ریاضیات پیشرفته ۲

دکتر نوری

جلسه اول: « یکشنبه ۵ مهر ۱۳۸۸ »

سرفصل‌ها و روش‌های مورد مطالعه در این درس
$$\begin{cases} \text{Variational} \\ \text{perturbation} \\ \text{Green's function} \\ \text{Similarity} \end{cases}$$

$$F(x,y,t)=0 \begin{cases} \text{Lumped System} \qquad F=F(t) \\ \\ \text{Distributed System} \qquad F=F(\vec{r},t)=F(x,y,z,t) \begin{cases} \text{Analytical method} \\ \text{Numerical method} \\ \text{Integral method} \\ \text{Variational method} \\ \text{perturbation} \\ \text{Green's function} \\ \text{Similarity} \end{cases} \end{cases}$$

✓ وضعیت lumped مثلاً در نقره که هدایت حرارتی بالایی دارد و دمای آن بیشتر تابع زمان است تا مکان و همچنین در ترموکوپل به دلیل ابعاد کوچک آن وجود دارد.

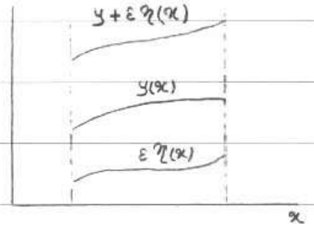
---

variational

$$I=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

✓ به جای اپراتور انتگرال هر اپراتور دیگری می‌تواند قرار گیرد.

✓ به دنبال یافتن تابع y ای هستیم که I را ماکزیمم کند.



$$\Delta F = F(x,\, y+\varepsilon\eta,\, y'+\varepsilon\eta') - F(x,y,y')$$

$$I=\int_a^b F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta') = I(\varepsilon)$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=\delta\int_a^b F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')\,dx$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial(y+\varepsilon\eta)}\eta + \frac{\partial F}{\partial(y'+\varepsilon\eta')}\eta'\right]\delta y\, dx = 0$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right]\delta y\, dx = 0$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\,\delta y\, dx = \dots$$ جزء به جزء

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \alpha \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx = d\alpha$$

$$\eta' dx = d\beta \qquad \eta = \beta$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\eta\, dx + \eta\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_a^b - \int_a^b \eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\, dx =$$

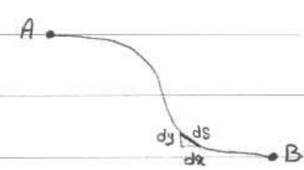
$$= \eta\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_a^b + \int_a^b \delta y\,\eta\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx = 0$$

اگر $\eta(a)=\eta(b)=0$ آنگاه natural boundary condition داریم و:

شرط اویلر: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

مثال:

می‌خواهیم تابعی که طول مسیر A تا B را مینیمم کند، بیابیم.



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$$

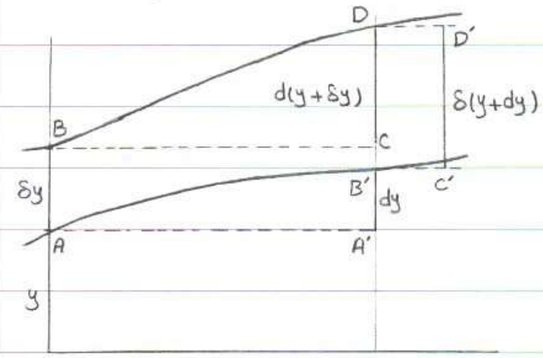
$$AB = \int_a^b ds = \int_a^b dx\sqrt{1+y'^2}$$

رابطه اویلر: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \longrightarrow 0 - \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}2y'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = 0$

$$y'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} = c \longrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \longrightarrow \frac{y'^2}{1+y'^2} = c \longrightarrow y'^2(1-c) = c$$

$$\longrightarrow y' = \sqrt{\frac{c}{1-c}} = c_0 \longrightarrow y = c_0 x + c_1$$

$d(\delta y) = \delta(dy)$



$$AB + CD = A'B' + C'D'$$

$$\delta y + d(y + \delta y) = dy + \delta(y + dy)$$

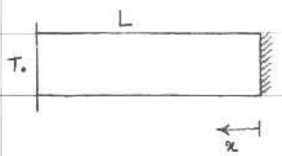
$$d(\delta y) = \delta(dy)$$

برای جلسه بعد در مورد کتاب‌هایی که به عنوان text book برای این درس مناسب‌اند، جستجو کنید.

جلسه دوم: « سه‌شنبه ۷ مهر ۱۳۸۸ »

$$I=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$



$\theta=T-T_\infty$ $\qquad\qquad$ $\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$

$\theta\big|_{x=L}=T_0-T_\infty=\theta_0$ $\qquad , \qquad$ $\frac{d\theta}{dx}\big|_{x=0}=0$

$$\theta=A\sinh mx+B\cosh mx$$

$$\theta(L)=\theta_0=A\sinh mL+B\cosh mL$$

$\frac{d\theta}{dx}\big|_{x=0}=0=mA+mB(0)$ $\longrightarrow$ $A=0$ $\quad , \quad$ $B=\frac{\theta_0}{\cosh mL}$

$$\theta=\theta_0\,\frac{\cosh mx}{\cosh mL}$$

Integral method

$$\theta=ax^2+bx+c$$

$\frac{d\theta}{dx}\big|_{x=0}=0$ $\longrightarrow$ $b=0$

$aL^2+c=\theta_0$ $\longrightarrow$ $c=\theta_0-aL^2$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=2a-m^2\left[\theta_0+a(x^2-L^2)\right]$$

$\int_0^L\left\{2a-m^2\left[\theta_0+a(x^2-L^2)\right]\right\}=0$ $\longrightarrow$ a بدست می‌آید

$\theta = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\theta = \left[\theta_0 + a(x^2 - L^2)\right] \varphi_n(x)$

$$\int_a^b \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta\right) dx = 0$$

$$\int_a^b \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta\right) \phi_1(x)\, dx = 0$$

$\theta = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$\int_a^b \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta\right) \phi_2(x)\, dx = 0$$

شرایط مرزی : $\theta(L) = \theta_0 \qquad , \quad \frac{d\theta(0)}{dx} = 0$

روش ریتز (Ritz)

$\theta = \left[\theta_0 + a(x^2 - L^2)\right]\left[1 + a_1(x^2 - L^2)^2\right]$

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \qquad \theta(L) = \theta_0 \qquad , \quad \frac{d\theta}{dx}(0) = 0$

$$I = \int_a^b F(x,y,y')\, \delta y\, dx = \int_a^b \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta\right) \delta\theta\, dx = 0$$

$\int_a^b \frac{d^2\theta}{dx^2} \delta\theta\, dx = \dots$ جزء به جزء

$\frac{d^2\theta}{dx^2} dx = d\beta \qquad \frac{d\theta}{dx} = \beta$

$\delta\theta = \alpha \qquad \frac{d}{dx}(\delta\theta) = d\alpha \longrightarrow \delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = d\alpha$

$$\int_a^b \frac{d^2\theta}{dx^2} \delta\theta\, dx = \delta\theta \frac{d\theta}{dx}\Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b \frac{d\theta}{dx} \delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right) dx}_{\frac{1}{2}\delta\left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2\right]}$$

$$\int_a^b -m^2\theta\,\delta\theta\,dx = \int_a^b -\frac{1}{2} m^2 \delta(\theta^2)\,dx$$

$$\int_a^b \frac{d^2\theta}{dx^2}\,\delta\theta\,dx = \delta\theta\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_a^b - \int \frac{1}{2}\left[\delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + m^2\delta(\theta^2)\right]dx = 0$$

$$\delta\theta\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_0^L - \frac{1}{2}\,\delta\int_0^L \left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + m^2\theta^2\right]dx = 0$$

natural boundary condition : $\delta\theta\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_0^L = 0$

$$\cancelto{0}{\delta[\theta(L)]}\,\frac{d\theta(L)}{dx} - \delta[\theta(0)]\,\cancelto{0}{\frac{d\theta(0)}{dx}} = 0$$

$$\int_0^L \left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + m^2\theta\right]\phi_n(x)\,dx$$

$$\theta = \theta_0 + a(x^2 - L^2)$$

$$\theta = \theta_0 + a_1(x^2 - L^2) + a_2(x^2 - L^2)^2$$

$$\delta\int_0^L \left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + m^2\theta^2\right]dx = 0$$

$$\delta\int_0^L \left[\frac{d^2\theta}{dx^2} + m^2\theta\right]\phi_1(x)\,dx = 0$$

$$\theta = \left[\theta_0 + a(x^2 - L^2)\right]\left[1 + a_2(x^2 - L^2)\right]$$

$$\delta(a_1^2 + 2a_1 + a_2) = 0$$

$$\delta(a_1 a_2 + a_2^2) = 0$$

$$2a_1\delta a_1 + 2\delta a_1 + \delta a_2 = 0$$

$$(2a_1 + 2)\delta a_1 + \delta a_2 = 0$$

$$a_1\delta a_2 + a_2\delta a_1 + 2a_2\delta a_2 = 0$$

$$(a_1 + 2a_2)\delta a_2 + a_2\delta a_1 = 0$$

$$a_1 + 2a_2 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)\left(a_0 + a_1\frac{x^2}{L^2} + a_2\frac{x^4}{L^4} + \cdots\right)$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)a_0 - \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^2 a_1 - \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^3 a_2 - \cdots$$

$$\theta = ax^2 + bx + c$$

$$\theta = (ax^2 + bx + c)\,\phi_n(x)$$

$$\frac{d\theta(0)}{dx} = 0 \qquad , \ \theta(L) = \theta_0$$

$$\frac{d\theta}{dx} + A\theta\bigg|_{x=a} = P_1$$

$$\frac{d\theta}{dx} + B\theta\bigg|_{x=b} = P_2$$

$$\theta = (ax^2 + bx + c)\,\phi_n(x) \begin{cases} \theta_1 & \dfrac{d\theta_1}{dx} + A\theta_1\Big|_a = 0 & \dfrac{d\theta_1}{dx} + B\theta_1\Big|_b = 0 \\ \theta_2 & \dfrac{d\theta_2}{dx} + A\theta_2\Big|_a = 0 & \dfrac{d\theta_2}{dx} + B\theta_2\Big|_b = P_2 \\ \theta_3 & \dfrac{d\theta_3}{dx} + A\theta_3\Big|_a = P_1 & \dfrac{d\theta_3}{dx} + B\theta_3\Big|_b = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$\frac{d}{dx}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + A(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = P_1$$

$$\frac{d}{dx}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + B(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = P_2$$

مثال:

$$y = f(x)$$

$$y(0) = A \qquad , \ y(L) = B$$

$y_1(0)=0 \qquad , \quad y_1(L)=0$

$y_1=ax^2+bx+\cancelto{0}{C}$

$aL^2+bL=0 \longrightarrow b=-aL$

$\Rightarrow y_1=ax^2-aLx=ax(x-L)$

$y_2(0)=0 \qquad , \quad y_2(L)=B$

$y_2=ax^2+bx+\cancelto{0}{C}$

$aL^2+bL=B \longrightarrow b=\frac{B-aL^2}{L}$

$\Rightarrow y_2=ax^2-\frac{B-aL^2}{L}x=x\left[ax-\frac{B}{L}-aL\right]=x\left[-\frac{B}{L}+a(x-L)\right]$

$y_3(0)=A \qquad , \quad y_3(L)=0$

$y_3=ax^2+bx+C$

$C=A$

$0=aL^2+bL+C \longrightarrow b=-aL-\frac{A}{L}$

$\Rightarrow y_3=ax^2-(aL-\frac{A}{L})x+A$

$y_1=ax(x-L) \qquad\qquad y_1(0)=0 \quad , \quad y_1(L)=0$

$y_2=ax(x-L)-\frac{B}{L}x \qquad\qquad y_2(0)=0 \quad , \quad y_2(L)=B$

$y_3=ax^2-(aL+\frac{A}{L})x+A \qquad\qquad y_3(0)=A \quad , \quad y_3(L)=0$

$$y=y_1+y_2+y_3=x\left[a(x-L)-\frac{B}{L}\right]+ax^2-(aL+\frac{A}{L})x+A+\underbrace{ax(x-L)\times\phi_n(x)}_{\text{قسمت همگن}}$$

تکلیف شماره ۱ : معادله زیر با شرایط مرزی داده شده را با استفاده از روش variational حل کرده و با حل تحلیلی مقایسه کنید.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$$

$\theta(L)=\theta_0 \qquad , \quad \frac{d\theta}{dx}(0)=0$

برای مطالعه Variational از text book زیر استفاده می‌کنیم.

"Conduction Heat Transfer", Arpaci, chapter 8

جلسه سوم: « یک شنبه ۱۳ مهر ۱۳۸۸ »

فرم Variational را برای معادله درجه دو در حالت کلی بدست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=f(x)$$

$$\int_a^b\left\{\frac{d}{dx}\left[P\frac{dy}{dx}\right]+qy-f(x)\right\}\delta y\,dx=0$$

$$\int_a^b\frac{d}{dx}\left[P\frac{dy}{dx}\right]\delta y\,dx=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[P\frac{dy}{dx}\right]dx=d\beta \qquad\qquad P\frac{dy}{dx}=\beta$$

$$\delta y=\alpha \qquad\qquad \frac{d}{dx}(\delta y)dx=d\alpha$$

$$\int_a^b\frac{d}{dx}\left[P\frac{dy}{dx}\right]\delta y\,dx=P\frac{dy}{dx}\delta y\Big|_a^b-\int_a^b\frac{1}{2}\delta P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx+\int_a^b q\,\delta(y^2)\,dx-\int_a^b f\,\delta y\,dx=0$$

$$P\frac{dy}{dx}\delta y\Big|_a^b+\delta\int_a^b\left[-\frac{1}{2}P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{q}{2}y^2-f(x)y\right]dx=0$$

natural boundary condition $\Longrightarrow\quad -\frac{1}{2}P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{q}{2}y^2-fy=0$

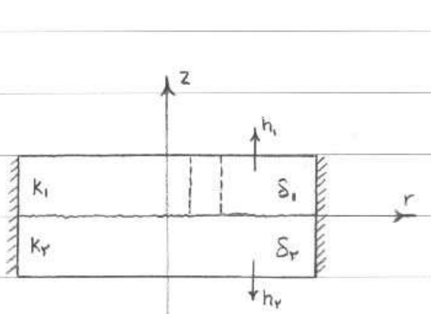
شرایط مرزی غیرطبیعی: $y(a)=y(0)\;,\; -k\frac{dy}{dx}\Big|_b=\dot{q}'' \Longrightarrow P(b)\frac{dy}{dx}\Big|_b\delta[y(b)]-P(a)\frac{dy}{dx}\Big|_a\delta[y(a)]+$

