$$\Gamma(t) = C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\Psi(\varphi) = C_1 \sin\nu\varphi + C_2 \cos\nu\varphi$$

$$R(r) = C_3 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + C_4 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$$

$$M(\mu) = C_5 P_n^{\nu}(\mu) + C_6 Q_n^{\nu}(\mu)$$

مختصات استوانه‌ای در حالت سه بعدی

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{K}\dot{g}''' = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T = R(r)\Psi(\theta)Z(z)\Gamma(t)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{\partial^2\Psi}{\Psi\,\partial\theta^2}}_{-\nu^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 Z}{Z\,\partial^2 z}}_{-\eta^2} = \underbrace{\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Gamma}{\Gamma\,\partial t}}_{-\lambda^2}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \alpha\lambda^2\Gamma = 0 \longrightarrow \Gamma(t) = C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \eta^2 Z = 0 \longrightarrow Z(z) = C_1 \sin\eta z + C_2 \cos\eta z \qquad (2)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\theta^2} + \nu^2\Psi = 0 \longrightarrow \Psi(\theta) = C_3 \sin\nu\theta + C_4 \cos\nu\theta \qquad (3)$$

$$\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{\nu^2}{r^2} + (\lambda^2 - \eta^2) = 0$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\underbrace{(\lambda^2 - \eta^2)}_{\beta^2} - \frac{\nu^2}{r}\right]R = 0$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r}\right)R = 0 \longrightarrow R(r) = C_5 J_\nu(\beta r) + C_6 Y_\nu(\beta r) \qquad (4)$$

انواع شرایط مرزی

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{1}{k}g'''=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\begin{cases} x=a & -k\frac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty) \\ x=b & -k\frac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty)\end{cases} \qquad \begin{cases} x=a & \frac{\partial T}{\partial x}=0 \\ x=b & \frac{\partial T}{\partial x}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a & -k\frac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty) \\ x=b & \frac{\partial T}{\partial x}=0\end{cases} \qquad \begin{cases} x=a & \frac{\partial T}{\partial x}=0 \\ x=b & T=Const\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a & -k\frac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty) \\ x=b & T=Const\end{cases} \qquad \begin{cases} x=a & T=Const \\ x=b & T=Const\end{cases}$$

$6\times6\times6=216$

Product of Green function

در مختصات کارتزین، تابع گرین سه بعدی را می‌توان با حساب کردن تابع گرین یک بعدی برای هر بعد و ضرب توابع گرین بدست آورد. این روش در مختصات استوانه‌ای در برخی موارد امکان‌پذیر است و در مختصات کروی امکان‌پذیر نیست.

$0\leqslant x\leqslant a \quad ; \quad 0\leqslant y\leqslant b \quad ; \quad 0\leqslant z\leqslant c$

$$G(x,y,z,t\,|\,x',y',z',\tau)=G_1(x,t\,|\,x',\tau)\cdot G_2(y,t\,|\,y',\tau)\cdot G_3(z,t\,|\,z',\tau)$$

$$=\left[\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\alpha\lambda_m^2(t-\tau)}\frac{X(\lambda_m,x)X(\lambda_m,x')}{N(\lambda_m)}\right]$$

$$\times\left[\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha\gamma_n(t-\tau)}\frac{Y(\gamma_n,y)\,Y(\gamma_n,y')}{N(\gamma_n)}\right]$$

$$\times\left[\sum_{P=1}^{\infty}e^{-\alpha\eta_p(t-\tau)}\frac{Z(\eta_p,z)\,Z(\eta_p,z')}{N(\eta_p)}\right]$$

$$-\infty < x < +\infty \quad ; \quad 0 \leqslant y \leqslant b \quad ; \quad 0 \leqslant z \leqslant c$$

$$G(x,y,z,t \mid x',y',z',\tau) = \left[\frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{\sqrt{4\pi\alpha(t-\tau)}} \right]$$

$$\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\gamma_n^2(t-\tau)} \frac{Y(\gamma_n,y)\,Y(\gamma_n,y')}{N(\gamma_n)} \right]$$

$$\times \left[\sum_{P=1}^{\infty} e^{-\alpha\eta_p^2(t-\tau)} \frac{Z(\eta_p,z)\,Z(\eta_p,z)}{N(\eta_p)} \right]$$

جلسه شانزدهم «سه‌شنبه ۳ آذر ۱۳۸۸»

Transformation of Nonhomogenous B.C.s into Homogenous One

$$\frac{1}{x^P}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^P\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{1}{k}g''' = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$-K\frac{\partial T}{\partial x}+h_1 T = h_1 f_1(t) \qquad x = x_0$$

$$+K\frac{\partial T}{\partial x}+h_2 T = h_2 f_2(t) \qquad x = x_L$$

$$T(x, t=0) = F(x)$$

$$T = T_1(x,t) + f_1(t)T_2(x) + f_2(t)T_3(x)$$

$$\frac{1}{x^P}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^P\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}+f_1\frac{\partial T_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial T_3}{\partial x}\right)\right]+\frac{1}{k}\dot{g}''' = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\partial T_1}{\partial t}+T_2\frac{df_1}{dt}+T_3\frac{df_2}{dt}\right]$$

$$-K\left[\frac{\partial T_1}{\partial x}+f_1\frac{\partial T_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial T_3}{\partial x}\right]+h_1(T_1+f_1T_2+f_2T_3) = h_1 f_1 \qquad (1)$$

$$K\left[\frac{\partial T_1}{\partial x}+f_1\frac{\partial T_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial T_3}{\partial x}\right]+h_2(T_1+f_1T_2+f_2T_3) = h_2 f_2 \qquad (2)$$

$$(1)\begin{cases} -K\frac{\partial T_1}{\partial x}+h_1T_1 = 0 \\ -Kf_1\frac{\partial T_2}{\partial x}+h_1f_1T_2 = h_1f_1 \longrightarrow -K\frac{\partial T_2}{\partial x}+h_1T_2 = h_1 \\ -Kf_2\frac{\partial T_3}{\partial x}+h_1f_2T_3 = 0 \longrightarrow -K\frac{\partial T_3}{\partial x}+h_1T_3 = 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} +K\frac{\partial T_1}{\partial x}+h_2T_1 = 0 \\ +Kf_1\frac{\partial T_2}{\partial x}+h_2f_1T_2 = 0 \longrightarrow -K\frac{\partial T_2}{\partial x}+h_2T_2 = 0 \\ +Kf_2\frac{\partial T_3}{\partial x}+h_2f_2T_3 = h_2f_2 \longrightarrow +K\frac{\partial T_3}{\partial x}+h_2T_3 = 0 \end{cases}$$

بنابراین مساله را می‌توان به دو مساله Steady State و یک مساله همگن تبدیل کرد.

$$\frac{d}{dx}\left(x^P \frac{dT_2}{dx}\right) = 0 \qquad x_0 < x < x_L$$

$$-K\frac{dT_2}{dx} + h_1 T_2 = h_1 \qquad x = x_0$$

$$+K\frac{dT_2}{dx} + h_2 = 0 \qquad x = x_L$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^P \frac{dT_2}{dx}\right) = 0 \qquad x_0 < x < x_L$$

$$-K\frac{dT_2}{dx} + h_1 T_2 = 0 \qquad x = x_0$$

$$+K\frac{dT_2}{dx} + h_2 T_2 = h_2 \qquad x = x_L$$

$$\frac{1}{x^P}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^P\frac{\partial T_1}{\partial x}\right) + \underbrace{\left[\frac{1}{K}g'''(x,t) - \frac{1}{\alpha}\left(T_2\frac{\partial f_2}{\partial t} + T_2\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)\right]}_{\frac{1}{K}g^*(x,t)} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_1}{\partial x}$$

$$-K\frac{\partial T_1}{\partial x} + h_1 T_1 = 0$$

$$+K\frac{\partial T_1}{\partial x} + h_1 T_1 = 0$$

$$T_1(x,0) = F(x) - f_1 T_2(x) - f_2 T_2(x)$$

مثال:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(0,t) = \theta_1$$

$$T(L,t) = \theta_2$$

$$T(x,0) = F(x)$$

$$T(x,t) = T_1(x,t) + \theta_1 T_2(x) + \theta_2 T_2(x)$$

$$T(x,t) = T_1(x,t) + \phi(x)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ \dfrac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

$$T(0,t) = T_1(0,t) + \phi(0) = \theta_1 \quad \begin{cases} T_1(0,t) = 0 \\ \phi(0) = \theta_1 \end{cases}$$

$$T(L,t) = T_1(L,t) + \phi(L) = \theta_2 \quad \begin{cases} T_1(L,t) = 0 \\ \phi(L) = \theta_2 \end{cases}$$

$$T(x,0) = F(x) \longrightarrow T_1(x,0) = F(x) - \phi(x)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

$$\phi(0) = \theta_1$$

$$\phi(L) = \theta_2$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{L} x + \theta_1$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_1}{\partial t}$$

$$T_1(0,t) = 0$$

$$T_1(L,t) = 0$$

$$T_1(x,0) = F(x) - \phi(x) = F(x) - \frac{\theta_2 - \theta_1}{L} x - \theta_1 = F^*(x)$$

$$T_1(x,t) = X(x)\Gamma(t)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2$$

$$\Gamma(t) = C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$X(x) = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x$$

$$X(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$X(L) = 0 \longrightarrow \sin\lambda L = 0 \longrightarrow \lambda L = n\pi$$

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \sin\lambda_n x$$

$$T_1(x,0) = F(x) - \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{L} x + \theta_1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\lambda_n x = F^*(x)$$

$$C_n = \frac{\int_{x'=0}^{L} F^*(x') \sin\lambda_n x' \, dx'}{\int_{x'=0}^{L} \sin^2\lambda_n x' \, dx'} = \frac{2}{L} \int_{x'=0}^{L} F^*(x') \sin\lambda_n x' \, dx'$$

$$T_1(x,t) = \frac{2}{L}\int_{x'=0}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n t}\left[F(x') - \left(\frac{\theta_2-\theta_1}{L}x' + \theta_1\right)\right] \sin\lambda_n x' \sin\lambda_n x \, dx' + \left[\frac{\theta_2-\theta_1}{L}x + \theta_1\right]$$

حذف کردن اثر Heat Source

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{k}\dot{g}''' = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

$$T(L,t) = 0$$

$$T(x,0) = F(x)$$

$$T(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dx^2} + \frac{1}{k}\dot{g}''' = 0$$

$$\dot{g}''' = cte \longrightarrow \frac{dT_2}{dx} + \frac{1}{k}\dot{g}''' x = C_1 \xrightarrow{\left.\frac{dT_2(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0} C_1 = 0$$

$$T_2 + \frac{\dot{g}'''}{2k}x^2 = C_2 \xrightarrow{T_2(L) = 0} C_2 = \frac{\dot{g}''' L^2}{2k}$$

$$T_2(x) = \frac{\dot{g}'''}{2k}(L^2 - x^2)$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_1}{\partial x}$$

$$\left.\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

$$T_1(L,t) = 0$$

$$T_1(x,0) = F(x) - T_2(x) = F(x) - \frac{\dot{g}'''}{2k}(L^2 - x^2)$$

$$T_1(x,t) = X(x)\Gamma(t)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2$$

$$\Gamma(t) = C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$X(x) = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x$$

$$\left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0 \longrightarrow C_1 = 0$$

$$X(L) = 0 \longrightarrow \cos\lambda L = 0 \longrightarrow \lambda L = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$T_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \cos\lambda_n x$$

$$T_1(x,0) = F^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\lambda_n x$$

$$C_n = \frac{\int_{x'=0}^{L} F^*(x') \cos\lambda_n x' \, dx'}{\int_{x'=0}^{L} \cos^2\lambda_n x' \, dx'} = \frac{2}{L}\int_{x'=0}^{L} F^*(x') \cos\lambda_n x' \, dx'$$

$$T(x,t) = \frac{2}{L}\int_{x'=0}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \left[F(x') - \frac{\dot g'''}{2K}(L^2 - x'^2)\right] \cos\lambda_n x' \cos\lambda_n x \, dx'$$

