

نقطة: $\frac{d \ln \left(\frac{D \Delta P}{4L} \right)}{d \ln \left(\frac{8V}{D} \right)} = n=1 \Rightarrow \left(-\frac{du}{dr}\right) = \frac{8V}{D}$

$$\Rightarrow n = \frac{d \ln \left(\frac{D \Delta P}{4L} \right)}{d \ln \left(\frac{8V}{D} \right)} \Rightarrow \tau_w = \frac{D \Delta P}{4L} = k \left(\frac{8V}{D} \right)^n$$

نقطة $n=1$
Power law

$$A = \frac{D \Delta P}{4L} \quad B = \frac{8V}{D} \Rightarrow d \ln A = n d \ln B$$

$$\ln A = n \ln B + \ln k$$

اگر ارتفاع مانع از h_c (ارتفاع بحرانی) کمتر باشد، سیال نمی تواند از روی

مانع عبور نماید. به منظور عبور دادن سیال باید $\frac{Q}{w}$ و یا y افزایش یابد تا مقدار h به کمینه مقدار لازم (H_{min}) برسد.

$$H_{\infty} = H_{min} + h_c$$

انرژی مانع

h_c حداکثر ارتفاعی که مانع می تواند داشته باشد چون H_{∞} ثابت است و H_{min} است. پس h_c ماکزیمم است.

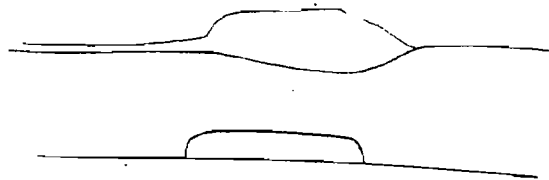
$Q = 27 \text{ cfs}$

$h = 0.3 \text{ ft}$

$w = 4 \text{ ft}$

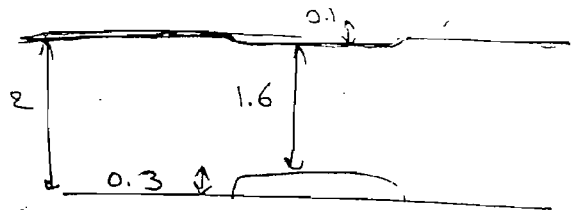
ارتفاع اولی $y_1 = 2 \text{ ft}$
آب

مطلوب است محاسبه ارتفاع بحرانی مانع و توزیع سطح آب در کانال



$$y_c = \left(\frac{(Q/w)^2}{g} \right)^{1/3} = 1.1 \text{ ft}$$

$$N_{F1} = \left(\frac{y_c}{y_1} \right)^{3/2} = 0.4$$



$$2 + \frac{u_1^2}{2g} = 0.3 + y_2 + \frac{u_2^2}{2g}$$

بدرستی $Q = 27 = 4 \times 2 \times u_1 = 4 \times y_2 \times u_2$

$u_1 = 3.4 \text{ ft/s}$ ، $u_2 = 4.2 \text{ ft/s}$ & $y_2 = 1.6 \text{ ft}$

$N_{F2} = 0.5 \text{ ft}$

ارتفاع کانال = $2 - (1.6 + 0.3) = 0.1 \text{ ft}$

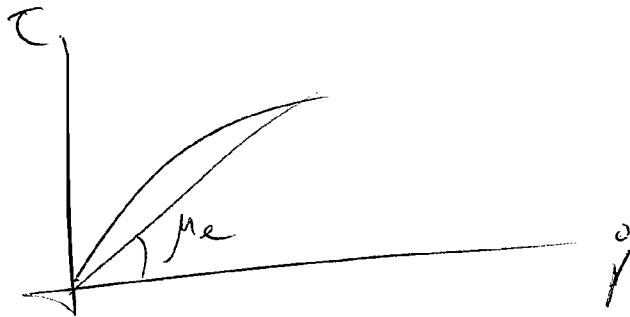
در نهایت آردن این معادله فرض سیال جریان آرام است. براساس این در دسترس فرض
 ما به آردن از عدد رینولدز کمتری شد.

