گردآوری: علی طرلانی

مدرس: دکتر مجید حسین پور

عضو هیات علمی مهندسی برق
دانشگاه محقق اردبیلی

آشنایی با نظریه‌ی اعداد مختلط:

$x^2+1=0 \longrightarrow$ جواب حقیقی ندارد. $\longrightarrow$ نظریه‌ای جدید به نام نظریه‌ی اعداد مختلط

تعریف: عدد مختلط یک زوج مرتب از اعداد حقیقی x و y است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$* \quad \mathbb{C} = \{ x+iy \mid x,y \in R ,\ i^2=-1 \}$$

اگر $z=x+iy$ عددی مختلط و عضو مجموعه‌ی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد، x را قسمت حقیقی و y را قسمت موهومی آن می‌نامیم:

$$z \in \mathbb{C} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = \mathrm{Re}(z) \\ y = \mathrm{Im}(z) \end{array} \right.$$

خواص اعداد مختلط: اگر $z_1=x_1+iy_1$ ، $z_2=x_2+iy_2$ و $z_3=x_3+iy_3$ فرض شوند، داریم:

1. $z_1=z_2 \Longrightarrow x_1=x_2 ,\ y_1=y_2$ تساوی دو عدد مختلط

2. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ جمع و تفریق دو عدد مختلط

3. $z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ ضرب دو عدد مختلط

$$z_1z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

4. $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$ مزدوج عدد مختلط

5. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} ,\ z_2 \neq 0$ تقسیم دو عدد مختلط

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \times \frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

6. $z_1+z_2=z_2+z_1$ جابجایی عمل جمع

7. $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ شرکت‌پذیری عمل جمع

8. $z_1z_2=z_2z_1$ جابه‌جایی عمل ضرب

9. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ شرکت پذیری عمل ضرب

10. $z_1(z_2 \pm z_3) = z_1 z_2 \pm z_1 z_3$ توزیع پذیری عمل ضرب

11. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ مزدوج مجموع وتفاضل

12. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ مزدوج حاصلضرب

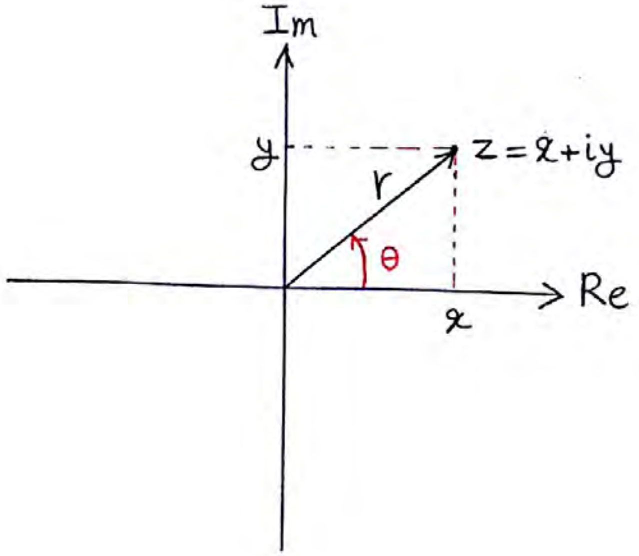
13. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad , z_2 \neq 0$ مزدوج حاصل تقسیم

14. $Re(z_1) = \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} = x_1$ قسمت حقیقی عدد مختلط

15. $Im(z_1) = \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} = y_1$ قسمت موهومی عدد مختلط

16. $|z_1| = \sqrt{z_1 \cdot \bar{z}_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ اندازه ی عدد مختلط

نمایش قطبی اعداد مختلط :



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}$$

* $z = x + iy$ نمایش دکارتی عدد مختلط

* $z = r\cos\theta + i r\sin\theta \Rightarrow z = re^{i\theta} = r\angle\theta$ نمایش قطبی عدد مختلط

قرارداد: * $-\pi < \theta \leq \pi$

* $\bar{z} = re^{-i\theta} = r\angle -\theta$

نکته: θ را آرگومان عدد مختلط z می نامیم:

* $Arg(z) = \theta \quad , \quad arg(z) = Arg(z) \pm 2k\pi \; ; k = 0, 1, 2, \ldots$

نکته: $\cos\theta + i\sin\theta = cis\,\theta = e^{i\theta}$ رابطه ی اویلر

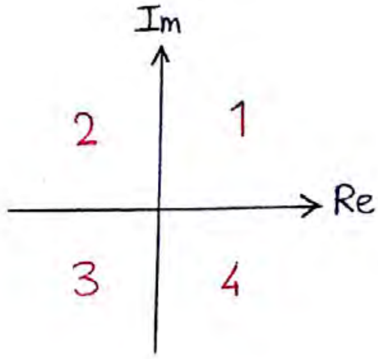
مثال:

$1+i=\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{+1}{+1}=\frac{\pi}{4}$ ناحیه‌ی اول

$1-i=\sqrt{2}\angle\frac{-\pi}{4}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{-1}{1}=\frac{-\pi}{4}$ ناحیه‌ی چهارم

$-1+i=\sqrt{2}\angle\frac{3\pi}{4}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{-1}=\frac{3\pi}{4}$ ناحیه‌ی دوم

$-1-i=\sqrt{2}\angle\frac{-3\pi}{4}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{-1}{-1}=\frac{-3\pi}{4}$ ناحیه‌ی سوم



نکته: عملیات ضرب و تقسیم در نمایش قطبی اعداد مختلط به سادگی انجام می‌شود:

1. $Z_1Z_2=r_1r_2\angle\theta_1+\theta_2$

2. $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}\angle\theta_1-\theta_2$, $Z_2\neq 0$

محاسبه‌ی ریشه‌ی nام عدد مختلط: اگر $Z=r\angle\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $W=R\angle\phi=R(\cos\phi+i\sin\phi)$ باشد، W را ریشه‌ی nام عدد مختلط Z می‌نامیم، هرگاه داشته باشیم:

$* \; W=Z^{\frac{1}{n}}$

$$W=Z^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow W^n=Z \Longrightarrow (Re^{i\phi})^n=re^{i\theta} \Longrightarrow R^ne^{in\phi}=re^{i\theta}$$

$$\Longrightarrow R^n[\cos(n\phi)+i\sin(n\phi)]=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\Longrightarrow * \; R=r^{\frac{1}{n}}$$

$$\cos(n\phi)+i\sin(n\phi)=\cos\theta+i\sin\theta \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \sin(n\phi)=\sin\theta \\ \cos(n\phi)=\cos\theta \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow * \; \phi=\frac{\theta+2k\pi}{n} \quad ; k=0,1,2,\dots,n-1$$

مثال: ریشه‌ی چهارم عدد $Z=1$ را بدست آورید.

$$W^4=Z=1(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow W=\sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)\right]$$

$$k=0,1,2,3$$

$k=0 \implies w_1=1$

$k=1 \implies w_2=i$

$k=2 \implies w_3=-1$

$k=3 \implies w_4=-i$

مثال: معادله‌ی $z^4+2i=0$ را حل کنید.

$$z^4+2i=0 \implies z^4=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$z=\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)\right] \; ; \; k=0,1,2,3$$

مثال: معادله‌ی $z^2-(5+i)z+8+i=0$ را حل کنید.

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-(5+i) \\ c=8+i \end{cases}$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5+i}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5+i}{2}\right)^2-8-i}$$

$$=\frac{5+i}{2}\pm\sqrt{-2+\frac{3}{2}i}=\frac{5+i}{2}\pm(0.5+1.5i)=\begin{cases}3+2i \\ 2-i\end{cases}$$

$$-2+\frac{3}{2}i=2.5e^{2.5i}$$

$$\sqrt{-2+\frac{3}{2}i}=\sqrt{2.5}\left[\cos\left(\frac{2.5+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2.5+2k\pi}{2}\right)\right]=\pm(0.5+1.5i)$$

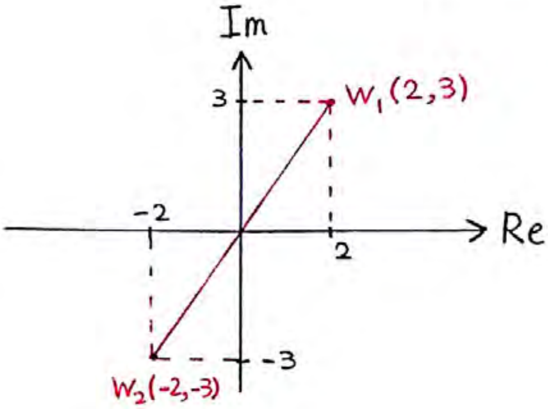
$$k=0,1$$

تمرین: مقادیر ریشه‌ی عبارات زیر را یافته و در صفحه‌ی مختلط نمایش دهید.

1. $\sqrt{-5+12i} \implies w=\sqrt{-5+12i} \implies w=z^{\frac{1}{2}}$

$z=-5+12i=13e^{1.97i}$

$$w=\sqrt{13}\left[\cos\left(\frac{1.97+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{1.97+2k\pi}{2}\right)\right]=\begin{cases}2+3i & ;k=0\\ -2-3i & ;k=1\end{cases}$$



2. $\sqrt[4]{-5+12i} \implies w=\sqrt[4]{-5+12i} \implies w=z^{\frac{1}{4}}$

$z=-5+12i=13e^{1.97i}$

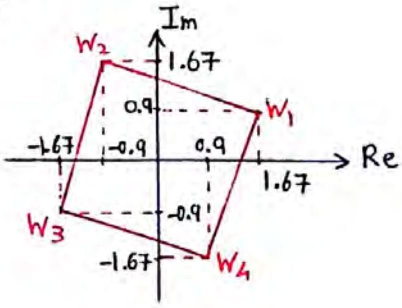
$$w=\sqrt[4]{13}\left[\cos\left(\frac{1.97+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{1.97+2k\pi}{4}\right)\right];k=0,1,2,3$$

$k=0 \implies w_1=1.67+0.9i$

$k=1 \implies w_2=-0.9+1.67i$

$k=2 \implies w_3=-1.67-0.9i$

$k=3 \implies w_4=0.9-1.67i$



3. $\sqrt[4]{-1} \implies w=\sqrt[4]{-1} \implies w=z^{\frac{1}{4}}$

$z=-1=e^{i\pi}$

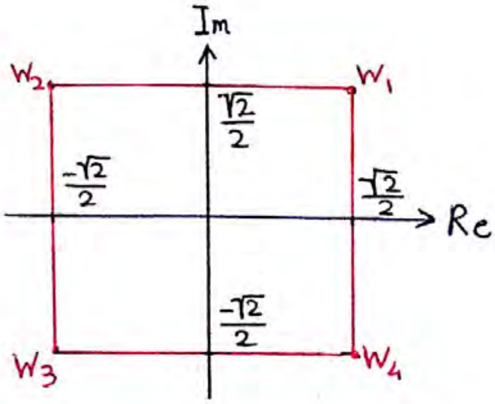
$$w=\sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right];k=0,1,2,3$$

$k=0 \implies w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=1 \implies w_2=\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=2 \implies w_3=\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=3 \implies w_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$



4. $\sqrt[5]{1+i} \Longrightarrow w=\sqrt[5]{1+i} \Longrightarrow w=z^{\frac{1}{5}}$

$$z=1+i=\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$w=\sqrt[10]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)\right];\ k=0,1,2,3,4$$

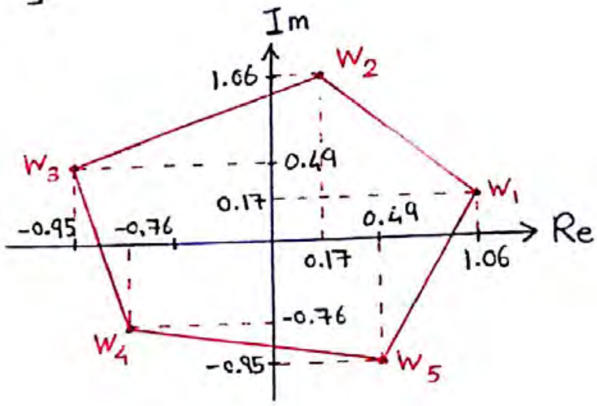
$k=0 \Longrightarrow w_1=1.06+0.17i$

$k=1 \Longrightarrow w_2=0.17+1.06i$

$k=2 \Longrightarrow w_3=-0.95+0.49i$

$k=3 \Longrightarrow w_4=-0.76-0.76i$

$k=4 \Longrightarrow w_5=0.49-0.95i$



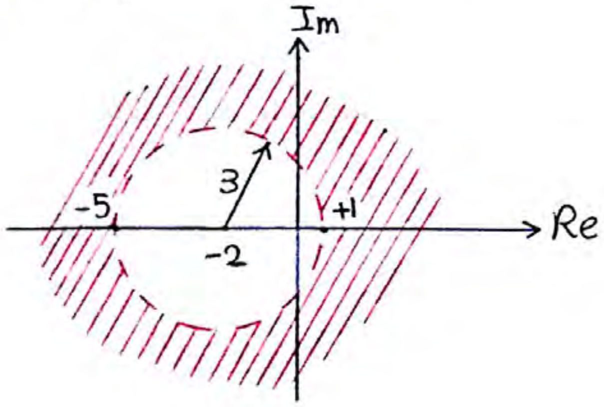
تمرین: نواحی زیر را در صفحه‌ی مختلط نشان دهید.

1. $|z+2|>3$

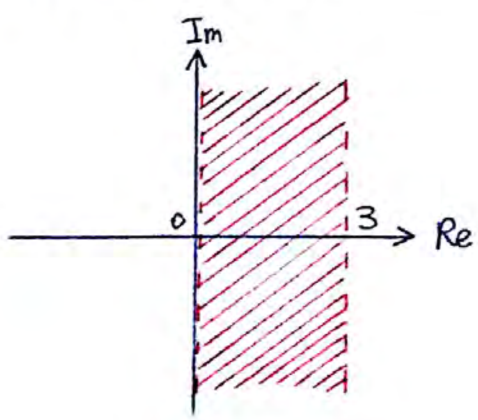
نکته: $|z-z_0|=\rho$

$$\left.\begin{array}{l} z=x+iy \\ z_0=x_0+iy_0 \end{array}\right| \Rightarrow |(x-x_0)+i(y-y_0)|=\rho \Rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho \Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

معادله‌ی دایره به مرکز $z_0(x_0,y_0)$ وشعاع ρ.

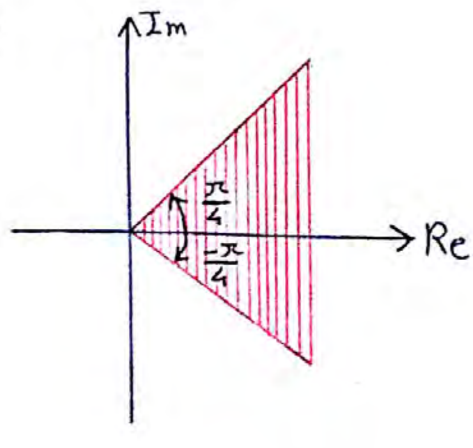


2. $0<\mathrm{Re}(z)<3 \Longrightarrow 0<x<3$



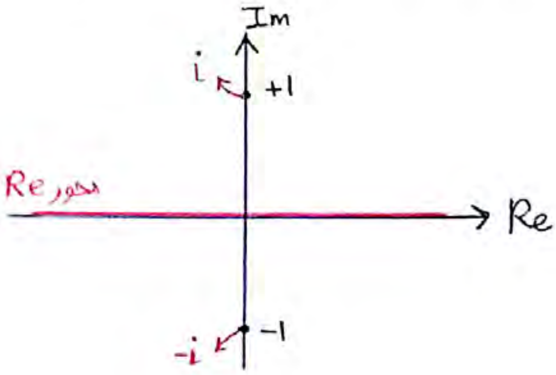
3. $|\mathrm{Arg}(z)|\leqslant\frac{\pi}{4} \Longrightarrow |\theta|\leqslant\frac{\pi}{4} \Longrightarrow$

$-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$



4. $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right|=1 \Longrightarrow \dfrac{|z+i|}{|z-i|}=1 \Longrightarrow |z+i|=|z-i|$

نشان هندسی نقاطی از صفحه‌ی مختلط که فاصله‌ی آن‌ها از i و $-i$ برابر باشد.



$|z+i|=|z-i| \Rightarrow$

$|x+iy+i|=|x+iy-i| \Longrightarrow$

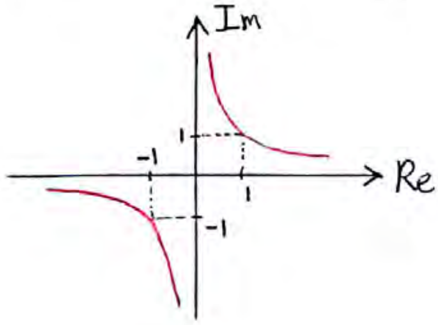
$x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2 \Longrightarrow$

$(y+1)^2=(y-1)^2 \Rightarrow$

$y^2+2y+1=y^2-2y+1 \Rightarrow 2y=-2y \Rightarrow y=0$

5. $\operatorname{Im}(z^2)=2$

$z=x+iy \Longrightarrow z^2=(x^2-y^2)+i(2xy) \Longrightarrow \operatorname{Im}(z^2)=2xy=2 \Longrightarrow xy=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x}$



تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

1. $z^2+z+1-i=0$

$$\left|\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=1-i \end{array}\right. \qquad z=\frac{-1\pm\sqrt{-3+4i}}{2}=-0.5\pm(0.5+i) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} z_1=i \\ \\ z_2=-1+i \end{array}\right.$$

$$\sqrt{\frac{-3}{4}+i}=\sqrt{\frac{5}{4}}\left[\cos\left(\frac{2.214+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2.214+2k\pi}{2}\right)\right]=\pm(0.5+i) \quad ;k=0,1$$

$\operatorname{Arg}\left(\frac{-3}{4}+i\right)=2.214$

$\left|\frac{-3}{4}+i\right|=\frac{5}{4}$

2. $z^4 - 3(1+2i)z^2 - 8 + 4i = 0$

$$z^2 \triangleq w \Longrightarrow w^2 - 3(1+2i)w - 8 + 4i = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3-6i \\ c = -8+4i \end{array} \right.$$

$$w = (1.5 + 3i) \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\sqrt{1+4i}\right) = (1.5+3i) \pm \left(\frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{5\sqrt{5}}{8} i\right) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} w_1 = 3.3 + 4.4i \\ w_2 = -0.3 + 1.6i \end{array} \right.$$

$$z_{1,2} = \sqrt{w_1} = \sqrt{3.3+4.4i} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} z_1 = 2.1 + 1.05i \\ z_2 = -2.1 - 1.05i \end{array} \right.$$

$$z_{3,4} = \sqrt{w_2} = \sqrt{-0.3+1.6i} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} z_3 = 0.8 + i \\ z_4 = -0.8 - i \end{array} \right.$$

مشتق توابع مختلط : مشتق تابع $f(z)$ در نقطه‌ی $z=z_0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$*\, f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

مثال: مشتق پذیری توابع مختلط زیر را بررسی کنید.

a) $f(z)=\bar{z}$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(z+\Delta z)}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\bar{z}+\overline{\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}1 & ;\ \Delta x\to 0,\ \Delta y=0\\ -1 & ;\ \Delta x=0,\ \Delta y\to 0\end{cases}$$

چون حد فوق موجود نمی‌باشد، مشتق پذیر نیست.

b) $f(z)=|z|^2$

نکته: $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)}-z\cdot\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\overline{\Delta z}+\bar{z}\Delta z+|\Delta z|^2}{\Delta z}$$

$$=z\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\bar{z}+0=\begin{cases}z+\bar{z} & ;\ \Delta x\to 0,\ \Delta y=0\\ -z+\bar{z} & ;\ \Delta x=0,\ \Delta y\to 0\end{cases}$$

حد وجود ندارد ← مشتق پذیر نیست.

خواص مشتق توابع مختلط:

1. $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$
2. $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$
3. $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$

توابع تحلیلی:

تعریف: تابع $f(z)$ را در دامنه‌ی D تحلیلی گوییم هرگاه $f(z)$ در تمامی نقاط D تعریف شده و مشتق پذیر باشد.

تابع $f(z)$ در نقطه‌ی $z=z_0$ تحلیلی است هرگاه در یک همسایگی از آن تحلیلی باشد.

* تمامی توابع چندجمله‌ای مانند $f(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ که در آن n عدد طبیعی و $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد مختلط هستند، در همه جا تحلیلی اند.

* تمامی توابع گویا مانند $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ که در آن $P(z)$ و $Q(z)$ چندجمله‌ای هایی برحسب z هستند، در همه جا به جز ریشه های $Q(z)$ تحلیلی اند.

* توابع $\sin z$ ، $\cos z$ و e^z در همه جا تحلیلی اند.

* اگر $f(z)$ و $g(z)$ توابعی تحلیلی باشند، ترکیب آن‌ها $(f\circ g(z))$ نیز تابعی تحلیلی خواهد بود.

قضیه ی 1 (کوشی- ریمان): فرض کنید تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در یک همسایگی از نقطه ی z تعریف شده و پیوسته باشد و در خود z مشتق پذیر باشد. آن‌گاه مشتقات جزئی مرتبه ی اول u و v در آن نقطه وجود دارد و در شرایط زیر که به شرایط کوشی- ریمان معروف است صدق می‌کنند:

$$* \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

قضیه ی 2 (کوشی- ریمان): هرگاه توابع پیوسته و حقیقی $u(x,y)$ و $v(x,y)$ از دو متغیر حقیقی x و y دارای مشتقات جزئی مرتبه ی اول پیوسته باشند که در دامنه ی D در معادلات کوشی - ریمان صدق کنند تابع مختلط $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در D تحلیلی است.

روش های مشتق گیری از توابع مختلط: مشتق تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را به یکی از روش های زیر می‌توان محاسبه نمود:

1. استفاده از تعریف اصلی مشتق

2. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

3. $f'(z)=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$

نکته: برقراری معادلات کوشی - ریمان در یک نقطه شرط لازم ولی غیرکافی برای مشتق پذیر بودن یک تابع مختلط در آن نقطه است. شرط کافی پیوسته بودن تابع مختلط در همسایگی آن نقطه است. بنابراین عدم برقراری معادلات کوشی - ریمان در یک نقطه، عدم مشتق پذیری تابع مختلط مورد نظر در نقطه ی مذکور را نتیجه می‌دهد.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(z)=Re(z)=x$ را بررسی کنید.

$$u(x,y)=x \quad , \quad v(x,y)=0$$

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=1 \quad , \quad v_y=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow u_x\neq v_y \Rightarrow$$

شرایط کوشی - ریمان برقرار نیست پس تابع مشتق پذیر نیست.

شرایط کوشی-ریمان در فرم قطبی:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}\times 2x\times(x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}} \Longrightarrow \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

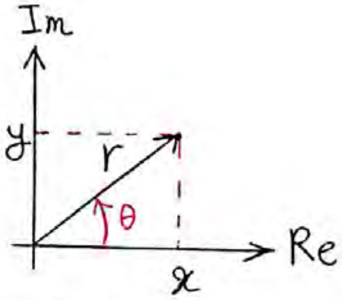
$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \Longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \Longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$* \; f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$



شرایط کوشی-ریمان: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}=\sin\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}$

$$\Longrightarrow \; * \left| \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} \\[2ex] \frac{\partial v}{\partial r}=\frac{-1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

شرایط کوشی-ریمان
در فرم قطبی

مثال: درمورد تحلیلی بودن تابع $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ نظر دهید.

$$u(x,y)=e^x\cos y$$
$$v(x,y)=e^x\sin y$$

$$\left| \begin{array}{l} u_x=e^x\cos y \\ v_y=e^x\cos y \end{array} \right. \Rightarrow u_x=v_y \qquad \left| \begin{array}{l} v_x=e^x\sin y \\ u_y=-e^x\sin y \end{array} \right. \Rightarrow v_x=-u_y$$

شرایط کوشی-ریمان برقرار است. پس تابع تحلیلی می‌باشد. (u و v توابعی پیوسته هستند.)

تعریف نقطه‌ی تکین: نقطه‌ی تکین نقطه‌ای است که تابع در آن نقطه تحلیلی نیست ولی حداقل در یک همسایگی از آن تحلیلی می‌باشد.
اگر تابع مختلط $f(z)$ در تمامی نقاط به جز نقاط خاص تحلیلی باشد، به آن نقاط، نقاط تکین اطلاق می‌شود.
نکته: اگر تابعی هیچ جا تحلیلی نباشد، هیچ نقطه‌ی تکینی نخواهد داشت.
مثال: نقاط تکین تابع $f(z)=\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})}$ را بدست آورید.