حذف اثر Convection term

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{K}\dot g''' + \gamma T = \beta \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,t) = \psi(x,t)\, e^{Ax + Ct}$$

$$\alpha\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} e^{Ax+Ct} + 2A\frac{\partial \psi}{\partial x} e^{Ax+Ct} + A^2 \psi e^{Ax+Ct}\right] + \frac{1}{K}\dot g''' + \gamma \psi e^{Ax+Ct} =$$

$$= \beta\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} e^{Ax+Ct} + A\psi e^{Ax+Ct}\right] + \lambda\left[\frac{\partial \psi}{\partial t} e^{Ax+Ct} + C\psi e^{Ax+Ct}\right]$$

ضرایب $\frac{\partial \psi}{\partial x}$: $2\alpha A = \beta$

ضرایب ψ : $A^2\alpha + \gamma = \beta A + \lambda C$

$$A = \frac{\beta}{2\alpha}$$

$$C = \frac{1}{\lambda}\left[\alpha A^2 - \beta A + \gamma\right] = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\beta^2}{4\alpha} - \frac{\beta^2}{2\alpha} + \gamma\right] = \frac{1}{\lambda}\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{K}\dot g''' e^{-(Ax+Ct)} = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Perturbation

$u = 1 + \varepsilon u^3$

$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots$

$u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 = 1 + \varepsilon\left[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3\right]^3$

$$= 1 + \varepsilon\left[u_0^3 + 3\varepsilon u_0^2 u_1 + 3\varepsilon^2 u_0 u_1^2 + 3\varepsilon^2 u_0^2 u_2 + \dots\right]$$

ضریب ε^0 : $u_0 = 1$

ضریب ε^1 : $u_1 = u_0^3 \longrightarrow u_1 = 1$

ضریب ε^2 : $u_2 = 3u_0^2 u_1 \longrightarrow u_2 = 3$

ضریب ε^3 : $u_3 = 3u_0 u_1^2 + 3u_0^2 u_2 \longrightarrow u_3 = 12$

$\Rightarrow u = 1 + \varepsilon + 3\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3$

$\dfrac{d^2u}{dt^2} + u = \varepsilon(1-u^2)\dfrac{du}{dt}$ «van der Pol equation»

$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$

$\dfrac{d^2}{dt^2}(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) + \left[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2\right] = \varepsilon\left[1 - (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)^2\right]\dfrac{d}{dt}\left[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2\right]$

$$= \varepsilon\left[1 - u_0^2 - 2\varepsilon u_0 u_1 - \varepsilon^2 u_1^2 - 2\varepsilon^2 u_0 u_2\right]\left[\frac{d}{dt}(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)\right]$$

ضریب ε^0 : $\dfrac{d^2 u_0}{dt^2} + u_0 = 0$

ε^1 ضریب : $\dfrac{d^2u_1}{dt^2}+u_1=(1-u_0^2)\dfrac{du_0}{dt}$

ε^2 ضریب : $\dfrac{d^2u_2}{dt^2}+u_2=(1-u_0^2)\dfrac{du_1}{dt}-2u_0u_1\dfrac{du_0}{dt}$

$$\frac{d^2u_0}{dt^2}+u_0=0$$

$$u_0=C_1\operatorname{Sin}t+C_2\operatorname{Cos}t=C_0\operatorname{Sin}(t+\varphi)$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+u_1=\left[1-C_0^2\operatorname{Sin}^2(t+\varphi)\right]C_0\operatorname{Cos}(t+\varphi)=C_0\operatorname{Cos}(t+\varphi)-C_0^3\operatorname{Sin}^2(t+\varphi)\operatorname{Cos}(t+\varphi)$$

$$=C_0\operatorname{Cos}(t+\varphi)-C_0^3\operatorname{Cos}(t+\varphi)+C_0^3\operatorname{Cos}^3(t+\varphi)$$

$$\operatorname{Cos}^3\theta=\frac{3}{4}\operatorname{Cos}\theta+\frac{1}{4}\operatorname{Cos}3\theta$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+u_1=C_0\operatorname{Cos}(t+\varphi)-C_0^3\operatorname{Cos}(t+\varphi)+\frac{3}{4}C_0^3\operatorname{Cos}(t+\varphi)+\frac{1}{4}C_0^3\operatorname{Cos}3(t+\varphi)$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+u_1=\left(C_0-\frac{1}{4}C_0^3\right)\operatorname{Cos}(t+\varphi)+\frac{1}{4}C_0^3\operatorname{Cos}3(t+\varphi)$$

یادآوری از معادلات ــ روش اپراتوری ــ

$$\frac{1}{(D-p)^k F(D)}\left[ce^{px}\right]=\frac{cx^k e^{px}}{k!\,F(D)}$$

$$\frac{1}{F(D^2)}\operatorname{Sin}qx=\frac{1}{F(-q^2)}\operatorname{Sin}qx \quad ; \quad \frac{1}{F(D^2)}\operatorname{Cos}qx=\frac{1}{F(-q^2)}\operatorname{Cos}qx$$

$$(D^2+1)u_1=\left(C_0-\frac{C_0^3}{4}\right)\operatorname{Cos}(t+\varphi)+\frac{C_0^3}{4}\operatorname{Cos}(3t+3\varphi)$$

$$u_{1p}=\frac{1}{D^2+1}\left(C_0-\frac{C_0^3}{4}\right)\operatorname{Cos}(t+\varphi)+\frac{1}{D^2+1}\frac{C_0^3}{4}\operatorname{Cos}(3t+3\varphi)$$

$$=\left(C_0-\frac{C_0^3}{4}\right)\frac{1}{(D-i)(D+i)}\left[\frac{e^{i(t+\varphi)}+e^{-i(t+\varphi)}}{2}\right]+\frac{C_0^3}{4}\frac{1}{(-9)+1}\operatorname{Cos}(3t+3\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}\left(C_0-\frac{C_0^3}{4}\right)\left[\frac{te^{i(t+\varphi)}}{2i}+\frac{te^{-i(t+\varphi)}}{-2i}\right]-\frac{C_0^3}{32}\operatorname{Cos}(3t+3\varphi)$$

$$u_{1p}=\frac{1}{2}\left(C_0-\frac{C_0^3}{4}\right)t\operatorname{Sin}(t+\varphi)-\frac{C_0^3}{32}\operatorname{Cos}(3t+3\varphi)$$

$$u_1 = C_2 \sin(t+\theta) + \frac{1}{2}\left(C_0 - \frac{C_0^3}{4}\right) t \sin(t+\varphi) - \frac{C_0^3}{32}\cos(3t+3\varphi)$$

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t)$$

$$\text{Perturbation} \begin{cases} \text{Parameter Perturbation} \\ \\ \text{Coordinate Perturbation} \end{cases}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (x^2 - 0)y = 0$$

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$

می‌توانیم معادله بالا را با استفاده از روش سری مستقیماً حل کنیم.

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m} = a_0 x^{\mu} + a_1 x^{\mu+1} + a_2 x^{\mu+2} + \dots$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$\begin{aligned} & x a_0 \mu(\mu-1) x^{\mu-2} + x a_1 (\mu+1)\mu x^{\mu-1} + x a_2 (\mu+2)(\mu+1) x^{\mu} + \dots \\ & a_0 \mu x^{\mu-1} + a_1(\mu+1) x^{\mu} + a_2(\mu+2) x^{\mu+1} + \dots \\ & \qquad + a_0 x^{\mu+1} + \dots = 0 \end{aligned}$$

$$a_0\mu(\mu-1) + a_0\mu = 0 \longrightarrow a_0\mu^2 = 0$$

$$a_1(\mu+1)\mu + a_1(\mu+1) = 0 \longrightarrow a_1(\mu+1)^2 = 0$$

$$a_2(\mu+2)(\mu+1) + a_2(\mu+2) + a_0 = 0 \longrightarrow a_2 = \frac{-a_0}{(\mu+2)^2}$$

$$\mu = 0$$

$a_0 = C_1$ (ثابت اول)

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{2^2}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2^2 \times 4^2}$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = \frac{-a_0}{2^2 \times 4^2 \times 6^2}$$

تکلیف شماره ۸ :

۱- مسأله اخیر را یک بار دیگر حل کنید و ثابت دوم را بررسی نمایید.

۲- معادله زیر را با استفاده از روش سری حل کنید:

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}$$

به عنوان مرجع از کتاب زیر استفاده شود.

"Perturbation Methods" , Ali Hasan Nayfeh. 1973, by John Wiley & Sons.

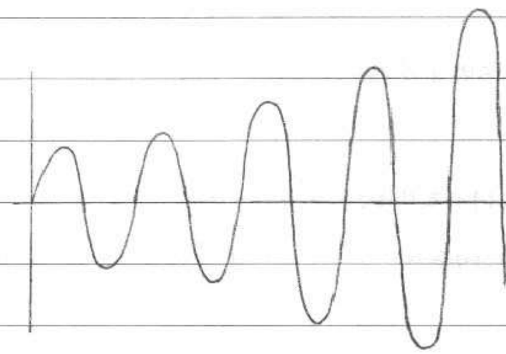
جلسه هیجدهم   « سه‌شنبه ۱۰ آذر ۱۳۸۸ »

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\sin(\varepsilon)} = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - \frac{\varepsilon^7}{7!} + \dots = 0$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\cos(\varepsilon)} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} - \frac{\varepsilon^6}{6!} + \dots = 1$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\tan(\varepsilon)} = \frac{\sin(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon)} = 0$$

$$\underset{t \to \infty}{t \sin(t)} = \infty$$ « Secular term »



✓ اگر معادله شامل ترم‌های Secular باشد، بایستی آن را در سه ناحیه بررسی کرد. یعنی جواب در ناحیه مقادیر کوچک و ناحیه مقادیر بزرگ محاسبه شده و در ناحیه مقادیر متوسط میانیابی شود.

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0$$

$$u(0) = a$$

$$\dot{u}(0) = 0$$

$$2\dot{u}\ddot{u} + 2\dot{u}u + 2\varepsilon \dot{u}u^3 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{u}^2) + \frac{d}{dt}(u^2) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}(u^4) = 0$$

$$\dot{u}^2 + u^2 + \frac{\varepsilon}{2}u^4 = C$$

$$\dot{u}^2(0) + u^2(0) + \frac{\varepsilon}{2}u^4(0) = a^2 + \frac{\varepsilon}{2}a^4 = C$$

$$\rightarrow \dot{u}^2 + u^2 + \frac{\varepsilon}{2}u^4 = a^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}a^2\right)$$

$$\dot{u}=\sqrt{a^2(1+\frac{\varepsilon}{2}a^2)-u^2-\frac{\varepsilon}{2}u^4}$$

$$\ddot{u}+u+\varepsilon u^3=0$$
$$u(0)=a$$
$$\dot{u}(0)=0$$

$$u=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2$$

$$u(0)=u_0(0)+\varepsilon u_1(0)+\varepsilon^2 u_2(0)=a$$
$$\longrightarrow \quad u_0(0)=a \quad , \quad u_1(0)=0 \quad , \quad u_2(0)=0$$

$$\dot{u}(0)=\dot{u}_0(0)+\varepsilon \dot{u}_1(0)+\varepsilon^2 \dot{u}_2(0)=0$$
$$\longrightarrow \quad \dot{u}_0(0)=0 \quad , \quad \dot{u}_1(0)=0 \quad , \quad \dot{u}_2(0)=0$$

$$(\ddot{u}_0+\varepsilon\ddot{u}_1+\varepsilon^2\ddot{u}_2)+(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2)+\varepsilon(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2)^3=0$$