$$Re_g = \frac{D^n V^{2-n} \rho}{K \theta^{n-1}} < 2100 \quad \rightarrow \quad Re_g = \frac{\rho V D}{\mu_e}$$

$$\mu_e = \frac{\tau_w}{\frac{8V}{D}} \rho c$$

μ_e دینویزیدت

در هر سطح تقس اگر ظاهر سدا منتفات به شش شش بران



$$\mu_e = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

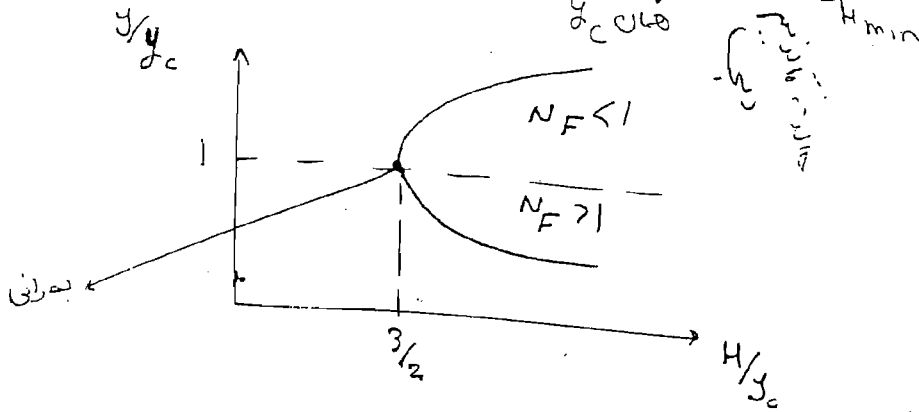
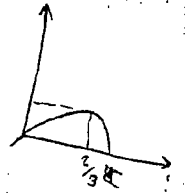
$$H = y + \frac{(Q/w)^2}{2gy^2}$$

$$\frac{H}{y_c} = \frac{y}{y_c} + \frac{(Q/w)^2}{2gy_c y^2} = \frac{y}{y_c} + \frac{y_c^3 g}{2gy_c y^2} = \frac{y}{y_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{y_c}{y} \right)^3$$

این معادله اساسی بررسی جریان در کانال‌های باز است.

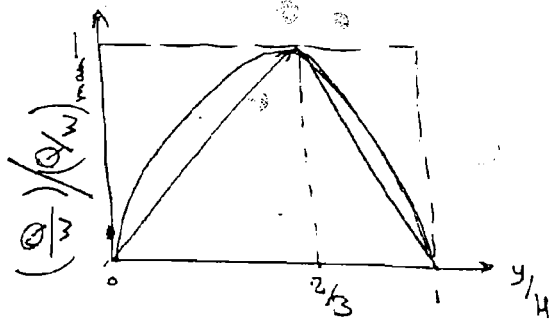
$$H_1 = H_2 = y + \frac{(Q/w)^2}{2gy^2} \Rightarrow (Q/w) = y \sqrt{2g(H-y)} \Rightarrow$$

$$\frac{d(Q/w)}{dy} = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} H$$



$$\left(\frac{Q}{w} \right)_{\max} = \sqrt{\frac{8}{27} g H^3} \quad (N_F = 1)$$

$$\frac{Q/w}{(Q/w)_{\max}} = \frac{y \sqrt{2g(H-y)}}{\sqrt{(8/27) g H^3}} = \left[\left(\frac{27}{4} \right) \left(\frac{y}{H} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{H} \right) \right]^{0.5}$$



داده شده است برای بیان مادسیته 70 lbm/hr^3 در دما 70°F با دستگاه اندازه گیری و یکویته و سه بدت کرده در دما 70°F و سه در آن وقت؟

psi	وقت lbm/hr	طول لوله in	قطر لوله in
445	894	5	5
		5	5
	129	6	6
		10	10
		10	15
		6	15

حل =

$$\frac{QV}{D} = \frac{32Q}{\pi D^3} = \frac{32 \text{ m}}{3600 \pi D^3} (5^{-1})$$

$$\tau_w = \frac{D \Delta P}{4L} \times 144 \left(\frac{\text{lb}_f}{\text{ft}^2} \right)$$