تابع فوق در تمامی نقاط به جز ریشه های مخرج و نقاطی که تابع تعریف نشده است، تحلیلی است.

$$\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)=0 \Rightarrow \frac{\pi}{z}=\pm k\pi \Rightarrow z=\frac{1}{\pm k} \quad ; k=1,2,3,\dots$$

$$z=0 \quad (k\to\infty) \longrightarrow \text{نقاط تکین}$$

قضیه‌ی معادله‌ی لاپلاس: فرض کنید تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشد، آنگاه u و v در D دارای مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته بوده و در معادله‌ی لاپلاس صدق خواهد کرد.

$$* \quad \begin{cases} \nabla^2 u = u_{xx}+u_{yy}=0 \\ \nabla^2 v = v_{xx}+v_{yy}=0 \end{cases}$$

تابع همساز: هر تابعی که دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم بوده و معادله‌ی لاپلاس صدق کند، تابع همساز نامیده می‌شود؛ بنابراین u و v توابعی همساز هستند.
مزدوج همساز: اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشد، آنگاه v را مزدوج همساز u می‌نامند.

محاسبه‌ی مزدوج همساز: فرض کنید $u(x,y)$ معلوم بوده و $v(x,y)$ مجهول باشد. آنگاه از رابطه‌ی $u_x=v_y$، تابع v را به صورت $v(x,y)=\int u_x(x,y)\,dy$ بدست می‌آوریم. انتگرال مذکور تابعی به صورت $\phi(x)$ خواهد داشت. از رابطه‌ی $v_x=-u_y$ می‌توان $\phi(x)$ را تعیین کرد.

مثال: مزدوج همساز تابع $u(x,y)=\sin x\cosh y$ را بدست آورید.

$$u_x=\cos x\cosh y \xrightarrow{u_x=v_y} v(x,y)=\int u_x\,dy=\int \cos x\cosh y\,dy=\cos x\sinh y+\phi(x)$$

$$v_x=-u_y \Rightarrow \begin{cases} v_x=-\sin x\sinh y+\phi'(x) \\ u_y=\sin x\sinh y \end{cases} \Rightarrow \phi'(x)=0 \Rightarrow \phi(x)=c$$

$$v(x,y)=\cos x\sinh y+c$$

مثال: اگر $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$ باشد، مزدوج همساز تابع u و تابع تحلیلی $f(z)$ را بدست آورید.

* پس از این که $f(z)$ را براساس تابع u و مزدوج همسازآن (v) نوشتیم، برای محاسبه‌ی $f(z)$ به صورت تابعی از z، به جای x ها z و به جای y ها صفر قرار می‌دهیم.

$$f(z)=f(x+iy)\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x\to z \\ y\to 0\end{array}\right. \Rightarrow f(z)=f(x)$$

$$u_x=2^x\cos(y\ln 2)\ln 2$$

$$v(x,y)=\int 2^x\cos(y\ln 2)\ln 2 = 2^x\frac{\sin(y\ln 2)}{\ln 2}\ln 2+\phi(x)=2^x\sin(y\ln 2)+\phi(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x=2^x\sin(y\ln 2)\ln 2+\phi'(x) \\ u_y=-2^x\sin(y\ln 2)\ln 2\end{array}\right| \xrightarrow{v_x=-u_y} \phi'(x)=0 \Rightarrow \phi(x)=c$$

$$v(x,y)=2^x\sin(y\ln 2)+c$$

$$f(z)=2^x\cos(y\ln 2)+i\left(2^x\sin(y\ln 2)+c\right) \xrightarrow{\left|\begin{array}{l} x\to z \\ y\to 0\end{array}\right.} \left|\begin{array}{ll} f(z)=2^z+ic & ;\ c\in\mathbb{R} \\ f(z)=2^z+c' & ;\ c'\in\mathbb{C}\end{array}\right.$$

* $w=f(z)=2^z$

$$\ln w=\ln 2^z \Rightarrow \ln w=z\ln 2 \Rightarrow e^{\ln w}=e^{z\ln 2}\Rightarrow w=e^{(x+iy)\ln 2}$$

$$\Rightarrow w=e^{x\ln 2}\cdot e^{iy\ln 2}=e^{x\ln 2}\left[\cos(y\ln 2)+i\sin(y\ln 2)\right]\Rightarrow w=f(z)=2^x\left[\cos(y\ln 2)+i\sin(y\ln 2)\right]$$

تمرین: آیا توابع زیر همساز هستند؟ درصورت مثبت بودن جواب، مزدوج همساز هرکدام را بدست آورید.

1. $u(x,y)=2x(1-y)$

$$\left|\begin{array}{l} u_x=2(1-y)\Rightarrow u_{xx}=0 \\ u_y=-2x \Rightarrow u_{yy}=0\end{array}\right. \Rightarrow \nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}=0$$

(u همساز است.)

$$v(x,y)=\int u_x\,dy=\int 2(1-y)\,dy=2y-y^2+\phi(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x=\phi'(x) \\ u_y=-2x\end{array}\right| \Rightarrow \phi'(x)=2x \Rightarrow \phi(x)=x^2+c$$

$$v(x,y)=2y-y^2+x^2+c$$

2. $u(x,y)=y^3-3x^2y$

$$\left|\begin{array}{l} u_x=-6xy \Longrightarrow u_{xx}=-6y \\ u_y=3y^2-3x^2 \Longrightarrow u_{yy}=6y \end{array}\right. \Longrightarrow \nabla^2 u=-6y+6y=0$$

(u همساز است.)

$$v(x,y)=\int u_x\,dy=\int -6xy\,dy=-3xy^2+\phi(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x=-3y^2+\phi'(x) \\ u_y=3y^2-3x \end{array}\right| \Longrightarrow \phi'(x)=3x \Longrightarrow \phi(x)=\frac{3}{2}x^2+c$$

$$v(x,y)=-3xy^2+\frac{3}{2}x^2+c$$

تمرین: a و b را طوری تعیین کنید که توابع داده شده ی زیر همساز باشند.

1. $u=e^{2x}\cos(ay)$

$$u_x=2e^{2x}\cos(ay) \Longrightarrow u_{xx}=4e^{2x}\cos(ay)$$

$$u_y=-e^{2x}a\sin(ay) \Longrightarrow u_{yy}=-e^{2x}a^2\cos(ay)$$

$$\nabla^2 u=4e^{2x}\cos(ay)-e^{2x}a^2\cos(ay)=0 \Longrightarrow 4\cos(ay)=a^2\cos(ay) \Longrightarrow a^2=4 \Longrightarrow a=\pm 2$$

2. $u=\cos bx\cdot\sinh y$

$$u_x=-b\sin bx\cdot\sinh y \Longrightarrow u_{xx}=-b^2\cos bx\cdot\sinh y$$

$$u_y=\cos bx\cosh y \Longrightarrow u_{yy}=\cos bx\sinh y$$

$$\nabla^2 u=-b^2\cos bx\cdot\sinh y+\cos bx\sinh y=0 \Longrightarrow b^2=1 \Longrightarrow b=\pm 1$$

مثال: فرض کنید $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ باشد، چنانچه $v(x,y)$ مزدوج همساز این تابع بوده و $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $f'(i)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(z)=u_x+iv_x \\ \text{کوشی-ریمان}:\ v_x=-u_y \end{array}\right| \Longrightarrow f'(z)=u_x-iu_y$$

$$u_x=2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$

$$u_y=-2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$

P.8

$$z = x + iy = i \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

$$f'(i) = 0 - i(-2e^{0-1^2}\cos 0 - 0) \Longrightarrow f'(i) = 2e^{-1}i$$

توابع مقدماتی:

۱. تابع نمایی: تابع نمایی به ازای تمامی مقادیر z تحلیلی و غیرصفر است.

$$* \; f(z) = e^{z} = e^{(x+iy)} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

خواص تابع نمایی:

1. $(e^{z})' = e^{z}$

2. $e^{z+2\pi i} = e^{z} \;;\; T = 2\pi i$

3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

4. $\mathrm{Arg}(e^{z}) = y$

5. $|e^{z}| = e^{x}$

6. $\left| \begin{array}{ll} D = \mathbb{C} & \text{دامنه} \\ R = \mathbb{C} - \{0\} & \text{برد} \end{array} \right.$

مثال: معادله‌ی $e^{2z} + 3ie^{z} = 0$ را حل کنید.

$$e^{z}(e^{z} + 3i) = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{ll} e^{z} \neq 0 & \text{فاقد ریشه} \\ e^{z} + 3i = 0 & \end{array} \right.$$

$$e^{z} = -3i \Longrightarrow e^{x}(\cos y + i\sin y) = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} e^{x} = 3 \Longrightarrow x = \ln 3 = 1.099 \\ y = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \;;\; k = 0, 1, 2, \ldots \end{array} \right. \Longrightarrow z = 1.099 + i\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \;;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. توابع مثلثاتی و هیپربولیک:

$$* \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad ; \quad T = 2\pi$$

$$* \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \quad ; \quad T = 2\pi i$$

$$* \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad ; \quad T = \pi$$

$$* \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \quad ; \quad T = \pi i$$

$$* \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \csc z = \frac{1}{\sin z} \quad ; \quad T = 2\pi$$

$$* \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \quad , \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z} \quad ; \quad T = 2\pi i$$

خواص توابع مثلثاتی و هیپربولیک:

1. $(\sin z)' = \cos z \quad , \quad (\cos z)' = -\sin z$

2. $(\sinh z)' = \cosh z \quad , \quad (\cosh z)' = \sinh z$

3. $(\tan z)' = \sec^2 z$

4. $(\tanh z)' = -\operatorname{sech}^2 z$

5. $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1$

6. $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_2 \cosh z_1$

مثال: ثابت کنید: $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}\right]$$

$$(\mathrm{I}) \left| \begin{array}{l} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{array} \right.$$

$$\sin z \overset{(\mathrm{I})}{=} \frac{1}{2i}\left[\cos x\, e^{-y} + i\sin x\, e^{-y} - \cos x\, e^{y} + i\sin x\, e^{y}\right]$$

$$\overset{(\times\frac{-i}{-i})}{=} \frac{1}{2}\left[-i\cos x\, e^{-y} + \sin x\, e^{-y} + i\cos x\, e^{y} + \sin x\, e^{y}\right]$$

$$= \sin x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + i\cos x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$$

تمرین: روابط زیر را اثبات کنید.

1. $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{ix} e^{-y} + e^{-ix} e^{y}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos x\, e^{-y} + i\sin x\, e^{-y} + \cos x\, e^{y} - i\sin x\, e^{y}\right] = \cos x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) - i\sin x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

2. $\sin(iy) = i\sinh y$

$$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = \frac{-i(e^{-y} - e^{y})}{2} = \frac{i(e^{y} - e^{-y})}{2} = i\sinh y$$

3. $\cos(iy) = \cosh y$

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y$$

4. $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \frac{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{x} e^{iy} - e^{-x} e^{-iy}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos y\, e^{x} + i\sin y\, e^{x} - \cos y\, e^{-x} + i\sin y\, e^{-x}\right]$$

$$= \cos y\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) + i\sin y\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = \sinh x \cos y + i\cosh x \sin y$$

5. $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \frac{e^{(x+iy)} + e^{-(x+iy)}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{x} e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos y\, e^{x} + i\sin y\, e^{x} + \cos y\, e^{-x} - i\sin y\, e^{-x}\right] = \cos y\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right) + i\sin y\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

مثال. معادله‌ی $\sin z = 0$ را حل کنید.

- روش اول:

$$\sin z = 0 \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Rightarrow e^{2iz} = 1$$

$$\Rightarrow e^{2iz} = 1(\cos 0 + i\sin 0) \Rightarrow e^{-2y} e^{2ix} = 1(\cos(0) + i\sin(0))$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} e^{-2y} = 1 \Rightarrow y = 0 \\ \\ e^{2ix} = \cos 2x + i\sin 2x = \cos(0) + i\sin(0) \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \end{array} \right.$$

$$z = x + iy \Rightarrow z = x = k\pi \ ; k = 0, 1, 2, \dots$$

- روش دوم:

$$\sin z = 0 \Rightarrow \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y = 0$$

$$\sin x \cosh y = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \\ \cosh y = 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \end{array} \right.$$

$\cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \cos x = 0 \Rightarrow \\ \\ \sinh y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right.$ در شرط فوق x بدست آمده با ریشه‌ی این عبارت، اشتراکی ندارد. : $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$

$$\left| \begin{array}{l} z = x + iy = x = k\pi \ ; k = 0, 1, 2, \dots \\ \\ y = 0 \end{array} \right.$$

3. تابع لگاریتم:

$$f(z) = \ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln e^{i\theta} \Rightarrow$$

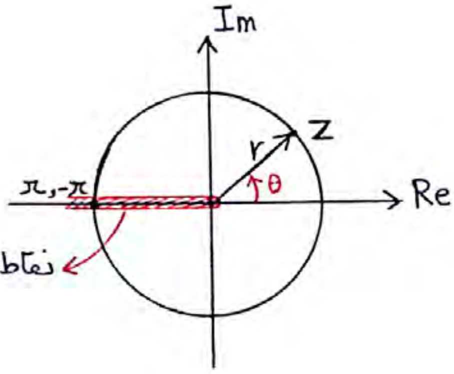
$$* \ f(z) = \ln z = \ln r + i\theta$$

$$* \left| \begin{array}{l} \mathrm{Re}(\ln z) = \ln r \\ \\ \mathrm{Im}(\ln z) = \theta \end{array} \right.$$

$* \; r=|z| \; , \; \theta=\arg(z)=\mathrm{Arg}(z) \pm 2k\pi \; ; \; k=0,1,2,\dots$

نکته: زمانی که آرگومان را با نماد arg نشان دهیم، نشانگر تناوب کلی عدد مختلط می‌باشد ولی هرگاه با Arg نشان دهیم، تناوب اصلی $-\pi < \theta \leq \pi$ را نشان خواهد داد.

نکته: تابع لگاریتم با توجه به تعاریف فوق تابعی چند مقداری است ($K=0,1,2,\dots$). با تعیین محدوده برای θ، تابع ln را می‌توان تک مقداری کرد. به طور قراردادی، θ را در محدوده‌ی $-\pi < \theta \leq \pi$ در نظر می‌گیرند. در این حالت تابع ln در تمامی نقاط به غیر از نقاط واقع روی محور حقیقی در جهت منفی (Re^-) و مبدأ ($Z=0$) تحلیلی است و نقاط مذکور، نقاط تکین تابع ln محسوب می‌شوند.



$$f(z)=\ln z \; ; \; -\pi < \theta \leq \pi$$

نکته: تابع لگاریتم طبیعی را در حالت تک مقداری (روی آرگومان اصلی) با نماد (Ln) نشان می‌دهند.

نکته: اگر محدوده‌ی θ به طور مثال $0 \leq \theta < 2\pi$ فرض شود، در این حالت نقاط روی محور حقیقی در جهت مثبت (Re^+) و مبدأ ($Z=0$) نقاط تکین تابع ln خواهد بود. (در حالت کلی شعاع متناظر با محدوده‌ی آرگومان و مبدأ نقاط تکین تابع ln هستند.)

4. توان های عمومی:

$$* \; f(z)=z^c=e^{c\ln z} \; ; \; c\in\mathbb{C} \; , \; z\neq 0$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

1. $z=\ln(1+i)$

$$\ln(1+i)=\ln\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

در حالت تک مقداری: $z=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4} \; ; \; -\pi<\theta\leq\pi \qquad (z=\mathrm{Ln}(1+i))$

در حالت چند مقداری: $z=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \; ; \; k\in\mathbb{Z}$

2. $z=(1+i)^{(1-i)}$

$$z=(1+i)^{(1-i)}=e^{(1-i)\ln(1+i)}=e^{(1-i)\ln\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)}=e^{(1-i)\left[\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right]}=e^{\left(\ln\sqrt{2}-i\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right]=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right]$$

3. $\ln z = 3 - i$

$$e^{\ln z} = e^{3-i} \Rightarrow z = e^{3} e^{-i} = e^{3}(\cos 1 - i\sin 1) = 20.08 - 0.35\,i$$

5. توابع معکوس مثلثاتی و معکوس هیپربولیک :

* $\sin^{-1} z = -i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$
* $\cos^{-1} z = -i\ln\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)$
* $\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$
* $\sinh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)$
* $\cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$
* $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

اثبات 1 : $w = \sin^{-1} z \Rightarrow z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0$

$$\xrightarrow{\times e^{iw}} e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$ معادله ی درجه دوم

$$e^{iw} \triangleq X \Rightarrow X^2 - 2izX - 1 = 0 \Rightarrow X = iz + \sqrt{1-z^2}$$

$$\Rightarrow e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2} \Rightarrow iw = \ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \Rightarrow w = -i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

اثبات 2 : $w = \cos^{-1} z \Rightarrow z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \Rightarrow e^{iw} + e^{-iw} - 2z = 0$

$$\xrightarrow{\times e^{iw}} e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

$$e^{iw} \triangleq X \Rightarrow X^2 - 2zX + 1 = 0 \Rightarrow X = z + \sqrt{z^2-1} = z + i\sqrt{1-z^2}$$

$$\Rightarrow e^{iw} = z + i\sqrt{1-z^2} \Rightarrow iw = \ln\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right) \Rightarrow w = -i\ln\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)$$

اثبات 3: $w = \tan^{-1} z \Rightarrow z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} \Rightarrow iz(e^{iw} + e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw}$

$$\Rightarrow ize^{iw} + ize^{-iw} - e^{iw} + e^{-iw} = 0 \xrightarrow{\times e^{iw}} e^{2iw}(iz-1) + (iz+1) = 0$$

$$\Rightarrow e^{2iw} = \frac{-1-iz}{-1+iz} \times \frac{i}{i} = \frac{-i+z}{-i-z} = \frac{i-z}{i+z} \Rightarrow 2iw = \ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

$$\Rightarrow w = \frac{-i}{2}\ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right) = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

اثبات 4: $w = \sinh^{-1} z \Longrightarrow z = \sinh w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2} \Rightarrow e^{w} - e^{-w} - 2z = 0 \xrightarrow{\times e^{w}}$

$$e^{2w} - 2ze^{w} - 1 = 0$$

$$e^{w} \triangleq X \Longrightarrow X^2 - 2zX - 1 = 0 \Rightarrow X = z + \sqrt{z^2+1}$$

$$\Rightarrow e^{w} = z + \sqrt{z^2+1} \Longrightarrow w = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$$

اثبات 5: $w = \cosh^{-1} z \Longrightarrow z = \cosh w = \frac{e^{w} + e^{-w}}{2} \Rightarrow e^{w} + e^{-w} - 2z = 0 \xrightarrow{\times e^{w}}$

$$e^{2w} - 2ze^{w} + 1 = 0$$

$$e^{w} \triangleq X \Longrightarrow X^2 - 2zX + 1 = 0 \Longrightarrow X = z + \sqrt{z^2-1}$$

$$\Rightarrow e^{w} = z + \sqrt{z^2-1} \Longrightarrow w = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

اثبات 6: $w = \tanh^{-1} z \Rightarrow z = \tanh w = \frac{\sinh w}{\cosh w} = \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}} \Rightarrow z(e^{w} + e^{-w}) = e^{w} - e^{-w}$

$$\Rightarrow ze^{w} + ze^{-w} - e^{w} + e^{-w} = 0 \xrightarrow{\times e^{w}} e^{2w}(1-z) = 1+z \Rightarrow e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow 2w = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \Rightarrow w = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

1. $z^4 - 2i + 6 = 0 \quad \Longrightarrow z^4 = -6 + 2i = 2\sqrt{10}\, e^{i(2.82)}$

$$z = \sqrt[4]{-6+2i} = (2\sqrt{10})^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{2.82 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2.82 + 2k\pi}{4}\right)\right] \ ; k = 0, 1, 2, 3$$

2. $\sinh z = i \Longrightarrow z = \sinh^{-1} i \Longrightarrow z = \ln\left(i + \sqrt{1+i^2}\right) = \ln\left(i + \sqrt{1-1}\right) = \ln i$

$\Longrightarrow z = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right) \Longrightarrow z = i\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)$

3. $\cos z = 2 \Longrightarrow z = \cos^{-1} 2 = -i\ln\left(2 + i\sqrt{1-2^2}\right) = -i\ln\left(2 + i^2\sqrt{3}\right)$

$= -i\ln\left(2 - \sqrt{3}\right) = -i\ln(0.268) = -i\left(\ln 0.268 \pm i(2k\pi)\right) = \mp 2k\pi + i(1.317)$

4. $e^{3z} = 3 \Longrightarrow 3z = \ln 3 \Longrightarrow z = \frac{\ln 3}{3} = \frac{1.099 \pm i(2k\pi)}{3}$

5. $\ln z = -2 - \frac{3}{2}i \Longrightarrow z = e^{\left(-2 - \frac{3}{2}i\right)} = e^{-2} \cdot e^{\frac{-3}{2}i} = e^{-2}\cos\left(\frac{-3}{2}\right) + ie^{-2}\sin\left(\frac{-3}{2}\right)$

6. $\sin z = \cosh 3 \Longrightarrow z = \sin^{-1}(\cosh 3) = -i\ln\left[i(\cosh 3) + \sqrt{1-\cosh^2 3}\right]$

$= -i\ln\left[10.07i + i\sqrt{100.36}\right] = -i\ln(10.07i + 10.02i) = -i\ln(20.09i)$

$= -i\left[\ln 20.09 + i\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)\right] = \left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right) - 3i$

7. $z^{\frac{5}{4}} = i \Longrightarrow e^{\frac{5}{4}\ln z} = i \Longrightarrow \frac{5}{4}\ln z = \ln i \Rightarrow \ln z = \frac{4}{5}\ln i = \frac{4}{5}\left[i\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)\right]$

$\Rightarrow e^{\frac{4}{5}\left[i\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)\right]} = z \Longrightarrow z = \cos\left(\frac{4}{5}\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)\right) + i\sin\left(\frac{4}{5}\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)\right)$

نگاشت:

تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر بگیرید. از نقطه نظر هندسی، عملکرد این تابع را می‌توان به صورت یک نگاشت از صفحه‌ی مختلط $z(x,y)$ به صفحه‌ی مختلط $w(u,v)$ در نظر گرفت. به این معنا که تحت این تابع مختلط یک نقطه‌ی مشخص مانند (x_0,y_0) از صفحه‌ی z به یک نقطه‌ی مشخص مانند (u_0,v_0) در صفحه‌ی w منتقل می‌شود. به چنین رابطه‌ای نگاشت می‌گوییم.

نگاشت همدیس: نگاشتی که اندازه و جهت زاویه‌ی دو قوس هموار گذرنده از یک نقطه‌ی مشخص را حفظ می‌کند، نگاشتی همدیس در آن نقطه‌ی مشخص می‌نامند.

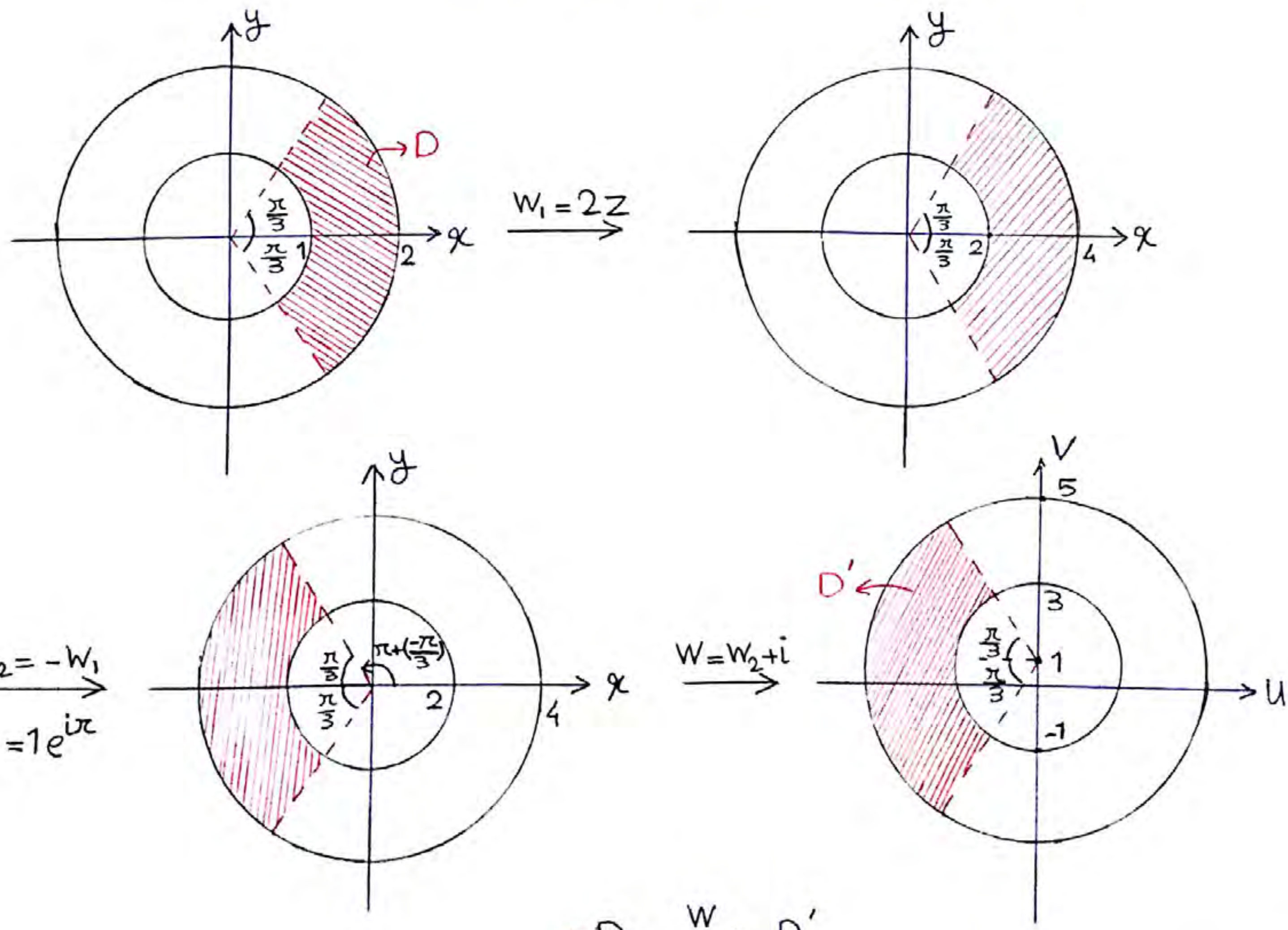
قضیه: اگر $f(z)$ در نقطه‌ی $z=z_0$ تحلیلی بوده و $f'(z_0)\neq 0$ باشد، آن‌گاه تابع $w=f(z)$ در نقطه‌ی $z=z_0$ نگاشتی همدیس است.