ضریب ε^0 : $\ddot{u}_0+u_0=0$

ضریب ε^1 : $\ddot{u}_1+u_1+u_0^3=0$

ضریب ε^2 : $\ddot{u}_2+u_2+3u_0^2u_1=0$

$$\ddot{u}_0+u_0=0$$
$$u_0(0)=a$$
$$\dot{u}_0(0)=0$$

$$u_0(t)=C_1\sin t+C_2\cos t$$
$$u_0(0)=a \longrightarrow C_2=a$$
$$\dot{u}_0(0)=0 \longrightarrow C_1=0$$

$$u_0(t) = a\cos t$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3$$
$$u_1(0) = 0$$
$$\dot{u}_1(0) = 0$$

$$(D^2+1)\,u_1 = -a^3\cos^3 t = -a^3\left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t\right)$$

$$u_{1p} = -\frac{3}{4}a^3\frac{1}{(D-i)(D+i)}\left[\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right] - \frac{1}{4}a^3\frac{1}{D^2+1}\cos 3t$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}a^3\left[\frac{te^{it}}{2i} + \frac{te^{-it}}{-2i}\right] - \frac{1}{4}a^3\frac{1}{(-9)+1}\cos 3t$$

$$= \frac{-3}{8}a^3 t\sin t + \frac{1}{32}a^3\cos 3t$$

$$u_1(t) = C_3\sin t + C_4\cos t - \frac{3}{8}a^3 t\sin t + \frac{1}{32}a^3\cos 3t$$
$$u_1(0) = 0 \longrightarrow C_4 = -\frac{1}{32}a^3$$
$$\dot{u}_1(0) = 0 \longrightarrow C_3 = 0$$

$$u_1(t) = -\frac{3}{8}a^3 t\sin t + \frac{a^3}{32}(\cos 3t - \cos t)$$

$$u_2(t) = \dots$$

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$$

A Weak Nonlinear Instability

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = u^3$$
$$u(x,0) = \varepsilon\cos kx$$
$$u_t(x,0) = 0$$

با توجه به اینکه شرایط اولیه تابعی از ε است، بسط زیر را برای u در نظر می‌گیریم:

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots$$

$$u(x,0) = \varepsilon u_1(x,0) + \varepsilon^2 u_2(x,0) + \varepsilon^3 u_3(x,0) = \varepsilon \cos kx$$

$$\longrightarrow u_1(x,0) = \cos kx \quad , \quad u_2(x,0) = 0 \quad , \quad u_3(x,0) = 0$$

$$u_t(x,0) = \varepsilon u_{1t}(x,0) + \varepsilon^2 u_{2t}(x,0) + \varepsilon^3 u_{3t}(x,0) = 0$$

$$\longrightarrow u_{1t}(x,0) = 0 \quad , \quad u_{2t}(x,0) = 0 \quad , \quad u_{3t}(x,0) = 0$$

$$\left(\varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\right) - \left(\varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\right) - (\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3) = (\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3)^3$$

ضریب ε^1: $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - u_1 = 0$

ضریب ε^2: $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_2 = 0$

ضریب ε^3: $\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - u_3 = u_1^3$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - u_1 = 0$$

$$u_1(x,0) = \cos kx$$

$$u_{1t}(x,0) = 0$$

$$u_1(x,t) = X(x)T(t)$$

$$XT'' - X''T - XT = 0 \longrightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''+X}{X} = -\sigma^2$$

$$u_1(x,0) = T(0)X(x) = \cos kx \longrightarrow T(0) = 1 \quad , \quad X(x) = \cos kx$$

$$-\sigma^2 = \frac{X''+X}{X} = 1 - k^2 \longrightarrow \sigma^2 = k^2 - 1$$

$$T(t) = A\sin\sigma t + B\cos\sigma t$$

$$\left.\frac{dT(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \longrightarrow A = 0$$

$$T(0) = 1 \longrightarrow B = 1$$

$$\Rightarrow u_1(x,t) = \cos kx \cos\sigma t$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-u_2=0$$

$u_2(x,0)=0$

$u_{2t}(x,0)=0$

$$\Rightarrow\quad u_2(x,t)=0$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}-u_3=u_1^3$$

$u_3(x,0)=0$

$u_{3t}(x,0)=0$

$$\Rightarrow\quad u_3(x,t)=\frac{3\cos kx}{128\,\sigma_1^2}\Big[12\sigma_1 t\sin\sigma_1 t+\cos\sigma_1 t-\cos 3\sigma_1 t\Big]+\frac{\cos 3kx}{128\,k^2}\Big[3(\cos\sigma_1 t-\cos\mu t)+k^2(\cos 3\sigma_1 t-\cos\mu t)\Big]$$

$$\text{«}\ \mu^2=9k^2-1\ \text{»}$$

تکلیف شماره ۹ : این معادله را یک بار دیگر و همراه با جزئیات حل کنید.

« سه‌شنبه ۱۷ آذر ۱۳۸۸ »

جلسه نوزدهم

Finite process expansion matching

General Asymptotic Expansion

$$f(x,\varepsilon)=\frac{-\varepsilon e^{-x}}{x+\varepsilon}$$

$$\phi_n=\varepsilon^n$$

$$f(x,\varepsilon)=a_1\phi_1+a_2\phi_2+a_3\phi_3+\cdots$$

$$a_1=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x,\varepsilon)}{\phi_1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{-\varepsilon e^{-x}}{x+\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-e^{-x}}{x+\varepsilon}=\frac{-e^{-x}}{x}$$

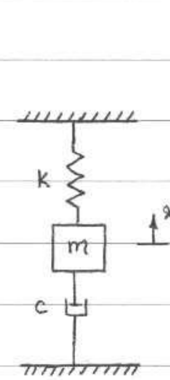
$$a_2=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x,\varepsilon)-a_1\phi_1}{\phi_2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{-\varepsilon e^{-x}}{x+\varepsilon}-\left(\frac{-e^{-x}}{x}\right)\varepsilon}{\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{-x e^{-x}}{x+\varepsilon}+\frac{\varepsilon e^{-x}}{x}\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\varepsilon^2 e^{-x}}{x(x+\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-x}}{x(x+\varepsilon)}=\frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$a_3=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x,\varepsilon)-a_1\phi_1-a_2\phi_2}{\phi_3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^3}\left[\frac{-\varepsilon e^{-x}}{x+\varepsilon}-\frac{-\varepsilon e^{-x}}{x}-\frac{\varepsilon^2 e^{-x}}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{-\varepsilon x^2 e^{-x}+\varepsilon x(x+\varepsilon)e^{-x}-\varepsilon^2(x+\varepsilon)e^{-x}}{x^2(x+\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{-\varepsilon^3 e^{-x}}{x^2(x+\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-e^{-x}}{x^2(x+\varepsilon)}=\frac{-e^{-x}}{x^3}$$

$$\Rightarrow f(x,\varepsilon)=\frac{-\varepsilon e^{-x}}{x+\varepsilon}=-\varepsilon\frac{e^{-x}}{x}+\varepsilon^2\frac{e^{-x}}{x^2}-\varepsilon^3\frac{e^{-x}}{x^3}+\cdots$$



$$\sum F=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx-c\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

بی بعد سازی : $x^* = \frac{x}{L_{ref}}$; $t^* = \frac{t}{t_{ref}}$

$$\frac{mL_{ref}}{t_{ref}^2}\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \frac{cL_{ref}}{t_{ref}}\frac{dx^*}{dt^*} + kL_{ref}\,x^* = 0$$

روش اول ایجاد پارامتر Perturbation :

«تقسیم طرفین بر ضریب $\frac{d^2x^*}{dt^{*2}}$»

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \frac{ct_{ref}}{m}\frac{dx^*}{dt^*} + \overset{1}{\left(\frac{kt_{ref}^2}{m}\right)}x^* = 0$$

$$t_{ref} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \overset{\varepsilon}{\left(\frac{c}{\sqrt{km}}\right)}\frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0$$

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \varepsilon\frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0$$

روش دوم ایجاد پارامتر Perturbation :

«تقسیم طرفین بر ضریب $\frac{dx^*}{dt^*}$»

$$\frac{m}{ct_{ref}}\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \frac{dx^*}{dt^*} + \overset{1}{\left(\frac{kt_{ref}}{c}\right)}x^* = 0$$

$$t_{ref} = \frac{c}{k}$$

$$\overset{\varepsilon}{\left(\frac{km}{c^2}\right)}\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0$$

$$\varepsilon\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} + \frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0$$

بنابراین در صورتی که $\frac{c^2}{km} < 1$ از روش اول و در صورتی که $\frac{c^2}{km} > 1$ از روش دوم استفاده می‌کنیم.

$$\varepsilon\frac{d^2x^*}{dt^*} + \frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0$$

$$x^* = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$$

$$\varepsilon(x_0'' + \varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'') + (x_0' + \varepsilon x_1' + \varepsilon^2 x_2') + (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2) = 0$$

ε^0 ضرایب : $x_0' + x_0 = 0$

ε^1 ضرایب : $x_1' + x_1 = -x_0''$

ε^2 ضرایب : $x_2' + x_2 = -x_1''$

همانطور که می‌بینیم اگر ε ضریب بزرگترین مشتق باشد، به کارگیری روش معمول Perturbation با حذف عامل درجه دوم، ماهیت فیزیکی مسئله را تغییر می‌دهد، زیرا معادله درجه اول تنها با یک شرط مرزی به طور دقیق تعیین می‌شود. بنابراین اگر از هر کدام از شرایط مرزی استفاده کنیم، دیگری تامین نخواهد شد.

اگر ضرایب معادله دیفرانسیل ثابت باشند با استفاده از تکنیک Stretching transformation می‌توان با یک تغییر متغیر، ε را از پشت بزرگترین مشتق حذف کرد.

$$\eta = t^* \varepsilon^\alpha$$

$$\frac{dx^*}{dt^*} = \frac{dx^*}{d\eta}\frac{d\eta}{dt^*} = \varepsilon^\alpha \frac{dx^*}{d\eta}$$

$$\frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = \varepsilon^\alpha \frac{d}{d\eta}\left(\frac{dx^*}{d\eta}\right)\frac{d\eta}{dt^*} = \varepsilon^{2\alpha}\frac{d^2x^*}{d\eta^2}$$

$$\varepsilon\frac{d^2x^*}{dt^*} + \frac{dx^*}{dt^*} + x^* = 0 \longrightarrow \varepsilon^{2\alpha+1}\frac{d^2x^*}{d\eta^2} + \varepsilon^\alpha\frac{dx^*}{d\eta} + x^* = 0$$

$$2\alpha + 1 = \alpha \longrightarrow \alpha = -1$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{d^2x^*}{d\eta^2} + \varepsilon^{-1}\frac{dx^*}{d\eta} + x^* = 0$$

$$\frac{d^2x^*}{d\eta^2} + \frac{dx^*}{d\eta} + \varepsilon x^* = 0$$

$$x^*(0) = 0 \quad , \quad \frac{dx^*(0)}{d\eta} = 1$$

$$x^* = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$$

$$(x_0'' + \varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'') + (x_0' + \varepsilon x_1' + \varepsilon^2 x_2') + \varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2) = 0$$

ε^0 ضریب : $x_0'' + x_0' = 0$ $\quad x_0(0) = 0 \quad , \quad x_0'(0) = 1$

ε^1 ضریب : $x_1'' + x_1' = -x_0$ $\quad x_1(0) = 0 \quad , \quad x_1'(0) = 0$

ε^2 ضریب : $x_2'' + x_2' = -x_1$ $\quad x_2(0) = 0 \quad , \quad x_2'(0) = 0$

Linear Singular Perturbation with Variable Coefficient

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} + (1+\alpha x)\frac{dy}{dx} + \alpha y = 0$$

$$y(0) = 0 \quad ; \quad y(1) = 1$$

هنگامی که ضرایب معادله دیفرانسیل متغیر باشند، دیگر به سادگی با تکنیک Stretching transformation و یک تغییر متغیر، نمی‌توان ضریب ε را از پشت بزرگترین مشتق حذف کرد. در این حالت از تکنیک دیگری به نام Matching استفاده می‌کنیم. به این ترتیب که جواب را در دو سر بازه به صورت مستقل حساب کرده و سپس آنها را Match می‌کنیم.

در اینجا برای نشان دادن شیوه کار تنها از Perturbation درجه صفر استفاده خواهیم کرد اما روش کار به سادگی قابل تعمیم است.

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 \xrightarrow{\text{درجه صفر}} y = y_0$$

بنابراین کافیست همه جا $\varepsilon = 0$ را اعمال کنیم.