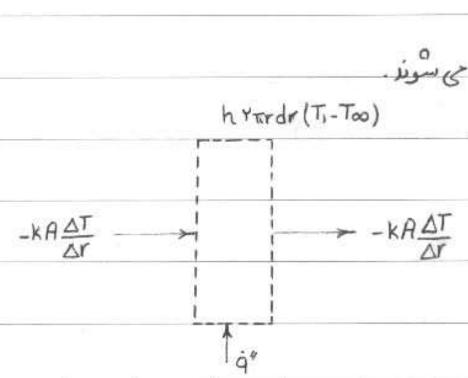
$$+\;\delta\int_a^b\left[-\frac{1}{2}P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{q}{2}y^2-fy\right]dy=0$$

$$\Longrightarrow\;\delta\left[-\frac{\dot{q}''}{k}P(b)y(b)+\int_a^b\left[-\frac{1}{2}P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{q}{2}y^2-fy\right]dx\right]=0$$

مثال:

دو کلاچ که برهم چرخیده و ساییده می‌شوند.





$$\sum E_{in} = \sum E_{out} + \cancelto{0}{\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{C.V.}}$$

$$-kA\frac{\Delta T}{\Delta x}\Big|_{r} + \dot{q} = h\,2\pi r\,\Delta r\,(T_1 - T_\infty) - kA\frac{\Delta T}{\Delta r}\Big|_{r+\Delta r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[kA\frac{\partial T}{\partial r}\right] = h\,2\pi r\,(T_1 - T_\infty) - kA\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r+\Delta r} - \dot{q}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{h}{K\delta_1}r(T_1 - T_\infty) + \frac{\dot{q}''}{K_1\delta}r = 0$$

$$\theta = T_1 - T_\infty$$

$$r^* = \frac{r}{R}$$

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = \int_0^R \Delta v\,dF = \int_0^R \mu\Delta v\,p\,2\pi r\,dr = 2\pi\mu\omega\int_0^R p r^2 dr = 2\pi\omega\mu\int_0^R P_0 Pr\,dr = \pi\omega\mu P_0 R^3$$

$$\frac{\partial}{R\partial r^*}\left(Rr^*\frac{\partial\theta_1}{R\partial r^*}\right) - \frac{h}{K\delta_1}Rr^*\theta_1 + \frac{\dot{q}''}{K_1\delta}Rr^{*2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial\theta_1}{\partial r^*}\right) - \frac{hR^2}{K\delta_1}r^*\theta_1 + \frac{\dot{q}''R^2}{K_1\delta}r^{*2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial\theta_1}{\partial r^*}\right) - Hr^*\theta_1 + \varepsilon r^{*2} = 0$$

$$\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial\theta_1}{\partial r^*}\right) - Hr^*\theta_1 + \varepsilon r^{*2}\right]\delta\theta_1\,dr^* = 0$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial r^*}(0) = 0 \qquad\qquad \frac{\partial\theta_1}{\partial r^*}(1) = 0$$

$$\theta = ar^{*3} + br^{*2} + \cancelto{0}{cr^*} + d$$

$$0 = 3a + 2b \longrightarrow b = -\frac{3}{2}a$$

$$\theta = ar^{*3} - \frac{3}{2}ar^{*2} + d = a\left(r^{*3} - \frac{3}{2}r^{*2} + \cancelto{\text{اختیاری}:\ \frac{1}{2}}{\frac{d}{a}}\right) = \frac{1}{2}a(2r^{*3} - 3r^{*2} + 1) = a_0(2r^{*3} - 3r^{*2} + 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial\theta}{\partial r^*}\right) = a_1\frac{\partial}{\partial r^*}(6r^{*3} - 6r^{*2}) - a_0(18r^{*2} - 12r^*)$$

$$\int_0^1 \left[a_0(18r^{*2}-12r^*) - Ha_0(2r^{*2}-3r^{*3}+r^*) + \varepsilon r^{*2}\right](2r^{*3}-3r^{*2}+1)\,\delta a_0\, dr^* = 0$$

$$a_0\left[6-\frac{54}{5}+6-\frac{24}{5}+9-6\right] - Ha_0\left[\frac{1}{2}-\frac{6}{7}+\frac{2}{5}-\frac{6}{7}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\right] + \varepsilon\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\delta a_0 = 0$$

$$\longrightarrow \quad a_0 = ??$$

$$\theta = a_0(2r^{*3}-3r^{*2}+1)\left[a_0 + a_1(2r^{*3}-3r^{*2}) + a_2(2r^{*3}-3r^{*2})^2 + \dots\right]$$

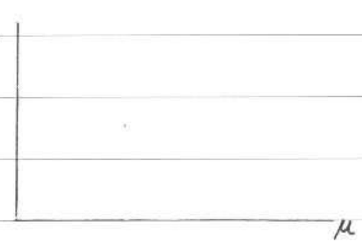
تکلیف شماره ۲ (بخش اول):

۱- a_0 را حساب کنید. ضمناً مسیر محاسبات یک بار دیگر کنترل شود.

۲- a_0 و a_1 را برای Variational مرتبه دو بدست آورید.

۳- به صورت اختیاری Variational مرتبه سه نوشته شده و ضرایب a_0، a_1 و a_2 محاسبه شوند.

۴- نتایج Variational مرتبه ۱ و ۲ در صفر به شکل نمودار زیر با هم مقایسه شوند.



حال شرایط مرزی را تغییر می‌دهیم:

$$\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial\theta_1}{\partial r^*}\right) - Hr^*\theta_1 + \varepsilon r^{*2} = 0$$

$$\frac{d\theta_1}{dx}(0) = 0 \qquad , \quad \theta_1 = T_0 - T_\infty = \theta_0$$

$$\theta_1 = \psi_1 + \psi_0$$

$$\frac{d\psi_1}{dr^*}(0) = 0 \qquad , \quad \psi_1(0) = \theta_0$$

$$\psi_1 = ar^{*2} + br^* + c$$

$$c = \theta_0 - a$$

$$\psi_1 = \theta_1 + a(r^{*2}-1)$$

$$\frac{d\psi_2}{dr}(0) = 0 \qquad , \psi_2(1) = 0$$

$$\psi_2 = M r^{*2} + N r^{*} + P$$

$$P = -M$$

$$\psi_2 = M(r^{*2} - 1)$$

$$\psi_1 + \psi_2 = \theta_0 + a(r^{*2} - 1) + (r^{*2} - 1)\left[M_1 + M_2(r^{*2} - 1)^2 + M_3(r^{*2} - 1)^3 + \cdots\right]$$

$$= \theta_0 + (r^{*2} - 1)\left[a_0 + a_1(r^{*2} - 1) + a_2(r^{*2} - 1)^2 + \cdots\right]$$

تکلیف شماره ۲ (بخش دوم):

معادله با شرایط مرزی جدید را با استفاده از Variational مرتبه یک و دو حل کنید.

جلسه چهارم : سه‌شنبه ۱۴ مهر ۱۳۸۸

$$\frac{dy}{dx}(۰)+B_۱\,y(۰)=n_۱$$

$$\frac{dy}{dx}(L)+B_۲\,y(L)=n_۲$$

$$y=y_۱+y_۲+y_۳$$

$$\frac{dy_۱(۰)}{dx}+B_۱ y_۱(۰)=n_۱$$

$$\frac{dy_۱(L)}{dx}+B_۲ y_۱(L)=۰\quad\begin{cases}\dfrac{dy_۱}{dx}(L)=۰\\[2ex] y_۱(L)=۰\end{cases}$$

$$y_۱=ax^۳+bx^۲+cx+d$$

$$۰=۳aL^۲+۲bL+cL+d$$

$$۰=aL^۳+bL^۲+cL+d$$

$$n_۱=c+B_۱ d\longrightarrow c=n_۱-B_۱ d$$

$$d=\frac{bL+۲n_۱}{۲B_۱-\frac{۳}{L}}$$

$$c=n_۱-B_۱\frac{bL+۲n_۱}{۲B_۱-\frac{۳}{L}}$$

$$a=\frac{۱}{۳L^۲}\left[۲bL+L\left(n_۱-B_۱\frac{bL+۲n_۱}{۲B_۱-\frac{۳}{L}}\right)\right]$$

$$y_۱=f_۱(b)x^۳+bx^۲+f_۲(b)x+f_۳(b)$$

از روی کتاب ص ٤٥٤ $\longrightarrow\quad y_۱(x)=(L-x)^۲\left(x+\dfrac{L-\frac{n_۲}{L}}{۲-B_۲L}\right)$

$$\frac{dy_۲(۰)}{dx}+B_۱ y_۲(۰)=۰$$

$$\frac{dy_۲(L)}{dx}+B_۲ y_۲(L)=n_۲$$

$$y_۲=ax^۳+bx^۲+cx+d$$

$$\frac{dy_۲(۰)}{dx}=۰\longrightarrow c=۰$$

$$y_۲(۰)=۰\longrightarrow d=۰$$

$$۳aL^۲+۲bL=۰\longrightarrow b=-\frac{۳}{۲}aL$$

$$y_2 = ax^3 - \frac{3}{2} a l x$$

$$y_2 = ax(2x^2 - 3L)$$

از روی کتاب ص ۴۵۴ $\longrightarrow \quad y_2(x) = x^2 \left(x - L - \dfrac{L - \frac{n_1}{L}}{2 + B_1 L} \right)$

$$\frac{dy_3}{dx}(0) = 0 \qquad , \quad B_1 y_3(0) = 0$$

$$\frac{dy_3}{dx}(L) = 0 \qquad , \quad B_2 y_3(L) = 0$$

$$y_3 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$y_3 = a(x-L)^2 x^2$$

$$y_3 = a_0 x^2 (L-x)^2 + a_1 x^3 (L-x)^3 + a_2 x^4 (L-x)^4 + \dots$$

از روی کتاب ص ۴۵۴ $\begin{cases} y_3(x) = a_0 + a_1 (L-x)^2 x^2 + a_2 (L-x)^2 x^3 + a_3 (L-x)^2 x^4 + \dots \\ y_3(x) = a_0 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{L}\right) + a_1 \left(1 + \cos \frac{3\pi x}{L}\right) + a_2 \left(1 + \cos \frac{5\pi x}{L}\right) + \dots \end{cases}$

Variational (دو بعدی)

$I = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$ شرط اویلر : $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

$I = \iint_R F(x, y, T_x, T_y, T)\, dx\, dy$ شرط اویلر : ?

$$\delta I = \delta \iint_R F(x, y, T_x, T_y, T)\, dx\, dy = \iint \left(\frac{\partial F}{\partial T} \delta T + \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T_x + \frac{\partial F}{\partial T_y} \delta T_y \right) dx\, dy = 0$$

$\displaystyle \iint_R \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T_x\, dx\, dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy - \iint_R \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial T_x}\right) \delta T\, dx\, dy$ «با استفاده از روش جز به جزء»

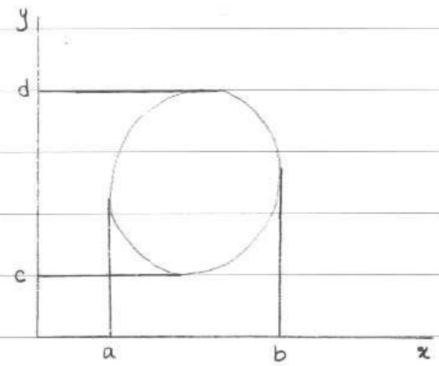
$$\delta(T_x) = \delta\left(\frac{dT}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta T)$$

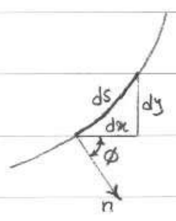
$$\Rightarrow \delta I = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial T_y} \delta T \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} + \iint_R \left[\frac{\partial F}{\partial T} \delta T - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial T_y}\right) \delta T - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial T_x}\right) \delta T \right] dx\, dy = 0$$

natural boundry condition $\longrightarrow \quad \delta I = \displaystyle\iint_R \left[\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial T_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial T_y}\right) \right] \delta T\, dx\, dy = 0$

معادله اویلر یک بعدی : $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

معادله اویلر دو بعدی : $\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial T_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial T_y}\right) = 0$





$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial T_y}\delta T\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx + \int_c^d \frac{\partial F}{\partial T_x}\delta T\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy = \oint_c \left(\frac{\partial F}{\partial T_x}\cos\phi + \frac{\partial F}{\partial T_y}\sin\phi\right)\delta T\, ds$$

تابع ریتز دو بعدی

$$y = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(x)$$

$$T = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(x,y) = \sum_{n=0}^{N} a_n X_n(x) Y(y)$$

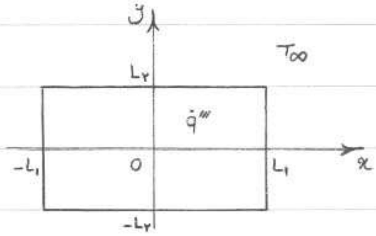
تکلیف شماره ۳ :

تابع ریتز دما (فرم جدا شده) برای شکل مقابل را بدست آورید.

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\theta(x,y) = \sum_{n=0}^{N} a_n X_n(x) Y_n(y) = ?$$

جلسه پنجم: «یک شنبه ۱۹ مهر ۱۳۸۸»



معادله کلی گرما: $\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}'''=\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \left(\frac{W}{m^3}\right)$

$$\frac{\dot{q}'''}{k}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0 \qquad \theta=T-T_\infty$$

$$I=\iint_R \left(\frac{\dot{q}'''}{k}+\nabla^2\theta\right)\delta\theta\, dx\, dy=0$$

$\theta(L_1,y)=0 \quad ; \quad \theta(x,L_2)=0$

$\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,y)=0 \quad ; \quad \frac{\partial\theta}{\partial y}(x,0)=0$

$\theta=X(x)\,Y(y)$

$X(x)=ax^2+bx+c$

$\frac{\partial X}{\partial x}(0)=0 \longrightarrow b=0$

$X(L_1)=0 \longrightarrow aL_1^2+c=0 \longrightarrow c=-aL_1^2$

$\Rightarrow X(x)=a(x^2-L_1^2)$

$Y(y)=b(y^2-L_2^2)$

$\theta(x,y)=(x^2-L_1^2)(y^2-L_2^2)(a_0+a_1x^2+a_2x^4+\dots+b_1y^2+b_2y^4+\dots)$

اگر بخواهیم از term های second order استفاده کنیم، چون $L_2<L_1$ ، اولویت با استفاده از ترم a_1x^2 است تا b_1y^2، زیرا به دلیل طول بیشتر در راستای x تعیین دقیق تر دما در این راستا بیشتر مورد نیاز است.

first order approximation: $\delta I=\int_0^{L_2}\int_0^{L_1}\left[\frac{\dot{q}'''}{k}+2a_0(y^2-L_2^2)+2a_0(x^2-L_1^2)\right](x^2-L_1^2)(y^2-L_2^2)\,\delta a_0\, dx\, dy=0$

Second order approximation: $\delta I=\int_0^{L_2}\int_0^{L_1}\left[\frac{\dot{q}'''}{k}+(12a_1x^2+2a_0-2a_1L_1^2)(y^2-L_2^2)+2(x^2-L_1^2)(a_0+a_1x^2)\right](x^2-L_1^2)(y^2-L_2^2)\times$
$\times(\delta a_0+x^2\delta a_1)\,dx\,dy=0$