۱. نگاشت خطی:

$$* \; w=az+b \quad ; \quad a,b\in\mathbb{C}$$

با فرض $a=|a|e^{i\alpha}$، نگاشت خطی $w=az+b$ علاوه بر انقباض یا انبساط به اندازه‌ی $|a|$ و دوران به اندازه‌ی α در جهت مثلثاتی، باعث انتقال به اندازه‌ی b می‌شود. اگر $a\neq 0$ باشد، نگاشت خطی فوق در همه جا همدیس است.

مثال: نگاشت ناحیه‌ی $D=\{z \mid 1\leqslant|z|\leqslant 2;\ \frac{-\pi}{3}<Arg(z)<\frac{\pi}{3}\}$ را تحت رابطه‌ی $w=-2z+i$ بیابید.



$$* \; D \xrightarrow{W} D'$$

2. نگاشت توانی:

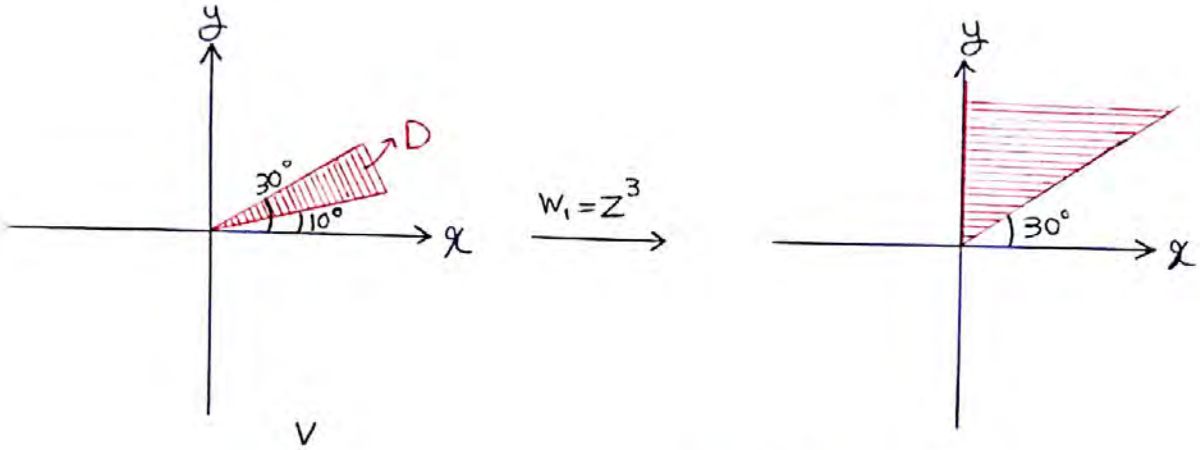
$* \; w = z^n \; ; \quad n \in \mathbb{N}$

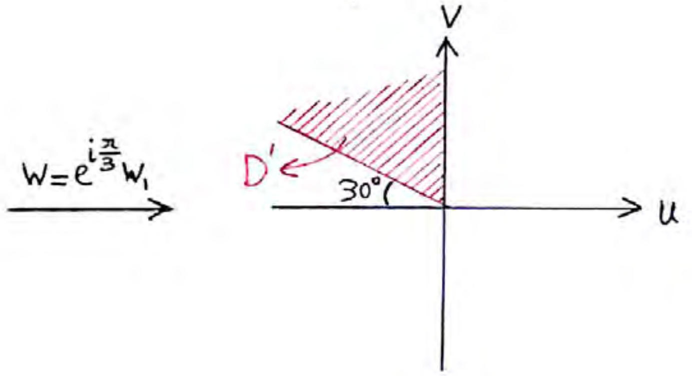
$z = re^{i\theta} \; , \; w = Re^{i\phi}$

$$w = z^n \Longrightarrow Re^{i\phi} = r^n e^{in\theta} \Longrightarrow * \left| \begin{array}{l} R = r^n \\ \\ \phi = n\theta \end{array} \right.$$

نگاشت توانی فوق به غیر از نقطه‌ی $z=0$ در همه جا همدیس است.

مثال: نگاشت ناحیه‌ی $D=\{z \mid 10^\circ \leqslant Arg(z) \leqslant 30^\circ\}$ را تحت رابطه‌ی $w=e^{i\frac{\pi}{3}}z^3$ بدست آورید.





$* \; D \xrightarrow{w} D'$

$D' = \{w \mid 90^\circ \leqslant Arg(w) \leqslant 150^\circ\}$

نکته: حالت خاص نگاشت توانی به صورت $w=z^2$ می‌باشد که در فرم دکارتی به صورت زیر نوشته می‌شود:

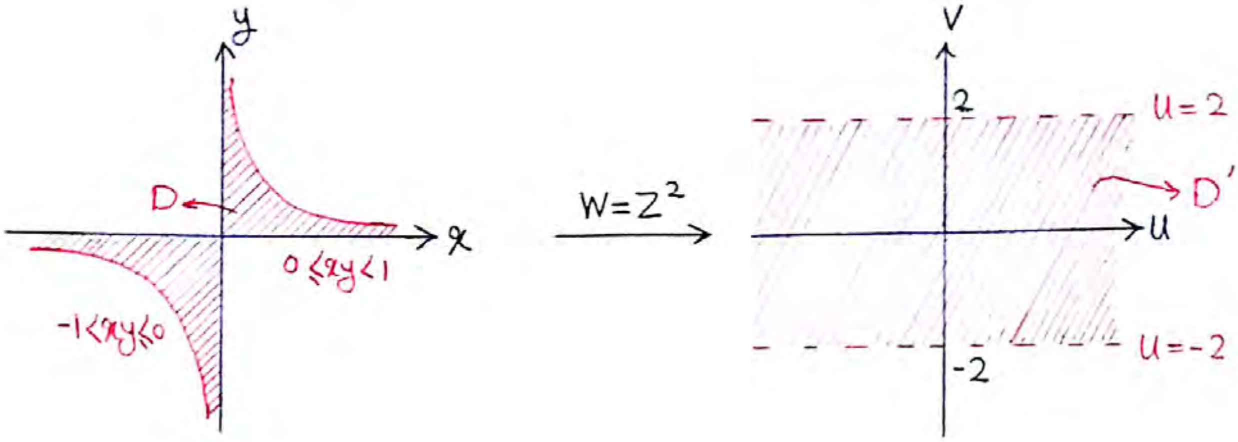
$$z = x+iy \Rightarrow w = z^2 = (x+iy)^2 \Longrightarrow * \; w = u + iv = (x^2-y^2) + 2ixy$$

در این حالت نگاشت هذلولی $x^2-y^2=c_1$، خط $u=c_1$ و نگاشت هذلولی $2xy=c_2$، خط $v=c_2$ خواهد بود.

مثال: نگاشت ناحیه‌ی $-1<xy<1$ را تحت رابطه‌ی $w=z^2$ بدست آورید.

$$-1 < xy < 1 \Longrightarrow -2 < 2xy < 2 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} 2xy = 2 \Longrightarrow u = 2 \\ \\ 2xy = -2 \Longrightarrow u = -2 \end{array} \right.$$

P.13



3. نگاشت ریشه‌ی nام:

$$* \; w=\sqrt[n]{z} \; ; \; n\in\mathbb{N}$$

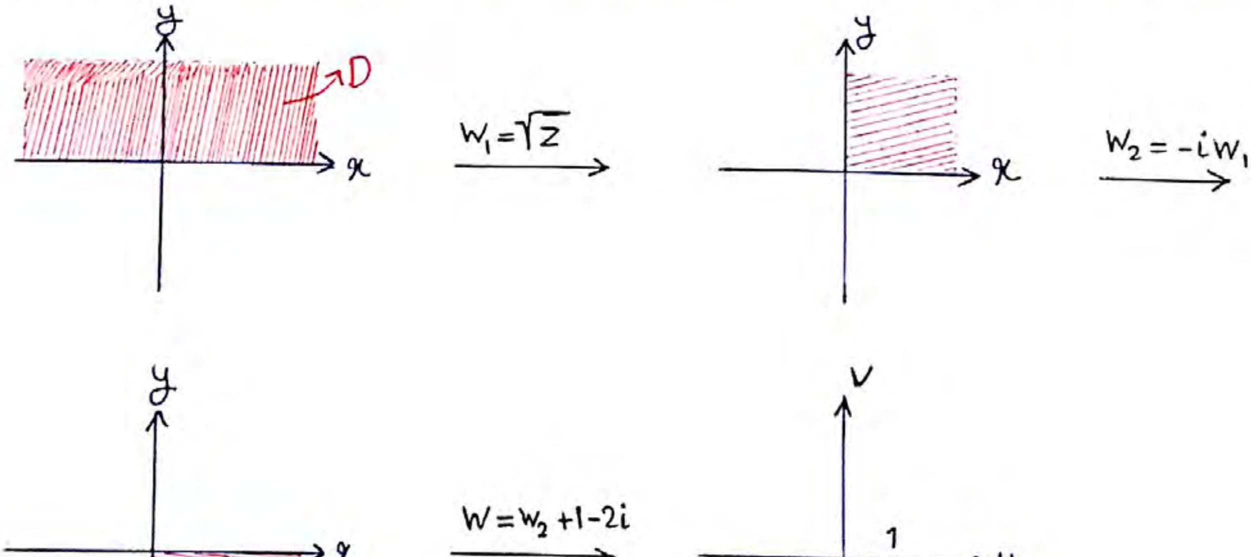
$$z=re^{i\theta} \;,\; w=Re^{i\phi}$$

$$w=\sqrt[n]{z} \Rightarrow Re^{i\phi}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}} \Rightarrow * \left|\begin{array}{l} R=\sqrt[n]{r} \\ \\ \phi=\dfrac{\theta}{n} \end{array}\right.$$

نگاشت ریشه‌ی فوق به غیر از $z=0$ در همه جا همدیس است.

مثال: نگاشت نیم‌صفحه‌ی فوقانی صفحه‌ی مختلط را تحت رابطه‌ی $w=-i\sqrt{z}+1-2i$ بدست آورید.

$$D=\{z \mid 0\leqslant \mathrm{Arg}(z)\leqslant \pi\}$$



4. نگاشت کسری:

$* \; W=\dfrac{1}{Z} \; ; \; Z\neq 0$

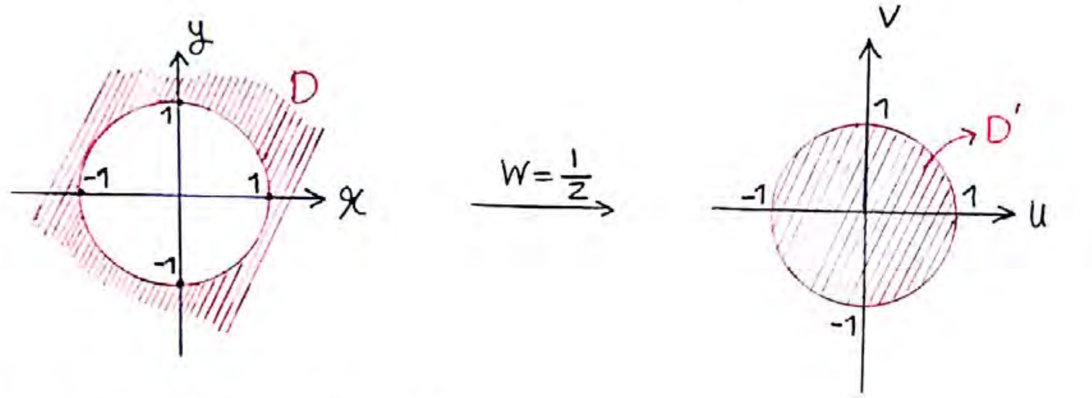
$Z=re^{i\theta}, \; W=Re^{i\phi}$

$$W=\frac{1}{Z} \Longrightarrow Re^{i\phi}=\frac{1}{r}e^{-i\theta} \Longrightarrow * \left| \begin{array}{l} R=\dfrac{1}{r} \\ \\ \phi=-\theta \end{array} \right.$$

نگاشت کسری فوق به غیراز $Z=0$ (که نگاشت نیست) درهمه جا همدیس می‌باشد.

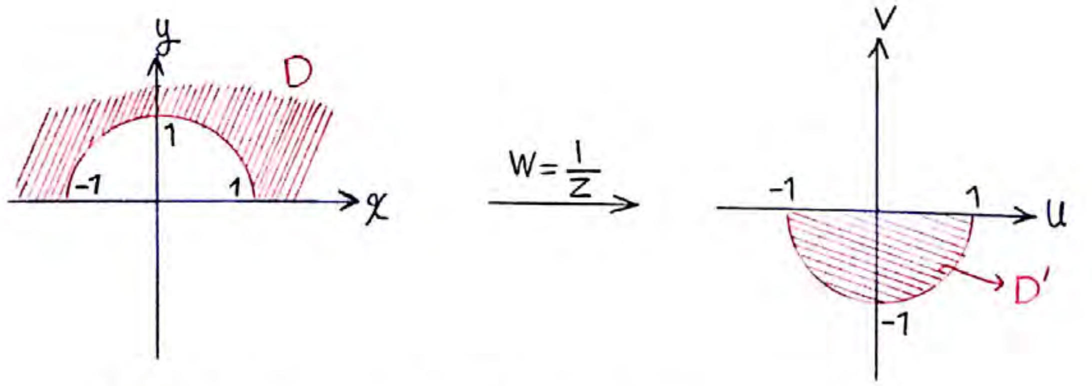
مثال: نگاشت هریک از نواحی زیر را تحت رابطه‌ی $W=\frac{1}{Z}$ بدست آورید.

1.



$$1\leqslant r<\infty \Longrightarrow \frac{1}{1}\geqslant\frac{1}{r}>\frac{1}{\infty} \Longrightarrow 0<R\leqslant 1$$

2.



$$0\leqslant\theta\leqslant\pi \Longrightarrow -0\geqslant-\theta\geqslant-\pi \Longrightarrow -\pi\leqslant\phi\leqslant 0$$

درحالت کلی معادله‌ی یک دایره یا یک خط راست را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$*\,A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \qquad (\mathrm{I})$$

نگاشت رابطه‌ی فوق تحت رابطه‌ی $W=\frac{1}{Z}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$W=\frac{1}{Z} \Rightarrow Z=\frac{1}{W} \Longrightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv} \Longrightarrow x+iy=\frac{u}{u^2+v^2}+i\,\frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{array} \right. \quad (\mathrm{II})$$

با جایگذاری مقادیر x و y برحسب u و v مطابق رابطهٔ II در رابطهٔ I ، رابطهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$* \; D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0$$

— اگر $A\neq 0$ و $D\neq 0$ باشد، یعنی دایره از مبدأ عبور نمی‌کند. آنگاه نگاشت آن تحت رابطهٔ $w=\frac{1}{z}$ دایره‌ای می‌شود که از مبدأ نمی‌گذرد.

— اگر $A\neq 0$ و $D=0$ باشد، یعنی دایره از مبدأ عبور می‌کند. آنگاه نگاشت آن تحت رابطهٔ $w=\frac{1}{z}$ خط راستی می‌شود که از مبدأ نمی‌گذرد.

— اگر $A=0$ و $D\neq 0$ باشد، یعنی خط راست از مبدأ عبور نمی‌کند. آنگاه نگاشت آن تحت رابطهٔ $w=\frac{1}{z}$ دایره‌ای می‌شود که از مبدأ می‌گذرد.

— اگر $A=0$ و $D=0$ باشد، یعنی خط راست از مبدأ عبور می‌کند. آنگاه نگاشت آن تحت رابطهٔ $w=\frac{1}{z}$ خط راستی می‌شود که از مبدأ می‌گذرد.

— اگر $A=0$ و $B=0$ باشد، خواهیم داشت :

$$Cy+D=0 \Longrightarrow \underbrace{y=\frac{-D}{C}}_{\text{خط راست}} \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} D(u^2+v^2)-Cv=0 \Longrightarrow u^2+v^2-\frac{C}{D}v=0$$

$$\Longrightarrow u^2+v^2-\frac{C}{D}v+\left(\frac{C}{2D}\right)^2-\left(\frac{C}{2D}\right)^2=0 \Longrightarrow u^2+\left(v-\frac{C}{2D}\right)^2=\left(\frac{C}{2D}\right)^2$$

* دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{C}{2D})$ و شعاع $\frac{C}{2D}$ که از مبدأ می‌گذرد.

— اگر $A=0$ و $C=0$ باشد، خواهیم داشت:

$$Bx+D=0 \Longrightarrow \underbrace{x=\frac{-D}{B}}_{\text{خط راست}} \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} D(u^2+v^2)+Bu=0 \Longrightarrow u^2+v^2+\frac{B}{D}u=0$$

$$\Longrightarrow u^2+v^2+\frac{B}{D}u+\left(\frac{B}{2D}\right)^2-\left(\frac{B}{2D}\right)^2=0 \Rightarrow \left(u+\frac{B}{2D}\right)^2+v^2=\left(\frac{B}{2D}\right)^2$$

* دایره‌ای به مرکز $(\frac{-B}{2D},0)$ و شعاع $\frac{B}{2D}$ که از مبدأ می‌گذرد.

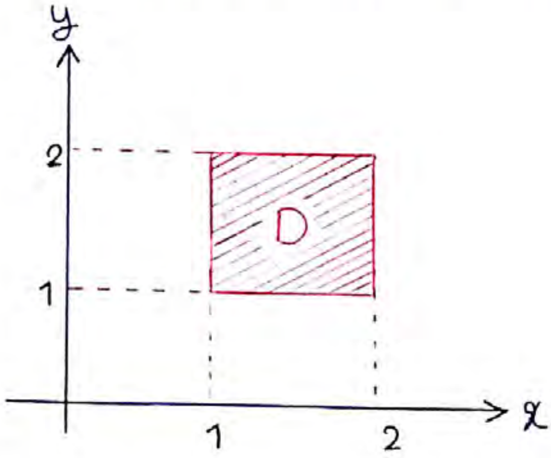
مثال: تصویر خط $y=x+\frac{1}{2}$ را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بدست آورید.

$$x-y+\frac{1}{2}=0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{ll} A=0 & B=1 \\ C=-1 & D=\frac{1}{2} \end{array} \right. \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} \frac{1}{2}(u^2+v^2)+u+v=0 \Longrightarrow$$

$$u^2+2u+v^2+2v=0 \Longrightarrow u^2+2u+1-1+v^2+2v+1-1=0 \Longrightarrow (u+1)^2+(v+1)^2=2$$

دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ و به مرکز $(-1,-1)$ که از مبدأ می‌گذرد.

مثال. نگاشت ناحیه‌ی $D=\{z \mid 1\leqslant x\leqslant 2 , 1\leqslant y\leqslant 2\}$ را تحت رابطه‌ی $w=\frac{1}{z}$ بدست آورید. $D \xrightarrow{w} D'$

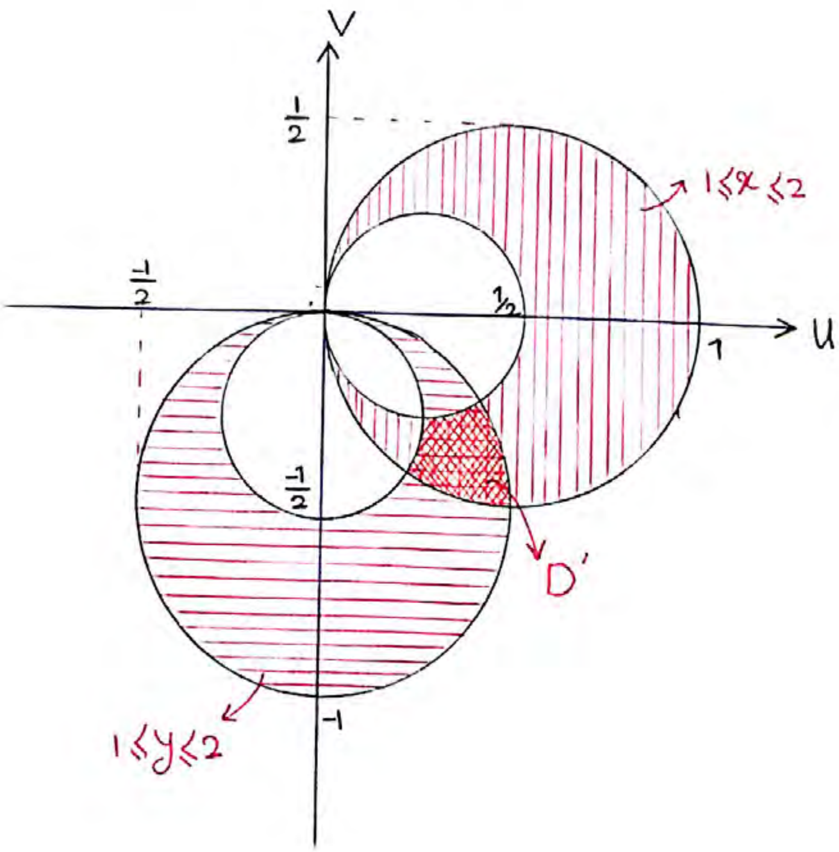


$$x=1 \xrightarrow{w} (u-\frac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{4}$$

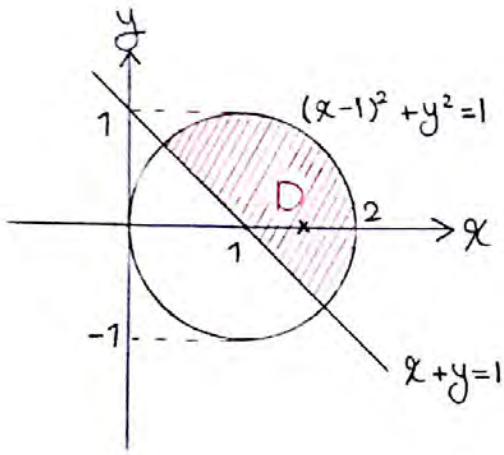
$y=0$ با فرض $\Longrightarrow 1\leqslant r<\infty \Longrightarrow 0<R\leqslant 1$ قسمت داخلی دایره بزرگ

$$x=2 \xrightarrow{w} (u-\frac{1}{4})^2+v^2=\frac{1}{16}$$

$y=0$ با فرض $\Longrightarrow 1\leqslant r\leqslant 2 \Longrightarrow \frac{1}{2}\leqslant R\leqslant 1$ قسمت خارجی دایره کوچک



مثال: نگاشت ناحیه‌ی نشان داده شده را تحت رابطه‌ی $W=\frac{1}{Z}$ بدست آورید.



$$x+y-1=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} A=0 & C=1 \\ B=1 & D=-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{W} u^2+v^2-u+v=0 \Rightarrow u^2-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+v^2+v+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

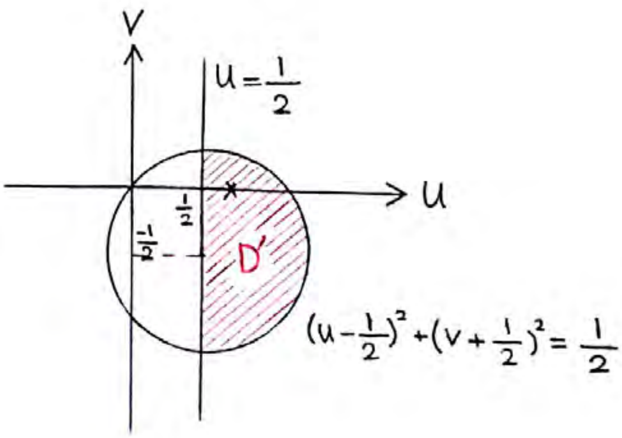
$$\Rightarrow \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2-2x=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} A=1 & C=0 \\ B=-2 & D=0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{W} u=\frac{1}{2}$$

$$Z\left(\frac{3}{2},0\right) \xrightarrow{W} W\left(\frac{2}{3},0\right) \quad (x)$$

نقطه‌ی فرضی برای یافتن ناحیه‌ی D'



5. نگاشت خطی-کسری:

$$*W=\frac{aZ+b}{cZ+d} \quad ; \quad ad-bc\neq 0$$

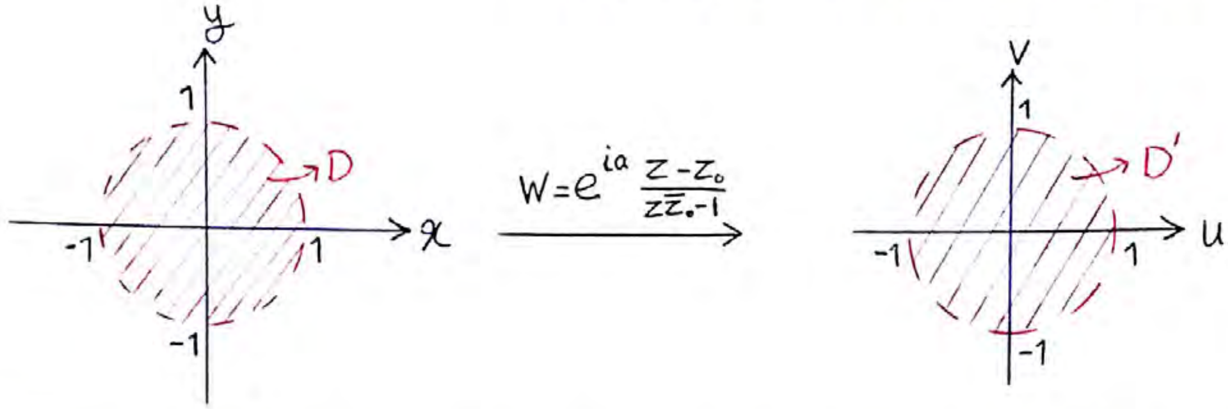
نگاشت خطی-کسری را تبدیل دوخطی یا تبدیل موبیوس نیز می‌نامند. این نگاشت به غیر از $Z=\frac{-d}{c}$ در همه‌ی نقاط همدیس است.