انتهای بازه : « $x = 1$ »

$$(1+\alpha x)\frac{dy}{dx} + \alpha y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\alpha y}{1+\alpha x} \longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-\alpha dx}{1+\alpha x} \longrightarrow \ln y = -\ln(1+\alpha x) + \ln c$$

$$\longrightarrow y = c e^{\frac{1}{1+\alpha x}}$$

اعمال شرط مرزی انتهای بازه : $y(1) = 1 \longrightarrow c = e^{\frac{-1}{1+\alpha}}$

پروفیل انتهای بازه : $y(x) = e^{\frac{-1}{1+\alpha}} e^{\frac{1}{1+\alpha x}}$

ابتدای بازه : «$x=0$»

حال برای ابتدای بازه از روش Stretching transformation استفاده می‌کنیم. دقت شود که چگونه یک ضریب ثابت در پروفیل نهایی این بازه باقی می‌ماند.

$$\eta = x\,\varepsilon^{\beta}$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{d\eta^2}\varepsilon^{2\beta} + (1+\alpha x)\frac{dy}{d\eta}\varepsilon^{\beta} + \alpha y = 0$$

$$2\beta + 1 = \beta \longrightarrow \beta = -1 \longrightarrow \eta = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + (1+\alpha\varepsilon\eta)\frac{dy}{d\eta} + \alpha\varepsilon y = 0$$

Perturbation درجه صفر $\longrightarrow \quad \varepsilon \to 0$

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + \frac{dy}{d\eta} = 0$$

$$Y = \frac{dy}{d\eta} \longrightarrow \frac{dY}{d\eta} = -Y \longrightarrow \frac{dY}{Y} = -d\eta \longrightarrow \ln Y = -\eta + C_0 \longrightarrow Y = C_1 e^{-\eta}$$

$$\frac{dy}{d\eta} = C_1 e^{-\eta} \longrightarrow y = -C_1 e^{-\eta} + C_2 \longrightarrow y = -C_1 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + C_2$$

اعمال شرط مرزی ابتدای بازه : $y(0)=0 \longrightarrow C_2 = C_1$

پروفیل نهایی ابتدای بازه : $y = C_1\left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)$

اکنون دو جواب داریم که اولی با اعمال شرط مرزی $y(1)=1$ بدست آمده و بنابراین بیشتر در بازه انتهایی ($x \to 1$)، صادق است و دومی با اعمال شرط مرزی $y(0)=0$ بدست آمده و بیشتر در بازه ابتدایی ($x \to 0$) صادق است. در روش matching ثابت نامعلوم C_1 را اینگونه می‌یابیم که حد جواب اول وقتی $x \to 0$ را برابر با حد جواب دوم وقتی $x \to 1$ قرار می‌دهیم. نام این حد را y_m می‌گذاریم.

$$y_m = \lim_{\substack{x \to 1 \\ \varepsilon \to 0}} C_1\left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} e^{\frac{-1}{1+\alpha}}\, e^{\frac{1}{1+\alpha x}}$$

$$y_m = c_1 = e^{1-\frac{1}{1+\alpha}} = e^{\frac{1+\alpha-1}{1+\alpha}} = e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

جواب نهایی به صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{cases} x \to 0 \ \text{: در ابتدای بازه} : & y = e^{\frac{-1}{1+\alpha}} e^{\frac{1}{1+\alpha x}} \\ x \to 1 \ \text{: در انتهای بازه} : & y = e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) \end{cases}$$

معمولاً انتخاب xای که در آن باید از یک پروفیل به پروفیل دیگر سوئیچ کرد دشوار است. به همین منظور می‌توان از روش Composite expansion به عنوان ساده‌ترین روش ترکیب جواب‌ها استفاده کرد.

$$y_{\text{نهایی}} = y_{(\text{ابتدای بازه})} + y_{(\text{انتهای بازه})} - y_m$$

$$y = e^{-\frac{1}{1+\alpha}} e^{\frac{1}{1+\alpha x}} + e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) - e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

$$\Rightarrow y = e^{\frac{-1}{1+\alpha}} e^{\frac{1}{1+\alpha x}} - e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

تکلیف شماره ۱۰ : معادله بلازیوس را با استفاده از روش Perturbation حل کنید.

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(\infty) = 1$$

جلسه بیستم «یک‌شنبه ۲۲ آذر ۱۳۸۸»

method of strained coordinate

$$(x+\varepsilon y)\frac{dy}{dx}+y=0$$
$$y(1)=1$$

$$x(s)=s+\varepsilon x_1(s)+\varepsilon^2 x_2(s)+\cdots$$
$$y(s)=y_0(s)+\varepsilon y_1(s)+\varepsilon^2 y_2(s)+\cdots$$

$$\left[s+\varepsilon x_1+\varepsilon(y_0+\varepsilon y_1)\right]\left[\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx}\right]+y_0+\varepsilon y_1=0$$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dy_0}{ds}+\varepsilon\frac{dy_1}{ds}$$

$$\frac{ds}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{ds}}=\frac{1}{1+\varepsilon\frac{dx_1}{ds}}=1-\left(\varepsilon\frac{dx_1}{ds}\right)+\left(\varepsilon\frac{dx_1}{ds}\right)^2-\left(\varepsilon\frac{dx_1}{ds}\right)^3+\cdots$$

$$\left[s+\varepsilon(x_1+y_0)+\varepsilon^2 y_1\right]\left[\left(\frac{dy_0}{ds}+\varepsilon\frac{dy_1}{ds}\right)\left(1-\varepsilon\frac{dx_1}{ds}\right)\right]+y_0+\varepsilon y_1=0$$

ضریب ε^0 : $s\frac{dy_0}{ds}+y_0=0$

ضریب ε^1 : $(x_1+y_0)\frac{dy_0}{ds}+s\left(\frac{dy_1}{ds}-\frac{dy_0}{ds}\frac{dx_1}{ds}\right)+y_1=0 \quad\rightarrow\quad s\frac{dy_1}{ds}+y_1=s\frac{dy_0}{ds}\frac{dx_1}{ds}-(x_1+y_0)\frac{dy_0}{ds}$

برای اعمال شرط مرزی $y(1)=1$ بایستی $s=\bar{s}$ ای را پیدا کنیم که به ازای آن $x(\bar{s})=1$ و $y(\bar{s})=1$.

$$x(\bar{s})=1$$
$$x(\bar{s})=\bar{s}+\varepsilon x_1(\bar{s})+\varepsilon^2 x_2(\bar{s})$$
$$1=\bar{s}+\varepsilon x_1(\bar{s})+\varepsilon^2 x_2(\bar{s})$$

برای یافتن $\bar{s}$ آن را با استفاده از پارامتر Perturbation حول 1 بسط می‌دهیم و بعد در رابطه جایگذاری می‌کنیم.

$$\bar{S} = 1 + \varepsilon \bar{S}_1 + \varepsilon^2 \bar{S}_2 + \cdots$$

پیش از ادامه کار با یادآوری بسط تیلور، بسط تابع دلخواه $f(\bar{S})$ را حول ۱ پیدا می‌کنیم.

بسط تیلور: $$f(z) = f(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!}\frac{df(z_0)}{dz} + \frac{(z-z_0)^2}{2!}\frac{d^2 f(z_0)}{dz^2} + \cdots$$

$$f(\bar{S}) = f(1) + \frac{(\varepsilon \bar{S}_1 + \varepsilon^2 \bar{S}_2)}{1!}\frac{df(1)}{d\bar{S}} + \frac{(\varepsilon \bar{S}_1 + \varepsilon^2 \bar{S}_2)^2}{2!}\frac{d^2 f(1)}{d\bar{S}^2} + \cdots$$

$$= f(1) + \varepsilon \bar{S}_1 \frac{df(1)}{d\bar{S}} + \varepsilon^2 [\cdots]$$

$$1 = \bar{S} + \varepsilon x_1(\bar{S}) + \varepsilon^2 x_2(\bar{S})$$

$$1 = 1 + \varepsilon \bar{S}_1 + \varepsilon^2 \bar{S}_2 + \varepsilon\left[x_1(1) + \varepsilon \bar{S}_1 \frac{dx_1(1)}{d\bar{S}}\right] + \varepsilon^2\left[x_2(1) + \varepsilon \bar{S}_1 \frac{dx_2(1)}{d\bar{S}}\right]$$

ضریب ε^1: $\bar{S}_1 = -x_1(1)$

ضریب ε^2: $\bar{S}_2 = -\bar{S}_1 \dfrac{dx_1(1)}{d\bar{S}} - x_2(1) = x_1(1)\dfrac{dx_1(1)}{d\bar{S}} - x_2(1)$

$$y(\bar{S}) = 1$$

$$y(\bar{S}) = y_0(S) + \varepsilon y_1(S)$$

$$1 = y_0(S) + \varepsilon y_1(S)$$

$$1 = \left[y_0(1) + \varepsilon \bar{S}_1 \frac{dy_0(1)}{d\bar{S}}\right] + \varepsilon\left[y_1(1) + \varepsilon \bar{S}_1 \frac{dy_1(1)}{d\bar{S}}\right]$$

$$1 = y_0(1) - \varepsilon x_1(1)\frac{dy_0(1)}{d\bar{S}} + \varepsilon y_1(1) - \varepsilon^2 x_1(1)\frac{dy_1(1)}{d\bar{S}}$$

ضریب ε^0: $y_0(1) = 1$

ضریب ε^1: $y_1(1) = x_1(1)\dfrac{dy_0(1)}{dS}$

حال با داشتن شرایط مرزی به سراغ تعیین توابع می‌رویم.

$$s\frac{dy_0}{ds}+y_0=0$$
$$y_0(1)=1$$

$$s\frac{dy_0}{ds}=-y_0 \longrightarrow \frac{dy_0}{y_0}=-\frac{ds}{s} \longrightarrow \ln y_0=-\ln s+\ln c \longrightarrow y_0(s)=\frac{c}{s}$$

$$y_0(1)=1 \longrightarrow c=1$$

$$\Rightarrow y_0(s)=\frac{1}{s}$$

$$s\frac{dy_1}{ds}+y_1=s\frac{dy_0}{ds}\frac{dx_1}{ds}-(x_1+y_0)\frac{dy_0}{ds}$$
$$y_1(1)=x_1(1)\frac{dy_0(1)}{ds}$$

$$s\frac{dy_1}{ds}+y_1=s\frac{-1}{s^2}\frac{dx_1}{ds}-\left(x_1+\frac{1}{s}\right)\frac{-1}{s^2}=\frac{-1}{s}\frac{dx_1}{ds}+\frac{x_1}{s^2}+\frac{1}{s^3}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{x_1}{s}+\frac{1}{2s^2}\right)$$

$$\frac{d}{ds}(sy_1)=-\frac{d}{ds}\left(\frac{x_1}{s}+\frac{1}{2s^2}\right)$$

$$sy_1=-\left(\frac{x_1}{s}+\frac{1}{2s^2}\right)+c$$

$$y_1=-\frac{x_1}{s^2}-\frac{1}{2s^3}+\frac{c}{s}$$

$$y_1(1)=x_1(1)\frac{dy_0(1)}{ds}=-x_1(1) \longrightarrow -x_1(1)=-x_1(1)-\frac{1}{2}+c \longrightarrow c=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_1(s)=-\frac{x_1}{s^2}-\frac{1}{2s^3}+\frac{1}{2s}$$

$y_0(s)=\frac{1}{s}$ یک نقطه Singular در $s=0$ دارد و مرتبه این Singularity یک است. $x_1(s)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $y_1(s)$ نیز در $s=0$ ، Singular از مرتبه یک شود.

$$-\frac{x_1}{s^2}-\frac{1}{2s^3}=0 \longrightarrow \frac{x_1}{s^2}=\frac{-1}{2s^3} \longrightarrow x_1(s)=\frac{-1}{2s}$$

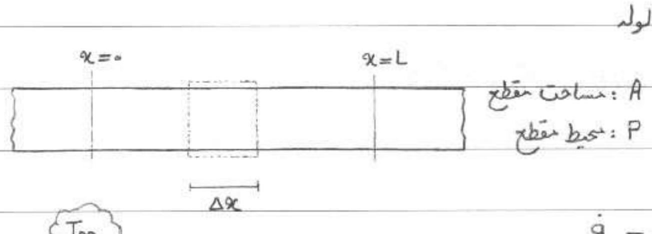
به این ترتیب جواب نهایی را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

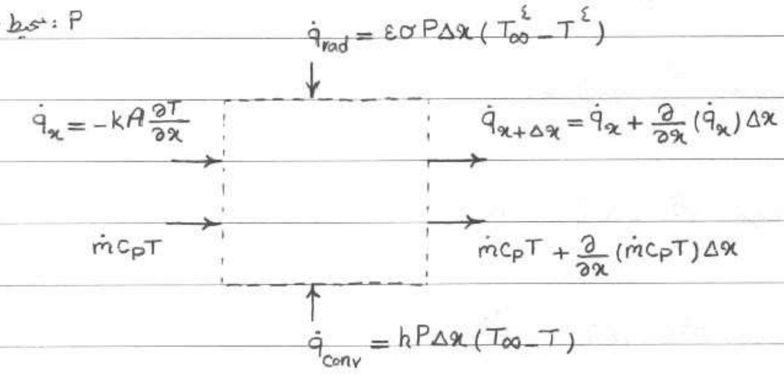
$$x(S) = S + \varepsilon x_1(S) = S - \frac{\varepsilon}{2S}$$

$$y(S) = y_0(S) + \varepsilon y_1(S) = \frac{1}{S} + \frac{\varepsilon}{2S}$$

Perturbation
- regular (ε روی بزرگترین مشتق قرار نگیرد)
- Singular (ε روی بزرگترین مشتق قرار گیرد)
  - Matched asymptotic expansion
  - Strained coordinate

انتقال حرارت پایای یک بعدی همراه با تشعشع در عبور سیال از داخل لوله





$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-kA\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho VAC_pT)\Delta x = hP\Delta x(T_\infty - T) + \varepsilon\sigma P\Delta x(T_\infty^4 - T^4)$$

$$kA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho VAC_p\frac{\partial T}{\partial x} + hP(T_\infty - T) + \varepsilon\sigma P(T_\infty^4 - T^4) = 0$$

$$\frac{k}{\rho VC_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial x} - (T - T_\infty)\left[hP + \varepsilon\sigma P(T^3 + T^2T_\infty + TT_\infty^2 + T_\infty^3)\right] = 0$$

با یک سری تغییر متغیر می‌توان این معادله را بی بعد کرد.