Kantorovich Method

روش کانتروویچ همان روش ریتز است اگر تنها یکی از توابع را به فرم ریتز درآوریم و دیگری را به شکل تابعی نگه داریم.

$$\theta(x,y) = X(x)\,Y(y) = (y^2 - L_2^2)\,X(x)$$

✓ دقت می‌کنیم که چون $L_2 < L_1$ ، بهتر است $X(x)$ را به فرم تابع نگه داریم تا دقت در طول x که بلندتر است ، بیشتر باشد.

$$\delta I = \iint_R \left(\frac{\dot q'''}{k} + \nabla^2\theta\right)\delta\theta \, dx\, dy = \iint_R \left[\frac{\dot q'''}{k} + (y^2 - L_2^2)X'' + 2X\right](y^2 - L_2^2)\,\delta X \, dx\, dy = 0$$

$$= \int_0^{L_2}\int_0^{L_1} \left[\frac{\dot q'''}{k}(y^2 - L_2^2) + (y^4 - 2L_2^2 y^2 + L_2^4)X'' + 2X(y^2 - L_2^2)\right]\delta X \, dx\, dy$$

$$= \int_0^{L_1} \left\{\frac{\dot q'''}{k}\left(\frac{y^3}{3} - L_2^2 y\right) + \left(\frac{y^5}{5} - \frac{2L_2^2}{3}y^3 + L_2^4 y\right)X'' + 2X\left(\frac{y^3}{3} - L_2^2 y\right)\right\}\Bigg]_0^{L_2} dx \; \delta X = 0$$

چون X ، variational است مقدار داخل انتگرال بایستی صفر شود، پس:

$$\frac{\dot q'''}{k}\left(-\frac{2}{3}L_2^3\right) + \frac{8}{15}L_2^5 X'' - \frac{4}{3}L_2^3 X = 0$$

$$X'' - \frac{5}{2}\frac{X}{L_2^2} - \frac{5}{4}\frac{\dot q'''}{kL_2^2} = 0$$

$$X = a \sinh\sqrt{2.5}\,\frac{x}{L_2} + b\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{x}{L_2} - \frac{\dot q'''}{2k}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}(0) = 0 \longrightarrow a = 0$$

$$X(L_1) = 0 \longrightarrow b\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{L_1}{L_2} - \frac{\dot q'''}{2k} = 0 \longrightarrow b = \frac{\dot q'''}{2k}\,\frac{1}{\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{L_1}{L_2}}$$

$$X(x) = -\frac{\dot q'''}{2k}\left(1 - \frac{\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{x}{L_2}}{\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{L_1}{L_2}}\right)$$

$$\theta(x,y) = -\frac{\dot q'''}{2k}(y^2 - L_2^2)\left(1 - \frac{\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{x}{L_2}}{\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{L_1}{L_2}}\right)$$

second order : $\theta(x,y) = X(x)Y(y) \xrightarrow[\text{طول در جهت } y]{\text{طول در جهت } x \text{ بزرگتر از}} \theta(x,y) = (y^2 - L_2^2)(X_1(x) + y^2 X_2(x))$

$$\delta I = \iint_R \left(\frac{\dot{q}'''}{k} + \nabla^2\theta\right)\delta\theta \, dx\, dy$$

$$= \iint_R \left[\frac{\dot{q}'''}{k} + (y^2 - L_2^2)(X_1'' + y^2 X_2'') + (12y^2 X_2 + 2X_1 - 2L_2^2 X_2)\right](y^2 - L_2^2)(\delta X_1 + y^2 \delta X_2)\, dx\, dy = 0$$

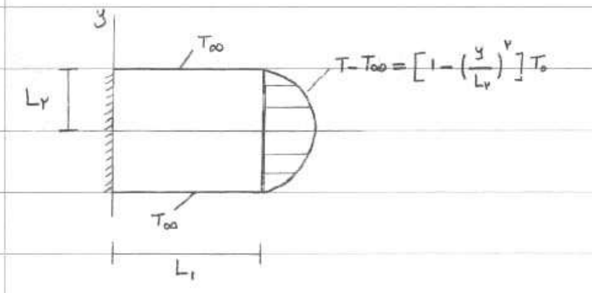
$$= \left[\int_0^L (\qquad)\, dx\right]\delta X_1 + \left[\int_0^L (\qquad)\, dx\right]\delta X_2 = 0$$

چون تک‌تک عبارت‌های جلوی انتگرال‌ها بایستی صفر باشند، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \phi_1(X_1, X_2, X_1', X_2', X_1'', X_2'') = 0 \\ \phi_2(X_1, X_2, X_1', X_2', X_1'', X_2'') = 0 \end{cases}$$

معمولاً بهترین روش برای حل این دستگاه روش اپراتورهاست.

گاهی فرم ریتز را برای هندسه‌های پیچیده‌تر نیز می‌توان بدست آورد.



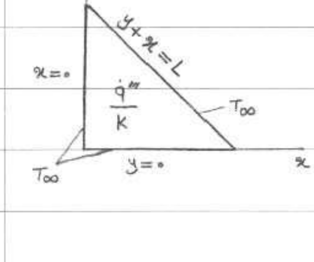
$$\theta(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$Y(L_2) = 0 \quad , \quad \frac{dY}{dy}(0) = 0$$

$$\frac{dX}{dx}(0) = 0 \quad , \quad X(L_1) = 1$$

$$\theta(x,y) = T_0\left(1 - \frac{y^2}{L_2^2}\right)\left[1 + a_0\left(1 - \frac{x^2}{L_1^2}\right) + a_1\left(1 - \frac{x^2}{L_1^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

همچنین در مسائلی که معادلات مرز هندسی کاملاً مشخص است، می‌توان فرم ریتز را با ضرب کردن معادلات در هم بدست آورد.

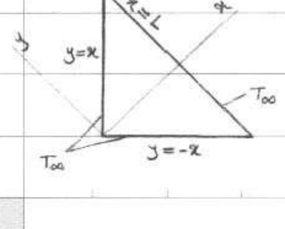


$$\theta(x,y) = a_0\left[xy(x+y-L)\right] + a_1\left[xy(x+y-L)\right]^2 + \cdots$$

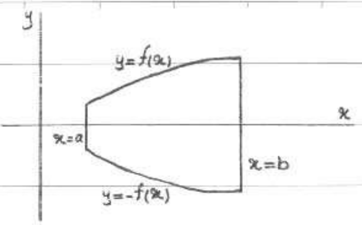
$$\iint_R \left(\frac{\dot{q}'''}{k} + \nabla^2\theta\right)\delta\theta\, dx\, dy = 0$$

$$1^{st}\text{ order}: \int_0^L \int_{y=0}^{y=L-x} \left(\frac{\dot{q}'''}{k} + 2x + 2y\right)(y^2 x + x^2 y - Lxy)\,\delta a_0\, dx\, dy = 0$$

گاهی می‌توان با تغییر مختصات فرم ریاضی مساله را ساده‌تر کرد:



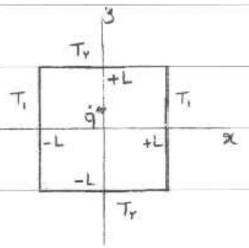
$$\theta(x,y) = a_0\left[(y^2 - x^2)(x-L)\right] + a_1\left[(y^2 - x^2)(x-L)\right]^2 + \cdots$$



$$\theta(x,y)=a_0\left[(y^2-f^2(x))(x-a)(x-b)\right]+a_1\left[(y^2-f^2(x))(x-a)(x-b)\right]^2+\cdots$$

$$\delta I=\iint_R\left(\frac{\dot q'''}{k}+\nabla^2\theta\right)\delta\theta\,dx\,dy=0$$

اما گاهی با مسائلی روبرو می‌شویم که آنها را نه از طریق روش ریتز و نه از طریق روش کانتروویچ نمی‌توان فرمول بندی کرد. مثلاً در صفحه مربعی زیر به طول L به دلیل وجود Singularity در گوشه‌ها به هیچ طریق نمی‌توان یک تابع تحلیلی به شکل $\theta(x,y)=X(x)\,Y(y)$ برای مسأله یافت.



$$\theta=T-T_1$$

$$\theta(L,y)=0 \qquad \frac{\partial\theta(0,y)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial\theta(x,0)}{\partial y}=0 \qquad \theta(x,L)=\theta_0$$

امتحان روش کانتروویچ روی مسأله

$$\theta(x,y)=(x^2-L^2)\,Y(y)$$

$$\delta I=\iint_R\left(\frac{\dot q'''}{k}+\nabla^2\theta\right)\delta\theta\,dx\,dy=0$$

$$\iint_R\left(\frac{\dot q'''}{k}+2Y+(x^2-L^2)Y''\right)(x^2-L^2)\,\delta Y\,dx\,dy=0$$

$$\int_0^L\left(\frac{\dot q'''}{k}+2Y\right)\left(\frac{x^3}{3}-L^2x\right)+Y''\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2L^2}{3}x^3+L^4x\right)\Big]_0^L dy\,\delta Y=0$$

$$-\frac{2L^3}{3}\frac{\dot q'''}{k}-\frac{4L^3}{3}Y+\frac{8L^5}{5}Y''=0$$

$$Y(y)=a\sinh\sqrt{2.5}\,\frac{y}{L}+b\cosh\sqrt{2.5}\,\frac{y}{L}-\frac{\dot q'''}{2k}$$

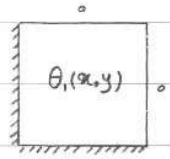
$$Y'(0)=0\longrightarrow a=0$$

$$\theta(x,y)\Big|_{y=L}=\theta_0\longrightarrow (x^2-L^2)\left(b\cos\sqrt{2.5}-\frac{\dot q'''}{2k}\right)=\theta_0 \qquad \text{«غ ق ق»}$$

در چنین مسائلی تقسیم مسئله به دو بخش همگن و غیر همگن می‌تواند راهگشا باشد.

$$\theta(x,y) = T(x,y) - T_1 = \underbrace{\theta_1(x,y)}_{\text{بخش همگن}} + \underbrace{\theta_2(y)}_{\text{بخش ناهمگن}}$$

بخش همگن :

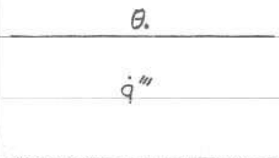


$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2} = 0$$

$$\theta_1(x,y)\Big|_{x=L} = 0 \quad , \quad \theta_1(x,y)\Big|_{y=L} = 0$$

$$\frac{\partial\theta_1(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\theta_1(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0$$

بخش ناهمگن :



$$\frac{\dot{q}'''}{K} + \frac{d^2\theta_2}{dy^2} = 0$$

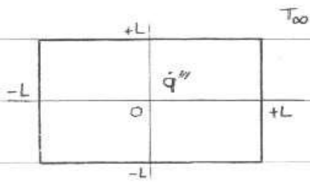
$$\theta_2(y)\Big|_{y=L} = \theta_0 \quad , \quad \frac{d\theta(y)}{dy}\Big|_{y=0} = 0$$

تکلیف شماره ۴ :

با ادامه دادن مساله اخیر و حل بخش‌های همگن و ناهمگن، توزیع دمای دو بعدی در صفحه مربعی را بیابید.

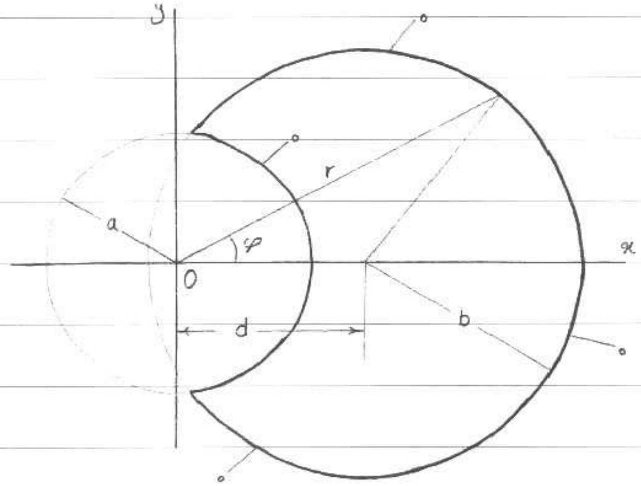
تکلیف شماره ۵ : (تحویل یک‌شنبه ۲۶ مهر)

۱- از روش کانتروویچ با دقت مرتبه ۲ توزیع دمای شکل زیر (مثال ابتدای جلسه) را بدست آورید.



۲- از روش کانتروویچ با دقت مرتبه ۱، توزیع دمای صفحه مثلثی (مثال داخل درس) را یکبار با مختصات کارتزین و یک بار با تغییر محورهای مختصات بدست آورید و مقایسه کنید.

جلسه ششم :   « سه‌شنبه ۲۱ مهر ۱۳۸۸ »



پروفیل ریتز در مختصات کارتزین به صورت زیر است :

$$\theta(x,y) = (a^2-x^2-y^2)\left[b^2-(x-d)^2-y^2\right](a_0+a_1x+b_1y^2+\cdots)$$

✓ دلیل آنکه در پروفیل ریتز عبارت b_1y را ننوشتیم و از b_1y^2 شروع کردیم، تقارن مسأله نسبت به محور x است.

گاهی نوشتن پروفیل ریتز در مختصاتی غیر از کارتزین نظیر مختصات قطبی می‌تواند حجم محاسبات را کاهش دهد.

a : شعاع دایره کوچک $\longrightarrow$ معادله دایره کوچک : $r=a$

b : شعاع دایره بزرگ $\longrightarrow$ معادله دایره بزرگ : $r^2+d^2-2rd\cos\varphi=b^2$

پروفیل ریتز در مختصات قطبی : $(a-r)(b^2-d^2-r^2+2rd\cos\varphi)(a_0+a_1r\cos\varphi+\cdots)$

تکلیف شماره ۴ را یکبار دیگر و دقیق‌تر حل کنید.