$$\mu_c = \frac{\tau_w}{QV} g_c$$

$$Re = \frac{\rho D v}{\mu_c}$$

در بدت آه

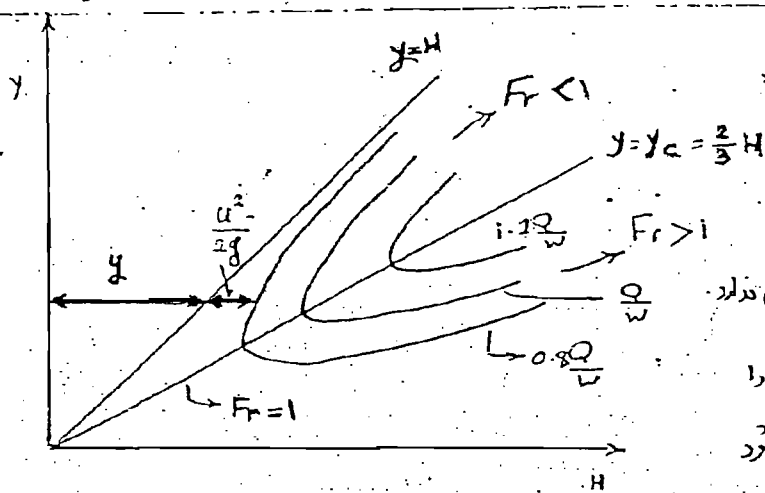
Re	μ_c	τ_w	$\frac{QV}{D}$
0.0074	3.1	100	500

نقش μ_c برابر QV/D است. بنابر این قانون ساینر است. از همین و در مقدار $\frac{QV}{D}$

در آن μ_c مقدار n, k, μ ثابت

اگر صورت $n = 1$ است $\mu_c = \mu$
 اگر $n < 1$ است $\mu_c < \mu$
 اگر $n > 1$ است $\mu_c > \mu$

* w : پهلو



بررسی تغییرات H در حین Q :

y_c : تابع جریان است که با تغییر Q تغییر می‌کند.
 داده‌های آن می‌تواند با Fr یا Q/w یا H را
 مشاهده کرد. اگر در معادله $y = y_c$ مقدار
 در آن نقطه $Fr = 1$ اعتبار دارد.

$$y = y_c = \frac{2}{3} H$$

1 - هر منحنی دلتای یک حداقل می‌باشد.

$Fr > 1$ & $Fr < 1$

2 - هر منحنی از دو منحنی شکل شده است.

$$y \cdot \left(\frac{Q/w}{y} \right)^2 \cdot \frac{1}{g} = y^3 \Rightarrow g y^3 = \left(\frac{Q}{w} \right)^2 = y^2 u^2 \Rightarrow \frac{u^2}{g y} = 1 \rightarrow \frac{u}{\sqrt{g y}} = 1 \Rightarrow Fr = 1$$

نتیجه: حداقل منحنی H بر روی خط $y = \frac{2}{3} H$ قرار می‌گیرد. در این درجه این است که $Fr = 1$ باشد. به عبارت دیگر در Critical Flow مقدار H حداقل می‌باشد.

$$y_c = \left[\frac{(Q/w)^2}{g} \right]^{1/3} \Rightarrow \frac{Q}{w} = \sqrt{g y_c^3}$$

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g y}} = \frac{Q/w}{y \sqrt{g y}} = \frac{Q/w}{\sqrt{g y^3}} = \frac{\sqrt{g y_c^3}}{\sqrt{g y^3}} = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{3/2}$$

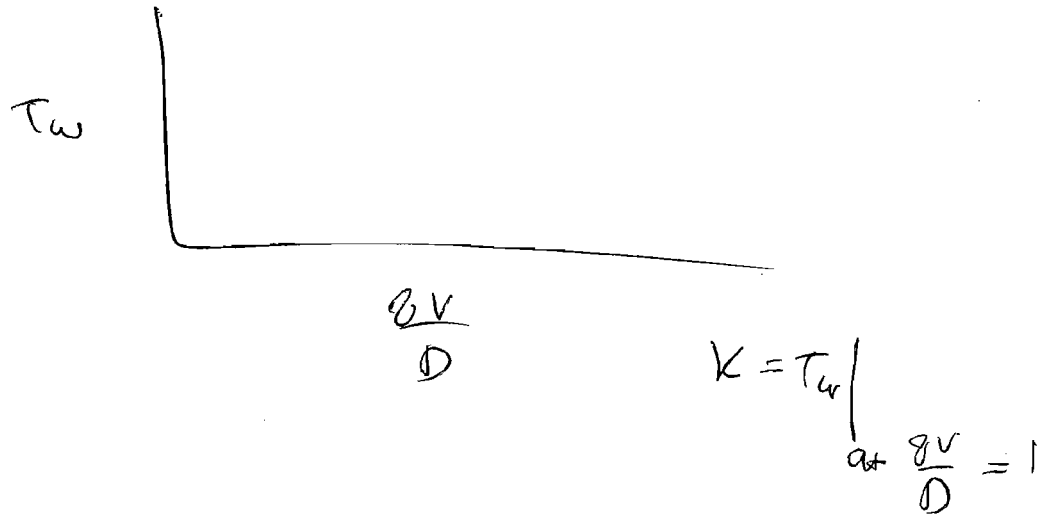
در صورت نادانی y_c حالت $y = \frac{2}{3} H$