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty} \quad ; \quad \theta_i = \frac{T(0) - T_\infty}{T_\infty} \quad ; \quad \theta_L = \frac{T(L) - T_\infty}{T_\infty}$$

$$\varepsilon = \frac{k}{\rho VC_p}$$

$$S = 1 - \frac{x}{L}$$
$$\beta = \frac{2hLT_\infty}{\rho VRC}$$

و بنابراین معادله‌ای که بایستی حل شود به همراه شرایط مرزی آن به صورت زیر است:

$$\varepsilon \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{d\theta}{ds} - \beta\theta = 0$$
$$\theta(0) = \theta_L$$
$$\theta(1) = \theta_i$$

از روش matching برای حل معادله استفاده می‌کنیم.

ناحیه اول : $S \to 0$

$$\theta(s) = \theta_0(s) + \varepsilon\theta_1(s) + \varepsilon^2\theta_2(s) + \dots$$

$$\varepsilon\left(\frac{d^2\theta_0}{ds^2} + \varepsilon\frac{d^2\theta_1}{ds^2} + \varepsilon^2\frac{d^2\theta_2}{ds^2}\right) + \left(\frac{d\theta_0}{ds} + \varepsilon\frac{d\theta_1}{ds} + \varepsilon^2\frac{d\theta_2}{ds}\right) - \beta(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2) = 0$$

ضریب ε^0 : $\frac{d\theta_0}{ds} - \beta\theta_0 = 0 \qquad \theta_0(0) = \theta_L$

ضریب ε^1 : $\frac{d\theta_1}{ds} - \beta\theta_1 = -\frac{d^2\theta_0}{ds^2} \qquad \theta_1(0) = 0$

ضریب ε^2 : $\frac{d\theta_2}{ds} - \beta\theta_2 = -\frac{d^2\theta_1}{ds^2} \qquad \theta_2(0) = 0$

$$\frac{d\theta_0}{ds} - \beta\theta_0 = 0$$
$$\theta_0(0) = \theta_L$$

$$\frac{d\theta_0}{ds} = \beta\theta_0 \longrightarrow \frac{d\theta_0}{\theta_0} = \beta\, ds \longrightarrow \ln\theta_0 = \beta s + \ln C_1 \longrightarrow \theta_0 = C_1 e^{\beta s}$$
$$\theta_0(0) = \theta_L \longrightarrow C_1 = \theta_L$$
$$\Rightarrow \theta_0(s) = \theta_L e^{\beta s}$$

$$\frac{d\theta_1}{ds} - \beta\theta_1 = -\frac{d^2\theta_0}{ds^2}$$

$$\theta_1(0) = 0$$

$$\frac{d\theta_1}{ds} - \beta\theta_1 = -\theta_L \beta^2 e^{\beta s}$$

$$(D-\beta)\theta_1 = -\theta_L \beta^2 e^{\beta s}$$

$$\theta_1 = -\theta_L \beta^2 \frac{1}{D-\beta} e^{\beta s} = -\theta_L \beta^2 \frac{s e^{\beta s}}{1!} = -\theta_L \beta^2 s e^{\beta s}$$

$$\theta_1(s) = C_2 e^{\beta s} - \theta_L \beta^2 s e^{\beta s}$$

$$\theta_1(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \theta_1(s) = -\theta_L \beta^2 s e^{\beta s}$$

چون $S \to 0$ معادل با $x \to L$ است ما این ناحیه را outer می‌نامیم. پس برای θ در این ناحیه داریم:

$$\theta_{outer}(s) = \theta_0(s) + \varepsilon\theta_1(s) = \theta_L e^{\beta s} - \theta_L \beta^2 s e^{\beta s} = \theta_L e^{\beta s}(1-\beta^2 s)$$

ناحیه دوم: $S \to 1$

$$\varepsilon \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{d\theta}{ds} - \beta\theta = 0$$

$$\eta = s\varepsilon^{\alpha}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\eta}\frac{d\eta}{ds} = \varepsilon^{\alpha}\frac{d\theta}{d\eta}$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)\frac{d\eta}{ds} = \varepsilon^{2\alpha}\frac{d^2\theta}{d\eta^2}$$

$$\varepsilon^{2\alpha+1}\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \varepsilon^{\alpha}\frac{d\theta}{d\eta} - \beta\theta = 0$$

$$2\alpha+1=\alpha \longrightarrow \alpha=-1$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{d^2\theta}{d\eta^2}+\varepsilon^{-1}\frac{d\theta}{d\eta}-\beta\theta=0$$

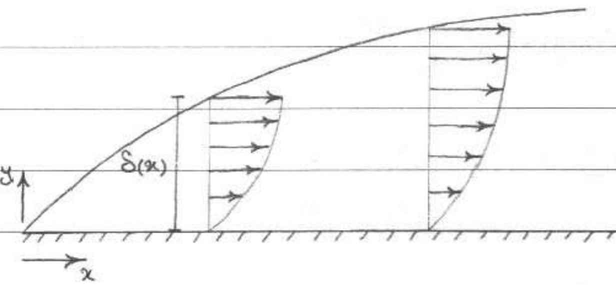
$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2}+\frac{d\theta}{d\eta}-\beta\varepsilon\theta=0$$

تکلیف شماره 11: حل ناحیه دوم را دنبال کرده و مسأله را تکمیل کنید.

جلسه بیست و یکم

« سه شنبه ۲٤ آذر ۱۳۸۸ »

Similarity Solution



$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u(x,y)\big|_{x=0}=U_\infty$$
$$u(x,y)\big|_{y=0}=0$$
$$u(x,y)\big|_{y\to\infty}=U_\infty$$

$$\frac{u}{U_\infty}=f'(\eta) \qquad ; \quad \eta=\frac{y}{\delta(x)}$$

Scale up از $\delta(x)$ یافتن : $\quad u\frac{\partial u}{\partial x}\sim\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$U_\infty\frac{U_\infty}{x}\sim\nu\frac{U_\infty}{\delta^2(x)} \longrightarrow \delta(x)\sim\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\Rightarrow \quad \eta=\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}$$

تعیین v از معادله پیوستگی : $\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

$$\int_0^y\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy+\left[v(x,y)-\cancel{v(x,0)}^{\,0}\right]=0$$

$$v(x,y)=-\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy=-\int_0^\eta\frac{du}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta$$

$$\frac{du}{d\eta}=U_\infty f''(\eta)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}\right)=\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}}}\left(\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right)=\frac{-1}{2x}\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}=\frac{-\eta}{2x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\,\eta\right)=\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\Rightarrow v(x,y)=-\int_0^\eta \frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta=-\int_0^\eta U_\infty f''(\eta)\frac{-\eta}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\,d\eta=\frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\int_0^\eta \eta f''(\eta)d\eta$$

روش جزء به جزء :   مشتقات : $\eta \quad 1 \quad 0$

انتگرال : $f'' \quad \overset{+}{\searrow} f' \quad \overset{-}{\searrow} f \longrightarrow \int \eta f''(\eta)d\eta=\eta f'-f$

$$v(x,y)=\frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\left(\eta f'-f\right)\Big]_0^\eta \xrightarrow{f(0)=0 \text{ فرض می‌کنیم}} v(x,y)=\frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\left(\eta f'-f\right)$$

جایگذاری در معادله اصلی : $u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$u=U_\infty f'(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=U_\infty f''(\eta)\frac{-\eta}{2x}$$

$$v(x,y)=\frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\left(\eta f'-f\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=U_\infty f''(\eta)\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}=U_\infty f'''(\eta)\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}=U_\infty\frac{1}{\frac{\nu x}{U_\infty}}f'''(\eta)$$

$$\rightarrow U_\infty f'(\eta)\times U_\infty f''(\eta)\frac{-\eta}{2x}+\frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\left(\eta f'-f\right)\times U_\infty f''(\eta)\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}=\nu U_\infty\frac{1}{\frac{\nu x}{U_\infty}}f'''(\eta)$$

$$-U_\infty^2\frac{\eta}{2x}f'f''+U_\infty^2\frac{\eta}{2x}f'f''-U_\infty^2\frac{1}{2x}ff''=U_\infty^2\frac{1}{x}f'''$$

$$f'''+\frac{1}{2}ff''=0$$

بررسی شرایط مرزی

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}} \qquad u = U_\infty f'(\eta) \qquad v = \frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\,(\eta f' - f)$$

$x = 0 \rightarrow u = U_\infty$ معادل است با $\eta \rightarrow \infty \rightarrow f'(\eta) = 1$

$y = 0 \rightarrow u = 0$ معادل است با $\eta = 0 \rightarrow f'(\eta) = 0$

$y \rightarrow \infty \rightarrow u = U_\infty$ معادل است با $\eta \rightarrow \infty \rightarrow f'(\eta) = 1$

همانطور که می‌بینیم شرط مرزی اول و سوم به یک نتیجه منجر می‌شوند، اما اگر توجه کنیم در خلال حل برای سادگی فرض کردیم $f(0)=0$. این فرض تأثیری در پروفیل سرعت u که از مشتق f بدست می‌آید ($u = U_\infty f'(\eta)$)، نخواهد داشت. زیرا تغییر این شرط تنها یک عدد ثابت به f اضافه می‌کند که در f' حذف می‌شود.

بنابراین نهایتاً مسئله تبدیل می‌شود به:

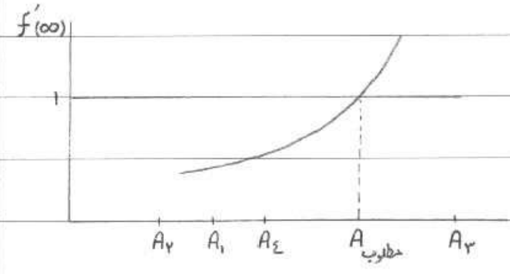
$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

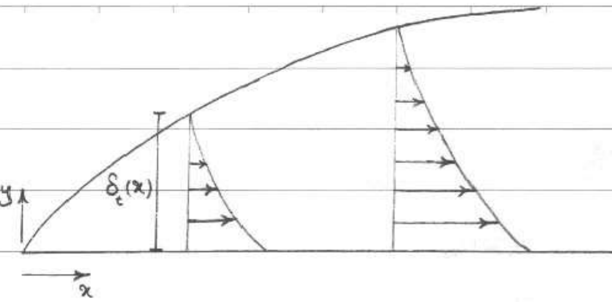
$$f'(\eta)_{\eta \rightarrow \infty} = 1$$

این مسئله یک ODE از نوع BVP است که برای حل بایستی آن را به IVP تبدیل کنیم. به همین منظور شرط مرزی سوم را با شرط $f''(0) = A$ جایگزین می‌کنیم. با امتحان کردن مقادیر مختلف برای A نمودار زیر را می‌کشیم.