جلسه هفتم — یک شنبه ۲۶ مهر ۱۳۸۸

ضریب نفوذ گرمایی: $\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (\frac{m^2}{s})$ $\qquad$ $\frac{\text{قابلیت رسانش انرژی گرمایی}}{\text{قابلیت ذخیره انرژی گرمایی}}$

معادله کلی گرما: $\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial T}{\partial z}) + \dot{q}''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (\frac{W}{m^3})$

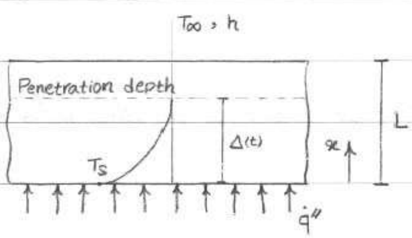
Unsteady Problems

$$\delta I = \int_{\forall}\int_{t_1}^{t_2}\left[\nabla^2\theta - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}\right]\delta\theta \, dt \, d\forall = 0$$

$$\theta = \theta(\forall, f_1(t), f_2(t), \dots)$$

$$\delta\theta = \frac{\partial \theta}{\partial f_1}\delta f_1 + \frac{\partial \theta}{\partial f_2}\delta f_2 + \dots$$

مثال:



$$\theta = T - T_\infty$$

$$\delta I = \int_{\forall}\int_{t_1}^{t_2}\left[\nabla^2\theta - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}\right]\delta\theta \, dt \, d\forall = 0$$

شرایط مرزی برای حل چنین معادله‌ای دو شرط مرزی بر روی x و یک شرط مرزی بر روی t است که عبارتند از:

$$-k\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dot{q}''$$

$$\theta(x,t)\Big|_{x=\Delta} = 0$$

$$-k\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\Delta} = 0$$

توجه شود که دو شرط آخر چون $\Delta(t)$ تابعی از t است، معادل یک شرط مکانی و یک شرط زمانی هستند.

$$\theta(x,t) = X(x) \times T(t)$$

روش استاندارد کانترویچ از مرتبه اول می‌گوید که θ را به تابعی از x و تابعی از t گسسته کنیم و از روی شرایط مرزی $X(x)$ را تعیین کرده و اجازه دهیم $T(t)$ تغییر کند. اما چون شرایط مرزی x در خود t را نیز دارند چنین فرم گسسته‌ای به دست نخواهد آمد بلکه پروفیل کانترویچ مرتبه اول شامل $\Delta(t)$ به صورت آمیخته با تابع معین x خواهد بود.

$$\theta(x,t)=a(t)x^2+b(t)x+c(t)$$

$$\left.\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{\dot q''}{k}\longrightarrow b(t)=-\frac{\dot q''}{k}$$

$$\left.\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\Delta}=0\longrightarrow 2a(t)\times\Delta(t)-\frac{\dot q''}{k}=0\longrightarrow a(t)=\frac{\dot q''}{2k\Delta(t)}$$

$$\left.\theta(x,t)\right|_{x=\Delta}=0\longrightarrow \frac{\dot q''}{2k\Delta(t)}\times(\Delta(t))^2-\frac{\dot q''}{k}\Delta(t)+c(t)=0\longrightarrow c(t)=\frac{\dot q''\Delta(t)}{2k}$$

$\Rightarrow$ پروفیل کانترویچ مرتبه اول: $\theta(x,t)=\dfrac{\dot q''}{2k\Delta}x^2-\dfrac{\dot q''}{k}x+\dfrac{\dot q''\Delta}{2k}=\dfrac{\dot q''}{2k\Delta}(x^2-2\Delta x+\Delta^2)=\dfrac{\dot q''}{2k\Delta}(x-\Delta)^2$

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\Delta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\delta\theta\,dt\,dx=0$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\Delta}\left[\frac{\dot q''}{k\Delta}-\frac{1}{\alpha}\frac{\dot q''}{2k}\left(-\frac{x^2}{\Delta^2}+1\right)\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right]\times\left[\frac{\dot q''}{2k}\left(-\frac{x^2}{\Delta^2}+1\right)\delta\Delta\right]dx\,dt$$

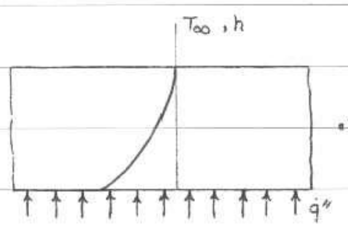
$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\Delta}\left[\frac{2}{\Delta}-\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{x^2}{\Delta^2}+1\right)\frac{\partial\Delta}{\partial t}\right]\times\left(-\frac{x^2}{\Delta^2}+1\right)\delta\Delta\,dx\,dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\Delta}\left[-\frac{2}{\Delta^3}x^2+\frac{2}{\Delta}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Delta}{\partial t}\left(1-\frac{2}{\Delta^2}x^2+x^4\right)\right]dx\,dt\,\delta\Delta$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{2}{3}+2-\frac{1}{\alpha}\frac{d\Delta}{dt}\left(\Delta-\frac{2}{3}\Delta+\frac{\Delta}{5}\right)\right]dt\,\delta\Delta$$

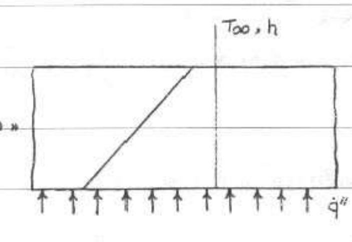
$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{\alpha}\frac{d\Delta}{dt}\times\frac{8}{15}\Delta\right)dt\,\delta\Delta=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\alpha}\frac{2}{5}\Delta\frac{d\Delta}{dt}=1\longrightarrow\frac{d\Delta^2}{dt}=5\alpha\longrightarrow\Delta^2=5\alpha t+\cancel{c}^{\;\Delta(0)=0}\longrightarrow\Delta=\sqrt{5\alpha t}\quad,\ t_0=\frac{L^2}{5\alpha}$$



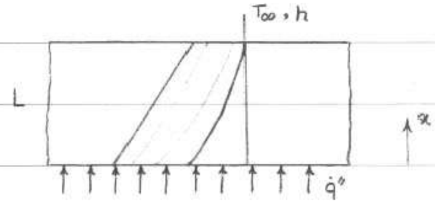
« $t=t_0$ »

« $t\to\infty$ »



بخش دوم مسأله یعنی از $t=t_0$ تا زمان پایدار شدن دما را در جلسه بعد بررسی خواهیم کرد.

جلسه هشتم «سه‌شنبه ۲۸ مهر ۱۳۸۸»



$\theta = T - T_\infty$

$t > t_0 \qquad , t_0 = \frac{L^2}{5\alpha}$

$\dot{q}'' = -k \frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{x=0} \qquad , h\theta = -k\frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{x=L}$

$\theta = \theta_1 + \theta_2$

$-k\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dot{q}'' \qquad , -k\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\Big|_{x=L} = h\theta_1$

$-k\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad , -k\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\Big|_{x=L} = h\theta_2$ «بخش همگن برای بسط کانتروویچ»

✓ توجه می‌کنیم که چون $h\theta = -k\frac{\partial \theta}{\partial x}$ تنها شامل θ است و عدد ثابت یا ترم غیرخطی ندارد برهم‌نهی برای آن صادق بوده و یک شرط همگن محسوب می‌شود.

$\theta_1(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + C(t)$

$-k\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dot{q}'' \longrightarrow b = -\frac{\dot{q}''}{k}$

$-k\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\Big|_{x=L} = h\theta_1\Big|_{x=L} \longrightarrow -k(2aL - \frac{\dot{q}''}{k}) = h(aL^2 + bL + C) \longrightarrow C = -\frac{2aLk}{h} + \frac{\dot{q}''}{h} - aL^2 + \frac{\dot{q}''L}{k}$

$\Rightarrow \theta_1(x,t) = a(t)(x^2 - L^2) - \frac{\dot{q}''}{k}x + \frac{\dot{q}''}{h} + \frac{\dot{q}''L}{k} - a(t)\frac{2Lk}{h}$

$\theta_2(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$

$-k\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \longrightarrow B = 0$

$-k\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\Big|_{x=L} = h\theta_2 \longrightarrow -k(2AL) = h(AL^2 + C) \longrightarrow C = -\frac{2ALk}{h} - AL^2$

$\Rightarrow \theta_2(x,t) = A(t)(x^2 - L^2) - A(t)\frac{2Lk}{h}$

توجه می‌کنیم که این بخش همگن است که پتانسیل بسط داده شدن به روش کانتروویچ را برای تعداد بیشتری تابع دارد و بنابراین می‌توان آن

را دقیق‌تر کرد.

$$\theta_2(x,t) = f_n(t)(x^n - L^n) + f_{n-1}(t)(x^{n-1} - L^{n-1}) + \dots + f_3(t)(x^3 - L^3) + f_2(t)(x^2 - L^2) - \frac{k}{h}(nf_nL^n + \dots + 3f_3L^3 + 2f_2L^2)$$

$$\delta I = \int_0^L \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\delta\theta \, dx \, dt = 0$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = a(x^2 - L^2) - \frac{\dot{q}''}{k}x + \frac{\dot{q}''}{h} + \frac{\dot{q}''L}{k} - a\frac{2Lk}{h} + A(x^2 - L^2) - A\frac{2Lk}{h}$$

$$= (a + A)(x^2 - L^2) - \frac{\dot{q}''}{k}x + \frac{\dot{q}''}{h} + \frac{\dot{q}''L}{k} - (a + A)\frac{2Lk}{h}$$

اگر $(a(t) + A(t))$ را $f(t)$ فرض کنیم، ماهیت مسأله همان کانتروویچ مرتبه ۱ باقی می‌ماند.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 2f$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = f'(x^2 - L^2) - f'\frac{2Lk}{h}$$

$$\delta\theta = \left(x^2 - L^2 - \frac{2Lk}{h}\right)\delta f$$

$$\delta I = \int_0^L \left[2f - \frac{1}{\alpha}\left(x^2 - L^2 - \frac{2Lk}{h}\right)f'\right]\left(x^2 - L^2 - \frac{2Lk}{h}\right)\delta f \, dx \, dt = 0$$

می‌توان مساله را به جای distributed به صورت Lumped نگاه کرد.

Lumped system

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{C.V.} = \sum E_{in}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\rho ALC_v(T - T_\infty)\right] = \dot{q}''A - hA(T - T_\infty)$$

$$\rho LC_v\frac{d\theta}{dt} = \dot{q}'' - h\theta$$

$$\frac{d\theta}{h\theta - \dot{q}''} = \frac{-h\,dt}{\rho C_v L}$$

$$Ln\left(\theta - \frac{\dot{q}''}{h}\right) = -\frac{h}{\rho C_v L} t + C_1$$

$$\theta = \frac{\dot{q}''}{h} + C_0 e^{\frac{-ht}{\rho C_v L}}$$

$$t=0 \longrightarrow \theta=0 \longrightarrow C_0 + \frac{\dot{q}''}{h} = 0 \longrightarrow C_0 = -\frac{\dot{q}''}{h}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{\dot{q}''}{h}\left(1 - e^{-\frac{ht}{\rho C_v L}}\right)$$

جلسه نهم: «یک شنبه ۳ آبان ۱۳۸۸»

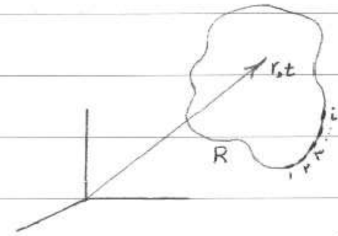
Green's function

توابع گرین معمولاً در مسائلی که شرط مرزی، شرط اولیه یا خود معادله وابسته به زمان باشد، کاربرد دارند.

$G(r,t|r',\tau)$

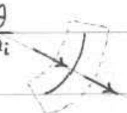
شرایط در r و t تابع اختلال در r' ، τ است.

$$\nabla^2\theta + \frac{1}{k}g(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}$$



$$k_i\frac{\partial\theta}{\partial n_i} + h_i\theta = h_i\theta_{\infty,i} = f_i(r,t) \qquad i\in B_s$$

$$\theta(r,0) = F(r)$$



مسئله متناظر برای green function

$$\nabla^2 G(r,t|r',\tau) + \frac{1}{k}\delta(r-r')\delta(t-\tau) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial G}{\partial t}$$

$$k_i\frac{\partial G}{\partial n_i} + h_i G = 0$$

$$G(r,0) = 0$$

تابع دلتای دیراک: $\delta(x) = \begin{cases} 0 & x\neq 0 \\ \infty & x = 0\end{cases}$; $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)\,dx = 1$

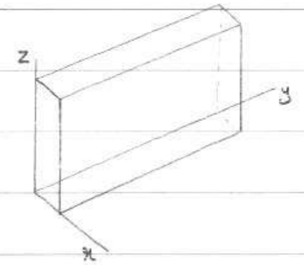
$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\delta(x)\,dx = F(0) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\delta(x-b)\,dx = F(b)$$

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

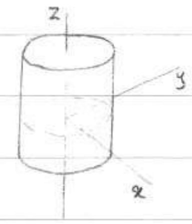
$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\delta^{(n)}(x-b)\,dx = (-1)^n F^{(n)}(b)$$

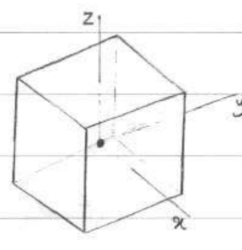
$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\delta'(x-b)\,dx = -F'(b) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\delta''(x-b)\,dx = +F''(b)$$

ترم تولید حرارت داخلی ، $g(r,\theta)$ ، را می‌توان به حالت‌های زیر طبقه‌بندی کرد.



g_s^c (Continuously)	g_s^i (instantaneously)	تولید صفحه‌ای (Surface)	یک بعدی	صفحه از دو جهت نامتناهی و از یک جهت محدود است.
g_L^c	g_L^i	تولید میله‌ای (Line)	دو بعدی	خط از یک جهت نامتناهی و از دو جهت محدود است.
g_p^c	g_p^i	تولید نقطه‌ای (Point)	سه بعدی	نقطه از هر سه جهت محدود است.





$$\dot{g}''' = g_p^i\ \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')\,\delta(t-\tau) \longrightarrow [g_p^i] = \frac{\frac{W}{m^3}}{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s}} = W.S = J$$

$$\dot{g}''' = g_L^i\ \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(t-\tau) \longrightarrow [g_L^i] = \frac{\frac{W}{m^3}}{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s}} = \frac{W.S}{m} = \frac{J}{m}$$

$$\dot{g}''' = g_s^c\ \delta(x-x') \longrightarrow [g_s^c] = \frac{\frac{W}{m^3}}{\frac{1}{m}} = \frac{W}{m^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x')\,dx = 1 \longrightarrow [\delta(x-x')]\cdot[dx] = [1] \longrightarrow [\delta(x-x')] = \frac{1}{m}$$

$$\int_{\theta'-\pi}^{\theta'+\pi} \delta(\theta-\theta')\,d\theta = 1 \longrightarrow [\delta(\theta-\theta')]\cdot[d\theta] = [1] \longrightarrow [\delta(\theta-\theta')] = 1$$

مختصات کروی : $\dot{g}''' = g_p^i\ \delta(r-r')\,\delta(r\theta-r'\theta')\,\delta(r\sin\theta\phi - r'\sin\theta'\phi')\,\delta(t-\tau)$

$$\dot{g}''' = g_p^i \frac{\text{عدد بی بعد}}{(\text{مشخصه طول})^n}\,\delta(u_1-u_1')\,\delta(u_2-u_2')\,\delta(u_3-u_3')\,\delta(t-\tau)\ ;\ n \begin{cases} \text{rectangular} & 0 \\ \text{Cylindrical} & 1 \\ \text{Spherical} & 2 \end{cases}$$

✓ برای تعیین $\frac{\text{عدد بی بعد}}{(\text{مشخصه طول})^n}$ از جدول مقابل استفاده شود:

$$\Rightarrow \left[g_p^i\right]_{\text{کارتزین}} = \left[g_p^i\right]_{\text{استوانه‌ای}} = \left[g_p^i\right]_{\text{کروی}}$$

برداری یک مختصات کلی	مختصات کارتزین	مختصات استوانه‌ای	مختصات کروی
$\hat{\varepsilon}_{u_1}$	ε_x	ε_r	ε_ρ
$\hat{\varepsilon}_{u_2}$	ε_y	ε_θ	ε_φ
$\hat{\varepsilon}_{u_3}$	ε_z	ε_z	ε_θ
h_1	1	1	1
h_2	1	r	ρ
h_3	1	1	$\rho\sin\varphi$

طول دیفرانسیلی در مختصات کلی: $ds = (h_1\hat{\varepsilon}_{u_1})^2 + (h_2\hat{\varepsilon}_{u_2})^2 + (h_3\hat{\varepsilon}_{u_3})^3$

گرادیان در مختصات کلی: $\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\hat{\varepsilon}_{u_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\hat{\varepsilon}_{u_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\hat{\varepsilon}_{u_3}$

دیورژانس در مختصات کلی: $div(A) = \nabla . A = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_{u_3})\right]$

کرل در مختصات کلی: $Curl(F) = \nabla \times F = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\varepsilon}_{u_1} & h_2\hat{\varepsilon}_{u_2} & h_3\hat{\varepsilon}_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_{u_1} & h_2F_{u_2} & h_3F_{u_3}\end{vmatrix}$

برای دو هفته آینده یک موضوع مرتبط با ریاضی برای ارائه سمینار انتخاب شود و چکیده پیشنهاد در یک صفحه ارائه گردد.