قضیه: سه نقطه‌ی مجزا و مفروض Z_1 و Z_2 و Z_3 را همواره می‌توان با یک و تنها یک نگاشت خطی-کسری $W=f(Z)$ بر روی سه نقطه‌ی مجزا و مشخص W_1 و W_2 و W_3 تصویر کرد. این نگاشت به طور ضمنی با معادله‌ی زیر مشخص می‌شود:

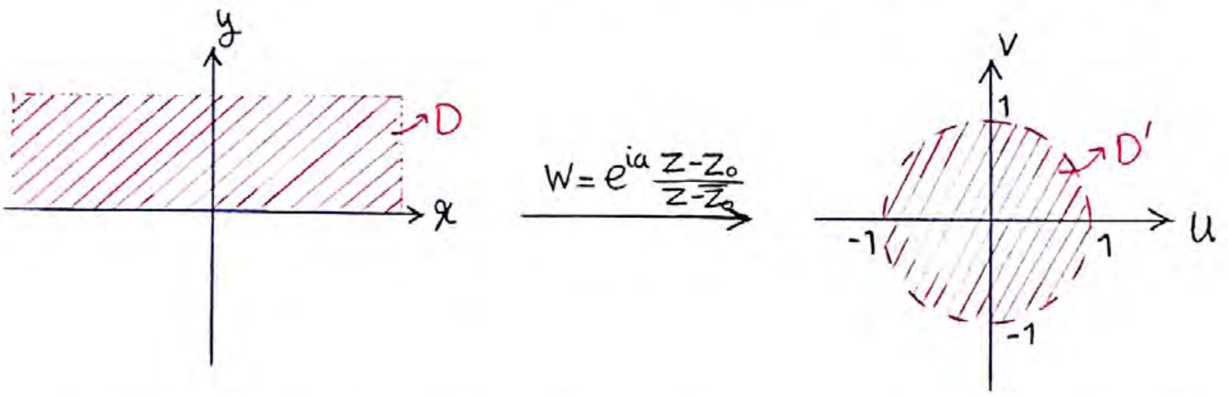
$$* \quad \frac{W-W_1}{W-W_3}\cdot\frac{W_2-W_3}{W_2-W_1}=\frac{Z-Z_1}{Z-Z_3}\cdot\frac{Z_2-Z_3}{Z_2-Z_1}$$

درصورتی که یکی از z_i ها یا w_i ها بی نهایت باشد، عبارت های شامل بی نهایت در صورت و مخرج باهم ساده خواهند شد.

نکته: می توان نشان داد، کلی ترین تبدیل موبیوس که ناحیه ی $|z|<1$ را به ناحیه ی $|w|<1$ تبدیل می کند، به صورت $w=e^{ia}\frac{z-z_0}{z\bar{z}_0-1}$ است که a عدد حقیقی و z_0 عدد مختلط با شرط $|z_0|<1$ می باشد.



نکته: می توان نشان داد، کلی ترین تبدیل موبیوس که ناحیه ی $\operatorname{Im}(z)\geqslant 0$ را به ناحیه ی $|w|<1$ تبدیل می کند، به صورت $w=e^{ia}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ است که a عدد حقیقی و z_0 عدد مختلط با شرط $\operatorname{Im}(z_0)\geqslant 0$ می باشد.

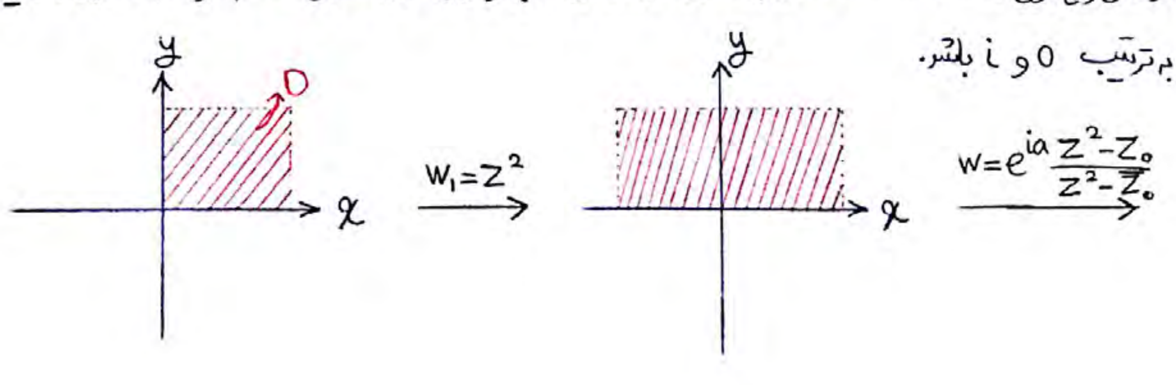


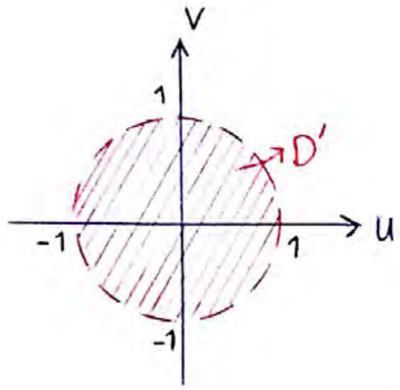
مثال: تبدیل خطی-کسری ای که سه نقطه ی $z_1=-2\,,\,z_2=0\,,\,z_3=2$ را به ترتیب به سه نقطه ی $w_1=\infty\,,\,w_2=\frac{1}{4}\,,\,w_3=\frac{3}{8}$ می نگارد را بدست آوریم.

$$\frac{w-\cancel{\infty}}{w-\frac{3}{8}}\cdot\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}-\cancel{\infty}}=\frac{z+2}{z-2}\cdot\frac{0-2}{0+2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{-\frac{1}{8}}{w-\frac{3}{8}}=-\frac{z+2}{z-2}\Longrightarrow w=\frac{1}{8}\cdot\frac{z-2}{z+2}+\frac{3}{8}\Rightarrow w=\frac{z+1}{2z+4}$$

مثال: نگاشتی را بیابید که محدوده ی ربع اول دستگاه مختلط z را به داخل دایره ی واحد به مرکز مبدأ در صفحه ی w بنگارد، به نحوی که تبدیل یافته ی نقاط $1+i$ و $i\sqrt{2}$ به ترتیب 0 و i باشد.





$$w = e^{ia}\,\frac{z^2 - z_0}{z^2 - \bar{z}_0}$$

$$0 = e^{ia}\,\frac{(1+i)^2 - z_0}{(1+i)^2 - \bar{z}_0} \quad (\mathrm{I})$$

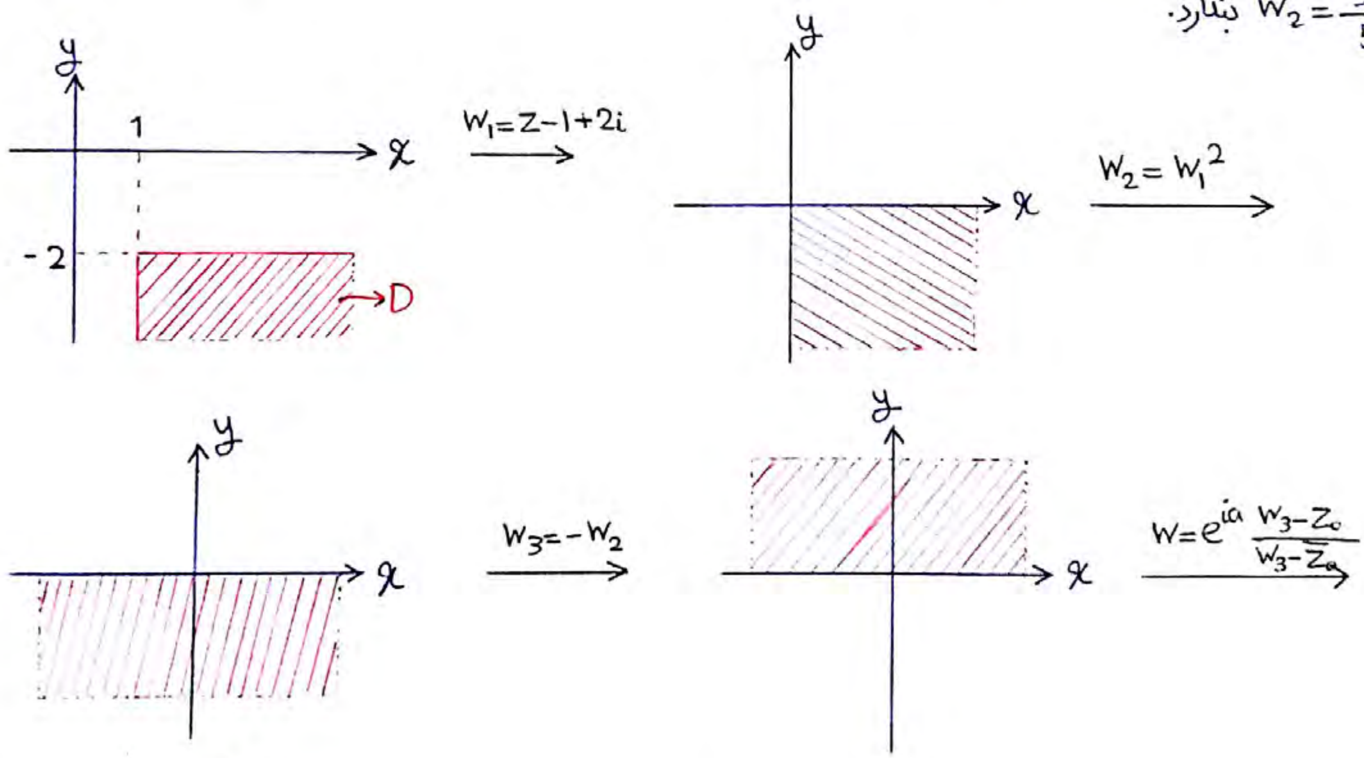
$$i = e^{ia}\,\frac{(i\sqrt{2})^2 - z_0}{(i\sqrt{2})^2 - \bar{z}_0} \quad (\mathrm{II})$$

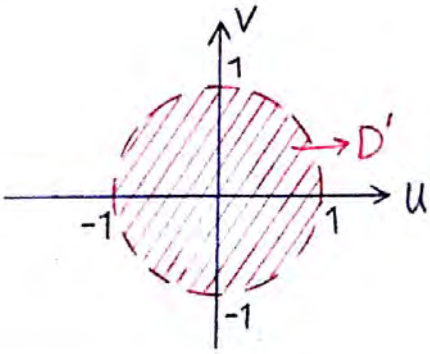
$$\mathrm{I} \Longrightarrow (1+i)^2 - z_0 = 0 \Longrightarrow z_0 = 2i$$

$$\mathrm{II} \Longrightarrow i = e^{ia}\,\frac{-2-2i}{2+2i} \Rightarrow e^{ia}\,\frac{-2-2i}{-2-2i} = 1 \Longrightarrow e^{ia} = 1 \Longrightarrow ia = 0 \Longrightarrow a = 0$$

$$w = \frac{z^2 - 2i}{z^2 + 2i}$$

مثال: نگاشتی را بیابید که محدوده‌ی D را به محدوده‌ی D' منتقل کند و نقاط $z_1 = 3-3i$ و $z_2 = 2-3i$ را به ترتیب به نقاط $w_1 = 0$ و $w_2 = \frac{3i}{5}$ بنگارد.





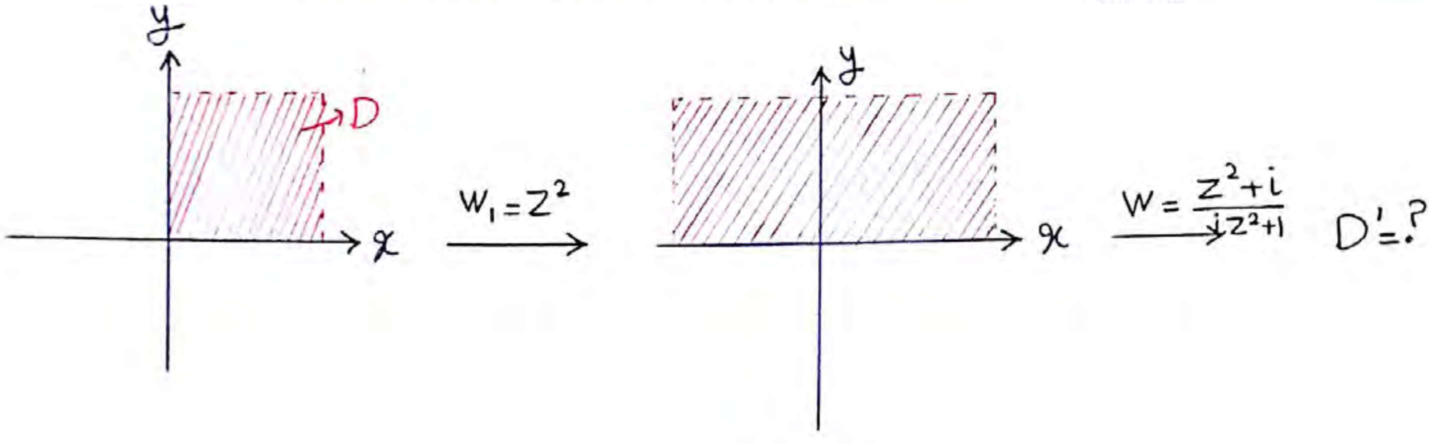
$$w_3 = -(z-1+2i)^2$$

$$w = e^{ia}\,\frac{-(z-1+2i)^2 - z_0}{-(z-1+2i)^2 - \bar{z}_0}$$

$$0 = e^{ia}\,\frac{-(3-3i-1+2i)^2 - z_0}{-(3-3i-1+2i)^2 - \bar{z}_0} \Rightarrow z_0 = -(2-i)^2 = -3+2i$$

$$\frac{3i}{5}=e^{ia}\,\frac{-(2-3i-1+2i)^2+3-2i}{-(2-3i-1+2i)^2+3+2i}\Rightarrow e^{ia}=\frac{-4+3i}{5}=1\angle 0.744\pi \Longrightarrow a=0.744\pi$$

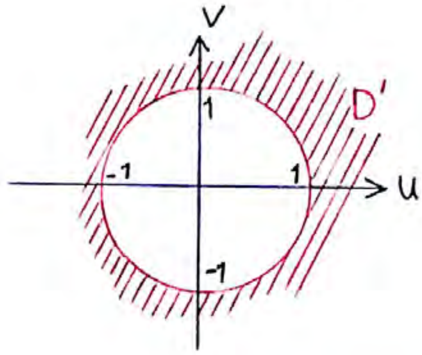
مثال: نگاشت $W=\dfrac{Z^2+i}{iZ^2+1}$ ربع اول صفحه‌ی Z ها را به کدام ناحیه از صفحه‌ی W ها تبدیل می‌کند؟



$$*\ \mathrm{Im}(Z^2)\geqslant 0$$

$$W=\frac{Z^2+i}{iZ^2+1}\Rightarrow wiZ^2+w=Z^2+i\Longrightarrow Z^2=\frac{i-w}{iw-1}\xrightarrow{w=u+iv} Z^2=\frac{-u+i(1-v)}{(-v-1)+iu}$$

$$Z^2=\frac{-u+i(1-v)}{(-v-1)+iu}\times\frac{(-v-1)-iu}{(-v-1)-iu}=\frac{2u+i(u^2+v^2-1)}{(v+1)^2+u^2}$$



$$\mathrm{Im}(Z^2)\geqslant 0\Longrightarrow u^2+v^2-1\geqslant 0\Longrightarrow u^2+v^2\geqslant 1$$

6. نگاشت ژوکوفسکی :

$$*\ W=Z+\frac{1}{Z}\ ;\ Z\neq 0$$

$Z=re^{i\theta}$, $W=u+iv$

$$W=re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta}=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\Rightarrow *\ \left|\begin{array}{l}u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta\\[2ex] v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\end{array}\right.$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow *\ \frac{u^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1$$

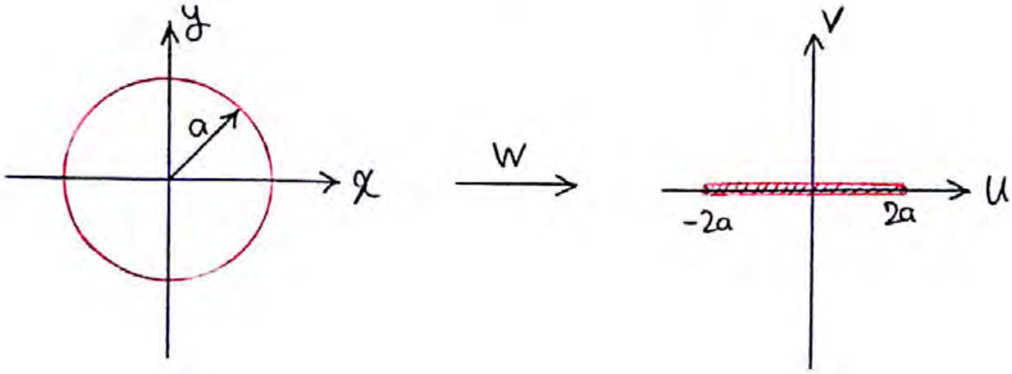
نگاشت ژوکوفسکی به غیر از $Z=0$ (که نگاشت نیست) و $Z=\pm1$ ، در همه جا همدیس است.

* نگاشت ژوکوفسکی دایره‌ی $Z=re^{i\theta}$ را به یک بیضی در صفحه‌ی W ها ، تبدیل می‌کند.

مثال: دایره‌ی $|z|=a$ از صفحه‌ی z ها، تحت نگاشت $w=z+\frac{a^2}{z}$ در صفحه‌ی w ها به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌شود؟

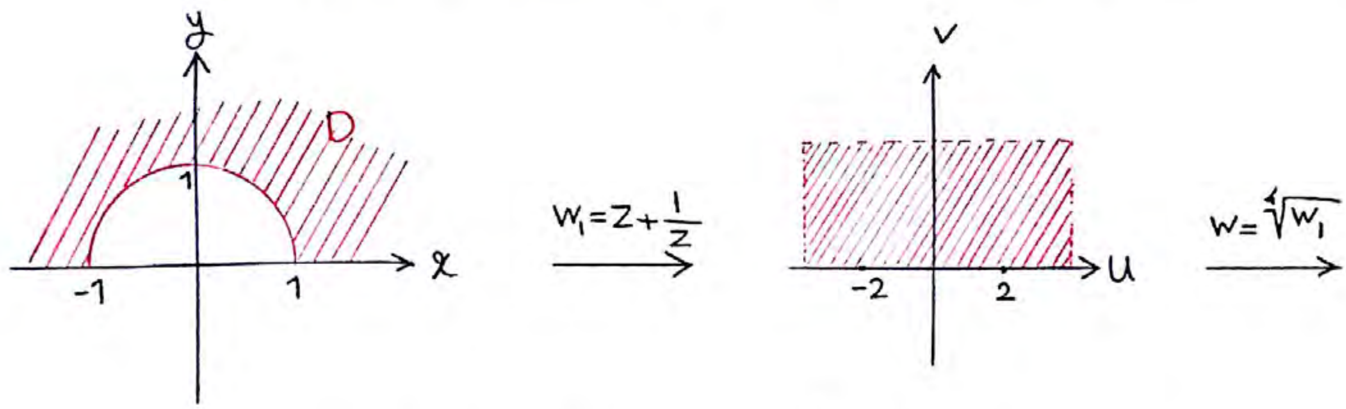
$$z=re^{i\theta} \Longrightarrow w=re^{i\theta}+\frac{a^2}{r}e^{-i\theta} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} u=\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta \\[2ex] v=\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} |z|=a \\ z=re^{i\theta} \end{array}\right| \Longrightarrow a=r \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} u=\left(a+\frac{a^2}{a}\right)\cos\theta=2a\cos\theta \\[2ex] v=\left(a-\frac{a^2}{a}\right)\sin\theta=0 \end{array}\right.$$

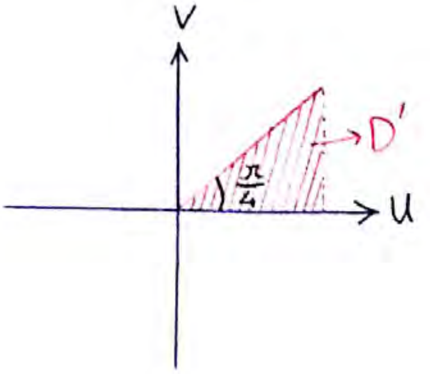


بیضی:
- مرکز: $(0,0)$
- شعاع بزرگ $=2a$
- شعاع کوچک $=0$

مثال: نگاشت ناحیه‌ی $D=\{z \mid |z|\geq 1 ,\ 0\leq Arg(z)\leq \pi\}$ را تحت رابطه‌ی $w=\sqrt[4]{z+\frac{1}{z}}$ بیابید.



$$\left|\begin{array}{l} u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} r_1=1 \\ r_2=\infty \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} u_1=2\cos\theta=\left|\begin{array}{ll} 2 & ;\ \theta=0 \\ -2 & ;\ \theta=\pi \end{array}\right. \\ u_2=\infty\cos\theta=\left|\begin{array}{ll} 0 & ;\ \theta=\frac{\pi}{2} \\ \pm\infty & \end{array}\right. \end{array}\right. \\[4ex] v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} r_1=1 \\ r_2=\infty \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} v_1=0 \\ v_2=\infty\sin\theta=\left|\begin{array}{ll} 0 & ;\ \theta=0,\pi \\ +\infty & \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$



7. نگاشت نمایی:

$* \; W = e^{z}$

$Z = x + iy \;,\; W = Re^{i\phi}$

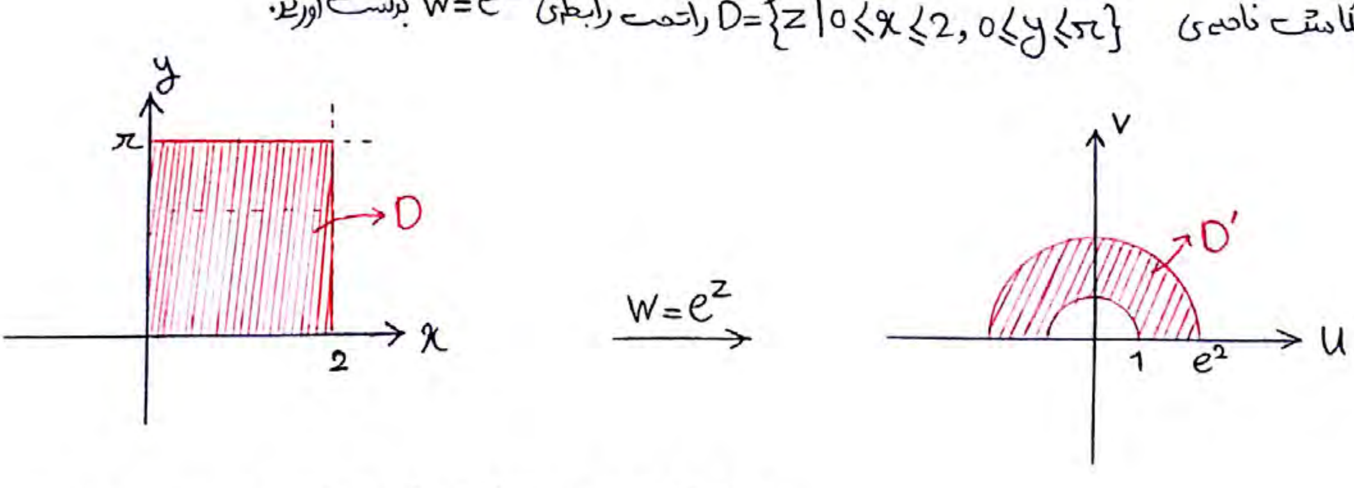
$$W = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} \Longrightarrow * \left| \begin{array}{l} R = e^{x} \\ \phi = y \end{array} \right.$$

$Z = x + iy \;,\; W = u + iv$

$$W = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x}\cos y + ie^{x}\sin y \Longrightarrow * \left| \begin{array}{l} u = e^{x}\cos y \\ v = e^{x}\sin y \end{array} \right.$$

نگاشت نمایی فوق درهمه جا همدیس است.