$y > y_c \Rightarrow Fr < 1$: subcritical flow

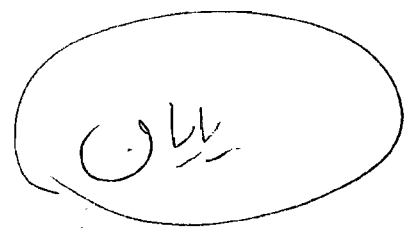
$y < y_c \Rightarrow Fr > 1$: supercritical flow

$$h_c = \frac{3}{2} y_c \text{ (معمولاً)} \quad H_c = \frac{3}{2} y_c + h_c \quad \leftarrow H_{min} = \frac{3}{2} y_c, \quad H_c = H_{min} + h_c = y_c \text{ در } H_c = H + h$$

$$K=12 \quad \frac{\tau_w}{D} = 350 \text{ (s)}^{-1} \rightarrow n = \frac{\ln 200 - \ln 20}{\ln 800 - \ln 3.3} = 0.42$$

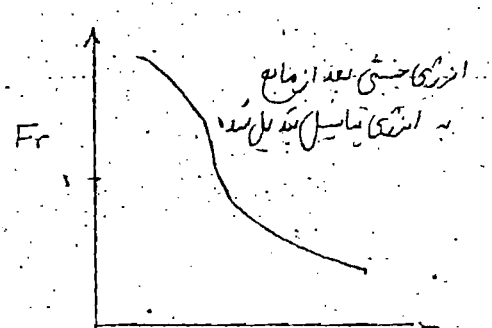
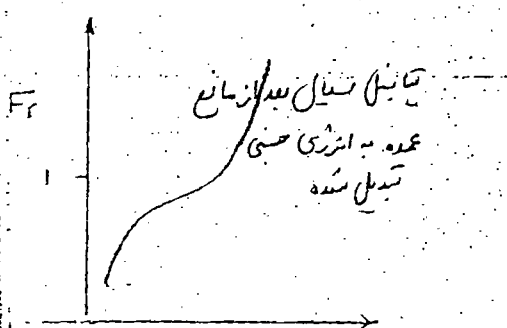
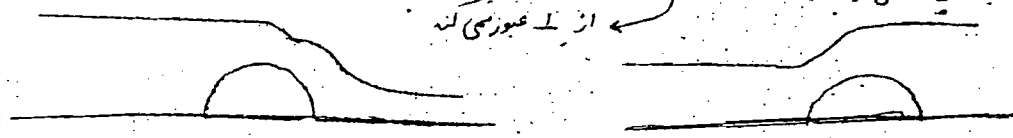


④ Concentric Cylinder Rotary Viscometer

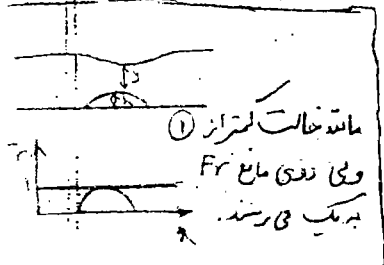


در این حالت پدیده‌ها شرایط Down stream چو حالت مکن اختارخ بعد
 یابن دست

ا) جریان مطابق شکل (الف) حرکت خود ادامه دهد (عبور جریان از حالت Transition و ادامه به حرکت
 ب) جریان مطابق شکل (ب) از حالت Transition عبور کند
 از \perp عبور کند



at $\frac{dh}{dx} = 0 \Rightarrow Fr = 1$



در هر دو حالت مطابق شکل Fr در ذروت مانع مازاد یک می باشد

در هر دو حالت به $Fr = 1$ می رسیم. $Fr = 1$ حتما در ذوک مانع رخ می دهد ولی در بعضی آن اتفاق می افتد

حالت 1) $\frac{dh}{dx} = 0$ در این حالت $Fr = 1$ در ذروت مانع رخ می دهد و در بعضی آن اتفاق می افتد