واضح است که $A_{مطلوب}$ مقداری است که به ازای آن $f'(\eta)_{\eta \rightarrow \infty} = 1$ باشد.

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$



$$T(x,y)\big|_{x=0}=T_\infty$$
$$T(x,y)\big|_{y=0}=T_w$$
$$T(x,y)\big|_{y\to\infty}=T_\infty$$

$$\frac{u}{U_\infty}=f'(\eta)\qquad \eta=\frac{y}{\delta(x)}$$

$$\frac{T-T_w}{T_\infty-T_w}=\theta(\eta)$$

از مثال قبل $\delta(x)$: $\quad \delta(x)\sim\sqrt{\dfrac{\nu x}{U_\infty}}$

از مثال قبل $v(x,y)$: $\quad v(x,y)=\dfrac{U_\infty}{2x}\sqrt{\dfrac{\nu x}{U_\infty}}\,(\eta f'-f)$

جایگذاری در معادله اصلی: $\quad u\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+v\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\alpha\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$

$$u=U_\infty f'(\eta)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\theta'\frac{-\eta}{2x}$$

$$v=\frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}(\eta f'-f)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\theta'\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}=\theta''\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}=\theta''\frac{1}{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\rightarrow U_\infty f'\theta'\frac{-\eta}{2x}+\frac{U_\infty}{2x}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}(\eta f'-f).\theta'\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}=\alpha\frac{U_\infty}{\nu x}\theta''$$

$$-\frac{\eta}{2}f'\theta'+\frac{\eta}{2}f'\theta'-\frac{1}{2}f\theta'=\frac{\alpha}{\nu}\theta''$$

$$\Rightarrow \theta'' + \frac{Pr}{2} f\theta' = 0$$

بررسی شرایط مرزی

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}} \qquad \theta(\eta) = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}$$

$x = 0 \longrightarrow \theta = 1$ معادل است با $\eta \to \infty \longrightarrow \theta(\eta) = 1$

$y = 0 \longrightarrow \theta = 0$ معادل است با $\eta = 0 \longrightarrow \theta(\eta) = 0$

$y \to \infty \longrightarrow \theta = 1$ معادل است با $\eta \to \infty \longrightarrow \theta(\eta) = 1$

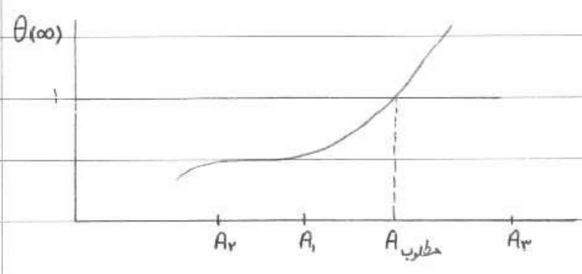
باز هم شرط اول و سوم یکی هستند. اما توجه می‌کنیم که چون معادله درجه دو است تنها دو شرط برای حل آن نیاز داریم.
بنابراین نهایتاً مسئله تبدیل می‌شود به مسئله زیر که در آن f تابعی معلوم است و از حل مثال قبل بدست می‌آید.

$$\theta''(\eta) + \frac{Pr}{2} f(\eta)\theta'(\eta) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

$$\theta(\eta) = 1 \quad \eta \to \infty$$

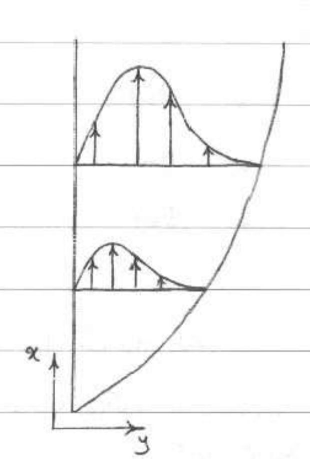
با فرض $\theta'(0) = A$، از طریق نمودار زیر می‌توان جواب مسئله را تعیین کرد.



جلسه بیست و دوم «یک شنبه ۲۹ آذر ۱۳۸۸»

در جابه‌جایی آزاد معادله ممنتوم و انرژی با هم کوپل هستند و برای یافتن توزیع سرعت و توزیع دما، بایستی هر دو را با هم حل کرد.

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T-T_\infty)$$



$$u(x,y)\big|_{x=0} = 0$$
$$u(x,y)\big|_{y=0} = 0$$
$$u(x,y)\big|_{y\to\infty} = 0$$

$$\frac{u}{U_{ref}} = f'(\eta) \qquad , \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

$$\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty} = \frac{T-T_\infty}{\Delta T} = \theta(\eta) \qquad , \quad (\Delta T = T_w - T_\infty)$$

$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim g\beta(T-T_\infty)$: یافتن $\delta(x)$ از scale up

$$\frac{\nu u}{\delta^2} \sim g\beta\Delta T \longrightarrow u \sim \frac{g\beta\Delta T \delta^2}{\nu}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} \sim \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{u^2}{x} \sim \frac{\nu u}{\delta^2} \longrightarrow u \sim \frac{\nu x}{\delta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{g\beta\Delta T\delta^2}{\nu} \sim \frac{\nu x}{\delta^2} \longrightarrow \delta^4 \sim \frac{\nu^2 x}{g\beta\Delta T}$$

$$A^4 = \frac{\nu^2}{g\beta\Delta T} \longrightarrow \delta(x) \sim A x^{0.25}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{y}{\delta(x)} = \frac{y}{A x^{0.25}} = \frac{1}{A} y x^{-0.25}$$

$$U_{ref} = \frac{g\beta\Delta T}{\nu}\delta^2 = \frac{g\beta\Delta T}{\nu} A^2 x^{0.5} = \frac{g\beta\Delta T}{\nu}\frac{\nu}{\sqrt{g\beta\Delta T}} x^{0.5} = \sqrt{g\beta\Delta T}\, x^{0.5} = \sqrt{g\beta\Delta T x}$$

تعیین v از معادله پیوستگی : $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

$$\int_0^y\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy+\left[v(x,y)-\cancelto{0}{v(x,0)}\right]=0$$

$$v(x,y)=-\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy=-\int_0^y\frac{\partial}{\partial x}(U_{ref}f')dy=-\int_0^y\frac{\partial U_{ref}}{\partial x}f'dy-\int_0^y U_{ref}\frac{\partial f'}{\partial x}dy$$

$$=-\frac{U_{ref}}{2x}\int_0^\eta f'\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta-U_{ref}\int_0^\eta\frac{\partial f'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}=\delta(x)=Ax^{0.25}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{A}y(-0.25)x^{-1.25}=-\frac{1}{4x}\frac{1}{A}yx^{-0.25}=-\frac{\eta}{4x}$$

$$v(x,y)=-\frac{U_{ref}}{2x}Ax^{0.25}\int_0^\eta f'(\eta)d\eta-U_{ref}\frac{-1}{4x}Ax^{0.25}\int_0^\eta \eta f''(\eta)d\eta$$

روش جزء به جزء :
مشتقات : $\eta \quad 1 \quad 0$
انتگرال : $f'' \quad + \quad f' \quad - \quad f \longrightarrow \int \eta f''(\eta)d\eta=\eta f'-f$

$$v(x,y)=\frac{-U_{ref}}{2x}Ax^{0.25}f\Big]_0^\eta+\frac{U_{ref}}{4x}Ax^{0.25}(\eta f'-f)\Big]_0^\eta$$

باز هم با فرض $f(0)=0$ و توجه به این نکته که $u(x,0)=U_{ref}f'(0)=0$ ، می‌رسیم به :

$$v(x,y)=\frac{U_{ref}}{4x}(-3f+\eta f')Ax^{0.25}$$

با جایگزاری در معادله اصلی ،

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\beta(T-T_\infty)$$

$$u=U_{ref}f'(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(U_{ref}f')=\frac{\partial U_{ref}}{\partial x}f'+U_{ref}\frac{\partial f'}{\partial x}=\frac{U_{ref}}{2x}f'+U_{ref}f''\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{U_{ref}}{2x}f'(\eta)+U_{ref}f''(\eta)\frac{-\eta}{4x}$$

$$V = \frac{U_{ref}}{4x}(-3f + \eta f')Ax^{0.25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = U_{ref} f'' \frac{1}{Ax^{0.25}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = U_{ref} f''' \frac{1}{A^2 x^{0.5}}$$

$$g\beta(T - T_\infty) = g\beta\Delta T\,\theta(\eta)$$

$$\rightarrow \quad U_{ref} f' \frac{U_{ref}}{2x} f' + U_{ref} f' U_{ref} f'' \frac{-\eta}{4x} + \frac{U_{ref}}{4x}(-3f + \eta f')Ax^{0.25} U_{ref} f'' \frac{1}{Ax^{0.25}} = \nu U_{ref} f''' \frac{1}{A^2 x^{0.5}} + g\beta\Delta T\theta$$

$$U_{ref}^2 \frac{1}{2x} f'^2 - U_{ref}^2 \frac{1}{4x} f'f'' + U_{ref}^2 \frac{1}{4x}(-3f + \eta f')f'' = \nu U_{ref} \frac{1}{\frac{\nu}{\sqrt{g\beta\Delta T}} x^{0.5}} f''' + g\beta\Delta T x \frac{1}{x}\theta$$

$$U_{ref}^2 \frac{1}{2x} f'^2 - U_{ref}^2 \frac{3}{4x} ff'' = U_{ref}^2 \frac{1}{x} f''' + U_{ref}^2 \frac{1}{x}\theta$$

$$\frac{1}{2} f'^2 - \frac{3}{4} ff'' = f''' + \theta$$

$$\Rightarrow \quad f''' + \frac{3}{4} ff'' - \frac{1}{2} f'^2 + \theta = 0$$

بخش دوم: معادله انرژی

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$T(x,y)\big|_{x=0} = T_\infty$$
$$T(x,y)\big|_{y=0} = T_w$$
$$T(x,y)\big|_{y\to\infty} = T_\infty$$

$$\frac{u}{U_{ref}} = f'(\eta) \qquad , \qquad \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

از بخش قبل $U_{ref}(x)$: $U_{ref}(x) = \sqrt{g\beta\Delta T x}$

$$\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}=\frac{T-T_\infty}{\Delta T}=\theta(\eta)$$

از بخش قبل $\delta(x)$: $\delta(x)=\left(\frac{\nu^2 x}{g\beta\Delta T}\right)^{\frac{1}{4}}=Ax^{0.25}$

از بخش قبل $V(x,y)$: $V(x,y)=\frac{U_{ref}}{4x}(-3f+\eta f')Ax^{0.25}$

با جایگذاری در معادله اصلی،

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$$

$$u=U_{ref}f'$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\theta'\frac{-\eta}{4x}$$

$$V=\frac{U_{ref}}{4x}(-3f+\eta f')Ax^{0.25}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\theta'\frac{1}{Ax^{0.25}}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}=\theta''\frac{1}{A^2x^{0.5}}$$

$$\longrightarrow U_{ref}f'\theta'\frac{-\eta}{4x}+\frac{U_{ref}}{4x}(-3f+\eta f')Ax^{0.25}\theta'\frac{1}{Ax^{0.25}}=\alpha\theta''\frac{1}{A^2x^{0.5}}$$

$$-\frac{3}{4x}U_{ref}f\theta'=\alpha\theta''\frac{1}{\frac{\nu}{\sqrt{g\beta\Delta T}}x^{0.5}}$$

$$-\frac{3}{4x}U_{ref}f\theta'=\frac{\alpha}{\nu}\sqrt{g\beta\Delta T x}\;\frac{1}{x}\theta''$$

$$-\frac{3}{4x}U_{ref}f\theta'=\frac{1}{Pr}U_{ref}\frac{1}{x}\theta''$$

$$\Rightarrow\quad \theta''+\frac{3}{4}Pr\,f\theta'=0$$

بررسی شرایط مرزی :

$$\eta = \frac{y}{A x^{0.25}} \quad , \quad u = U_{ref} f'(\eta) \quad , \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

$x = 0 \longrightarrow u = 0$ معادل است با $\eta \to \infty \longrightarrow f'(\eta) = 0$