مثال: نگاشت ناحیه‌ی $D=\{z \mid 0 \leqslant x \leqslant 2 ,\, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$ را تحت رابطه‌ی $W=e^{z}$ بدست آورید.



$0 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow e^{0} \leqslant e^{x} \leqslant e^{2} \Rightarrow 1 \leqslant R \leqslant e^{2}$

$0 \leqslant y \leqslant \pi \Longrightarrow 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$

تمرین 1: تبدیل یافته‌ی ناحیه‌ی $D=\{z \mid 0 \leqslant Arg(z) \leqslant \frac{\pi}{4}\}$ را تحت نگاشت $W=e^{\frac{1}{z^{2}}}$ بدست آورید.

8. نگاشت سینوس:

$* \; w = \sin z$

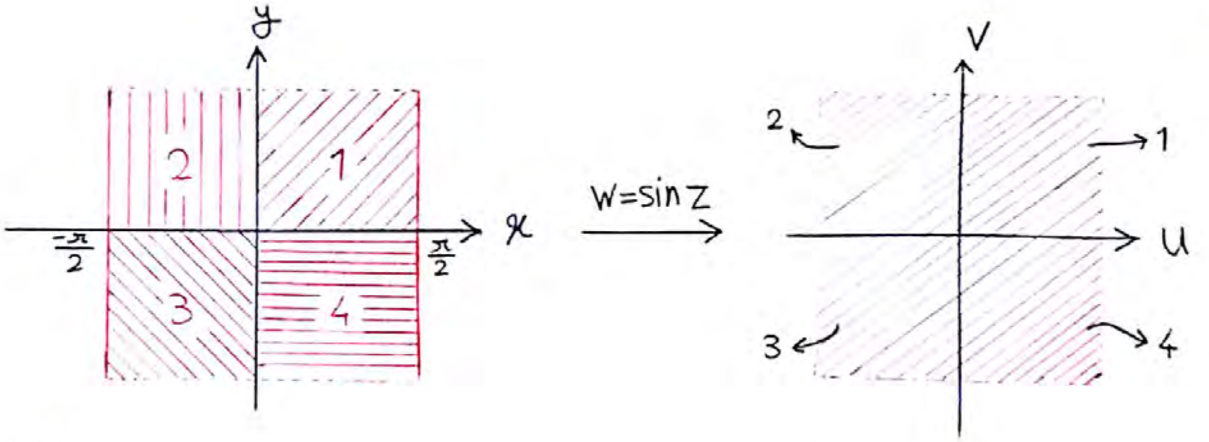
$$z = x + iy \,, \quad w = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \Rightarrow * \left| \begin{array}{l} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{array} \right.$$

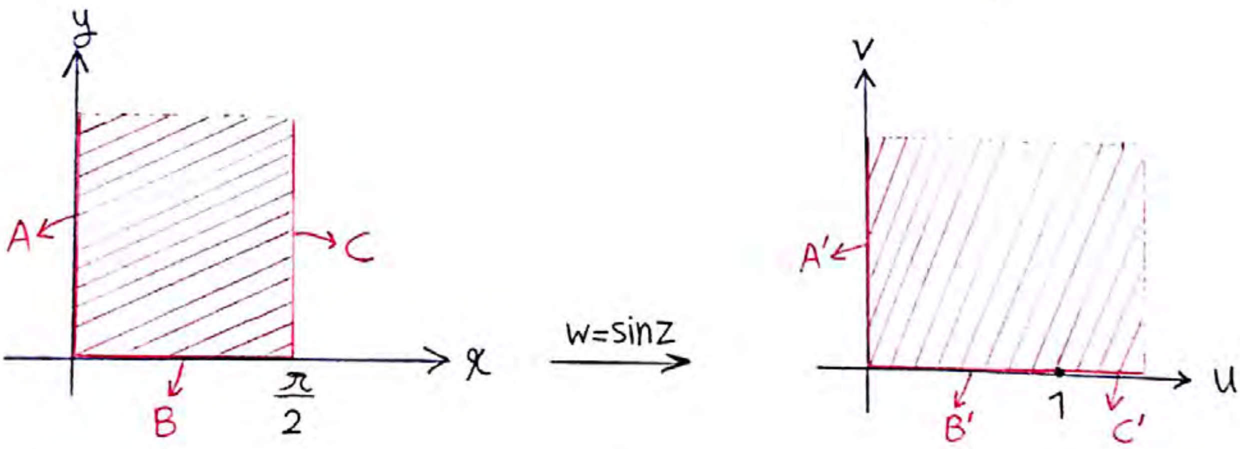
نگاشت سینوس در تناوب اصلی‌اش همدیس است.

* تابع سینوس متناوب بوده و در تمامی صفحه‌ی مختلط یک به یک نیست، لذا باید ترم حقیقی z (x ها) را در بازه‌ای محدود انتخاب نمود:

$$* \quad \frac{-\pi}{2} \leqslant Re(z) \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

* با توجه به اینکه تابع سینوس در فضای مختلط محدودیت $1 \geqslant$ و $-1 \leqslant$ را ندارد، لذا با توجه به استدلال زیر، نگاشت سینوس تمامی صفحه‌ی مختلط را می‌پوشاند.



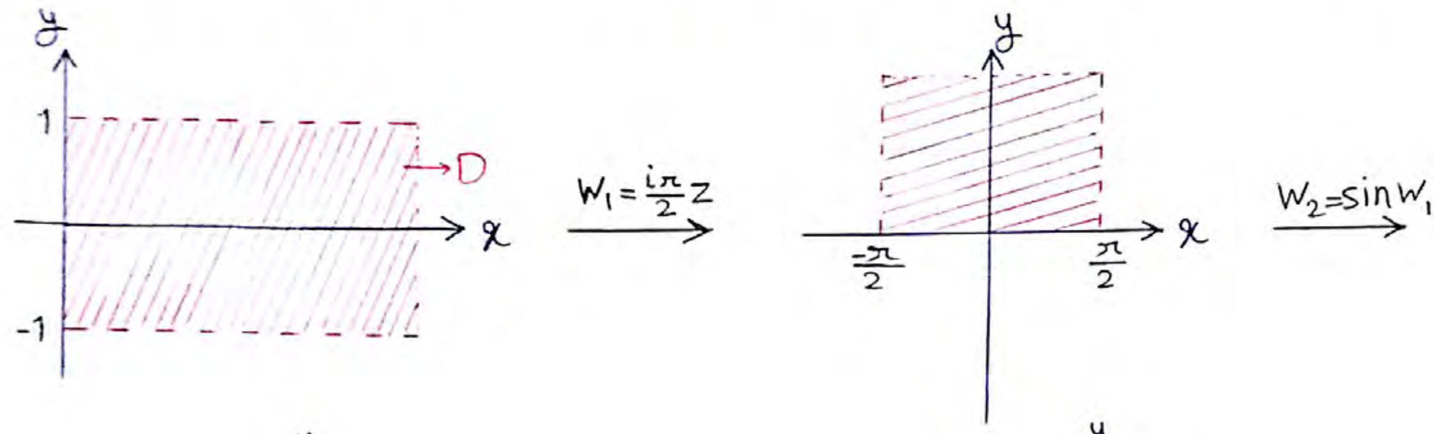


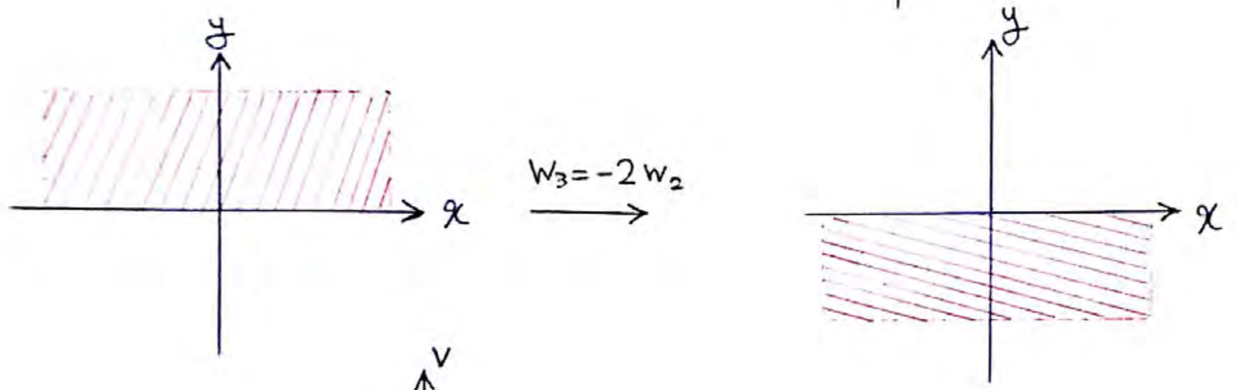
$$A: \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ 0 \leqslant y < \infty \end{array} \right. \xrightarrow{w} A': \left| \begin{array}{l} u = 0 \\ 0 \leqslant v < \infty \end{array} \right. \qquad B: \left| \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{w} B': \left| \begin{array}{l} 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ v = 0 \end{array} \right.$$

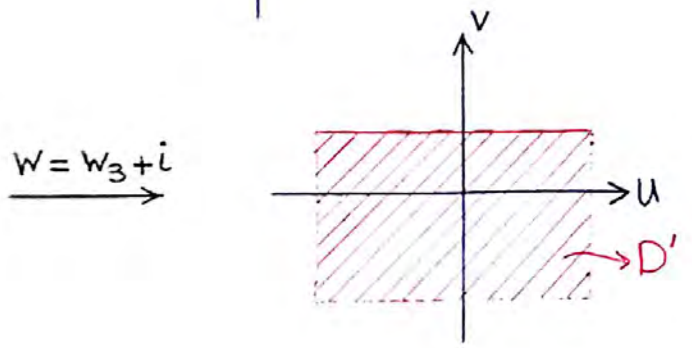
$$C: \left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant y < \infty \end{array} \right. \xrightarrow{w} C': \left| \begin{array}{l} 1 \leqslant u < \infty \\ v = 0 \end{array} \right.$$

* به طور مشابه، قضیه‌ی فوق برای 3 ناحیه‌ی دیگر صفحه‌ی مختلط نیز برقرار است. در نتیجه نگاشت $W=\sin z$ کل صفحه‌ی مختلط را می‌پوشاند.

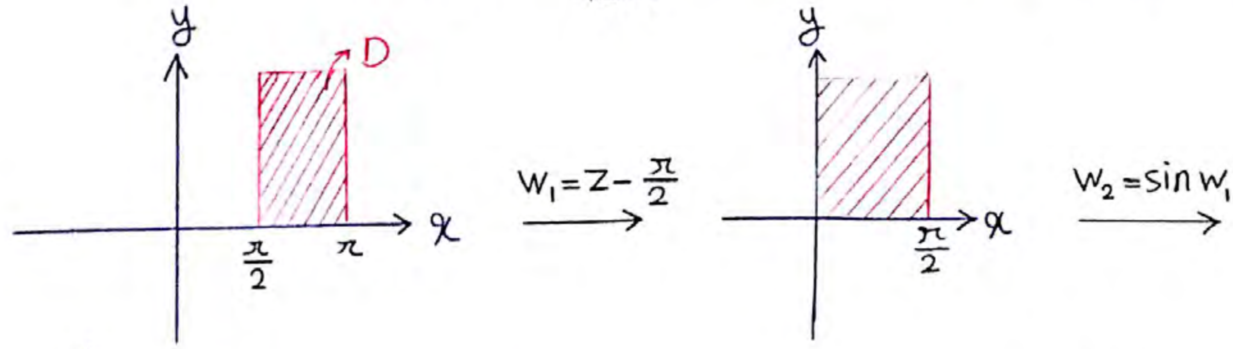
مثال: تبدیل یافته‌ی ناحیه‌ی $D=\{z \mid Re(z)\geqslant 0 , -1<Im(z)<1\}$ را تحت نگاشت $W=-2\sin(\frac{i\pi}{2}z)+i$ بدست آورید.

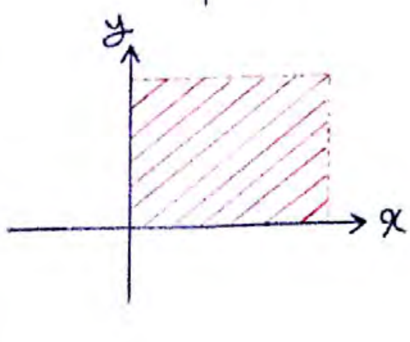






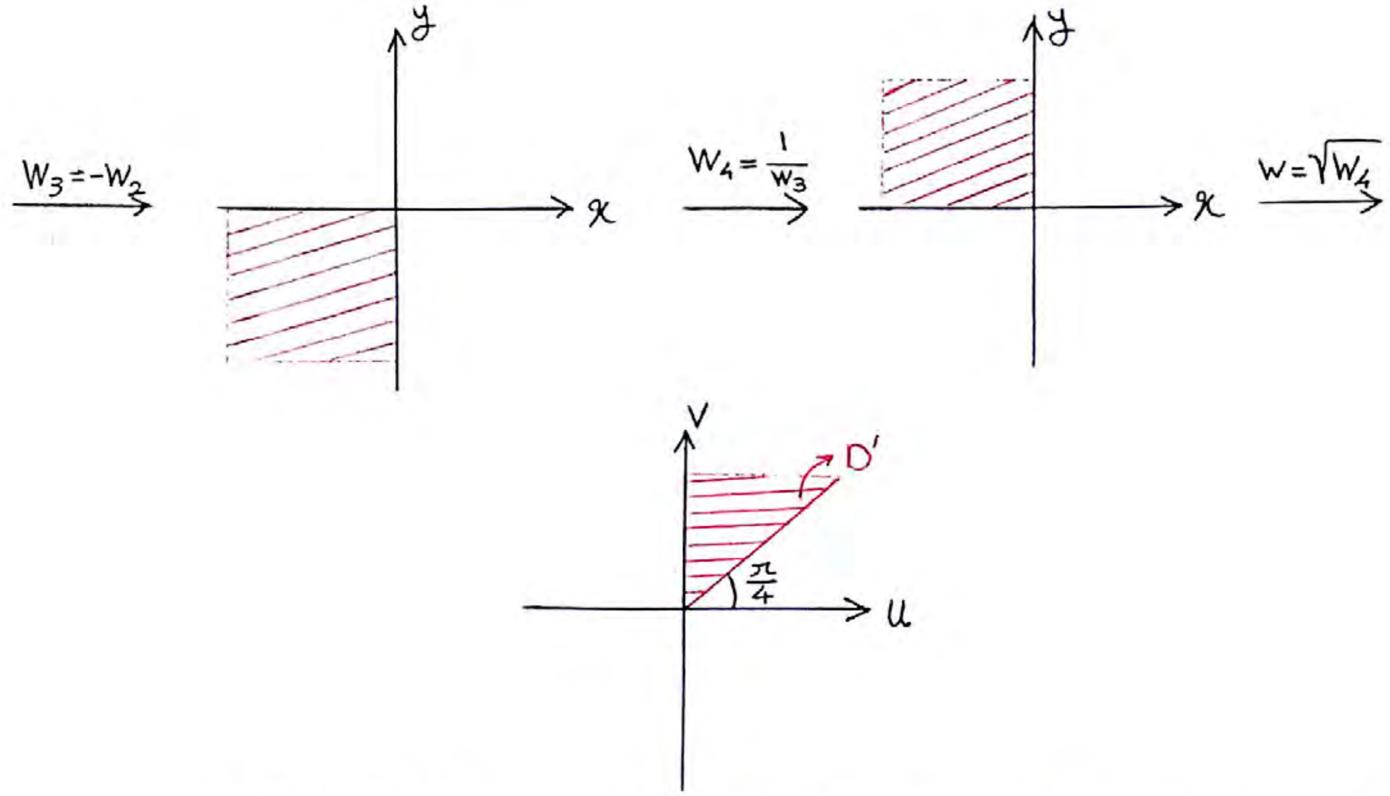
مثال: تبدیل یافته‌ی ناحیه‌ی نشان داده شده در شکل زیر تحت نگاشت $W=\frac{1}{\sqrt{\cos z}}$ را بیابید.





$$* \sin(z-\frac{\pi}{2})=\sin z\cos\frac{\pi}{2}-\cos z\sin\frac{\pi}{2}=-\cos z$$

$$\Longrightarrow \cos z=-\sin(z-\frac{\pi}{2})=-W_2$$



تمرین 2: تبدیل یافته ی ناحیه ی $D=\{z \mid 1\leqslant|z|\leqslant 2, 0\leqslant Arg(z)\leqslant\frac{\pi}{4}\}$ تحت رابطه ی $w=\frac{-i}{2}z^4+1$ را بیابید.

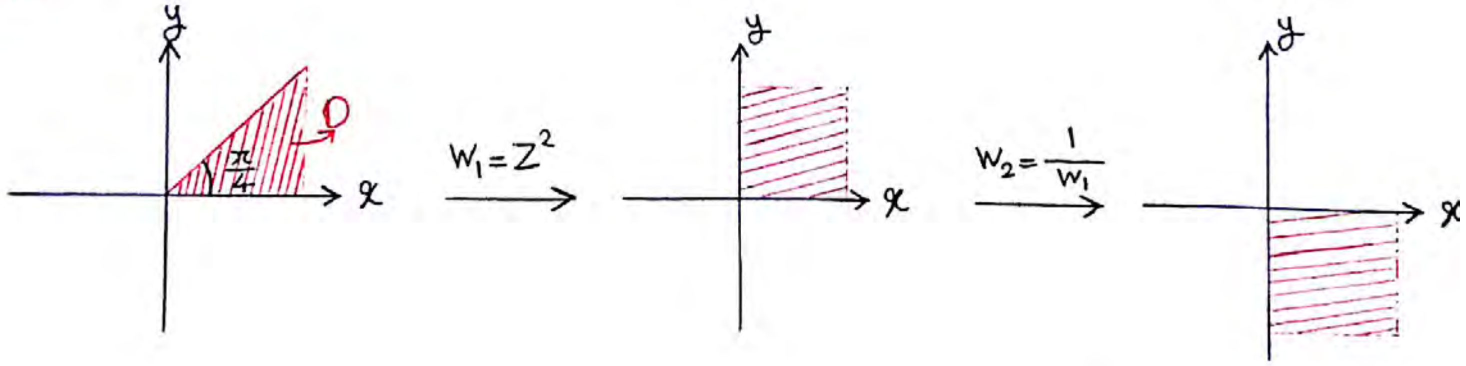
تمرین 3: تبدیل یافته ی ناحیه ی محصور بین دو دایره ی $|z+1|=1$ و $|z+i|=1$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ را بدست آورید.

تمرین 4: تبدیل یافته ی ناحیه ی $D=\{z \mid |z|<2, \frac{\pi}{4}\leqslant Arg(z)\leqslant\frac{\pi}{2}\}$ را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بیابید.

تمرین 5. تبدیل یافته ی ناحیه ی محصور بین $|z-1|\leqslant 1$ و $x^2+y^2>1$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ را نقش کنید.

تمرین 6: تبدیل یافته ی ناحیه ی $D=\{z \mid Re(z)\leqslant 0, 0\leqslant Im(z)\leqslant\frac{\pi}{2}\}$ تحت نگاشت $w=e^z$ را بیابید.

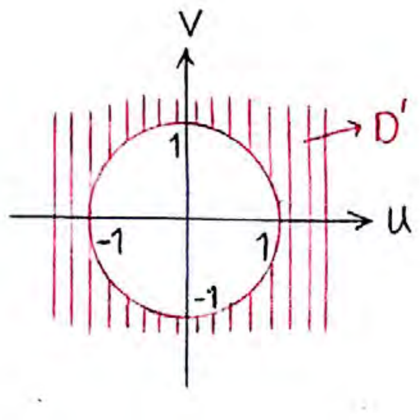
Ans. 1:



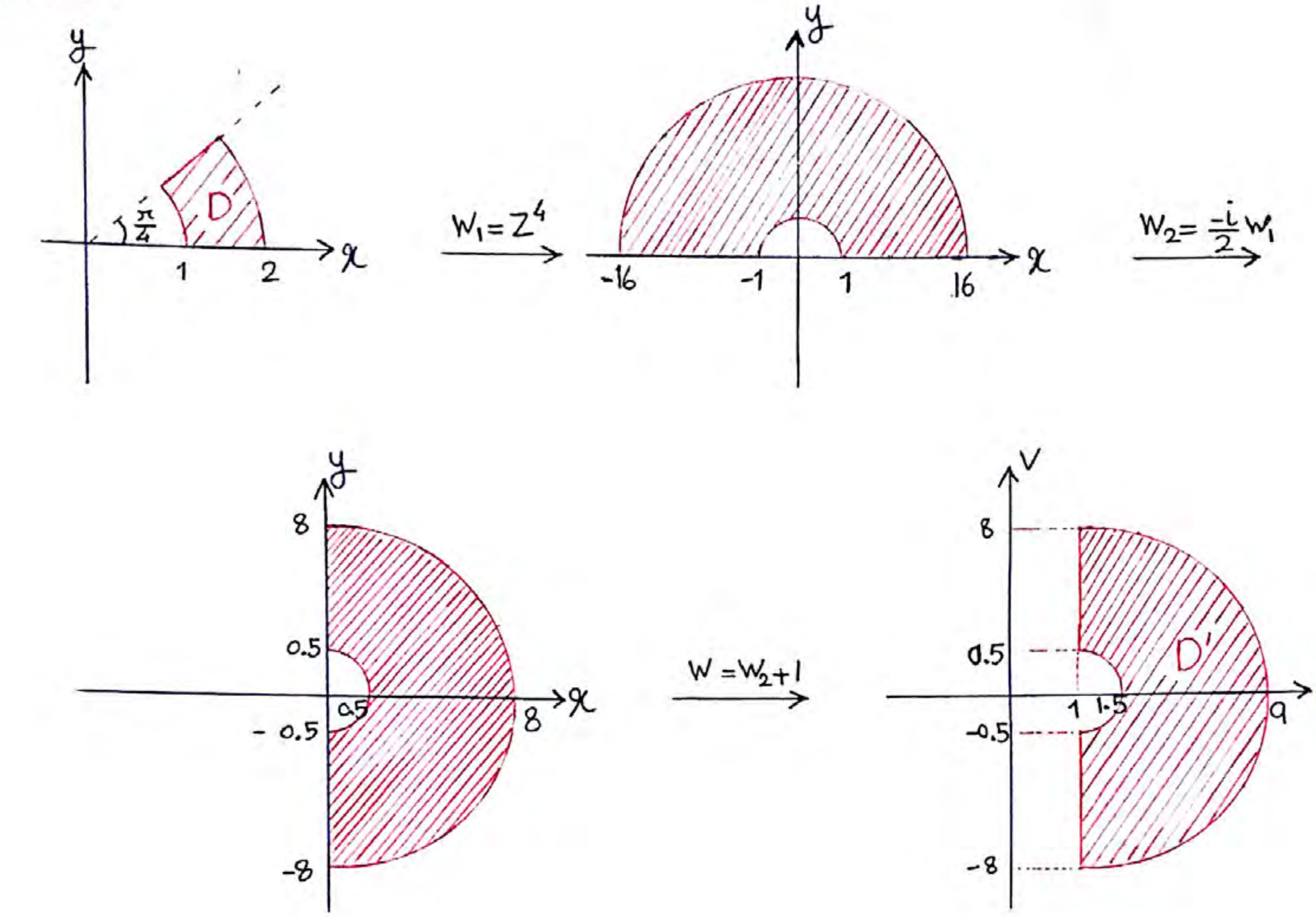
$\xrightarrow{W=e^{W_2}}$

$$0\leqslant x<\infty \Longrightarrow e^0\leqslant e^x<e^\infty \Longrightarrow 1\leqslant R<\infty$$