حالت 2) در این حالت $Fr = 1$ در نقطه رأس مانع رخ می دهد و در بعضی آن اتفاق می افتد

$$H = \frac{Q^2}{2g y^3} + y = y_c + h$$

$$H = y_c + \frac{Q^2}{2g y^3}$$

$H_{min} = H_c + h$

$$\frac{dH}{dy} = 0 \Rightarrow y_c = \left(\frac{Q^2}{g} \right)^{1/3}$$

$H_{min} = \frac{3}{2} y_c$

حد اقل ارتفاع سیال که می تواند به آن برسد

در روی مانع

Equation of motion for a newtonian fluid with constant ρ and μ

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g}$$

معادلات نوتن →

1. Cartesian Coordinates (x, y, z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

2. Cylindrical Coordinates (r, θ, z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

3. Spherical Coordinates (r, θ, ϕ)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 - v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} \right] + \rho g_r$$

the equation of motion in terms of τ

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$$

در سطح این قسم
استاد در دسترس

1. Cartesian Coordinates (x, y, z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] + \rho g_z$$

2. Cylindrical Coordinates (r, θ, z)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z$$

3. Spherical Coordinates (r, θ, ϕ)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

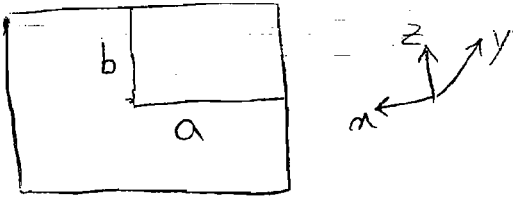
the equation of Continuity

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot v) = 0$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$



معادله حرکت (مکانیک):

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

$$\Rightarrow + \frac{\partial P}{\partial y} - \rho g_y = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{L} = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \frac{\Delta P}{L\mu} \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\Delta P}{L\mu} z + A$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{\Delta P}{2L\mu} z^2 + Az + B$$

B.C. : $z = +b \rightarrow v_y = 0$
 $z = -b \rightarrow v_y = 0$

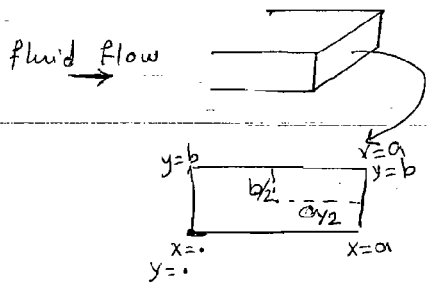
$$\Rightarrow \frac{\Delta P b^2}{2\mu L} - Ab + B = \frac{\Delta P}{2\mu L} b^2 + Ab + B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = A \cdot 2b \rightarrow \boxed{A = 0} \\ B = -\frac{\Delta P}{2\mu L} b^2 \end{cases}$$

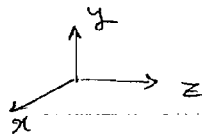
$$\Rightarrow v_y = \frac{\Delta P}{2\mu L} z^2 - \frac{\Delta P}{2\mu L} b^2 = \frac{-\Delta P b^2}{2\mu L} \left(1 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right) = \boxed{\frac{b^2 \Delta P}{2\mu L} \left(1 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right)}$$



homework: velocity distribution in triangular duct



cartesian coordinate



Equation of Motion For A Newtonian Fluid with constant ρ and μ

($v_x = 0, v_y = 0$)

Z-direction

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$$

Annotations:
 - $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$ (For steady state)
 - $v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$ (assumption)
 - $v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0$ (assumption)
 - $v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ (fully developed)
 - $\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0$ (extended flow)
 - linear change ($\Sigma F = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$)

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_0}{L} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{P_1 - P_0}{\mu L} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}$$

$\frac{P_1 - P_0}{\mu L} = R$
 $v_z = v$
 $\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = R$ (1) (PDE) poisson equation

B.C: $\begin{cases} x=0 \rightarrow v(0, y) = 0 \\ x=a \rightarrow v(a, y) = 0 \\ y=0 \rightarrow v(x, 0) = 0 \\ y=b \rightarrow v(x, b) = 0 \end{cases}$

For changing poisson equation to laplace equation.