$y = 0 \longrightarrow u = 0$ 〃 $\eta = 0 \longrightarrow f'(\eta) = 0$

$y \to \infty \longrightarrow u = 0$ 〃 $\eta \to \infty \longrightarrow f'(\eta) = 0$

$x = 0 \longrightarrow T = T_\infty$ معادل است با $\eta \to \infty \longrightarrow \theta(\eta) = 0$

$y = 0 \longrightarrow T = T_w$ 〃 $\eta = 0 \longrightarrow \theta(\eta) = 1$

$y \to \infty \longrightarrow T = T_\infty$ 〃 $\eta \to \infty \longrightarrow \theta(\eta) = 0$

با یادآوری شرط $f(0) = 0$ ، نهایتاً مسأله به صورت زیر فرمول بندی می‌شود:

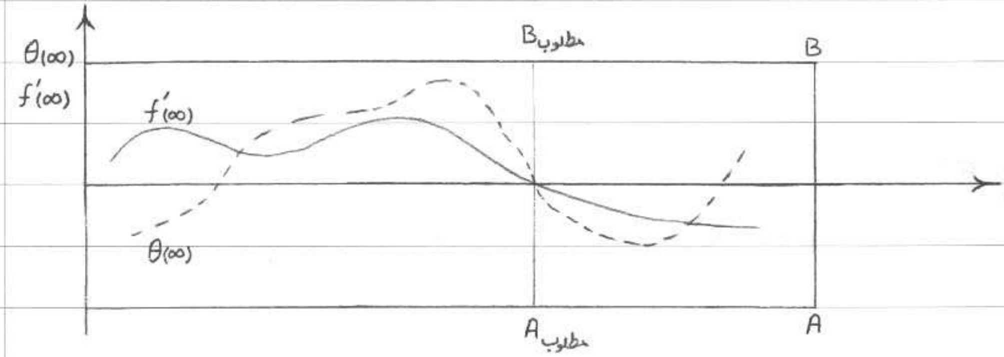
$$f''' + \frac{3}{4} f f'' - \frac{1}{2} f'^2 + \theta = 0 \qquad \theta'' + \frac{3}{4} Pr\, f \theta' = 0$$

$f(0) = 0$ $\qquad$ $\theta(0) = 1$

$f'(0) = 0$ $\qquad$ $\theta(\infty) = 0$

$f'(\infty) = 0$

با فرض $f''(0) = A$ و $\theta'(0) = B$ ، از طریق نمودار زیر می‌توان جواب مسأله را تعیین کرد :



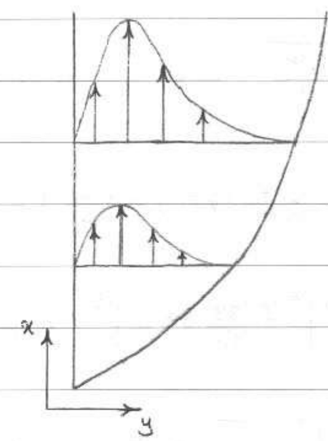
free parameters method

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) f'(\eta)$$

$$\eta = \eta(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$$

متغیری که شرایط مرزی زیادی دارد.

مثال:



$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T-T_\infty) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u(x,y) \equiv \phi$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} u(x,y)\big|_{x=0} = 0 \\ u(x,y)\big|_{y=0} = 0 \\ u(x,y)\big|_{y\to\infty} = 0 \end{cases}$$

چون شرایط مرزی روی متغیر y بیشتر است،

$$u(x,y) = \psi(x) f'(\eta)$$

$$\eta = \eta(x,y)$$

تعیین v از معادله پیوستگی: $v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = -\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}(\psi f')\,dy = -\int_0^y \left(f'\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial f'}{\partial x}\right)dy$

$$= -\int_0^\eta f'\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta - \int_0^\eta \psi\frac{df'}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta$$

$$= -\frac{d\psi}{dx}\int_0^\eta f'\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta - \int_0^\eta \psi f''\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta$$

با جایگذاری در معادله،

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T-T_\infty) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$(\psi f')\left(f'\frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial f'}{\partial x}\right) + v\left(\psi f''\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = g\beta\Delta T\theta + \nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi f''\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

$$\varphi f'\left(f'\varphi' + \varphi f''\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + v\left(\varphi f''\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = g\beta\Delta T\theta + \underbrace{\nu\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varphi f''\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}}_{\nu\varphi f'''\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}$$

با تقسیم طرفین بر $\varphi\varphi'$،

$$f'\left(f' + \frac{\varphi}{\varphi'}f''\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \frac{v}{\varphi'}f''\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{g\beta\Delta T\theta}{\varphi\varphi'} + \frac{\nu}{\varphi'}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 f''' \qquad (*)$$

برای وجود حل Similarity: $\frac{\nu}{\varphi'}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = c_1$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{c_1\varphi'}{\nu}} \longrightarrow \eta = \sqrt{\frac{c_1\varphi'}{\nu}}\,y + \cancel{c} \quad \eta(x,y)|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \sqrt{\frac{c_1}{\nu}}\,y\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\varphi'}\right) = \sqrt{\frac{c_1}{\nu}}\,y\,\frac{1}{2}\varphi''(\varphi')^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_1\varphi'}{\nu}}\,y\,\varphi''(\varphi')^{-1} = \frac{\eta}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}$$

$$v = -\varphi'\int_0^\eta f'\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta - \int_0^\eta \varphi f''\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta = -\varphi'\int_0^\eta f'\frac{1}{\frac{\partial\eta}{\partial y}}d\eta - \int_0^\eta \varphi f''\frac{\eta}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}\frac{1}{\frac{\partial\eta}{\partial y}}d\eta$$

$$= -\varphi'\int_0^\eta\sqrt{\frac{\nu}{c_1\varphi'}}\,f'd\eta - \int_0^\eta\varphi f''\sqrt{\frac{\nu}{c_1\varphi'}}\,\frac{\eta}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}d\eta$$

$$= -\varphi'\sqrt{\frac{\nu}{c_1\varphi'}}\,f - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'}\sqrt{\frac{\nu}{c_1\varphi'}}\int_0^\eta \eta f''d\eta$$

توجه شود که برای بدست آوردن آخرین خط فرض کرده‌ایم $f(0)=0$، حال با استفاده از روش جزء به جزء،

$$v = -\varphi'\sqrt{\frac{\nu}{c_1\varphi'}}\,f - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'}\sqrt{\frac{\nu}{c_1\varphi'}}\,(\eta f' - f)$$

حال با جایگزاری در $(*)$،

$$f'^2 + \frac{\varphi}{\varphi'}f'f''\left(\frac{\eta}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}\right) - \frac{1}{\varphi'}\left[\varphi'\sqrt{\frac{\nu}{c_1\varphi'}}\,f + \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'}\sqrt{\frac{\nu}{c_1\varphi}}\,(\eta f' - f)\right]f''\sqrt{\frac{c_1\varphi'}{\nu}} = \frac{g\beta\Delta T\theta}{\varphi\varphi'} + \frac{\nu}{\varphi'}\left(\frac{c_1\varphi'}{\nu}\right)f'''$$

$$f'^2 + \frac{\varphi}{\varphi'}\frac{\varphi''}{\varphi'}\frac{\eta}{2}f'f'' - ff'' - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'^2}(\eta f' - f)f'' = \frac{g\beta\Delta T\theta}{\varphi\varphi'} + c_1 f'''$$

$$f'^2 - ff'' + \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'^2}ff'' = \frac{g\beta\Delta T\theta}{\varphi\varphi'} + c_1 f'''$$

$$f'^2 - \left(1 - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'^2}\right) f f'' = \frac{g\beta\Delta T\theta}{\varphi\varphi'} + C_1 f'''$$

Similarity برای وجود حل : $1 - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'^2} = C_2$

$$1 - C_2 = \frac{\varphi}{2\varphi'}\frac{\varphi''}{\varphi'} \longrightarrow 2(1-C_2)\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\varphi''}{\varphi'} \longrightarrow 2(1-C_2)\ln\varphi = \ln\varphi' - \ln C_3$$

$$\ln\varphi^{2(1-C_2)} = \ln(C_3\varphi') \longrightarrow C_3\varphi' = \varphi^{2(1-C_2)} \longrightarrow C_3\frac{\varphi'}{\varphi^{2(1-C_2)}} = 1$$

$$C_3\varphi'\varphi^{2C_2-2} = 1$$

$$C_2 \neq \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{C_3}{2C_2-1}\varphi^{2C_2-1} = x + C_4$$

$$\varphi^{2C_2-1} = \left(\frac{2C_2-1}{C_3}\right)x + \left(\frac{2C_2-1}{C_3}\right)C_4$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = (C_5 x + C_6)^n$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow C_3\ln\varphi = x + C_4$$

$$\varphi = e^{\left(\frac{x}{C_3} + \frac{C_4}{C_3}\right)} = e^{\frac{C_4}{C_3}}\, e^{\frac{1}{C_3}x}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = C_5\, e^{C_6 x}$$

گزارش ۴ یکشنبه قبل از امتحان تحویل داده شود.

جلسه بیست و سوم «سه‌شنبه ۸ دی ۱۳۸۸»

حل مسائل امتحان میان‌ترم

۱- حل تقریبی معادله زیر را با دقت درجه سه بکمک روش ریتز بدست آورید (a ، b و c مقادیر ثابتی می‌باشند).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - au^2 - bu + c = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0) = 0 \quad , \quad u(1) = 0$$

ابتدا فرم پروفیل ریتز را تعیین می‌کنیم.

$$u(y) = Ay^2 + By + C$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0) = 2Ay + B\Big|_{y=0} = B = 0$$

$$u(1) = 0 \longrightarrow Ay^2 + C\Big|_{y=1} = 0 \longrightarrow A + C = 0 \longrightarrow C = -A$$

$$\Rightarrow u(y) = A(y^2 - 1)$$

پروفیل ریتز درجه سه

$$\begin{cases} u(y) = (1-y^2)(a_0 + a_1 y^2 + a_2 y^4) \\ \text{یا} \\ u(y) = a_0(1-y^2) + a_1(1-y^2)^2 + a_2(1-y^2)^3 \end{cases}$$

توجه شود که ضریب y^3 در پروفیل ریتز نوع اول صفر بوده و عملاً پروفیل با تعیین ضریب y^4 درجه سه می‌شود. این مطلب به دلیل تقارن موجود در معادله و البته تجربه و حس فیزیکی است و در صورتی که ضریب y^3 را وارد مسأله می‌کردیم، پس از انجام محاسبات صفر می‌شود.

حال سعی می‌کنیم با حذف ضریب ترم خطی در معادله، مسأله را کمی ساده‌تر کنیم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - au^2 - bu + c = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a\left(u^2 + \frac{b}{a}u + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 + 4ac}{4a} = 0$$

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a^2\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 + 4ac}{4} = 0$$

تغییر متغیر: $W = a\left(u + \frac{b}{2a}\right) \qquad , \quad m = \frac{b^2 + 4ac}{4}$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - W^2 + m = 0$$

$$u = a_0(1-y^2) + a_1(1-y^2)^2 + a_2(1-y^2)^3$$

$$W = \underbrace{aa_0}_{A_0}(1-y^2) + \underbrace{aa_1}_{A_1}(1-y^2)^2 + \underbrace{aa_2}_{A_2}(1-y^2)^3 + \frac{b}{2}$$

$$\delta I = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - W^2 + m\right)\delta W \, dy = 0$$

در این مرحله با قرار دادن پروفیل $W(y)$ در انتگرال و انجام محاسبات لازم، می‌توان ضرایب A_0، A_1 و A_2 را یافت. اما مناسب‌تر است که برای ساده‌تر شدن کار، تغییر متغیر زیر را نیز انجام دهیم.

$$\eta = 1 - y^2$$

$$W(\eta) = A_0\eta + A_1\eta^2 + A_2\eta^3 + \frac{b}{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -2y = -2\sqrt{1-\eta}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(-2\sqrt{1-\eta}\right)\frac{\partial W}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(-2\sqrt{1-\eta}\right)\frac{\partial W}{\partial \eta}\right]\left(-2\sqrt{1-\eta}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\eta}}\frac{\partial W}{\partial \eta} - 2\sqrt{1-\eta}\,\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}\right)\left(-2\sqrt{1-\eta}\right)$$

$$= -2\frac{\partial W}{\partial \eta} + 4(1-\eta)\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}$$

$$\longrightarrow \delta I = \int_0^1 \left[4(1-\eta)\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial w}{\partial \eta} - w^2 + m \right] \delta w \, d\eta \, \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-\eta}} \left[4(1-\eta)\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial w}{\partial \eta} - w^2 + m \right] \delta w \, d\eta$$

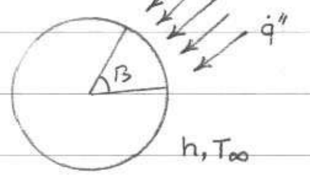
$$\Rightarrow \quad w(\eta) = A_0 \eta + A_1 \eta^2 + A_2 \eta^3 + \frac{b}{2}$$

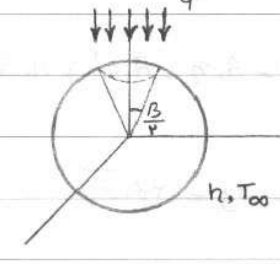
$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-\eta}} \left[4(1-\eta)\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial w}{\partial \eta} - w^2 + m \right] (\delta A_0 \eta + \delta A_1 \eta^2 + \delta A_2 \eta^3)\, d\eta = 0$$

با ادامه دادن حل می‌توان ضرایب A_0، A_1 و A_2 را تعیین کرد.