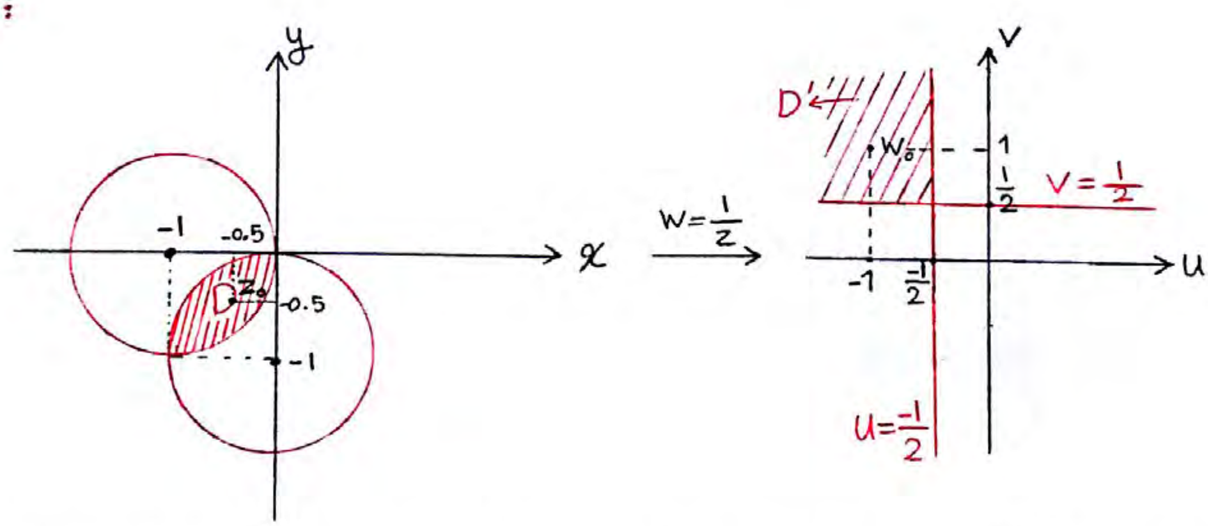
$$-\infty<y\leqslant 0 \Longrightarrow -\infty<\phi<0 \Longrightarrow -2\pi\leqslant\phi\leqslant 0$$



Ans. 2 :



Ans. 3 :



$|z+1| = 1 \Rightarrow |x+iy+1| = 1 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow x^2+y^2+2x = 0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} A=1 & C=0 \\ B=2 & D=0 \end{matrix} \right.$

$\xrightarrow{W=\frac{1}{Z}} u = \frac{-1}{2}$

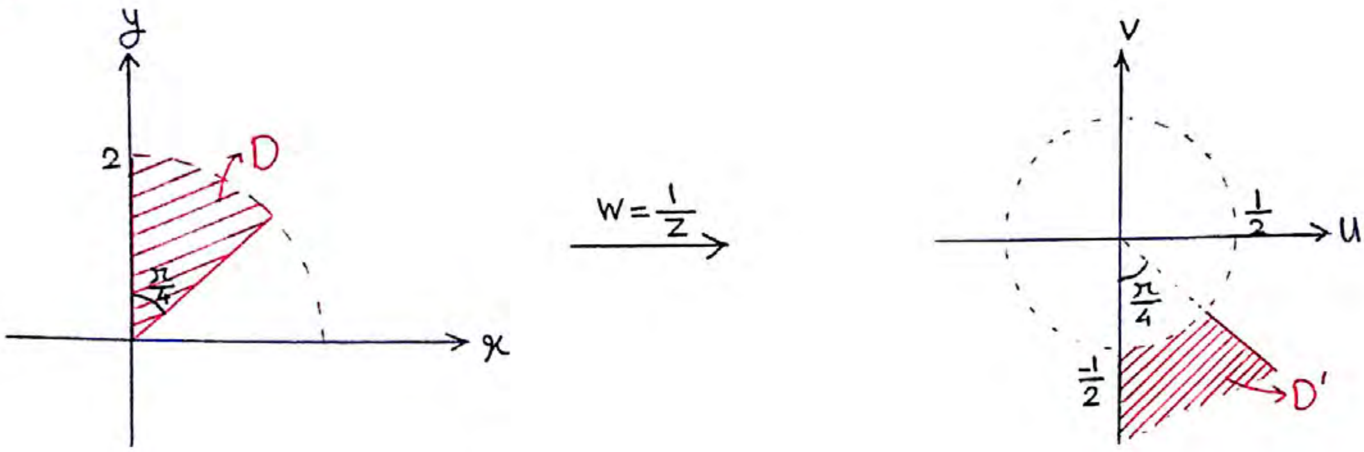
$|z+i| = 1 \Rightarrow |x+iy+i| = 1 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2+y^2+2y = 0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} A=1 & B=0 \\ C=2 & D=0 \end{matrix} \right.$

$\xrightarrow{W=\frac{1}{Z}} V = \frac{1}{2}$

$Z_0 = -0.5 + i(-0.5) \xrightarrow{W=\frac{1}{Z}} W_0 = \dfrac{1}{-0.5 + i(-0.5)} = -1 + i$

P.20

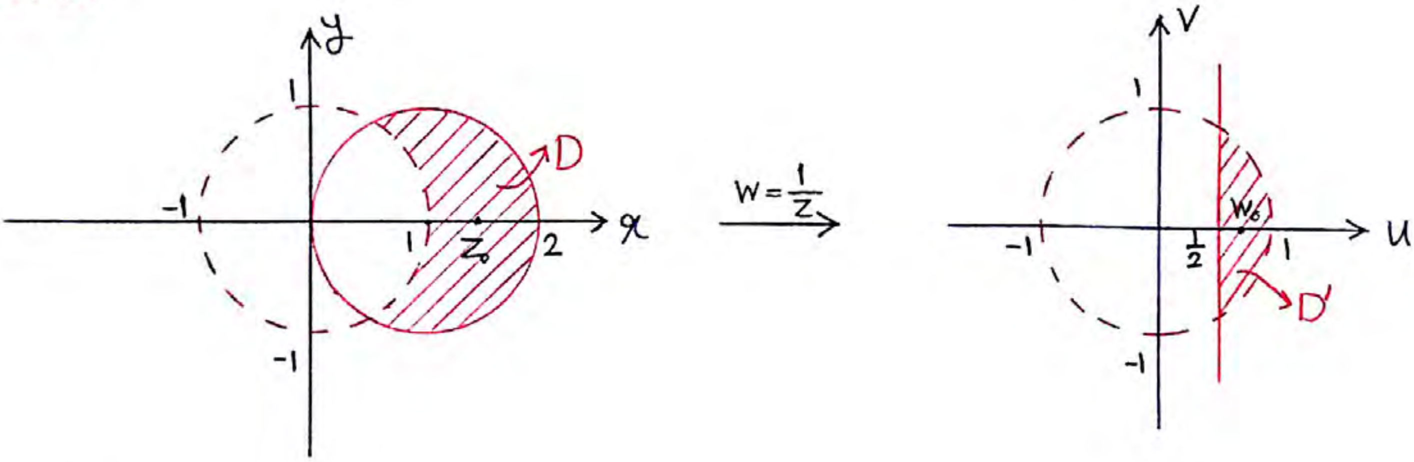
Ans. 4:



$$0 \leq r < 2 \Rightarrow \frac{1}{0} > \frac{1}{r} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < R < \infty$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{4} \geq -\theta \geq \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{-\pi}{4}$$

Ans. 5:



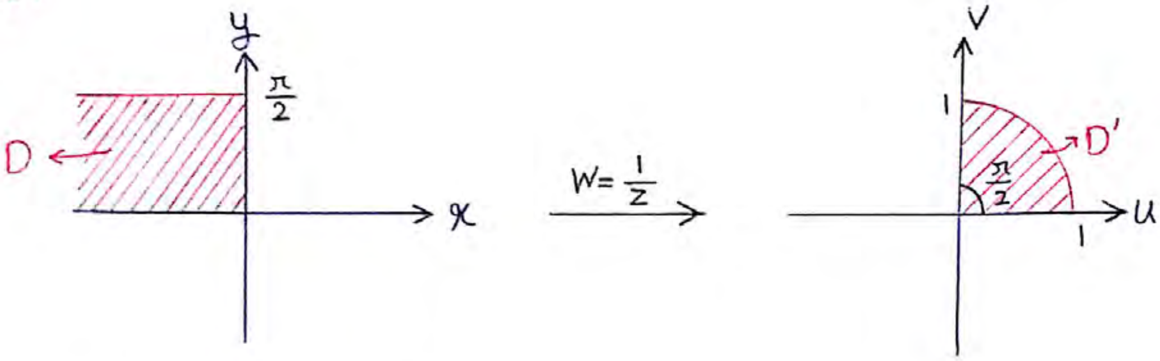
$$|z-1| \leq 1 \Rightarrow |x+iy-1| \leq 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow x^2+y^2-2x=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} A=1 & C=0 \\ B=-2 & D=0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{W=\frac{1}{Z}} -2u+1=0 \Rightarrow u=\frac{1}{2}$$

$$x^2+y^2>1 \Rightarrow x^2+y^2-1=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} A=1 & C=0 \\ B=0 & D=-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{W=\frac{1}{Z}} u^2+v^2=1$$

$$Z_0=\frac{3}{2} \xrightarrow{W=\frac{1}{Z}} W_0=\frac{1}{Z_0}=\frac{2}{3}$$

Ans. 6:



$$-\infty < x \leqslant 0 \implies e^{-\infty} < e^{x} \leqslant e^{0} \implies 0 < R \leqslant 1$$

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \implies 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

سری های مختلط:

دنباله: اگر به هر عدد صحیح مثبت n، عددی مانند z_n نسبت داده شود، آن‌گاه مجموعه اعداد $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ یک دنباله را تشکیل می‌دهند که به صورت $\{z_n\}$ نمایش داده می‌شود.

همگرایی دنباله: دنباله‌ی $\{z_n\}$ را همگرا گوییم، هرگاه:

$$* \lim_{n\to\infty} z_n = A$$

A را حد دنباله می‌نامند که در حالت کلی یک عدد مختلط است.

* دنباله‌ای که همگرا نباشد، واگرا نامیده می‌شود.

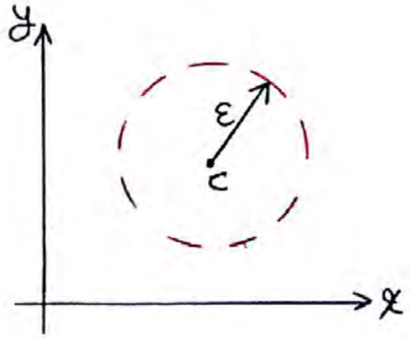
قضیه: دنباله‌ی $\{z_n\}$ که در آن $z_n = x_n + iy_n$ می‌باشد، به عدد $A = X + iY$ همگراست، اگر و تنها اگر دنباله‌های قسمت حقیقی $\{x_n\}$ به X و قسمت موهومی $\{y_n\}$ به Y همگرا باشند.

کرانداری دنباله: دنباله‌ی $\{z_n\}$ را کراندار گوییم هرگاه عددی مثبت مانند M وجود داشته باشد به طوری که:

$$* \forall n \in N, \ |z_n| < M$$

به عبارت دیگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند N وجود داشته باشد که به ازای $n > N$ داشته باشیم:

$$* |z_n - c| < \varepsilon$$



* اگر دنباله‌ای کراندار نباشد، بی‌کران نامیده می‌شود.

قضیه: هر دنباله‌ی همگرا کراندار است، لذا هر دنباله‌ی بی‌کران، واگرا است.

سری: اگر $\{z_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد، آن‌گاه مجموع زیر را سری نامتناهی یا سری می‌نامیم:

$$* \sum_{i=1}^{\infty} z_i = z_1 + z_2 + \cdots$$

قضیه: اگر $z_n = x_n + iy_n$ باشد، سری $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ را همگرا گوییم، اگر و تنها اگر سری های قسمت حقیقی $(\sum_{i=1}^{\infty} x_i)$ و قسمت موهومی $(\sum_{i=1}^{\infty} y_i)$ همگرا باشند.

همگرایی مطلق سری: سری $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ را همگرای مطلق گویند، هرگاه سری زیر همگرا باشد:

$$* \sum_{i=1}^{\infty} |z_i| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

همگرایی مشروط سری: اگر $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ همگرا و $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|$ واگرا باشد، همگرایی سری $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ را همگرایی مشروط می‌نامند.

قضیه: هرگاه سری $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ همگرا باشد، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ خواهد بود. عکس این قضیه صادق نیست.

آزمون های همگرایی:

1. آزمون مقایسه: اگر به‌ازای سری مفروض $z_1 + z_2 + \cdots$ بتوان سری همگرایی مثل $b_1 + b_2 + \cdots$ که جملات آن حقیقی و نامنفی هستند طوری یافت که به‌ازای هر n متعلق به اعداد طبیعی داشته باشیم $|z_n| < b_n$، آن‌گاه سری مفروض همگرای مطلق است.

2. آزمون نسبت: اگر برای سری مختلط $z_1 + z_2 + \cdots$ با شرط $z_n \neq 0$ (برای تمامی nهای طبیعی) داشته باشیم:

$$* \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L$$

آن‌گاه:

a) سری همگرای مطلق است اگر $L < 1$

b) سری واگرا است اگر $L > 1$

c) به ازای $L = 1$، آزمون نسبت همگرایی یا واگرایی سری را مشخص نمی‌کند.

3. آزمون ریشه: اگر برای سری مختلط $z_1 + z_2 + \cdots$ داشته باشیم:

$$* \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$$

آن‌گاه:

a) سری همگرای مطلق است اگر $L < 1$

b) سری واگرا است اگر $L > 1$

c) به ازای $L = 1$، آزمون ریشه همگرایی یا واگرایی سری را مشخص نمی‌کند.

شعاع همگرایی: اگر ناحیه‌ی همگرایی یک سری همگرا، یک دایره باشد، شعاع دایره‌ی مربوط را شعاع همگرایی سری می‌نامند.
برای سری های همگرا در آزمون نسبت و آزمون ریشه، شعاع همگرایی (R) از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$* R = \frac{1}{L}$$

مثال: درمورد همگرایی سری‌های زیر نظر دهید:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100+200i)^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|100+200i|^{n+1}\cdot n!}{|100+200i|^{n}\cdot (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|100+200i|}{n+1} = 0 \Rightarrow L=0<1$$ همگرای مطلق

$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{0} = \infty$ (شعاع همگرایی) $\Longrightarrow$ ناحیه‌ی همگرایی: کل صفحه‌ی مختلط

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n$$

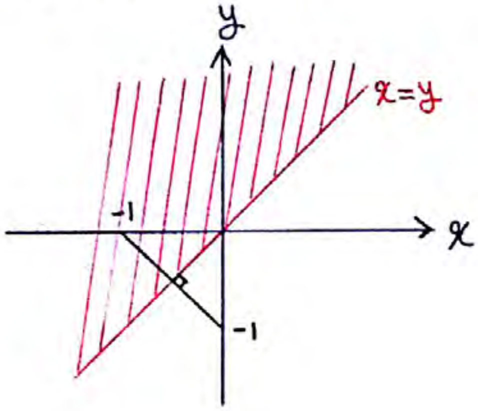
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|4-i|}{\sqrt[n]{4^n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|4-i|}{\sqrt[n]{4^n}} = \frac{\sqrt{17}}{4} \Longrightarrow L=\frac{\sqrt{17}}{4}>1$$ واگرا

نکته: معمولاً درمورد سری‌های دارای فاکتوریل تشخیص واگرایی به وسیله‌ی آزمون نسبت و درمورد سری های دارای توان تشخیص واگرایی به وسیله‌ی آزمون ریشه راحت‌تر است.

مثال: ناحیه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{z+i}\right)^n$ را بیابید.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{z+1}{z+i}\right|^n} = \left|\frac{z+1}{z+i}\right| < 1 \Longrightarrow \frac{|z+1|}{|z+i|} < 1 \Longrightarrow |z+1| < |z+i|$$

ناحیه‌ی همگرایی، مکان هندسی نقاطی از صفحه‌ی مختلط است که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $z_1=-1$ نسبت به فاصله‌ی آن ها از نقطه‌ی $z_2=-i$ کوچکتر است.



$$|z+1| < |z+i| \Longrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} < \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+y^2 < x^2+(y-1)^2 \Longrightarrow$$

$$x^2+2x+1+y^2 < x^2+y^2+2y+1 \Rightarrow x<y$$

مثال: ناحیه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz^2}$ را بیابید.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|e^{-nz^2}|} = |e^{-z^2}| = |e^{-(x^2-y^2+2xyi)}| = |e^{-x^2+y^2}\cdot e^{2xyi}| \Longrightarrow$$

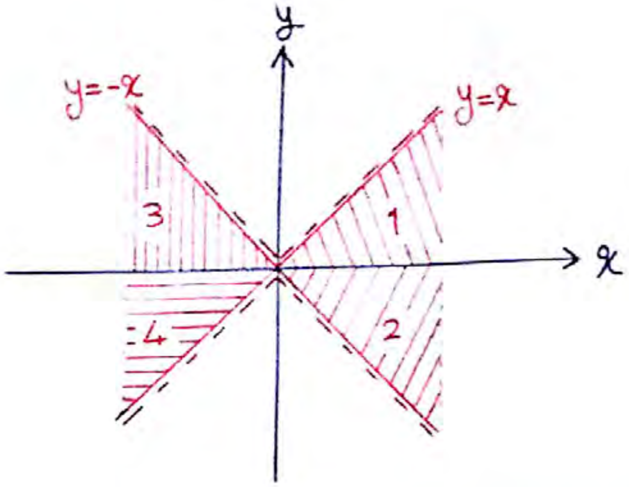
$$|e^{-x^2+y^2}|\underbrace{|e^{2xyi}|}_{1} < 1 \Longrightarrow e^{-x^2+y^2} < e^0 \Longrightarrow -x^2+y^2<0 \Rightarrow y^2<x^2 \Rightarrow |y|<|x|$$

1 | $x>0, y>0 \Longrightarrow y<x$

2 | $x>0, y<0 \Longrightarrow -y<x$

3 | $x<0, y>0 \Longrightarrow y<-x$

4 | $x<0, y<0 \Longrightarrow -y<-x \Rightarrow y>x$



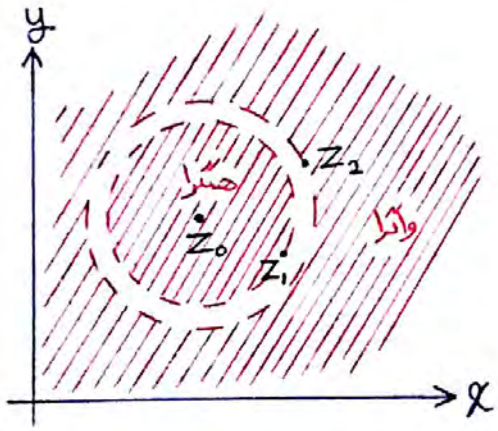
سری های توانی: اگر جمله‌های یک سری متغیر (تابعی از z) باشند، آنگاه سری را سری تابعی نامند. سری توانی مهم‌ترین سری تابعی است که برحسب توان‌های $(z-z_0)$ نمایش داده می‌شود.

$$* \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \cdots$$

اگر $z_0=0$ باشد، حالت خاصی از سری توانی به نام سری مک لورن بدست می‌آید:

$$* \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

قضیه (همگرایی سری توانی): اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ در نقطه‌ی $z=z_1\neq z_0$ همگرا باشد، آنگاه این سری به ازای هر z که فاصله‌اش از z_0 کمتر از z_1 باشد ($|z-z_0|<|z_1-z_0|$)، مطلقاً همگرا است و اگر سری توانی در نقطه‌ی $z=z_2\neq z_0$ واگرا باشد، آنگاه این سری به ازای هر z که فاصله‌اش از z_0 بیشتر از z_2 باشد ($|z-z_0|>|z_2-z_0|$)، واگرا است.



قضیه (شعاع همگرایی سری توانی): فرض کنید دنباله‌ی $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ یا $\sqrt[n]{|a_n|}$ به ازای $n\in N$، همگرا بوده و حد آن برابر L باشد، در این صورت:

1. اگر $L=0$ باشد، سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ به ازای هر z همگرا بوده و شعاع همگرایی آن بی‌نهایت ($R=\infty$) خواهد بود.

2. اگر $L\neq 0$ $(L>0)$ باشد، آنگاه طبق رابطه‌ی کوشی - آدامز، شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ برابر $R=\frac{1}{L}$ بوده و

سری توانی به ازای تمامی z هایی که در شرط $|z-z_0|<R$ صدق کنند، همگرا و به ازای تمامی z هایی که در شرط $|z-z_0|\geq R$ صدق کنند واگرا است. در این صورت R را شعاع همگرایی، دایره‌ی $|z-z_0|=R$ را دایره‌ی همگرایی و قرص $|z-z_0|<R$ را قرص همگرایی می‌نامند.

$$* \; f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$* \; L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad * \; L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

قضیه: سری توانی زیر را که از مشتق گیری جمله به جمله‌ی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ حاصل شده است را سری مشتق سری توانی می‌نامند و شعاع همگرایی آن با شعاع همگرایی سری توانی اصلی برابر است:

$$* \; \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + \cdots$$

قضیه: سری توانی زیر را که از انتگرال گیری جمله به جمله‌ی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ حاصل شده است را سری انتگرال سری توانی می‌نامند و شعاع همگرایی آن با شعاع همگرایی سری توانی اصلی برابر است،

$$* \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} = a_0(z-z_0) + \frac{a_1}{2}(z-z_0)^2 + \cdots$$

مثال: مرکز همگرایی و دایره‌ی همگرایی سری های توانی زیر را بدست آورید.

$$1.\; \sum_{n=0}^{\infty}(3z-2i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(z-\frac{2}{3}i\right)^n$$

$$a_n = 3^n \Rightarrow L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|3^n|}=3 \Rightarrow R=\frac{1}{3}, \quad z_0=\frac{2}{3}i$$

$$\left|z-\frac{2}{3}i\right|<\frac{1}{3}$$

$$2.\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3}(z+\pi i)^n$$

$$a_n=\frac{(3n)!}{(n!)^3} \Rightarrow L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3n+3)!\,(n!)^3}{[(n+1)!]^3\,(3n)!}\right| = 27 \Rightarrow R=\frac{1}{27}, \quad z_0=-\pi i$$

$$|z+\pi i|<\frac{1}{27}$$

نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که سری های توانی بسیار مفید هستند. از سری های توانی می توان جمله به جمله مشتق گیری و یا انتگرال گیری نمود. هر سری توانی با شعاع همگرایی مثبت، یک تابع تحلیلی است که از هر مرتبه دارای مشتق می باشد و همه ی این مشتق ها توابع تحلیلی هستند.

بنابراین هر تابع تحلیلی مفروض $f(z)$ را می توان با یک سری توانی نمایش داد.

قضیه ی تیلور: فرض کنید $f(z)$ در ناحیه ی D تحلیلی بوده و $z=z_0$ نقطه ای در D باشد، در این صورت یک و تنها یک سری توانی به مرکز z_0 وجود دارد که $f(z)$ را نمایش می‌دهد. این سری توانی را سری تیلور می نامند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$* \; f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad ; \quad a_n=\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \qquad n=0,1,2,\dots \; *$$

سری مک لورن: اگر سری تیلور حول نقطه ی $z_0=0$ نوشته شود، سری زیر که به سری مک لورن معروف است، بدست می آید:

$$* \; f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \; ; \; a_n=\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \qquad n=0,1,2,\dots$$

سری مک لورن توابع معروف:

1. $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\dots$ $\qquad$ ناحیه ی همگرایی: $|z|<1$

2. $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}$ $\qquad |z|<\infty$

3. $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots$ $\qquad |z|<\infty$

4. $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots$ $\qquad |z|<\infty$

5. $\sinh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\dots$ $\qquad |z|<\infty$

6. $\cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\dots$ $\qquad |z|<\infty$

مثال: سری مک لورن توابع زیر را بدست آورید.