We need change of variable:

$$v(x, y) = w(x, y) + \frac{x^2 R}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \quad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = 0$$



$$\begin{aligned}
 x=0 &\rightarrow v(x,y) = 0 \Rightarrow w(x,y) = 0 \\
 3.c \quad \left\{ \begin{array}{l} x=a \rightarrow v(a,y) = 0 \Rightarrow w(a,y) = -\frac{\alpha^2 R}{2} \\ y=0 \rightarrow v(x,0) = 0 \Rightarrow w(x,0) = -\frac{x^2 R}{2} \\ y=b \rightarrow v(x,b) = 0 \Rightarrow w(x,b) = -\frac{x^2 R}{2} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x,y) = 0 \\ w(a,y) = -\frac{\alpha^2 R}{2} \\ w(x,0) = 0 \\ w(x,b) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} w(x,y) = 0 \\ w(a,y) = 0 \\ w(x,0) = -\frac{x^2 R}{2} \\ w(x,b) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} w(x,y) = 0 \\ w(a,y) = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w(x,b) = -\frac{x^2 R}{2} \end{array} \right.$$

\downarrow w_1 \downarrow w_2 \downarrow w_3

$$w(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y) + w_3(x,y)$$

Separation of variable

$$w_3(x,y) = X(x) Y(y)$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\sigma \quad X(0) = X(a) = 0 \quad Y(0) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' + \sigma X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{array} \right.$$

$$\sigma_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x \quad n = 1, 2, 3$$

$$-\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \Rightarrow Y(y) = C_1 \cosh \lambda y + C_2 \sinh \lambda y$$

$$\text{if } Y(0) = 0 \Rightarrow Y(y) = C_2 \sinh \lambda y \Rightarrow$$

$$Y_n(y) = \sinh \lambda_n y$$

$$w_{3n}(x,y) = X_n(x) Y_n(y) = \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y \Rightarrow$$

$$w_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y$$

$$\text{B.C. : } w(x,b) = -\frac{x^2 R}{2}$$

$$-\frac{x^2 R}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n b$$

10

11

12

13

3/

Fourier Coefficient:

$$A_n \sinh \lambda_n b = \frac{2}{b} \int_0^b \frac{-x^2 R}{2} \sin \lambda_n x \, dx \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{b \sinh \lambda_n b} \int_0^b \frac{-x^2 R}{2} \sin \lambda_n x \, dx$$

at now, we consider w_1 .

Similarly for w_1 :

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n y \sinh \lambda_n x \quad A_n = \frac{2}{b \sinh \lambda_n b} \int_0^b \frac{-x^2 R}{2} \sin \lambda_n y \, dy$$

For w_2 :

$$w_2^{(m)} = X(x) Y(y)$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\sigma$$

$$X(0) = X(a) = 0 \quad Y(b) = 0$$

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$-\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \Rightarrow Y(y) = C_1 \cosh \lambda y + C_2 \sinh \lambda y$$

$$\text{if } Y(b) = 0 \Rightarrow C_1 \cosh \lambda b + C_2 \sinh \lambda b = 0$$

$$C_1 = -C_2 \tanh \lambda b$$

$$Y(y) = -C_2 (\cosh \lambda y + \tanh \lambda b \sinh \lambda y)$$

10 10

10

10

10

10

10

10

$$4) \quad Y(y) = C_2 \left(\frac{\sinh \lambda (y-b)}{\cosh \lambda b} \right)$$

$$Y_n(y) = \frac{\sinh \lambda_n (y-b)}{\cosh \lambda_n b}$$

$$W_{2n}(x,y) = A_n(x) Y_n(y) = \sinh \lambda_n x \frac{\sinh \lambda_n (y-b)}{\cosh \lambda_n b}$$

$$\Rightarrow W_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n x \frac{\sinh \lambda_n (y-b)}{\cosh \lambda_n b}$$

$$\text{if } (W_2(x,0) = -\frac{x^2 R}{2}) \Rightarrow$$

$$-\frac{x^2 R}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n x \frac{\sinh \lambda_n (0-b)}{\cosh \lambda_n b}$$

$$A_n \sinh \lambda_n b = \frac{2}{b} \int_0^b \frac{x^2 R}{2} \sinh \lambda_n x \, dx$$

$$A_n = \frac{2}{b \sinh \lambda_n b} \int_0^b \frac{x^2 R}{2} \sinh \lambda_n x \, dx$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$D(x,y) = W(x,y) + \frac{x^2 R}{2}$$