برای تعیین $\frac{\text{عدد بی‌بعد}}{(\text{مشخصه طول})^n}$	g_p^i یا g_p^c	g_L^i یا g_L^c	g_s^i یا g_s^c
مختصات کارتزین	1	1	1
مختصات استوانه‌ای	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{2\pi r}$	$\frac{1}{2\pi r}$
مختصات کروی	$\frac{1}{r^2\sin\theta}$	$\frac{1}{4\pi r^2}$	$\frac{1}{4\pi r^2}$

جلسه دهم :   ، سه شنبه ۵ آبان ۱۳۸۸ ،

Green's function

$$\nabla^2 T + \frac{1}{k} g(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$K_i \frac{\partial T}{n} + h_i T(r,t) = h_i T_\infty = f_i(r,t)$$

$$T(r,0) = F(r)$$

برای چنین مسئله کلی انتقال حرارتی، تابع گرین از مسئله همگن زیر بایستی تعیین شود.

$$\nabla^2 G(r,t|r',\tau) + \frac{1}{k}\delta(r-r')\delta(t-\tau) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial G}{\partial t}$$

$$K_i \frac{\partial G}{\partial n} + h_i G = 0$$

✓ در مورد شرط زمانی بعداً بحث خواهیم کرد.

اگر تابع گرین مرتبط با مسأله فوق تعیین شود، آنگاه جواب کلی دما برحسب تابع گرین به صورت زیر خواهد بود. (اثبات خارج از برنامه این درس است.)

$$T(r,t) = \int_R G(r,t|r',\tau)\Big|_{\tau=0} F(r')\,dV' + \frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_R G(r,t|r',\tau)\,g(r',\tau)\,dV'\,d\tau$$

$$+ \alpha\int_{\tau=0}^{t}\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i} G(r,t|r',\tau)\Big|_{r'=r_i}\frac{1}{K_i}f_i(r',\tau)\,dS_i'\,d\tau$$

برای مسئله یک بعدی $N=2$ است. یعنی تنها دو شرط مرزی داریم. با یادآوری weight function از جلسه قبل، دمای یک بعدی برحسب تابع گرین به صورت زیر خواهد بود.

$$T(x,t) = \int_{x'=0}^{L} x'^P G(x,t|x',\tau)\Big|_{\tau=0} F(x')\,dx' + \frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x'=0}^{L} x'^P G(x,t|x',\tau)\,g(x',\tau)\,dx'\,d\tau$$

$$+ \alpha\int_{\tau=0}^{t}\sum_{i=1}^{2}\left[x'^P G(x,t|x',\tau)\right]_{x'=0,L}\frac{1}{K_i}f_i\,d\tau$$

$$\text{Weight function, } P \begin{cases} 0 & \text{مختصات کارتزین} \\ 1 & \text{مختصات استوانه‌ای} \\ 2 & \text{مختصات کروی} \end{cases}$$

انواع شرایط مرزی:

- نوع اول (دیریکله): $T = T_w \quad , \quad k_i \frac{\partial T}{\partial n} + h_i T = h_i T_w \xrightarrow{k_i = 0} T = T_w$
- نوع دوم (نیومن): $k \frac{\partial T}{\partial n} = \dot{q}'' \quad , \quad k_i \frac{\partial T}{\partial n} + h_i T = f_i(r_{مرز}, t) \xrightarrow[f_i(r_i,t) = \dot{q}'']{h_i = 0} k_i \frac{\partial T}{\partial n} = \dot{q}''$
- نوع سوم: $k_i \frac{\partial T}{\partial n} + h_i T = h_i T_\infty = f_i(r_{مرز}, t)$

همانطور که می‌بینیم در مواردی که شرط مرزی از نوع دیریکله باشد، هنگام بدست آوردن دما از روی تابع گرین، در مرز باید قرار دهیم $k_i = 0$ که این محاسبه انتگرال سوم را با مشکل مواجه می‌کند. به همین دلیل در این مورد از برابری زیر استفاده می‌شود:

کلی: $\frac{1}{k_i} G_i(r,t|r',\tau)\Big|_{r'=r_i} = -\frac{1}{h_i} \frac{\partial G(r,t|r',\tau)}{\partial n_i}\Big|_{r'=r_i}$

یک بعدی: $\frac{1}{k_i} G_i(x,t|x',\tau)\Big|_{x'=0 \text{ یا } L} = -\frac{1}{h_i} \frac{\partial G(x,t|x',\tau)}{\partial n_i}\Big|_{x'=0 \text{ یا } L} \qquad n_i \begin{cases} x'=0 \longrightarrow n_i = -x' \\ x'=L \longrightarrow n_i = x' \end{cases}$

برای محاسبه خود تابع گرین سه روش کلی وجود دارد که عبارتند از:

$$\text{determination of Green's function} \begin{cases} \text{Laplace transformation} \\ \text{method of images} \\ \text{seperation of variables} \end{cases}$$

✓ در اینجا ما تنها به بررسی مورد سوم یعنی جداسازی متغیرها می‌پردازیم.

مثال: تابع گرین را برای مسئله زیر تعیین کنید.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{k} g(x,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \qquad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

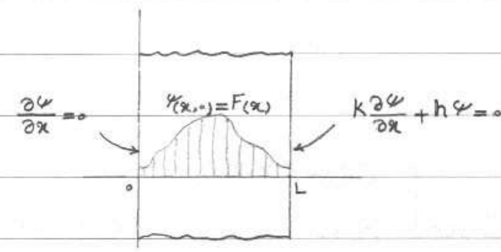
$$\frac{\partial T}{\partial x} = f_1(t) \qquad \text{«شرط نیومن»} \qquad x = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + HT = f_2(t) \qquad x = L \quad , \quad t > 0$$

$$T = F(x) \qquad 0 < x < L \quad , \quad t = 0$$

مسئله همگن متناظری که بایستی حل شود به صورت زیر است :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad 0<x<L \quad , t>0$$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad x=0 \quad , t>0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + H\varphi = 0 \qquad x=L \quad , t>0$$

$$\varphi = F(x) \qquad 0<x<L \quad , t=0$$

$$\varphi(x,t) = X(x)\Gamma(t)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \longrightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}$$

چون طرف چپ تابع x و طرف راست تابع t است، پس هردو ثابت هستند. چون دما یعنی T و از آنجا φ با زمان کم می‌شود تا نهایتاً در $t \to \infty$ ، $\varphi(t)=0$ ، پس عدد ثابت باید منفی باشد.

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2$$

$$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = -\alpha\lambda^2 dt$$

$$\ln\Gamma = -\alpha\lambda^2 t + c_1$$

$$\Gamma = c_1 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2$$

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad , \quad \left.\frac{dX}{dx} + HX\right|_{x=L} = 0$$

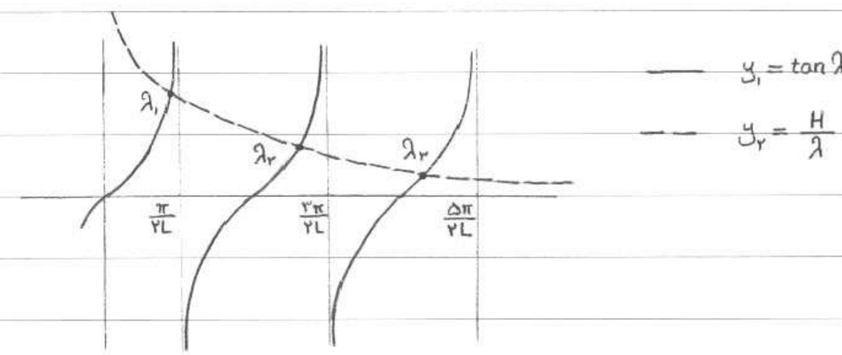
$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 X$$

$$\longrightarrow X = C_2 \sin\lambda x + C_3 \cos\lambda x$$

$$\frac{dX}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$\frac{dX}{dx} + HX = -\lambda C_3 \sin\lambda x + HC_3 \cos\lambda x = 0 \longrightarrow \lambda \sin\lambda x = H\cos\lambda x \Big|_{x=L}$$

$$\longrightarrow \tan\lambda L = \frac{H}{\lambda} \quad \left(= \frac{h}{k\lambda} = \frac{\frac{hL}{k}}{\lambda L} = \frac{Bi}{\lambda L}\right)$$



$$\theta(x,t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_1 e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \times C_3 \cos\lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \cos\lambda_n x$$

✓ چون تابع $\theta(x,t)$ نسبت به λ_n زوج است، می‌توانیم تنها مقادیر مثبت λ_n را حساب کنیم.

✓ معمولاً نیازی پیدا نمی‌شود که برای محاسبه $\theta(x,t)$ بیش‌تر از چهار یا پنج جمله را در نظر بگیریم. (تا λ_4 یا λ_5 کافیست)

تا اینجا از هر دو شرط مرزی استفاده کرده‌ایم و شکل تابع θ را بدست آورده‌ایم. حال با استفاده از شرط اولیه، مقادیر C_n را حساب خواهیم کرد.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\lambda_n x$$

$$\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x \, dx = \int_{x=0}^{L} C_n \cos^2\lambda_n x \, dx$$

$$C_n = \frac{\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x\,dx}{\int_{x=0}^{L} \cos^2\lambda_n x\,dx} = \frac{\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x\,dx}{\int_{x=0}^{L} \left(\frac{1+\cos 2\lambda_n x}{2}\right)} = \frac{\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x\,dx}{\frac{1}{2}L + \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n L}$$

اما باتوجه به اینکه $\tan\lambda_n L = \frac{H}{\lambda_n}$، می‌توان نوشت:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \longrightarrow \sin 2\lambda_n L = \frac{2\tan\lambda_n L}{1+\tan^2\lambda_n L} = \frac{\frac{2H}{\lambda_n}}{1+\frac{H^2}{\lambda_n^2}} = \frac{2\lambda_n H}{\lambda_n^2 + H^2}$$

$$\longrightarrow\ C_n = \frac{\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x\, dx}{\frac{L}{2} + \frac{1}{4\lambda_n}\,\frac{2\lambda_n H}{\lambda_n^2 + H^2}} = \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{L(\lambda_n^2+H^2) + H}\int_{x=0}^{L} F(x)\cos\lambda_n x\, dx$$

نهایتاً تابع ψ به فرم زیر خواهد بود :

$$\psi(x,t) = \int_{x'=0}^{L}\left[2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\,\frac{\lambda_n^2 + H^2}{L(\lambda_n^2+H^2)+H}\cos\lambda_n x\,\cos\lambda_n x'\right] F(x')\, dx'$$

به عبارت داخل کروشه ، kernel انتگرال‌گیری گفته می‌شود. اگر آن را با $K(r,r',t)$ نشان دهیم، آنگاه ψ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\psi(r,t) = \int_R K(r,r',t)\, F(r')\, dV'$$

با مقایسه این عبارت و انتگرال مربوط به تاثیر دمای اولیه بر روی T با استفاده از تابع گرین، یعنی :

$$T(r,t) = \int_R G(r,t|r',\tau)\big|_{\tau=0} F(r')\, dV'$$

نتیجه می‌گیریم که برای $\tau=0$ ، kernel همان تابع گرین است.

$$G(r,t|r',\tau)\big|_{\tau=0} = K(r,r',t)$$

برای بدست آوردن تابع گرین کلی کافیست در کرنل، t را به $t-\tau$ تبدیل کنیم.
پس تابع گرین برای این مسئله به شکل زیر خواهد بود :

$$G(x,t|x',\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,\frac{\lambda_n^2 + H^2}{L(\lambda_n^2+H^2)+H}\cos\lambda_n x\,\cos\lambda_n x'$$

در نهایت برای محاسبه دما به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$K_i\frac{\partial T}{\partial x} + h_i T = h_i T_\infty = f_i(t)$$

شرط مرزی اول : $\frac{\partial T}{\partial x} = f_1(t) \longrightarrow k_1 = 1\ ,\ h_1 = 0\ ,\ f_1 = f_1(t)$

شرط مرزی دوم : $\frac{\partial T}{\partial x} + HT = f_2(t) \longrightarrow k_2 = 1\ ,\ h_2 = H\ ,\ f_2 = f_2(t)$

$$T(x,t) = \int_{x'=0}^{L} G(x,t|x',\tau)\big|_{\tau=0} F(x')\, dx' + \frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x'=0}^{L} G(x,t|x',\tau)\, g(x',\tau)\, dx'\, d\tau$$

$$+\ \alpha\int_{\tau=0}^{t}\left[G(x,t|x',\tau)\big|_{x'=0} f_1(\tau) + G(x,t|x',\tau)\big|_{x'=L} f_2(\tau)\right] d\tau$$

مثال : تابع گرین برای مسئله زیر را تعیین کنید.