1. $f(z)=\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{1-(-z)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-z)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad |z|<1$

2. $f(z)=\ln(1+z)=\displaystyle\int\frac{dz}{1+z}=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} \qquad |z|<1$

3. $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}=\dfrac{1}{1-(-z^2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad |-z^2|<1 \Rightarrow |z|<1$

4. $f(z)=\tan^{-1}z=\displaystyle\int\frac{dz}{1+z^2}=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} \qquad |z|<1$

5. $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}=\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)=\dfrac{d}{dz}\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{n-1} \qquad |z|<1$

6. $f(z)=\ln\left(\dfrac{1}{1-z}\right)=\displaystyle\int\frac{dz}{1-z}=\int\sum_{n=0}^{\infty}z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad |z|<1$

7. $f(z)=\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)=\ln(1+z)+\ln\left(\dfrac{1}{1-z}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{n+1}}{n+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+1\right]\dfrac{z^{n+1}}{n+1} \qquad |z|<1$

مثال: سری تیلور تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ را حول نقطه $z_0=1$ بنویسید.

$z_0=1 \Longrightarrow (z-z_0)^n=(z-1)^n$

$f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+(z-1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \qquad |z-1|<1$

مثال: مطلوب است سری تیلور $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ و $g(z)=\sin^{-1}z$ حول نقطه $z_0=0$.

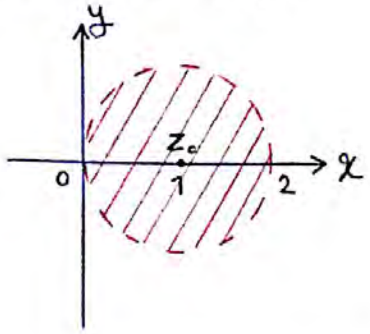
نکته: $(1+z)^m=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}z^n=1+mz+\dfrac{m(m-1)}{2!}z^2+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3+\dots$

$f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}=(1+(-z^2))^{-\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1\times3}{2^2\times2!}z^4+\dfrac{1\times3\times5}{2^3\times3!}z^6+\dots \qquad |z|<1$

$g(z)=\sin^{-1}z=\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=z+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1\times3}{2^2\times2!}\cdot\frac{z^5}{5}+\frac{1\times3\times5}{2^3\times3!}\cdot\frac{z^7}{7}+\dots \qquad |z|<1$

مثال: مطلوب است سری تیلور تابع $f(z)=\frac{1}{z^4}$ در همسایگی نقطه‌ی $z_0=1$.

ناحیه‌ی همگرایی: $|z-1|<1$



$$g(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+(z-1)^4-(z-1)^5+\cdots$$

$$\frac{dg}{dz}=\frac{-1}{z^2}=-1+2(z-1)-3(z-1)^2+4(z-1)^3-5(z-1)^4+\cdots$$

$$\frac{d^2g}{dz^2}=\frac{2}{z^3}=2-6(z-1)+12(z-1)^2-20(z-1)^3+30(z-1)^4-\cdots$$

$$\frac{d^3g}{dz^3}=\frac{-6}{z^4}=-6+24(z-1)-60(z-1)^2+120(z-1)^3+\cdots$$

$$f(z)=\frac{1}{z^4}=1-4(z-1)+10(z-1)^2-20(z-1)^3+\cdots$$

$$f(z)=\frac{1}{z^4}=\left[1+(z-1)\right]^{-4}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-4}{n}(z-1)^n=1-4(z-1)+\frac{4\times5}{2!}(z-1)^2-\frac{4\times5\times6}{3!}(z-1)^3+\cdots$$

مثال: سری تیلور تابع $f(z)=\ln z$ را حول $z_0=1$ بنویسید.

$$f(z)=\ln z=\int\frac{dz}{z}=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$=(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\cdots \qquad |z-1|<1$$

صفر تابع: اگر تابع $f(z)$ در ناحیه‌ی D تحلیلی باشد، نقطه‌ی z_0 متعلق به D را صفر تابع $f(z)$ می‌نامیم، هرگاه $f(z_0)=0$ باشد.

مرتبه‌ی صفر تابع: فرض کنید z_0 صفر تابع $f(z)$ باشد، کوچکترین عدد طبیعی n را که $f^{(n)}(z_0)\neq0$ باشد را مرتبه‌ی صفر $f(z)$ می‌نامیم.

برای مثال: $f(z)=z^2$

$z_0=0 \Rightarrow f(z_0=0)=0$ $\quad\Rightarrow f^{(2)}(z_0=0)=2\neq0 \qquad (n=2)$

$z_0=0$ صفر مرتبه‌ی دوم تابع $f(z)=z^2$ می‌باشد.

نقاط تکین:

نقاط تکین
- ۱. تکین تنها
  - ۱.۱. تکین از نوع قطب مرتبه‌ی m
  - ۱.۲. تکین از نوع اساسی
- ۲. تکین غیر تنها (انباشته)

نقطه‌ی تکین: نقطه‌ی $z=z_0$ را نقطه‌ی تکین تابع $f(z)$ گویند، هرگاه تابع $f(z)$ در آن نقطه تحلیلی نباشد اما در همسایگی آن نقطه تحلیلی باشد. نقاط تکین را به دو دسته‌ی تکین تنها و تکین غیر تنها (انباشته) تقسیم بندی می‌کنند.

نقطه‌ی تکین تنها: نقطه‌ی تکین $z=z_0$ را تکین تنها گویند، هرگاه در همسایگی آن، نقطه‌ی تکین دیگری وجود نداشته باشد.

نقطه‌ی تکین غیر تنها: در برخی مواقع تابع دارای بی‌نهایت نقطه‌ی تکین تنها می‌باشد که همگی در حال نزدیک شدن یا انباشته شدن بر روی یک نقطه‌ی تکین مانند $z=z_0$ هستند. چنین نقطه‌ی تکینی، نقطه‌ی تکین غیر تنها (انباشته) نامیده می‌شود.

* نقاط تکین تنها به دو دسته‌ی تکین‌های از نوع قطب و تکین های اساسی تقسیم بندی می‌شوند:

اگر $z=z_0$ یک تکین تنها برای تابع $f(z)$ باشد و بتوان m ای پیدا کرد که حاصل $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ موجود و مخالف صفر باشد، آن‌گاه

$z=z_0$ تکین از نوع قطب مرتبه‌ی m تابع $f(z)$ است. در غیر این صورت $z=z_0$ تکین اساسی $f(z)$ است.

مثال: در هر یک از توابع زیر، نقاط تکین و نوع آن ها را بیان کنید.

1. $f(z)=\dfrac{1-e^{z^3}}{z^7}$

$$z=0 \implies \lim_{z\to 0} z^4\left(\frac{1-e^{z^3}}{z^7}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{z^3}}{z^3}\overset{H}{=}\frac{-3z^2e^{z^3}}{3z^2}=-1\neq 0$$

$z_0=0$ تکین تنها از نوع قطب مرتبه‌ی 4 است.

2. $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

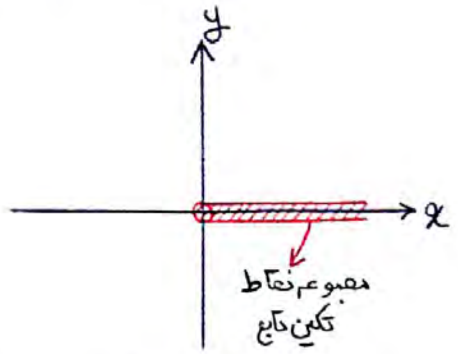
$$\sin\frac{1}{z}=0 \implies \begin{cases} z=\dfrac{1}{\pm k\pi}\ ;\ k=1,2,\dots & \text{همگی تکین تنها از نوع قطب مرتبه‌ی اول} \\ z=0 \quad (k\to\infty \Rightarrow z\to 0) & \text{تکین غیر تنها (انباشته)} \end{cases}$$

3. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$z_0=0$ تکین تنها از نوع اساسی است؛ چون m ای وجود ندارد که $\lim_{z\to 0} z^m f(z)\neq 0$ و موجود باشد.

4. $f(z)=\ln z\ ;\ 0\leqslant\theta<2\pi$



$$\{z\,|\,Re(z)>0\}\cup\{0\}=\{z\,|\,Arg(z)=0\}$$

مجموعه‌ی نقاط تکین غیر تنها و غیر انباشته.

5. $$f(z)=\frac{e^{\sin z}+3}{(e^z+i)(z^2+1)}$$

$$e^z+i=0\implies z=\ln(-i)=\ln 1+i\left(\frac{-\pi}{2}\pm 2k\pi\right)\implies z=i\left(\frac{-\pi}{2}\pm 2k\pi\right)\ ;k=0,1,2,\dots$$

$$z^2+1=0\implies z^2=-1\implies z=\pm i$$

نقاط فوق همگی نقاط تکین تنها از نوع قطب مرتبه‌ی یک هستند چون در مورد تمامی نقاط تکین فوق با ضرب عبارت $(z-z_0)$ در $f(z)$، خواهیم داشت: $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)\neq 0$ و موجود.

6. $$f(z)=\frac{\sin z}{z}$$

حالت خاص: $z=0$ نقطه‌ی تکین تنها از نوع برداشتنی است.

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z} & ;\ z\neq 0\\[2ex] 1 & ;\ z=0\end{cases}$$

حد تابع در $z=0$

$$\lim_{z\to 0} z\left(\frac{\sin z}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\sin z=0$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{z}=1$$

سری لوران: اگر تابع $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی نباشد، در آن نقطه سری تیلور نخواهد داشت. اما چنانچه نقطه‌ی مذکور، تکین تنها باشد، می‌توان برای تابع حول نقطه‌ی مذکور بسطی به نام بسط لوران نوشت. مشخصه‌ی اصلی این بسط، وجود توان‌های صحیح منفی عبارت $(z-z_0)$ برخلاف بسط تیلور در این بسط لوران است.

سری لوران دارای ویژگی‌های زیر است:

- بالاترین توان منفی عبارت $(z-z_0)$ در صورت وجود، مرتبه‌ی قطب نقطه‌ی تکین $z=z_0$ را مشخص می‌کند. اگر بالاترین توان منفی $(z-z_0)$ موجود نباشد (در بی‌نهایت باشد)، $z=z_0$ نقطه‌ی تکین اساسی تابع $f(z)$ خواهد بود.
- ضریب جمله‌ی $(z-z_0)^{-1}$ در سری لوران تابع $f(z)$ در صورت وجود، مانده (Residual) ی تابع $f(z)$ در $z=z_0$ نامیده می‌شود.

$$*\ b_1=\mathrm{Res}\ f(z)\Big|_{z_0}$$

قضیه‌ی لوران: اگر تابع $f(z)$ روی دو دایره‌ی متحدالمرکز C_1 و C_2 به مرکز z_0 و در طوق بین آن‌ها تحلیلی باشد، آن‌گاه تابع $f(z)$ را می‌توان با سری لوران زیر نمایش داد:

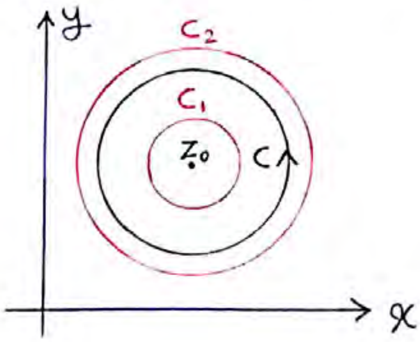
$$* \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + \frac{b_1}{z-z_0}$$

$$+ \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots$$

ضرایب سری لوران را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود:

$$* \ a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$* \ b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z-z_0)^{n-1} f(z) dz$$



* C در خلاف جهت چرخش عقربه‌های ساعت است.

برای محاسبه‌ی انتگرال مختلط $\oint_C f(z)dz$ می‌توان با استفاده از سری لوران تابع $f(z)$، مانده‌ی تابع (b_1) را محاسبه نمود و براساس رابطه‌ی زیر حاصل انتگرال مختلط را بدست آورد:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z-z_0)^{n-1} f(z) dz \xRightarrow{n=1} b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \Longrightarrow * \oint_C f(z) dz = 2\pi i b_1$$

مثال: بسط توابع زیر را حول $z_0=0$ نوشته و نتایج حاصله را بیان کنید.

1. $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$

$$f(z) = \frac{1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)}{z^2} = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \quad ; |z| < \infty$$

این سری، سری تیلور بوده و $z_0=0$ نقطه‌ی تکین تنها از نوع قطب مرتبه‌ی 2 و برداشتنی می‌باشد.

2. $f(z) = z^3 \cos \dfrac{1}{z}$

$$f(z) = z^3\left(1 - \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{4! z^4} - \frac{1}{6! z^6} + \dots\right) = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{4! z} - \frac{1}{6! z^3} + \dots \quad ; |z| < \infty$$

این سری، سری لوران بوده و $z_0=0$ نقطه‌ی تکین تنها از نوع اساسی می‌باشد. مقدار مانده‌ی $f(z)$ حول $z_0=0$ برابر $b_1 = \frac{1}{4!}$ است.

مثال. سری لوران تابع $f(z)=(z+3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$ را حول $z_0=-2$ محاسبه نموده و مقدار مانده‌ی آن را مشخص کنید.

$$f(z)=(z+2)\sin\frac{1}{z+2}+1\sin\frac{1}{z+2}=(z+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1}$$

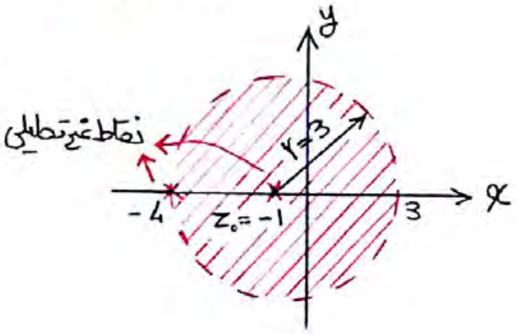
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z+2)^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z+2)^{2n+1}}\qquad ;\ |z+2|<\infty$$

$$f(z)=1+\frac{1}{z+2}+\frac{\frac{-1}{3}}{(z+2)^2}+\cdots\qquad\Longrightarrow\ \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0=-2}=1$$

مثال: سری لوران تابع زیر را در نقاط غیرتحلیلی محاسبه کنید.

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+4)^3}$$

$*\ z_0=-1$



$|z+1|<3$

ناحیه‌ی همگرایی سری

$$\frac{z}{(z+4)^3}=\frac{z+4}{(z+4)^3}+\frac{-4}{(z+4)^3}=\frac{1}{(z+4)^2}+\frac{-4}{(z+4)^3}$$

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{z+1+3}=\frac{1}{3\left(\frac{z+1}{3}+1\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{z+1}{3}+1}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^n}{3^n}$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z+1}{3}+\frac{(z+1)^2}{3^2}-\frac{(z+1)^3}{3^3}+\frac{(z+1)^4}{3^4}-\cdots\right]\quad ;\ \left|\frac{z+1}{3}\right|<1\Longrightarrow |z+1|<3$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+4}\right)=\frac{-1}{(z+4)^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}(z+1)^{n-1}=\frac{1}{3}\left[\frac{-1}{3}+\frac{2}{3^2}(z+1)-\frac{3}{3^3}(z+1)^2\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3^4}(z+1)^3-\cdots\right]$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{(z+4)^2}\right)=\frac{2}{(z+4)^3}=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}(z+1)^{n-2}=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3^2}-\frac{3\times 2}{3^3}(z+1)\right.$$

$$+\frac{4\times 3}{3^4}(z+1)^2 - \dots\Big]$$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}\cdot\frac{z}{(z+4)^3}=\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{(z+4)^2}+\frac{1}{z+1}\cdot\frac{-4}{(z+4)^3}$$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}\left(\frac{-1}{3}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}(z+1)^{n-1}+\frac{1}{z+1}\left(\frac{-2}{3}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}(z+1)^{n-2}$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{3^{n+1}}(z+1)^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1} n(n-1)}{3^{n+1}}(z+1)^{n-3}$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0=-1}=\frac{1}{9}-\frac{4}{27}=\frac{-1}{27}$$

$*\ z_0=-4$ $\qquad |z+4|<3$ ناحیه ی همگرایی سری

$$\frac{z}{z+1}=\frac{z+1-1}{z+1}=1-\frac{1}{z+1}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{-3+(z+4)}=\frac{\frac{-1}{3}}{1-\left(\frac{z+4}{3}\right)}=\frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+4}{3}\right)^n=\frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+4)^n}{3^n}$$

$$\left|\frac{z+4}{3}\right|<1 \Rightarrow |z+4|<3$$

$$f(z)=\frac{1}{(z+4)^3}\cdot\frac{z}{z+1}=\frac{1}{(z+4)^3}\left(1-\frac{1}{z+1}\right)=\frac{1}{(z+4)^3}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+4)^n}{3^n}\right)$$

$$=\frac{1}{(z+4)^3}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+4)^{n-3}}{3^{n+1}}$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0=-4}=\frac{1}{27}$$

مثال: سری لوران تابع $f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ را حول $z_0=0$ بیابید و مانده ی آن را مشخص کنید.

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\cdot e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \;;\quad \begin{array}{l}|z|<1\\ \left|\frac{1}{z}\right|<\infty\Rightarrow|z|>0\end{array}\ \Bigg|\ \xRightarrow{\cap}\ 0<|z|<1$$

ناحیه ی همگرایی سری

$$f(z)=(1+z+z^2+z^3+\cdots)\left(1+\frac{1}{1!\,z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\cdots\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)+\left(\frac{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots}{z}\right)+\cdots$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0=0}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e-1$$

$$*\ e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Rightarrow e^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots$$

مثال: مبسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ را حول $z_0=2$ بدست آورید.

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{-z+z+1}{z(z-1)}=\frac{-z+1}{z(z-1)}+\frac{z}{z(z-1)}=\frac{-1}{z}+\frac{1}{z-1}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-2+2}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{z-2}{2}\right)+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^n}\quad;\quad\left|\frac{z-2}{2}\right|<1\Rightarrow|z-2|<1\quad(\mathrm{I})$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-2)+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\quad;\quad|z-2|<1\quad(\mathrm{II})$$

$\mathrm{I},\mathrm{II}\Rightarrow|z-2|<1$ ناحیه ی همگرایی سری

$$f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-2}\left(\frac{-1}{z}+\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{z-2}\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-2)^n}{2^n}$$

$$+\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{n-1}$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0=2}=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

روش بسط لوران سری در نواحی مختلف:

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\quad,\quad\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\quad;\quad|z|<1$$

$$*\ \alpha<|z-z_0|<\beta\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{1\pm\frac{z-z_0}{\beta}}\Rightarrow\left|\dfrac{z-z_0}{\beta}\right|<1\Rightarrow|z-z_0|<\beta\\[3ex]\dfrac{1}{1\pm\frac{\alpha}{z-z_0}}\Rightarrow\left|\dfrac{\alpha}{z-z_0}\right|<1\Rightarrow\alpha<|z-z_0|\end{array}\right.$$

مثال: سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z(1+z)}$ را حول $z_0=0$ در هر یک از نواحی زیر بنویسید.

الف) $|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1}\quad ;\quad |z|<1$$

ب) $|z|>1$

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+2}}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right|<1\Rightarrow |z|>1$$

مثال: بسط معتبر تابع $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z-2}$ در ناحیه $1<|z|<2$ را بنویسید.

$z_0=0$

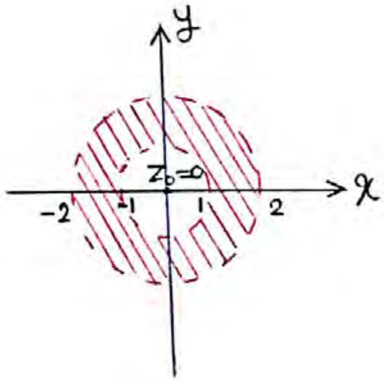
$$f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z-2}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}\Longrightarrow A(z-2)+B(z+1)=2z-1\Rightarrow \begin{vmatrix}A=1\\B=1\end{vmatrix}$$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-2}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n\quad ;\quad |z|>1$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}\quad ;\quad \left|\frac{z}{2}\right|<1\Rightarrow |z|<2$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad ;\quad 1<|z|<2$$

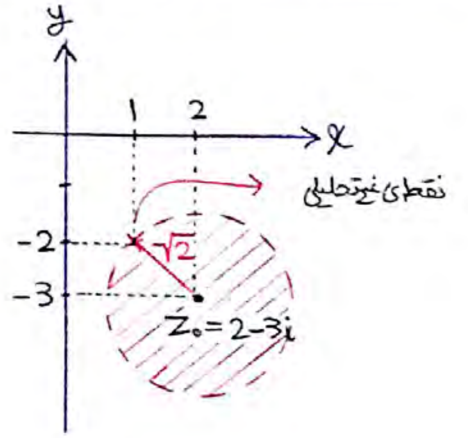


مثال: سری تیلور تابع $f(z)=\dfrac{1}{z-1+2i}$ را حول نقطه $z_0=2-3i$ نوشته و شعاع همگرایی آن را بدست آورید.

$$f(z)=\frac{1}{z-1+2i}=\frac{1}{(z-2+3i)+1-i}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2+3i}{1-i}}=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2+3i)^n}{(1-i)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2+3i)^n}{(1-i)^{n+1}}\quad ;\quad \left|\frac{z-2+3i}{1-i}\right|<1\Rightarrow |z-2+3i|<|1-i|\Rightarrow |z-2+3i|<\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow R=\sqrt{2}$$



مثال: سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ را در ناحیه‌ی $2<|z-1|$ بدست آورید.

$z_0=1$

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z+1}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-1+2}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^n}\ ;\ \left|\frac{2}{z-1}\right|<1\Rightarrow|z-1|>2$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^{n+2}}$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0=1}=0$$

مثال: ضریب $(z-1)^{-1}$ را در بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z(z-5)}$ در ناحیه‌ی $1<|z-1|<3$ را محاسبه کنید.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-5)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{1}{z-5}=\frac{1}{(z-1)-4}=\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-1}{4}\right)}=\frac{-1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{4^n}\ ;\ \left|\frac{z-1}{4}\right|<1\Rightarrow|z-1|<4\quad(\mathrm{I})$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)+1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n}\ ;\ \left|\frac{1}{z-1}\right|<1\Rightarrow|z-1|>1\quad(\mathrm{II})$$

$\mathrm{I},\mathrm{II}\Longrightarrow\ 1<|z-1|<4$ (بنابراین در ناحیه‌ی $1<|z-1|<3$ نیز صادق است.)

$$\cancel{\operatorname{Res} f(z)}\Big|_{z_0=1}=\frac{-1}{5}\quad,\quad b_1=\frac{-1}{5}$$

چون $z_0=1$ تکین تابع $f(z)$ محسوب نمی‌شود به کار بردن لفظ مانده برای b_1 کار غلطی است.

تمرین: مرکز و شعاع همگرایی هر یک از سری های توانی زیر را بدست آورید.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{5^n}$

$$a_n = \frac{1}{5^n} \Longrightarrow L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{5^n}\right|} = \frac{1}{5} \Rightarrow R = 5 \ , \ z_0 = 2i$$

$$|z-2i| < 5$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (5z-6)^n \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 5^n \left(z - \frac{6}{5}\right)^n$

$$a_n = 5^n \Longrightarrow L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|5^n|} = 5 \Rightarrow R = \frac{1}{5} \ , \ z_0 = \frac{6}{5}$$

$$\left|z - \frac{6}{5}\right| < \frac{1}{5}$$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z-3i)^n$

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \Longrightarrow L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{(2n)!\,[(n+1)!]^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 4 = 4$$

$$\Longrightarrow R = \frac{1}{4} \ , \ z_0 = 3i$$

$$|z-3i| < \frac{1}{4}$$

تمرین: بسط لوران تابع زیر را در نواحی داده شده بنویسید.

$$f(z) = \frac{3z-2}{z-\frac{1}{2}}$$

الف) $|z| < \frac{1}{2} \Longrightarrow z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{3z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{-2}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{3z}{1-2z} = \frac{-6z}{1-2z} = -6z \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -3(2^{n+1}) z^{n+1} \ ; \ |2z| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{-2}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{-2}{1-2z} = \frac{4}{1-2z} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+2} z^n \ ; \ |2z| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+2} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3(2^{n+1}) z^{n+1} \ ; \ |z| < \frac{1}{2}$$

ب) $|z| > \frac{1}{2} \Rightarrow z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{3z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{-2}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{3z}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{3}{1-\frac{1}{2z}} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n \quad ; \quad \left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \Rightarrow |2z| > 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

$$\frac{-2}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{-2}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{-2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}z^{n+1}} \ ; \ \left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \Rightarrow |2z| > 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}z^{n+1}} \quad ; \quad |z| > \frac{1}{2}$$

پ) $\left|z-\frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4} \Rightarrow z_0 = \frac{1}{4}$

$$f(z) = \frac{3z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{-2}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{3z}{(z-\frac{1}{4})-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{-1}{4}} \cdot \frac{3z}{1-\left(\frac{z-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{-12z}{1-\left(\frac{z-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)} = -12z\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)^n = -12z\sum_{n=0}^{\infty}4^n\left(z-\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= -12\left(z-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}4^n\left(z-\frac{1}{4}\right)^n = -12\left(z-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}4^n\left(z-\frac{1}{4}\right)^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}4^n\left(z-\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -3(4^{n+1})\left(z-\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}3(4^n)\left(z-\frac{1}{4}\right)^n \ ; \ \left|\frac{z-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right| < 1 \Rightarrow \left|z-\frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4}$$

$$\frac{-2}{z-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{(z-\frac{1}{4})-\frac{1}{4}} = \frac{-2}{\frac{-1}{4}} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)} = 8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)^n = 8\sum_{n=0}^{\infty}4^n\left(z-\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}4^{n+1}\left(z-\frac{1}{4}\right)^n \quad ; \quad \left|z-\frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4}$$

$$f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty}4^{n+1}\left(z-\frac{1}{4}\right)^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}4^{n+1}\left(z-\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 3\sum_{n=0}^{\infty}4^n\left(z-\frac{1}{4}\right)^n \ ; \ \left|z-\frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4}$$

تمرین: سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-\pi}$ را حول $z_0=\pi$ بدست آورید.

$$f(z)=\sin z\cdot\frac{1}{z-\pi}=-\sin(z-\pi)\cdot\frac{1}{z-\pi}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z-\pi}$$

$$\Longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}\quad ;\ |z-\pi|<\infty$$

تمرین: نقاط تکین و نوع آن ها را در توابع زیر حساب کنید.