* * *

۲ـ بخشی از یک کره با دمای اولیه T_0 تحت شار حرارتی ثابت $\dot{q}''$ قرار می‌گیرد. توزیع دمای کره را بدست آورید. دمای محیط T_∞ و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی بین کره و محیط اطراف h می‌باشد. شعاع کره r_0 است.





با انتخاب مناسب محور مختصات و استفاده از تقارن مسأله می‌توان وابستگی به φ را در مختصات کروی (r, θ, φ) حذف کرد.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\mu = \cos\theta$$

$$u = \sqrt{r}\, T$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{4}\frac{u}{r^2} + \frac{\partial}{r^2 \partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}\right] = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$u = R(r)\,M(\mu)\,T(t)$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{1}{4}\frac{R}{r^2}\right) + \frac{1}{Mr^2}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right] = \underbrace{\frac{1}{\alpha T}\frac{dT}{dt}}_{-\lambda^2}$$

$$\frac{1}{\alpha T}\frac{dT}{dt} = -\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad T(t) = C_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{1}{4}\frac{R}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right] = -\lambda^2$$

$$\underbrace{\frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{R}{4r^2} + \lambda^2 r^2\right)}_{n(n+1)} + \frac{1}{M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right] = 0$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{R}{4r^2} + \lambda^2 r^2 = n(n+1)\frac{R}{r^2}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\lambda^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{r^2}\right]R = 0 \quad \Rightarrow \quad R(r) = C_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + C_2 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$$

$$\frac{1}{M}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right] = -n(n+1)$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right] + n(n+1)M = 0$$

$$(1-\mu^2)M'' - 2\mu M' + n(n+1)M = 0 \quad \Rightarrow \quad M(\mu) = C_3 P_n(\mu) + C_4 Q_n(\mu)$$

برای حل مسأله نیاز به دو شرط مرزی بر روی r ، دو شرط مرزی بر روی μ و یک شرط مرزی بر روی t داریم.

$$T(r,\theta,t)\big|_{t=0} = T_0$$

$$T(r,\theta,t)\big|_{r=0} = \text{finite}$$

$$T(r,\theta,t)\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \text{finite}$$

$$\begin{cases} -k\dfrac{\partial T}{\partial r} + h(T_\infty - T) + \dot{q}'' = 0 & , r=r_0 \ , \quad 0 \leqslant \theta < \dfrac{\beta}{2} \\ -k\dfrac{\partial T}{\partial r} + h(T_\infty - T) = 0 & , r=r_0 \ , \quad \dfrac{\beta}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

توجه شود که شرط مرزی چهارم، هم یک شرط مرزی برای r و هم یک شرط مرزی برای θ حساب می‌شود. حال این شرایط مرزی را به شرایط مرزی مورد نیاز برای تغییر متغیرهای صورت گرفته، تبدیل می‌کنیم.

$$\mu = \cos\theta$$

$$u = \sqrt{r}\, T$$

$$u(r,\mu,t)\big|_{t=0} = \sqrt{r}\, T_0$$

$$u(r,\mu,t)\big|_{r=0} = \text{finite}$$

$$u(r,\mu,t)\big|_{\mu=0} = \text{finite}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial (u r^{-\frac{1}{2}})}{\partial r} = -\frac{1}{2} u r^{-\frac{3}{2}} + \frac{\partial u}{\partial r} r^{-\frac{1}{2}}$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial r} + h(T_\infty - T) + \dot{q}'' = -k\left[-\frac{1}{2} u r^{-\frac{3}{2}} + \frac{\partial u}{\partial r} r^{-\frac{1}{2}}\right] + h(T_\infty - u r^{-\frac{1}{2}}) + \dot{q}'' = 0$$

$$-k\left[-\frac{1}{2}\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\right] + h(T_\infty\sqrt{r} - u) + \dot{q}''\sqrt{r} = 0$$

$$\rightarrow \ k\frac{\partial u}{\partial r} + \left(h - \frac{k}{2r}\right)u = (hT_\infty + \dot{q}'')\sqrt{r} \qquad , r=r_0$$

بنابراین شرط مرزی آخر نیز به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + Hu = f(\theta) \qquad , r=r_0$$

$$H = \frac{h}{k} - \frac{1}{2r_0} \qquad , f(\theta) = \begin{cases} \left(\dfrac{hT_\infty}{k} + \dfrac{\dot{q}''}{k}\right)\sqrt{r_0} & 0 \leqslant \theta < \dfrac{\beta}{2} \\ \dfrac{hT_\infty\sqrt{r_0}}{k} & \dfrac{\beta}{2} < \theta \leqslant \pi \end{cases}$$

یا برحسب μ ،

$$\frac{\partial u}{\partial r} + Hu = f(\mu) \qquad , r = r_0$$

$$H = \frac{h}{k} - \frac{1}{2r_0} \qquad , f(\mu) = \begin{cases} \dfrac{hT_\infty \sqrt{r_0}}{k} & -1 \leqslant \mu < \cos\dfrac{\beta}{2} \\[2ex] \left(\dfrac{hT_\infty}{k} + \dfrac{\dot{q}''}{k}\right)\sqrt{r_0} & \cos\dfrac{\beta}{2} < \mu \leqslant 1 \end{cases}$$

با همگن کردن شرط مرزی اخیر، می‌توان تابع گرین را برای u تعیین کرد.

$$\psi(r,\mu,t) = R(r)\,M(\mu)\,\Gamma(t)$$

$$\psi(r,\mu,t)\Big|_{r=0} = \text{finite} \longrightarrow R(0) = \text{finite}$$

$$\Rightarrow R(r) = C_1 J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + \cancelto{0}{C_2 Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)}$$

$$\psi(r,\mu,t)\Big|_{\mu=0} = \text{finite} \longrightarrow M(0) = \text{finite}$$

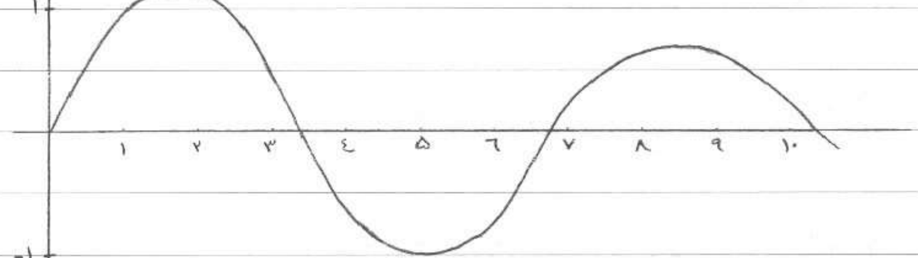
$$\Rightarrow M(\mu) = C_3 P_n(\mu) + \cancelto{0}{C_4 Q_n(\mu)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} + H\psi = 0 \qquad , r = r_0$$

$$\left[\frac{dR}{dr} + HR\right]_{r=r_0} = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}\left[J_{n-\frac{1}{2}}(\lambda r_0) - J_{n+\frac{3}{2}}(\lambda r_0)\right] + HJ_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r_0) = 0$$

$$J_{n-\frac{1}{2}}(\lambda r_0) + 2HJ_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r_0) - J_{n+\frac{3}{2}}(\lambda r_0) = 0 \longrightarrow$$ تعیین مقادیر ویژه λ_{mn}

برای مثال اگر $n=1$ و $H=1$ ، تابع $g(x) = J_{0.5}(x) + 2J_{1.5}(x) - J_{2.5}(x)$ ، به شکل زیر خواهد بود:



دقت شود که برای هر n، مقادیر ویژه λ به طور جداگانه تعیین می‌شوند و بنابراین از اندیس λ_{mn} استفاده شده است.

نهایتاً جواب ψ به صورت زیر در می‌آید:

$$\psi(r,\mu,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{mn}\, e^{-\alpha\lambda_{mn}^{2} t}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r)\, P_n(\mu)$$

حال با اعمال شرط مرزی زمانی می‌توان C_{mn} را یافت:

$$\sqrt{r}\, T_0=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{mn}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r)\, P_n(\mu)$$

$$\int_{r'=0}^{r_0}\int_{\mu'=-1}^{1} r'\sqrt{r'}\, T_0\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r')\, P_n(\mu')\, d\mu'\, dr' = C_{mn}\int_{0}^{r_0} r' J^{2}_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r')\, dr' \times \int_{-1}^{1}\left[P_n(\mu')\right]^{2} d\mu'$$

$$C_{mn}=\frac{T_0\int_{r'=0}^{r_0}\int_{\mu'=-1}^{1} r'\sqrt{r'}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r')\, P_n(\mu')\, d\mu'\, dr'}{\int_{0}^{r_0} r' J^{2}_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r')\, dr' \times \int_{-1}^{1}\left[P_n(\mu')\right]^{2} d\mu'}$$

$$\int_{0}^{r_0} r' J^{2}_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r')\, dr' = -\frac{r_0^{2}}{2} J_{n-\frac{1}{2}}(\lambda_{mn} r_0)\, J_{n+\frac{3}{2}}(\lambda_{mn} r_0)$$

$$\int_{-1}^{1}\left[P_n(\mu')\right]^{2} d\mu' = \frac{2}{2n+1}$$

با انجام محاسبات لازم، می‌توان تابع گرین را تعیین کرد،

$$G(r,\mu,t\,|\,r',\mu',\tau)$$

و از آنجا $u(r,\mu,t)$ به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$u(r,\mu,t)=\int_{r'=0}^{r_0}\int_{\mu'=-1}^{1} r'^{2}\, G(r,\mu,t\,|\,r',\mu',0)\sqrt{r'}\, T_0\, dr'\, d\mu' + \alpha\int_{\tau=0}^{t}\int_{\mu'=-1}^{1} r'^{2}\, G(r,\mu,t\,|\,r_0,\mu',\tau)\,\frac{1}{k}\, f\, d\mu'\, d\tau$$

$$\longrightarrow\ u(r,\mu,t)=T_0\int_{r'=0}^{r_0}\int_{\mu'=-1}^{1} r'^{2}\sqrt{r'}\, G(r,\mu,t\,|\,r',\mu',0)\, d\mu'\, dr'$$

$$+\frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_{\mu'=-1}^{\cos\frac{\beta}{2}} r'^{2}\left(\frac{h T_\infty \sqrt{r_0}}{k}\right) G(r,\mu,t\,|\,r_0,\mu',\tau)\, d\mu'\, d\tau$$

$$+\frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_{\mu'=\cos\frac{\beta}{2}}^{1} r'^{2}\left(\frac{h T_\infty}{k}+\frac{\dot{q}''}{k}\right)\sqrt{r_0}\; G(r,\mu,t\,|\,r_0,\mu',\tau)\, d\mu'\, d\tau$$

پس از تعیین $u(r,\mu,t)$ ، می‌توان به سادگی T را تعیین کرد.

$$T(r,\theta,t)=\frac{1}{\sqrt{r}}\,u(r,\cos\theta,t)$$

بشوی اوراق اگر همدرس مایی
که علم عشق در دفتر نباشد

پایان