$L = 0/1\ m$

$T_0 = 280\ K$

$T_1 = 300\ K$

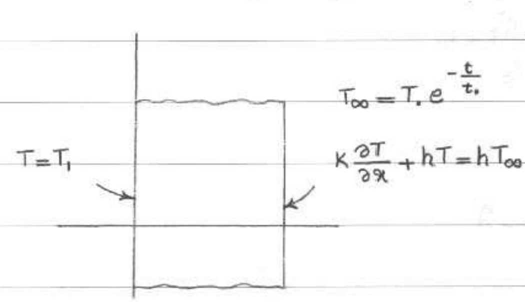
$h = 100\ \frac{W}{m^2 K}$

$K = 30\ \frac{W}{m.K}$

$\alpha = 7/5 \times 10^{-7}\ \frac{m^2}{s}$

$t_0 = 10\ s \longrightarrow T_\infty = 280\, e^{-0/1 t}$

$g_0 = 1000\ \frac{W}{m^3} \longrightarrow \dot{g}''' = 1000\, e^{-0/1 t}$



$$\nabla^2 T + g(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,0) = T_0 = 280\ K$$

$$T(x,t)\Big|_{x=0} = T_1 = 300\ K \quad ; \quad \left[K\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + hT(x,t)\right]_{x=L} = hT_\infty$$

ابتدا با تغییر متغیر $\theta = T - T_1$ شرط مرزی در $x=0$ را همگن می‌کنیم.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + g(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

$$\theta(x,0) = T_0 - T_1 = \theta_0 = -20\ K$$

$$\theta(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \quad ; \quad \left[K\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} + h\theta(x,t)\right]_{x=L} = hT_\infty - hT_1$$

مسئله همگن متناظری که بایستی برای یافتن تابع گرین حل شود به صورت زیر است :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

$$\psi(0,t) = 0 \quad ; \quad \left[\frac{\partial\psi}{\partial x} + H\psi\right]_{x=L} = 0$$

$$\psi(x,0) = \theta_0$$

$$\psi(x,t) = X(x)\,\Gamma(t)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} \longrightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2$$

$$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = -\alpha\lambda^2 dt$$
$$\ln\Gamma = -\alpha\lambda^2 t + C_1$$
$$\Gamma = C_1 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2$$
$$X_{(0)} = 0 \qquad ; \quad \frac{dX}{dx} + HX \Big|_{x=L} = 0$$
$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 X$$
$$\longrightarrow X = C_2 \sin\lambda x + C_3 \cos\lambda x$$

$$X_{(0)} = 0 \longrightarrow C_3 = 0$$

$$\frac{dX}{dx} + HX = C_2\lambda\cos\lambda x + HC_2\sin\lambda x = 0 \longrightarrow H\sin\lambda x = -\lambda\cos\lambda x$$
$$\xrightarrow{x=L} \tan\lambda L = -\frac{\lambda}{H}$$

$$\psi(x,t) = X(x)\,T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_1 e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \times C_2 \sin\lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x$$

✓ برای ارزیابی سری تنها مقادیر مثبت λ_n را در نظر می‌گیریم و به چهار جمله اول بسنده خواهیم کرد.

تا اینجا از هر دو شرط مرزی استفاده کرده‌ایم و شکل تابع ψ را بدست آورده‌ایم. حال با استفاده از شرط اولیه، مقادیر C_n را حساب خواهیم کرد:

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\lambda_n x$$

$$\int_{x=0}^{L} \theta_0 \sin\lambda_n x\, dx = \int_{x=0}^{L} C_n \sin^2\lambda_n x\, dx$$

$$C_n = \frac{\int_{x=0}^{L}\theta_0\sin\lambda_n x\,dx}{\int_{x=0}^{L}\sin^2\lambda_n dx} = \frac{\int_{x=0}^{L}\theta_0\sin\lambda_n x\,dx}{\int_{x=0}^{L}\left(\frac{1-\cos 2\lambda_n x}{2}\right)dx} = \frac{\int_{x=0}^{L}\theta_0\sin\lambda_n x\,dx}{\frac{1}{2}L - \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n L}$$

اما با توجه به اینکه $\tan\lambda_n L = -\frac{\lambda_n}{H}$، می‌توان نوشت:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \longrightarrow \sin 2\lambda_n L = \frac{2\tan\lambda_n L}{1+\tan^2\lambda_n L} = \frac{\frac{-2\lambda_n}{H}}{1+\frac{\lambda_n^2}{H^2}} = \frac{-2\lambda_n H}{\lambda_n^2 + H^2}$$

$$\longrightarrow C_n = \frac{\int_{x=0}^{L} \theta_0 \sin\lambda_n x\, dx}{\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{H}{\lambda_n^2 + H^2}} = \frac{2(\lambda_n^2 + H^2)}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H} \int_{x=0}^{L} \theta_0 \sin\lambda_n\, dx$$

نهایتاً تابع θ به فرم زیر خواهد بود :

$$\theta(x,t) = \int_{x'=0}^{L} \left[2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \frac{\lambda_n^2 + H^2}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H} \sin\lambda_n x \sin\lambda_n x' \right] \theta_0\, dx'$$

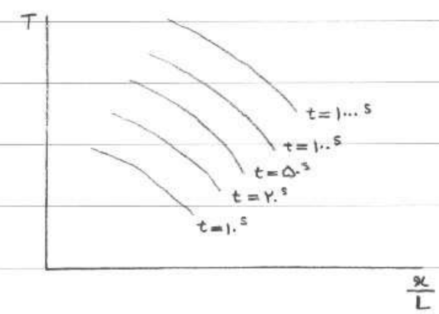
با برابر قرار دادن kernel یعنی عبارت داخل کروشه با تابع گرین در $\tau = 0$:

$$G(x,t|x',\tau)\Big|_{\tau=0} = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \frac{\lambda_n^2 + H^2}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H} \sin\lambda_n x \sin\lambda_n x'$$

پس تابع گرین برای این مسئله به صورت زیر است :

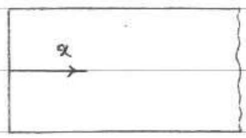
$$G(x,t|x',\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 (t-\tau)} \frac{\lambda_n^2 + H^2}{L(\lambda_n^2 + H^2) + H} \sin\lambda_n x \sin\lambda_n x'$$

تکلیف شماره ۶ : مثال بالا را یکبار دیگر از ابتدا حل کنید و توزیع دما را در زمان‌های مختلف به صورت نمودار زیر رسم کنید.



جلسه یازدهم: «یک شنبه ۱۷ آبان ۱۳۸۸»

جسم نیمه متناهی



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{K} g(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad 0 < x < \infty \quad , t > 0$$

$T(0,t) = 0$

$T(x,0) = F(x)$

مسئله همگن متناظری که برای یافتن تابع گرین بایستی حل شود به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad 0 < x < \infty \quad , t > 0$$

$\psi(0,t) = 0$

$\psi(x,0) = F(x)$

$$\psi(x,t) = X(x)\,\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2$$

$$\frac{d\Gamma}{\Gamma} = -\alpha\lambda^2 dt$$
$$\ln\Gamma = -\alpha\lambda^2 t + c_1$$
$$\Gamma = C_1 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 X$$
$$X = C_2 \sin\lambda x + C_3 \cos\lambda x$$

$$X(0) = 0 \longrightarrow C_3 = 0$$

$$\psi(x,t)=\int_{\lambda=0}^{\infty} C e^{-\alpha\lambda^2 t}\sin\lambda x\, d\lambda$$

$$F(x)=\int_{\lambda=0}^{\infty} C\sin\lambda x\, d\lambda$$

یادآوری از ریاضیات مهندسی

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{ بر } \mathbb{R} \text{ در شرایط دیریکله صدق کند.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx \text{ موجود باشد.}\end{array}\right\} \longrightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$$

انتگرال فوریه سینوسی : $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\, d\omega \quad , B(\omega)=2\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$

$$\longrightarrow C=\frac{2}{\pi}\int_{x'=0}^{\infty} F(x')\sin\lambda x'\, dx'$$

$$\psi(x,t)=\int_{\lambda=0}^{\infty}\frac{2}{\pi}e^{-\alpha\lambda^2 t}\int_{x'=0}^{\infty}F(x')\underbrace{\sin\lambda x'\sin\lambda x}_{\frac{1}{2}\left[\cos\lambda(x-x')-\cos\lambda(x+x')\right]}\,dx'\,d\lambda$$

یادآوری : $\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2 t}\cos\lambda(x\pm x')\,d\lambda=\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}}\,e^{\left[-\frac{(x\pm x')^2}{4\alpha t}\right]}$

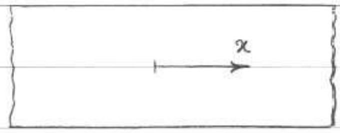
$$\psi(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{x'=0}^{\infty}F(x')\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}}\left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}-e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha t}}\right]dx'$$

$$\psi(x,t)=\int_{x'=0}^{\infty}F(x')\,G(x,t\,|\,x',\tau=0)\,dx'$$

$$G(x,t\,|\,x',\tau)=\frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{\sqrt{4\pi\alpha(t-\tau)}}$$

$$T(x,t)=\int_{x'=0}^{\infty}F(x')\,G(x,t\,|\,x',\tau=0)\,dx'+\frac{\alpha}{K}\int_{x'=0}^{\infty}\int_{\tau=0}^{t}g(x',\tau)\,G(x,t\,|\,x',\tau)\,dx'\,d\tau$$

جسم نامتناهی



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{k} g(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad -\infty < x < +\infty \quad , t > 0$$

$$T(x,0) = F(x)$$

مسئله همگن متناظری که برای یافتن تابع گرین بایستی حل شود به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\psi(x,t) = X(x)\, T(t)$$

$$\frac{T'}{\alpha T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$T = C_0 e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$$

$$\psi(x,t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2 t}\left[C_3 \sin \lambda x + C_4 \cos \lambda x\right] d\lambda$$

$$C_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x') \sin \lambda x' \, dx' \qquad , \qquad C_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x') \cos \lambda x' \, dx'$$

$$\psi(x,t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\alpha\lambda^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x') \underbrace{\left(\cos\lambda x' \cos\lambda x + \sin\lambda x' \sin\lambda x\right)}_{\cos\lambda(x-x')} dx'\, d\lambda$$

$$\psi(x,t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{x'=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda^2 t} F(x') \cos\lambda(x-x')\, dx'\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{x'=-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda=0}^{\infty} F(x')\, e^{-\alpha\lambda^2 t} \cos\lambda(x-x')\, d\lambda\, dx'$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{x'=-\infty}^{+\infty} F(x')\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha t}}\; e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}\, dx' = \int_{x'=-\infty}^{+\infty} F(x')\, G(x,t\,|\,x',\tau=0)\, dx'$$

$$G(x,t\,|\,x',\tau) = \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{\sqrt{4\alpha\pi(t-\tau)}}$$

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x')\, G(x,t\,|\,x',\tau=0)\, dx' + \frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{x'=-\infty}^{+\infty} g(x',\tau)\, G(x,t\,|\,x',\tau)\, dx'\, d\tau$$

حالت خاص:

$$F(x') = \begin{cases} T_0 & -L < x < L \\ 0 & x < -L\ ,\ x > L \end{cases}$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\alpha\pi t}}\int_{-L}^{L} T_0\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}\, dx'$$

$$\eta = \frac{x-x'}{\sqrt{4\alpha t}} \qquad , \qquad d\eta = -\frac{1}{\sqrt{4\alpha t}}\, dx'$$

$$\psi(x,t) = \frac{T_0}{\sqrt{4\alpha\pi t}}\int_{\frac{x+L}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\frac{x-L}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2}\left(-\sqrt{4\alpha t}\right) d\eta$$

$$= -T_0\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{x+L}{\sqrt{4\alpha t}}}^{0} e^{-\eta^2}\, d\eta + \int_{0}^{\frac{x-L}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2}\, d\eta\right]$$

$$= T_0\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{0}^{\frac{x+L}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2}\, d\eta + \int_{0}^{\frac{L-x}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-\eta^2}\, d\eta\right]$$

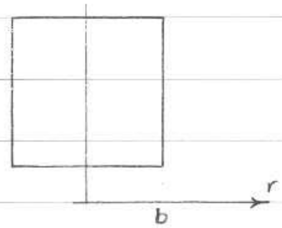
$$\Rightarrow \frac{\psi(x,t)}{T_0} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{L+x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{L-x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)\right]$$

در حالتی که $L=0$ باشد، یعنی یک نقطه در جسم نامتناهی دارای دمای T_0 و بقیه جسم در دمای 0 باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{\psi(x,t)}{T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

جلسه دوازدهم   « سه‌شنبه ۱۹ آبان ۱۳۸۸ »

مختصات استوانه‌ای



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{k}g(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(r,t)\big|_{t=0} = F(r)$$

$$T(r,t)\big|_{r=b} = f(t)$$

مسئله متناظر همگنی که بایستی حل شود، عبارت است از :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\psi(r,t)\big|_{t=0} = F(r)$$

$$\psi(r,t)\big|_{r=b} = 0$$

$$\psi(r,t) = R(r)\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\lambda^2$$

$$\Gamma(t) = C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{rR}\left(\frac{\partial R}{\partial r} + r\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right) = -\lambda^2$$

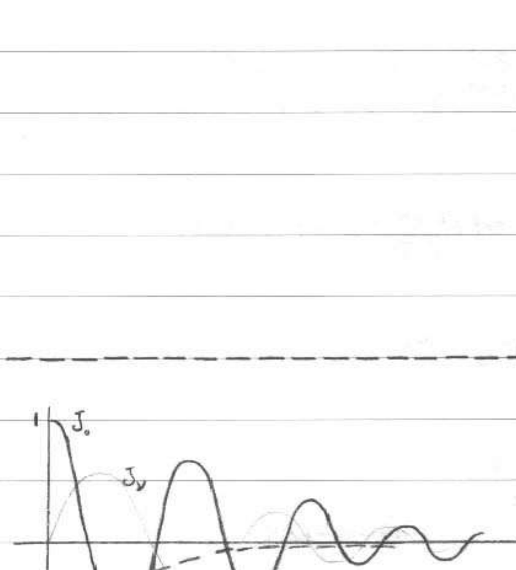
$$R' + rR'' = -\lambda^2 rR$$

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - 0^2)R = 0$$

یادآوری از معادلات

معادله بسل : $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

جواب کلی : $y = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x)$

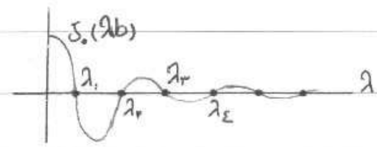


$$x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0 \quad \xrightarrow{\lambda x = z} \quad z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-\nu^2)y=0$$

$$R(r)=C_1J_0(\lambda r)+C_2Y_0(\lambda r)$$

$R(0)=finite \longrightarrow C_2=0$

$R(\lambda b)=0 \longrightarrow J_0(\lambda b)=0 \longrightarrow \lambda_n$ تعیین می‌شود



$$\psi(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)$$

$$F(r)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\lambda_n r)$$

$$\int_{r'=0}^{b} r'F(r')J_0(\lambda_n r')\,dr' = \int_{r'=0}^{b} C_n r' J_0^2(\lambda_n r')\,dr'$$

$$C_n=\frac{\int_{r'=0}^{b} r'F(r')J_0(\lambda_n r')\,dr'}{\int_{r'=0}^{b} r'J_0^2(\lambda_n r')\,dr'}$$

یادآوری: خاصیت تعامد توابع بسل

در موارد پیچیده‌تر بایستی از جداول ۱-۳، ۲-۳ و ۳-۳ (صفحه ۱۱۲-۱۰۸) "Heat Conduction, Özişik" استفاده کرد.

$J_\nu(a)=0 \quad , \quad J_\nu(b)=0$

$$\Rightarrow \int_0^1 x J_\nu(ax)J_\nu(bx)\,dx=\begin{cases}0 & a\neq b\\ \frac{1}{2}J_{\nu+1}^2(a) & a=b\end{cases}$$

$$x=\frac{r'}{b} \longrightarrow dx=\frac{1}{b}dr'$$

$$\int_{r'=0}^{b} r'J_0^2(\lambda_n r')\,dr'=\int_{x=0}^{1} bx\,J_0^2(\lambda_n bx)\,b\,dx = b^2\int_{x=0}^{1} xJ_0^2(\lambda_n bx)\,dx=\frac{b^2}{2}J_1^2(\lambda_n b)$$

$$C_n=\frac{\int_{r'=0}^{b} r'F(r')J_0(\lambda_n r')\,dr'}{\frac{b^2}{2}J_1^2(\lambda_n b)}$$

$$\psi(r,t)=\int_{r'=0}^{b} r'\left[\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\frac{1}{J_1^2(\lambda_n b)}J_0(\lambda_n r')J_0(\lambda_n r)\right]F(r')\,dr$$

$$\psi(r,t)=\int_{r'=0}^{b} r'G(r,t|r',\tau=0)F(r')\,dr'$$

$$G(r,t|r',\tau) = \frac{2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)} \frac{1}{J_1^2(\lambda_n b)} J_0(\lambda_n r') J_0(\lambda_n r)$$

$$T(r,t) = \int_{r'=0}^{b} r' G(r,t|r';\tau=0) F(r') dr' + \frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b} r' G(r,t|r';\tau) g(r';\tau) dr'$$

$$-\alpha \int_{\tau=0}^{t} \left[r' \frac{\partial G}{\partial r'}\right]_{r'=b} f(\tau) d\tau$$

تابع گرین برای مسائل سه بعدی

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,y,z,0) = F(x,y,z)$$

$$T(0,y,z,t) = T(a,y,z,t) = 0$$

$$T(x,0,z,t) = T(x,b,z,t) = 0$$

$$T(x,y,0,t) = T(x,y,c,t) = 0$$

$$T(x,y,z,t) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,\Gamma(t)$$

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{-\lambda^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{-\beta^2} + \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{-\delta^2} = \underbrace{\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}}_{-\gamma^2}$$

$$\Gamma(t) = C_0 e^{-\alpha\gamma^2 t}$$

$$X(x) = C_1 \sin\lambda_n x \qquad \lambda_n a = n\pi$$

$$Y(y) = C_2 \sin\beta_n y \qquad \beta_n b = n\pi$$

$$Z(z) = C_3 \sin\delta_n z \qquad \delta_n c = n\pi$$

$$\gamma_{nmp}^2 = \lambda_n^2 + \beta_m^2 + \delta_p^2$$

$$\Psi(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} C_{nmp}\, e^{-\alpha\gamma_{nmp}^2 t} \sin\lambda_n x \,\sin\beta_m y\, \sin\delta_p z$$

$$F(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} C_{nmp} \sin\lambda_n x\, \sin\beta_m y\, \sin\delta_p z$$

$$C_{nmp} = \frac{\int_{z'=0}^{c}\int_{y'=0}^{b}\int_{x'=0}^{a} F \sin\lambda_n x' \sin\beta_m y' \sin\delta_p z' \, dx' dy' dz'}{\int_{z'=0}^{c}\int_{y'=0}^{b}\int_{x'=0}^{a} \sin^2\lambda_n x' \sin^2\beta_m y' \sin^2\delta_p z' \, dx' dy' dz'}$$

$$C_{nmp} = \frac{\iiint \cdots dx' dy' dz'}{\frac{abc}{8}}$$

$$\psi(x,y,z,t) = \frac{8}{abc} \iiint \sum\sum\sum e^{-\alpha\gamma_{nmp}^2 t} (\sin\lambda_n x \sin\lambda_n x')(\sin\beta_m y \sin\beta_m y')(\sin\delta_p z \sin\delta_p z') F \, dx' dy' dz'$$

$$G(x,y,z,t|x',y',z',\tau) = \frac{8}{abc} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} e^{-\alpha\gamma_{nmp}^2(t-\tau)} (\sin\lambda_n x \sin\lambda_n x')(\sin\beta_m y \sin\beta_m y')(\sin\delta_p z \sin\delta_p z')$$

$$T(x,y,z,t) = \int_{\forall} G(x,y,z,t|x',y',z',\tau=0) \, F(x',y',z') \, dx' dy' dz'$$

$$+ \frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{\forall} G(x,y,z,t|x',y',z',\tau) \, g(x',y',z',\tau) \, dx' dy' dz' d\tau$$

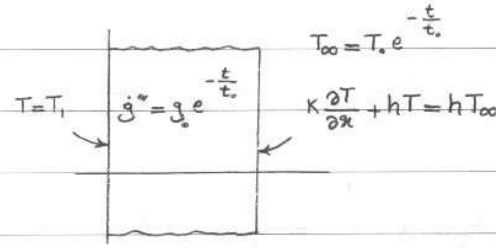
بی‌بعدسازی معادلات

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{K} g(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,0) = T_0$$

$$T(x,t)\big|_{x=0} = T_1$$

$$\left[K\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + hT(x,t)\right]_{x=L} = hT_\infty$$



بایستی T، x و t را بی‌بعد کنیم، پس:

$$\theta = \frac{T - T_{ref}}{\Delta T_{ref}} \longrightarrow T = T_{ref} + \Delta T_{ref}\,\theta$$

$$x^* = \frac{x}{x_{ref}} \longrightarrow x = x_{ref}\, x^*$$

$$t^* = \frac{t}{t_{ref}} \longrightarrow t = t_{ref}\, t^*$$

با جایگزاری در معادله خواهیم داشت:

$$\Delta T_{ref}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{K} g(x,t) = \frac{1}{\alpha}\Delta T_{ref}\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

$$\frac{\Delta T_{ref}}{x_{ref}^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^{*2}}+\frac{1}{K}g_2(x^*,t^*)=\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta T_{ref}}{t_{ref}}\frac{\partial\theta}{\partial t^*}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^{*2}}+\frac{x_{ref}^2}{K\Delta T_{ref}}g(x,t)=\frac{x_{ref}^2}{\alpha t_{ref}}\frac{\partial\theta}{\partial t^*}$$

همچنین برای شرایط مرزی می‌توان نوشت:

$$T(x,0)=T_0 \longrightarrow \theta(x^*,0)=\frac{T_0-T_{ref}}{\Delta T_{ref}}$$

$$T(x,t)\big|_{x=0}=T_1 \longrightarrow \theta(x^*,t^*)\big|_{x^*=0}=\frac{T_1-T_{ref}}{\Delta T_{ref}}$$

$$\left[K\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}+hT(x,t)\right]_{x=L}=hT_\infty \longrightarrow \left[\frac{K\Delta T_{ref}}{x_{ref}}\frac{\partial\theta(x^*,t^*)}{\partial x^*}+h\Delta T_{ref}\,\theta(x^*,t^*)\right]_{x^*=1}=hT_\infty-hT_{ref}$$

به نظر می‌رسد انتخاب $T_{ref}=T_1$ مناسب‌ترین انتخاب باشد، زیرا به این ترتیب شرط مرزی حاکم در $x^*=0$ همگن می‌شود.
همچنین با توجه به اینکه تنها مشخصه طول در مسئله L است، منطقی به نظر می‌رسد که $x_{ref}=L$ انتخاب شود.

$T_{ref}=T_1$

$x_{ref}=L$

حال اگر به معادله رجوع کنیم در آن دو ضریب وجود دارد که با انتخاب مناسب t_{ref} و ΔT_{ref} می‌توان آنها را برابر یک کرد.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^{*2}}+\frac{L^2}{K\Delta T_{ref}}g_0e^{-\frac{t}{t_0}}=\frac{L^2}{\alpha t_{ref}}\frac{\partial\theta}{\partial t^*}$$

$$\frac{L^2g_0}{K\Delta T_{ref}}=1 \longrightarrow \Delta T_{ref}=\frac{L^2g_0}{K}$$

$$\frac{L^2}{\alpha t_{ref}}=1 \longrightarrow t_{ref}=\frac{L^2}{\alpha}$$

پس مسئله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^{*2}}+e^{-\frac{L^2}{\alpha t_0}t^*}=\frac{\partial\theta}{\partial t^*}$$

$$\theta(x^*,0)=\frac{K}{L^2g_0}(T_0-T_1)$$

$$\theta(x^*,t^*)\big|_{x^*=0}=0$$

$$\left[\frac{\partial\theta(x^*,t^*)}{\partial x^*}+\frac{hL}{K}\,\theta(x^*,t^*)\right]_{x^*=1}=\frac{hL}{K}\left(\frac{T_\infty-T_1}{\Delta T_{ref}}\right)=\frac{hL}{K}\left[\frac{T_0 e^{-\frac{L^2}{\alpha t_0}t^*}-T_1}{\frac{L^2 g_0}{K}}\right]$$

در نهایت با معرفی اعداد بی‌بعد، شکل نهایی و بی‌بعد مسئله به دست خواهد آمد :

$$Fo=\frac{L^2}{\alpha t_0}$$

$$\theta_0=\frac{K}{L^2 g_0}(T_0-T_1)$$

$$Bi=\frac{hL}{K}$$

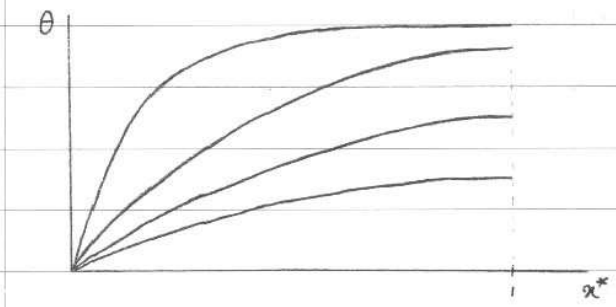
$$f_2(t^*)=Bi\,\theta_0\left[\frac{T_0 e^{-Fo\,t^*}-T_1}{T_0-T_1}\right]$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^{*2}}+e^{-Fo\,t^*}=\frac{\partial\theta}{\partial t^*}$$

$$\theta(x^*,0)=\theta_0$$

$$\theta(x^*,t^*)\big|_{x^*=0}=0 \quad ; \quad \left[\frac{\partial\theta(x^*,t^*)}{\partial x^*}+Bi\,\theta(x^*,t^*)\right]_{x^*=1}=f_2(t^*)$$

تکلیف شماره ۷ : این مسئله را با استفاده از روش گرین حل کرده و نمودار زیر را رسم کنید.



$$t^*=\frac{n t_0}{t_{ref}} \qquad (n=0,1,2,5,10,100)$$

جلسه سیزدهم «یک شنبه ۲۴ آبان ۱۳۸۸»

بررسی حالت‌های خاص در مختصات استوانه‌ای

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{K}g(r,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$T(r,0)=F(r)$

$T(b,t)=f(t)$

$$G(r,t|r',\tau)=\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)}J_0(\lambda_n r)$$

حالت اول:

$F(r)=0 \qquad , f(t)=0 \qquad , g(r,t)=g_0$

$$T(r,t)=\frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b}r'\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)}J_0(\lambda_n r)\,g_0\,dr'd\tau$$

یادآوری از معادلات

$$\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,dx=x^{\nu}J_{\nu}(x) \quad ; \quad \int x^{\nu}Y_{\nu-1}(x)\,dx=x^{\nu}Y_{\nu}(x)$$

$$\int x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,dx=-x^{-\nu}J_{\nu}(x) \quad ; \quad \int x^{-\nu}Y_{\nu+1}(x)\,dx=-x^{-\nu}Y_{\nu}(x)$$

$$\int_{r'=0}^{b}r'J_0(\lambda_n r')\,dr'$$

$x=\lambda_n r' \longrightarrow dx=\lambda_n dr'$

$$\int_{r'=0}^{b}r'J_0(\lambda_n r')\,dr'=\int_{x=0}^{\lambda_n b}\frac{x}{\lambda_n}J_0(x)\frac{dx}{\lambda_n}=\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{x=0}^{\lambda_n b}xJ_0(x)\,dx=\frac{1}{\lambda_n^2}\left[xJ_1(x)\right]_0^{\lambda_n b}=\frac{b}{\lambda_n}J_1(\lambda_n b)$$

$$T(r,t)=\frac{2\alpha g_0}{Kb}\int_{\tau=0}^{t}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n b)}\,d\tau$$

$$\int_{\tau=0}^{t} e^{-\alpha\lambda_n^2 (t-\tau)} d\tau$$

$$x = t-\tau \longrightarrow dx = -d\tau$$

$$\int_{\tau=0}^{t} e^{-\alpha\lambda_n^2 (t-\tau)} d\tau = \int_{x=t}^{0} e^{-\alpha\lambda_n^2 x} (-dx) = \int_{x=0}^{t} e^{-\alpha\lambda_n^2 x} dx = \frac{-1}{\alpha\lambda_n^2} e^{-\alpha\lambda_n^2 x} \Big]_{x=0}^{t} = \frac{1}{\alpha\lambda_n^2}\left(1-e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\right)$$

$$\Rightarrow T(r,t) = \frac{2g_0}{Kb} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_1(\lambda_n b)} \left(1-e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\right)$$

$t \to \infty \Rightarrow$ Steady State temperature

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{g_0}{K} = 0$$

$$r\frac{dT}{dr} + \frac{g_0}{K}\frac{r^2}{2} = C_1 \xrightarrow{r=0} C_1 = 0$$

$$\frac{dT}{dr} + \frac{g_0}{2K} r = 0$$

$$T = -\frac{g_0}{2K}\frac{r^2}{2} + C_2 \xrightarrow{r=b} C_2 = \frac{g_0 b^2}{4K}$$

$$T = \frac{g_0}{4K}(b^2-r^2)$$

$$\underset{t\to\infty}{T(r,t)} = \frac{2g_0}{Kb} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_1(\lambda_n b)} = \frac{g_0}{4K}(b^2-r^2)$$

حالت دوم:

$F(r) = 0$, $f(t) = 0$, line heat Source of strength $g_L^c(t)$ $\left(\frac{W}{m}\right)$

$$g(r',\tau) = g_L^c(\tau)\frac{1}{2\pi r'}\delta(r'-0)$$

$$G(r,t|r',\tau) = \frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n(t-\tau)} \frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)} J_0(\lambda_n r)$$

$$T(r,t)=\frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b} r'\,\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,\frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)}\,J_0(\lambda_n r)\,g(r',\tau)\,dr'\,d\tau$$

$$=\frac{2\alpha}{Kb^2}\times\frac{1}{2\pi}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b}\sum_{n=1}^{\infty} g_L^c(\tau)\,e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,\frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)}\,J_0(\lambda_n r)\,\delta(r')\,dr'\,d\tau$$

$$=\frac{\alpha}{k\pi b^2}\int_{\tau=0}^{t}\sum_{n=1}^{\infty} g_L^c(\tau)\,e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,\frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n b)}\,d\tau$$

$$=\frac{\alpha}{k\pi b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n b)}\int_{\tau=0}^{t} g_L^c(\tau)\,e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,d\tau\right]$$

حالت سوم:

$F(r)=0$, $f(t)=0$, instantaneous volume heat source $g^i(r)$ $\frac{W.S}{m^3}$

$$g(r',\tau)=g^i(r')\,\delta(\tau-0)$$

$$T(r,t)=\frac{\alpha}{K}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b} r'\,\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2(t-\tau)}\,\frac{J_0(\lambda_n r')}{J_1^2(\lambda_n b)}\,J_0(\lambda_n r)\,g(r',\tau)\,dr'\,d\tau$$

$$=\frac{2\alpha}{b^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\,\frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n b)}\int_{r'=0}^{b} r'\,J_0(\lambda_n r')\,g^i(r')\,dr'\right]$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{k}g(r,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}\qquad a<r<b\qquad t>0$$

$T(a,t)=0$

$T(b,t)=0$

$T(r,0)=F(r)$

مسئله همگن متناظر برای یافتن تابع گرین به صورت زیر است:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$\psi = R(r)\,T(t)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \frac{1}{\alpha T}\frac{dT}{dt} = -\lambda^2$$

$$T = C_0 e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda^2 r R = 0$$

$$r\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{dR}{dr} + \lambda^2 r R = 0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + (\lambda^2 r^2 - 0)R = 0$$

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)$$

$$r=a \longrightarrow R(a)=0 \quad \Rightarrow \quad C_1 J_0(\lambda a) + C_2 Y_0(\lambda a) = 0$$

$$r=b \longrightarrow R(b)=0 \quad \Rightarrow \quad C_1 J_0(\lambda b) + C_2 Y_0(\lambda b) = 0$$

شرط وجود جواب : $\begin{vmatrix} J_0(\lambda a) & Y_0(\lambda a) \\ J_0(\lambda b) & Y_0(\lambda b) \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow J_0(\lambda a) Y_0(\lambda b) - J_0(\lambda b) Y_0(\lambda a) = 0 \longrightarrow$ λ_n تعیین می‌شود

$$C_1 = -\frac{Y_0(\lambda_n a)}{J_0(\lambda_n a)} C_2$$

$$R(r) = C_2\left[-\frac{Y_0(\lambda_n a)}{J_0(\lambda_n a)} J_0(\lambda_n r) + Y_0(\lambda_n r)\right]$$

$$\psi(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t}\left[-\frac{Y_0(\lambda_n a)}{J_0(\lambda_n a)} J_0(\lambda_n r) + Y_0(\lambda_n r)\right]$$

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{J_0(\lambda_n a)}\left[J_0(\lambda_n a) Y_0(\lambda_n r) - Y_0(\lambda_n a) J_0(\lambda_n r)\right]$$

$$C_n = \frac{\int_{r'=a}^{b} r' F(r')\left[J_0(\lambda_n a) Y_0(\lambda_n r) - Y_0(\lambda_n a) J_0(\lambda_n r)\right] dr'}{\frac{1}{J_0(\lambda_n a)}\int_{r'=a}^{b} r'\left[J_0(\lambda_n a) Y_0(\lambda_n r) - Y_0(\lambda_n a) J_0(\lambda_n r)\right]^2 dr'}$$

برای ارزیابی مقدار مخرج کسر از جدول ۳-۲ در صفحه ۱۱۳ کتاب استفاده می‌کنیم.

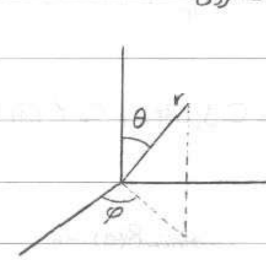
$$C_n = J_0(\lambda_n a)\times \overbrace{\left[\frac{\pi^2}{2}\,\frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n a)}{J_0^2(\lambda_n a)-J_0^2(\lambda_n b)}\right]}^{\text{از جدول}} \int_{r'=a}^{b} r' F(r')\left[J_0(\lambda_n a)Y_0(\lambda_n r')-Y_0(\lambda_n a)J_0(\lambda_n r')\right]dr'$$

$$\psi(r,t)=\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} r' e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\,\frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n a)}{J_0^2(\lambda_n a)-J_0^2(\lambda_n b)}\left[J_0(\lambda_n a)Y_0(\lambda_n r')-Y_0(\lambda_n a)J_0(\lambda_n r')\right]\left[J_0(\lambda_n a)Y_0(\lambda_n r)-Y_0(\lambda_n a)J_0(\lambda_n a)\right]F(r')\,dr'$$

$$G(r,t|r',\tau)=\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t}\,\frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n a)}{J_0^2(\lambda_n a)-J_0^2(\lambda_n b)}\left[J_0(\lambda_n a)Y_0(\lambda_n r')-Y_0(\lambda_n a)J_0(\lambda_n r')\right]\left[J_0(\lambda_n a)Y_0(\lambda_n r)-Y_0(\lambda_n a)J_0(\lambda_n a)\right]$$

$$T(r,t)=\int_{r'=a}^{b} r' G(r,t|r',\tau=0)F(r')\,dr' + \frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=a}^{b} r' G(r,t|r',\tau)\,g(r',\tau)\,dr'\,d\tau$$

مختصات کروی



$$\nabla^2 T + \frac{1}{k}g'''(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{k}g'''(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{k}g'''(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$ حالت یک بعدی.

مسئله همگن متناظری که در این حالت بایستی حل شود عبارت است از:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$\psi(r,t) = R(r)\,\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{r^2 R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = \frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2$$

$$\frac{1}{r^2 R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = \frac{1}{r^2 R}\left[2r\frac{dR}{dr} + r^2\frac{d^2R}{dr^2}\right] = \frac{2}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} = -\lambda^2$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + \lambda^2 r^2 R = 0$$

در مختصات کروی معمولاً می‌توانیم با یک تغییر متغیر مناسب مسئله را ساده‌تر کنیم.

$$u = rT$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial\left(\frac{u}{r}\right)}{\partial r} = \frac{r\frac{\partial u}{\partial r} - u}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right] = \frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial u}{\partial r} = r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{u}{r}\right)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{k} g'''(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \equiv \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{r}{k} g'''(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

جلسه چهاردهم «سه‌شنبه ۲۶ آبان ۱۳۸۸»

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT)+\frac{1}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$T(0,t)=0$

$T(b,t)=0$

$T(r,0)=0 \xrightarrow{\text{به طور صوری}} T(r,0)=F(r)$

$u=rT$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{r}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2\psi_u}{\partial r^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi_u}{\partial t}$$

$\psi_u(0,t)=0$

$\psi_u(b,t)=0$

$\psi_u(r,0)=rF(r)$

$\psi_u(r,t)=R(r)\Gamma(t)$

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}=\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}=-\lambda^2$$

$$\Gamma=C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$R=C_1\sin\lambda r+C_2\cos\lambda r$

$R(0)=0 \longrightarrow C_2=0$

$R(b)=0 \longrightarrow \sin\lambda b=0 \longrightarrow \lambda_n b=n\pi$

$$\psi_u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \sin\lambda_n r$$

$$rF(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\lambda_n r$$

$$C_n = \frac{\int_{r'=0}^{b} r'F(r')\sin\lambda_n r'\,dr'}{\int_{r'=0}^{b} \sin^2\lambda_n r'\,dr'} = \frac{\int_{r'=0}^{b} r'F(r')\sin\lambda_n r'\,dr'}{\int_{r'=0}^{b} \left(\frac{1-\cos 2\lambda_n r'}{2}\right)dr'} = \frac{\int_{r'=0}^{b} r'F(r')\sin\lambda_n r'\,dr'}{\frac{b}{2} - \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n r'\Big]_0^b} = \frac{2}{b}\int_{r'=0}^{b} r'F(r')\sin\lambda_n r'\,dr'$$

$$\psi_u(r,t) = \frac{2}{b}\int_{r'=0}^{b} r'^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \frac{F(r')}{r'} \sin\lambda_n r' \sin\lambda_n r\,dr'$$

$$\psi_T(r,t) = \frac{2}{b}\int_{r'=0}^{b} r'^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \frac{F(r')}{rr'} \sin\lambda_n r' \sin\lambda_n r\,dr'$$

$$\psi_T(r,t) = \int_{r'=0}^{b} r'^2 F(r')\, G(r,t|r',\tau=0)\,dr'$$

$$G(r,t|r',\tau) = \frac{2}{brr'}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 (t-\tau)} \sin\lambda_n r' \sin\lambda_n r$$

$$T(r,t) = \frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_{r'=0}^{b} r'^2\, G(r,t|r',\tau)\, \dot{g}'''(r',\tau)\,dr'\,d\tau$$

حالت خاص اول

instantaneous volume heat source $g^i(r)$ $\left(\frac{W.s}{m^3}\right)$

$\dot{g}''' = g^i(r')\,\delta(\tau-0)$

$$T(r,t) = \frac{\alpha}{k}\frac{2}{br}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \sin\lambda_n r \int_{r'=0}^{b} r' g^i(r') \sin\lambda_n r'\,dr'$$

حالت خاص دوم:

instantaneous point heat source g_p^i (W.s)

$\dot{g}''' = \frac{1}{4\pi r'^2} g_p^i\, \delta(r'-0)\,\delta(\tau-0)$

$$T(r,t) = \frac{\alpha}{k}\frac{2}{br}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \sin\lambda_n r \cdot \frac{1}{4\pi} g_p^i \left(\frac{\sin\lambda_n r'}{r'}\right)_{r'\to 0} \qquad , \lambda_n = \frac{n\pi}{b} ,$$

$$= \frac{\alpha}{k}\frac{1}{2b^2 r}\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \sin\lambda_n r\, g_p^i$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{k}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

تغییر متغیر : $\mu=\cos\theta$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=\frac{\partial T}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\sin^2\theta\frac{\partial T}{\partial\mu}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\theta}=+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial\mu}\right]$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

تغییر متغیر : $V=r^{\frac{1}{2}}T=\sqrt{r}\,T$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{\partial\left(\frac{V}{\sqrt{r}}\right)}{\partial r}=\frac{\sqrt{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{1}{2\sqrt{r}}V}{r}=\frac{2r\frac{\partial V}{\partial r}-V}{2r\sqrt{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left[r\sqrt{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{\sqrt{r}}{2}V\right]=\frac{3}{2}\sqrt{r}\frac{\partial V}{\partial r}+r\sqrt{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-\frac{1}{4\sqrt{r}}V-\frac{\sqrt{r}}{2}\frac{\partial V}{\partial r}=r\sqrt{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\sqrt{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{1}{4\sqrt{r}}V$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r\sqrt{r}}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{1}{4r^2\sqrt{r}}V$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial T}{\partial\mu}\right]=\frac{1}{r^2\sqrt{r}}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right]$$

$$\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{1}{4}\frac{V}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{\sqrt{r}}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$V=R(r)\,M(\mu)\,\varnothing(\varphi)\,\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{1}{4}\frac{R}{r^2}\right]+\frac{1}{r^2M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)\varnothing}\frac{d^2\varnothing}{d\varphi^2}=\underbrace{\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}}_{-\lambda^2}$$ معادله همگن.

$$\frac{dT}{dt}+\alpha\lambda^{2}T=0 \qquad (1)$$

$$\underbrace{\frac{r^{2}}{R}\left[\frac{d^{2}R}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{1}{4}\frac{R}{r^{2}}\right]+\lambda^{2}r^{2}}_{+n(n+1)}+\frac{1}{M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^{2})\frac{dM}{d\mu}\right]+\frac{1}{(1-\mu^{2})\phi}\frac{d^{2}\phi}{d\varphi^{2}}=0$$

$$\frac{d^{2}R}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left[\lambda^{2}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{1}{r^{2}}\right]R=0 \qquad (۲)$$

$$+n(n+1)(1-\mu^{2})+\frac{1-\mu^{2}}{M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^{2})\frac{dM}{d\mu}\right]+\underbrace{\frac{1}{\phi}\frac{d^{2}\phi}{d\varphi^{2}}}_{-m^{2}}=0$$

$$\frac{d^{2}\phi}{d\varphi^{2}}+m^{2}\phi=0 \qquad (۳)$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^{2})\frac{dM}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^{2}}{1-\mu^{2}}\right]M=0 \qquad (۴)$$

جلسه پانزدهم «یک‌شنبه ۱ آذر ۱۳۸۸»

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\mu=\cos\theta$$

$$u=r^{\frac{1}{2}}T$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{4}\frac{u}{r^2}+\frac{\partial}{r^2\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\sqrt{r}}{K}\dot{g}'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u=R(r)\,M(\mu)\,\Psi(\varphi)\,\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{R}{4r^2}\right)+\frac{1}{Mr^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial M}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\underbrace{\frac{\partial^2\Psi}{\Psi\,\partial^2\varphi^2}}_{-\nu^2}=\underbrace{\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}}_{-\lambda^2}$$

$$\frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt}=-\lambda^2 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2}=-\nu^2 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{R}{4r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial M}{\partial\mu}\right]-\frac{\nu^2}{1-\mu^2}\right\}=-\lambda^2$$

$$\underbrace{\frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{R}{4r^2}\right)+\lambda^2r^2}_{n(n+1)}+\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial M}{\partial\mu}\right]-\frac{\nu^2}{1-\mu^2}=0$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{R}{4r^2}+\lambda^2R=n(n+1)\frac{R}{r^2}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left[\lambda^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{r^2}\right]R=0 \qquad (3)$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{\nu^2}{1-\mu^2}\right]M=0 \qquad (4)$$

جواب‌های عمومی معادلات (۱) تا (۴) به فرم صفحه بعد است :

$$\Gamma(t) = C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\Psi(\varphi) = C_1 \sin \nu\varphi + C_2 \cos \nu\varphi$$

$$R(r) = C_3 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + C_4 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$$

$$M(\mu) = C_5 P_n^{\nu}(\mu) + C_6 Q_n^{\nu}(\mu)$$

مختصات استوانه‌ای در حالت سه بعدی

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k}\dot{g}''' = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T = R(r)\Psi(\theta)Z(z)\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{\partial^2 \Psi}{\Psi\,\partial\theta^2}}_{-\nu^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 Z}{Z\,\partial^2 z}}_{-\eta^2} = \underbrace{\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Gamma}{\Gamma\,\partial t}}_{-\lambda^2}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \alpha\lambda^2\Gamma = 0 \longrightarrow \Gamma(t) = C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t} \qquad (۱)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \eta^2 Z = 0 \longrightarrow Z(z) = C_1 \sin \eta z + C_2 \cos \eta z \qquad (۲)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\theta^2} + \nu^2\Psi = 0 \longrightarrow \Psi(\theta) = C_3 \sin \nu\theta + C_4 \cos \nu\theta \qquad (۳)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{\nu^2}{r^2} + (\lambda^2 - \eta^2) = 0$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\underbrace{(\lambda^2 - \eta^2)}_{\beta^2} - \frac{\nu^2}{r}\right]R = 0$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r}\right)R = 0 \longrightarrow R(r) = C_5 J_\nu(\beta r) + C_6 Y_\nu(\beta r) \qquad (۴)$$