1. $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$

$z=0$

$$f(z)=ze^{\frac{1}{z}}=z\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-1}}\quad ;\ \left|\frac{1}{z}\right|<\infty\Longrightarrow |z|>0$$

$z=0$ نقطه‌ی تکین تنها از نوع اساسی است.

2. $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$

$$z=0\ ,\quad \lim_{z\to 0}z^3f(z)=\lim_{z\to 0}z^3\left(\frac{1-e^{2z}}{z^4}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{2z}}{z}\overset{H}{=}\lim_{z\to 0}\frac{-2e^{2z}}{1}=-2\neq 0$$

$z=0$ نقطه‌ی تکین تنها از نوع قطب مرتبه‌ی $m=3$ است.

3. $f(z)=z\cos\frac{1}{z}$

$z=0$

$$f(z)=z\cos\frac{1}{z}=z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!\,z^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\ z^{2n-1}}\quad ;\ \left|\frac{1}{z}\right|<\infty\Longrightarrow |z|>0$$

$z=0$ نقطه‌ی تکین تنها از نوع اساسی است.

4. $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-3)^4}$

$$z=3\ ,\quad \lim_{z\to 3}(z-3)^4\frac{\sin z}{(z-3)^4}=\lim_{z\to 3}\sin z=\sin 3\neq 0$$

$z=3$ نقطه‌ی تکین تنها از نوع قطب مرتبه‌ی $m=4$ است.

5. $f(z)=\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$

$$\cos\frac{1}{z}=0\Longrightarrow z=\frac{1}{\frac{\pi}{2}\pm k\pi}\quad ;\ k=0,1,2,\ldots$$

نقاط تکین تنها از نوع قطب مرتبه‌ی اول

$z=0 \quad (k \longrightarrow \infty \implies z \to 0)$ نقطه‌ی تکین غیر تنها از نوع انباشته

$$z=\frac{1}{\frac{\pi}{2}\pm k\pi}, \quad \lim_{z\to \frac{1}{\frac{\pi}{2}\pm k\pi}} \left(z-\frac{1}{\frac{\pi}{2}\pm k\pi}\right)\frac{1}{\cos\frac{1}{z}} \overset{H}{=} \lim_{z\to \frac{1}{\frac{\pi}{2}\pm k\pi}} \frac{1}{\frac{1}{z^2}\sin\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{1}{(\frac{\pi}{2}\pm k\pi)^2\sin(\frac{\pi}{2}\pm k\pi)}=\frac{\pm 1}{(\frac{\pi}{2}\pm k\pi)^2}\neq 0$$

$m=1$: قطب مرتبه‌ی اول

تمرین: سری لوران تابع زیر را در نقطه‌ی $z_0=3$ بدست آورید.

$$f(z)=\frac{\sin z}{(z-3)^4}$$

$$f(z)=\frac{\sin(z-3+3)}{(z-3)^4}=\frac{\sin(z-3)\cos 3+\cos(z-3)\sin 3}{(z-3)^4}$$

$$=\frac{1}{(z-3)^4}\left[\cos 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sin 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$=\cos 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^{2n-3}}{(2n+1)!}+\sin 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^{2n-4}}{(2n)!}$$

$$\text{Res}\,(f(3))=\frac{-\cos 3}{3!}=-\frac{\cos 3}{6}$$

اگر نقطه ی تکین $z=z_0$ از نوع قطب مرتبه ی m ام باشد، می توان از روش های زیر برای محاسبه ی مانده ی تابع $f(z)$ در $z=z_0$ استفاده نمود:

۱. اگر $m=1$، یعنی z_0 قطب مرتبه ی اول تابع $f(z)$ باشد، آن گاه مانده ی تابع $f(z)$ در $z=z_0$ را به صورت زیر می توان محاسبه نمود:

$$* \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=z_0} = \operatorname{Res}(f(z_0)) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$

2. اگر z_0 قطب مرتبه ی اول تابع $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ باشد، به طوری که $P(z_0)\neq 0$، داریم:

$$* \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=z_0} = \operatorname{Res}(f(z_0)) = \lim_{z\to z_0} \frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

3. اگر z_0 قطب مرتبه ی mام تابع $f(z)$ باشد، در حالت کلی داریم:

$$* \operatorname{Res}(f(z_0)) = \lim_{z\to z_0} \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \right\}$$

مثال: مانده ی تابع $f(z)=\dfrac{2z+3}{(z-1)(z^2+4)}$ را در نقطه ی تکین $z=2i$ بدست آورید.

$(m=1)$

$$\operatorname{Res}(f(2i)) = \lim_{z\to 2i} (z-2i)\frac{2z+3}{(z-1)(z-2i)(z+2i)} = \lim_{z\to 2i} \frac{2z+3}{(z-1)(z+2i)} = \frac{4i+3}{(2i-1)(4i)}$$

مثال: مانده ی تابع $f(z)=\dfrac{\cos z}{\sin z}$ را در $z=0$ بدست آورید.

$$\operatorname{Res}(f(0)) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{(\sin z)'} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{\cos z} = 1$$

مثال: مانده ی تابع $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{(2z+1)^4}$ را در نقطه ی $z=\frac{-1}{2}$ بدست آورید.

$(m=4)$

$$\operatorname{Res}\left(f\left(\tfrac{-1}{2}\right)\right) = \lim_{z\to\frac{-1}{2}} \frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3}{dz^3}\left[\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^4 \frac{\sin 3z}{(2z+1)^4}\right] = \frac{1}{3!\times 2^4}\lim_{z\to\frac{-1}{2}} \frac{d^3}{dz^3}(\sin 3z) = \frac{-9}{32}\cos\frac{-3}{2}$$

مثال: مانده ی تابع $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$ را در نقاط تکین آن محاسبه کنید.

$$z=1 \Rightarrow (m=1) \Longrightarrow \operatorname{Res}(f(1)) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1} = \lim_{z\to 1}\sin\frac{1}{z} = \sin 1$$

$$z=0 \Longrightarrow f(z) = \frac{-1}{1-z}\cdot\sin\frac{1}{z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = (-1-z-z^2-z^3-\dots)\times$$

$$\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^5}-\frac{1}{7!\,z^7}+\dots\right) = \left(-1+\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}-\dots\right)z^{-1}+\dots \quad ; |z|>0$$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots \Rightarrow Res(f(0)) = -\sin 1$$

تمرین : مقدار مانده ی هر یک از توابع زیر را در نقاط تکین بدست آورید.

1. $(z-1)^5 \cos \frac{1}{z-1}$

$z=1$: نقطه ی تکین اساسی

$$f(z) = (z-1)^5 \cos \frac{1}{z-1} = (z-1)^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n-5}} \; ; |z-1|>0$$

$$Res(f(1)) = \frac{-1}{6!} = -\frac{1}{720}$$

2. $(z-3)\sin \frac{1}{z+1}$

$z=-1$: نقطه ی تکین اساسی

$$f(z) = (z+1)\sin\frac{1}{z+1} - 4\sin\frac{1}{z+1} = (z+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}} + (-4)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}} \; ; |z+1|>0$$

$$Res(f(-1)) = -4$$

3. $\dfrac{\sin \frac{1}{z}}{z^2+1}$

$z=\pm i$: قطب های مرتبه ی اول

$$z=i : Res(f(i)) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{\sin\frac{1}{z}}{z^2+1} = \lim_{z\to i} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z+i} = \frac{\sin\frac{1}{i}}{2i} = \frac{i\sin i}{2} = \frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{4}$$

$$= \frac{e^{-1}-e}{4} = \frac{e^{-1}}{4} - \frac{e}{4}$$

$$z=-i : Res(f(-i)) = \lim_{z\to -i} (z+i)\frac{\sin\frac{1}{z}}{z^2+1} = \lim_{z\to -i} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-i} = \frac{\sin i}{-2i} = \frac{i\sin i}{2} = \frac{e^{-1}}{4} - \frac{e}{4}$$

$z=0 \; , \; 0<|z|<1$: نقطه ی تکین اساسی

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{2n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \frac{1}{7!\,z^7} + \dots\right) \times$$

$$(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots\right) + \dots \Longrightarrow Res(f(0)) = \sinh 1$$

4. $f(z)=ze^{\frac{-1}{z-1}}$

نقطه‌ی تکین اساسی : $z=1$

$$f(z)=(z-1)e^{\frac{-1}{z-1}}+e^{\frac{-1}{z-1}}=(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}\ ;\ |z-1|>0$$

$$\mathrm{Res}(f(1))=\frac{1}{2!}-1=-\frac{1}{2}$$

5. $f(z)=\dfrac{z^3}{(3z-2)^3}$

نقطه‌ی تکین، قطب مرتبه‌ی سوم : $z=\frac{2}{3}$

$$\mathrm{Res}(f(\tfrac{2}{3}))=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\frac{2}{3}}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-\tfrac{2}{3})^3\frac{z^3}{(3z-2)^3}\right]=\frac{1}{2!\times 3^3}\lim_{z\to\frac{2}{3}}\frac{d^2}{dz^2}z^3=\frac{1}{54}\lim_{z\to\frac{2}{3}}6z$$

$$=\frac{6}{54}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{27}$$

6. $f(z)=\dfrac{2z^2+3z}{(z-1)(z^2+9)}$

$$\mathrm{Res}(f(1))=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z^2+9)}=\lim_{z\to 1}\frac{2z^2+3z}{z^2+9}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}(f(3i))=\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z^2+9)}=\lim_{z\to 3i}\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3i)}=\frac{2(3i)^2+3(3i)}{(3i-1)(3i+3i)}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i$$

$$\mathrm{Res}(f(-3i))=\lim_{z\to -3i}(z+3i)\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z^2+9)}=\lim_{z\to -3i}\frac{2z^2+3z}{(z-1)(z-3i)}=\frac{2(-3i)^2+3(-3i)}{(-3i-1)(-3i-3i)}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$$

7. $f(z)=\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$

$\sin z=0 \Rightarrow z=\pm k\pi\ ;\ k=0,1,2,\dots$ قطب های مرتبه‌ی اول

$$\mathrm{Res}(f(\pm k\pi))=\lim_{z\to\pm k\pi}\frac{\cos z}{(\sin z)'}=\lim_{z\to\pm k\pi}\frac{\cos z}{\cos z}=1$$

8. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$

$$\lim_{z\to 0} z^2 \frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0 \implies$$ $z=0$: قطب مرتبه‌ی دوم

$$Res(f(0)) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{\sin z}{z^3}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z(\cos z - 1)}{z^2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z} \overset{H}{=} \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z}{1} = 0$$

9. $f(z) = \sec z = \dfrac{1}{\cos z}$

$z = \dfrac{\pi}{2} \pm k\pi \;;\; k = 0, 1, 2, \dots$ نقاط تکین از نوع قطب مرتبه‌ی اول

$$Res\left(f\left(\frac{\pi}{2} \pm k\pi\right)\right) = \lim_{z\to \frac{\pi}{2}\pm k\pi} \left(z - \frac{\pi}{2} \mp k\pi\right) \frac{1}{\cos z} \overset{H}{=} \lim_{z\to \frac{\pi}{2}\pm k\pi} \frac{1}{-\sin z} = \frac{-1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm k\pi\right)}$$

$$= \begin{cases} -1 & k: \text{زوج} \\ +1 & k: \text{فرد} \end{cases}$$

10. $f(z) = \dfrac{z^4}{z^2 - iz + 2}$

$$z^2 - iz + 2 = 0 \implies (z+i)(z-2i) = 0 \implies \begin{cases} z_1 = -i \\ z_2 = 2i \end{cases}$$ قطب‌های مرتبه‌ی اول

$$Res(f(-i)) = \lim_{z\to -i} (z+i) \frac{z^4}{(z+i)(z-2i)} = \lim_{z\to -i} \frac{z^4}{z-2i} = \frac{(-i)^4}{-i-2i} = \frac{1}{3}i$$

$$Res(f(2i)) = \lim_{z\to 2i} (z-2i) \frac{z^4}{(z+i)(z-2i)} = \lim_{z\to 2i} \frac{z^4}{z+i} = \frac{(2i)^4}{2i+i} = \frac{-16}{3}i$$

P.33

انتگرال مختلط

انواع انتگرال های مختلطی که در این فصل مورد بررسی قرار خواهند گرفت، به شرح زیر است:

1. انتگرال های مختلط به فرم $\int_c f(z)dz$ که در آن c یک منحنی یا مسیر باز است.

1.1. اگر $f(z)$ تابع تحلیلی باشد، در این صورت انتگرال تابع به مسیر بستگی نخواهد داشت.

1.2. اگر $f(z)$ تحلیلی نباشد، در این صورت انتگرال را بر حسب متغیرهایی بر حسب x ، y ، r ، θ ، t و ... تقسیم بندی کرده و همانند انتگرال های حقیقی با آن برخورد می‌کنیم.

2. انتگرال های مختلط به فرم $\oint_c f(z)dz$ که در آن c یک منحنی یا مسیر بسته است.

2.1. اگر $f(z)$ در داخل و روی مسیر بسته‌ی c تحلیلی باشد، در این صورت طبق قضیه‌ی کوشی - گورسا، حاصل انتگرال صفر است.

2.2. اگر $f(z)$ در نقاط معدودی از داخل مسیر بسته‌ی c تحلیلی نباشد، حاصل انتگرال با استفاده از قضیه‌ی مانده محاسبه می‌شود.

3. انتگرال های حقیقی یا مثلثاتی خاصی که می‌توان با انتگرال مختلط جایگزین محاسبه نمود.

انتگرال روی خط در صفحه‌ی مختلط:

هر مسیر انتگرال گیری را می‌توان به صورت $z(t)=x(t)+iy(t)$ نمایش داد که در آن t یک پارامتر حقیقی است.
در محاسبه‌ی انتگرال مختلط $\int_c f(z)dz$ که در آن c یک منحنی تعریف شده در صفحه‌ی مختلط $z(x,y)$ می‌باشد، قاعده‌ی کلی این است که با توجه به ارتباطی که بین متغیرها روی منحنی c وجود دارد، تمام متغیرهای موجود در $f(z)$ و dz را بر حسب یک متغیر بازنویسی کنیم. سپس با توجه به حدود تغییرات آن متغیر در منحنی c ، مسأله را به یک انتگرال بر حسب یک متغیر تبدیل نماییم.

تعاریف:

منحنی هموار: منحنی c را هموار گویند هرگاه در هر نقطه دارای مشتق پیوسته و غیر صفر باشد.

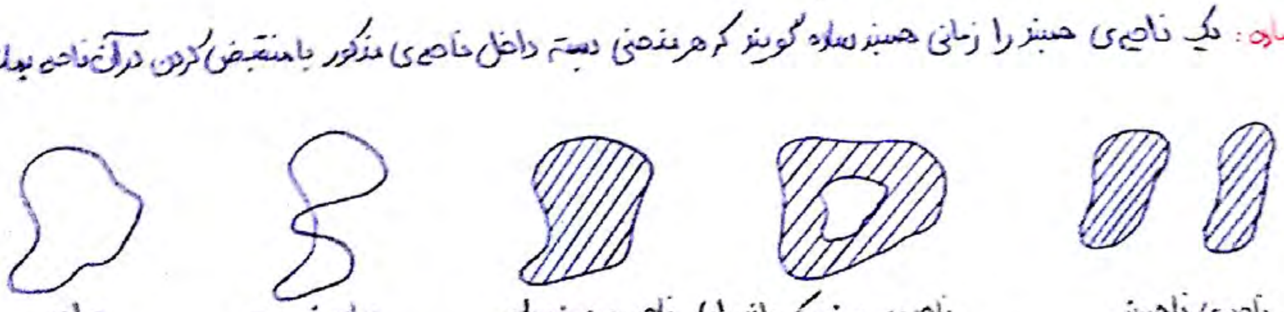
منحنی تکه ای هموار: منحنی c را تکه ای هموار گویند هرگاه از تعداد متناهی منحنی هموار که از انتها به هم وصل شده باشند، تشکیل شده باشد.

مسیر بسته‌ی ساده: مسیری است که خود را قطع نکند و بر خودش مماس نباشد.

ناحیه‌ی کراندار: یک ناحیه را در صفحه‌ی $z(x,y)$ کراندار گویند هرگاه مرزهای آن به بی‌نهایت نرفته باشد.

ناحیه‌ی همبند: یک ناحیه را در صفحه‌ی $z(x,y)$ همبند گویند هرگاه هر دو نقطه‌ی دلخواه در ناحیه‌ی مذکور را بتوان توسط یک چند ضلعی شکسته به یکدیگر وصل کرد، بدون آن که از داخل آن ناحیه خارج شویم.

ناحیه‌ی همبند ساده: یک ناحیه‌ی همبند را زمانی همبند ساده گویند که هر منحنی بسته داخل ناحیه‌ی مذکور با منقبض کردن در آن ناحیه بماند.



قضیه: هرگاه C یک مسیر کرانه‌ای هموار باشد که با $z=z(t);\ a\leqslant t\leqslant b$ مشخص داده شده باشد و $f(z)$ تابعی پیوسته در روی C باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$* \int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt$$

خواص اساسی انتگرال روی خط.

۱. انتگرال یک اپراتور خطی است:

$$* \int_C [a f(z) \pm b g(z)]dz = a\int_C f(z)dz \pm b\int_C g(z)dz$$

2. اگر C را به دو زیر مسیر C_1 و C_2 تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$* \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

3. اگر جهت انتگرال‌گیری روی مسیر C را عوض کنیم، حاصل انتگرال قرینه می‌شود.

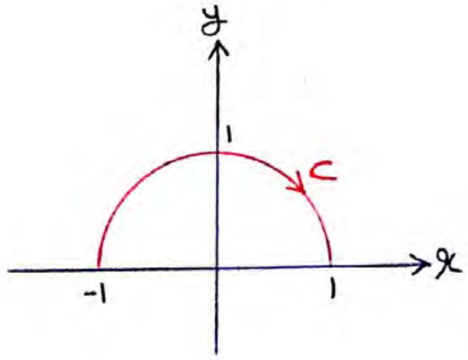
مثال: حاصل انتگرال $\int_C (z^2+\bar{z})dz$ را روی منحنی C که به صورت $y=x^2$ و $C: 0\leqslant x\leqslant 2$ تعریف شده است، بدست آورید.

$$\int_C (z^2+\bar{z})dz = \int_C [(x+iy)^2+(x-iy)]d(x+iy) = \int_0^2 [(x+ix^2)^2+(x-ix^2)]d(x+ix^2)$$

$$= \int_0^2 (-x^4+(1-i)x^2+x)(dx+i2xdx) = \int_0^2 (-x^4+(1-i)x^2+x)dx + i\int_0^2 (-2x^5+2(1-i)x^3+2x^2)dx$$

$$= \left(\frac{-x^5}{5}+(1-i)\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 + i\left(\frac{-x^6}{3}+(1-i)\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{15}-\frac{50}{3}i$$

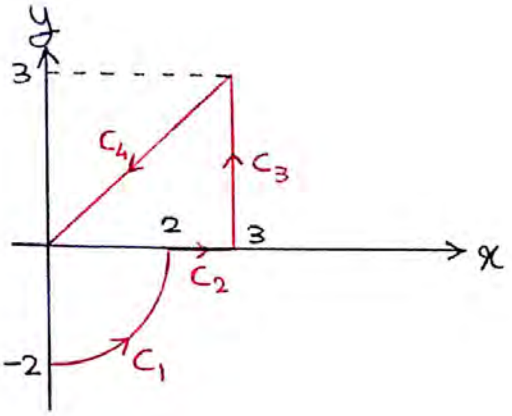
مثال: حاصل انتگرال $\int_C (z^2+z\bar{z})dz$ را روی مسیر زیر حساب کنید.



$$\left|\begin{array}{l} z=1e^{i\theta} \\ dz = ie^{i\theta}d\theta \end{array}\right. \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

$$\int_C (z^2+z\bar{z})dz = \int_\pi^0 (e^{2i\theta}+1)(ie^{i\theta})d\theta = \left(\frac{1}{3}e^{i3\theta}+e^{i\theta}\right)\Big|_\pi^0 = \frac{8}{3}$$

مثال: حاصل انتگرال $\int_C (z^2+z)dz$ را روی مسیر داده شده بدست آورید.



$$c_1: \left| \begin{array}{l} z=2e^{i\theta} \\ dz=2ie^{i\theta}d\theta \end{array} \right. \qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 0$$

$$c_2: \left| \begin{array}{l} z=x \\ dz=dx \end{array} \right. \qquad 2\leqslant x\leqslant 3$$

$$c_3: \left| \begin{array}{l} z=3+iy \\ dz=i\,dy \end{array} \right. \qquad 0\leqslant y\leqslant 3$$

$$c_4: \left| \begin{array}{l} z=re^{i\frac{\pi}{4}} \\ dz=e^{i\frac{\pi}{4}}dr \end{array} \right. \qquad 0\leqslant r\leqslant 3\sqrt{2}$$

$$\int_C (z^2+z)dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(4e^{i2\theta}+2e^{i\theta})(2ie^{i\theta}d\theta)+\int_2^3(x^2+x)dx+\int_0^3[(3+iy)^2+(3+iy)](i\,dy)$$

$$+\int_{3\sqrt{2}}^{0}\left[r^2e^{i\frac{\pi}{2}}+re^{i\frac{\pi}{2}}\right]e^{i\frac{\pi}{4}}dr=2-\frac{8}{3}i$$

قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در مورد انتگرال مختلط روی خط: هرگاه $f(z)$ در ناحیه‌ی همبند ساده‌ی D تحلیلی باشد آنگاه انتگرال نامعین از $f(z)$ در ناحیه‌ی D بصورت تابع تحلیلی $F(z)$ وجود دارد که $F'(z)=f(z)$. برای هر مسیر c در ناحیه‌ی D که دو نقطه‌ی z_0 و z_1 را بهم وصل می‌کند، داریم:

$$*\int_{z_0}^{z_1}f(z)dz=F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}=F(z_1)-F(z_0)$$

نکته: مطابق قضیه‌ی فوق اگر $f(z)$ در دامنه‌ی حوزه تحلیلی باشد آنگاه انتگرال روی خط آن مستقل از مسیر بوده و فقط به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی خواهد داشت.

بنابراین در مورد مثال قبل داریم:

$$\int_{-2i}^{0}(z^2+z)dz=\left(\frac{z^3}{3}+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_{-2i}^{0}=2-\frac{8}{3}i$$

مثال: مطلوب است حل انتگرال $\int_{-i\pi}^{i\pi}\cos z\,dz$.

$$\int_{-i\pi}^{i\pi}\cos z\,dz=\sin z\Big|_{-i\pi}^{i\pi}=2\sin z(i\pi)=2i\sinh\pi=33.09i$$

انتگرال روی مسیر بسته در صفحه‌ی مختلط:

قضیه‌ی انتگرال کوشی (قضیه‌ی کوشی - گورسا): هرگاه $f(z)$ در دامنه‌ی کراندار همبند ساده‌ی D تحلیلی باشد، آنگاه به ازای هر مسیر بسته‌ی ساده‌ی C واقع در D داریم:

$$* \oint_C f(z)dz = 0$$

با توجه به قضیه‌ی فوق حاصل انتگرال‌های زیر همگی صفر است:

$$\oint_C e^z dz = 0, \oint_C \sin z\, dz = 0, \oint_C \cos z dz = 0, \oint_C z^n dz = 0$$

مثال: حاصل انتگرال‌های $\oint_C (z-z_0)^n dz$ و $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$ را درصورتی که $C: |z-z_0|=R$ و $n \in N$ باشد، بدست آورید.

با توجه به تحلیلی بودن تابع $f(z)=(z-z_0)^n$ در مسیر بسته‌ی $|z-z_0|=R$، حاصل انتگرال $\oint_C (z-z_0)^n dz$ صفر است.

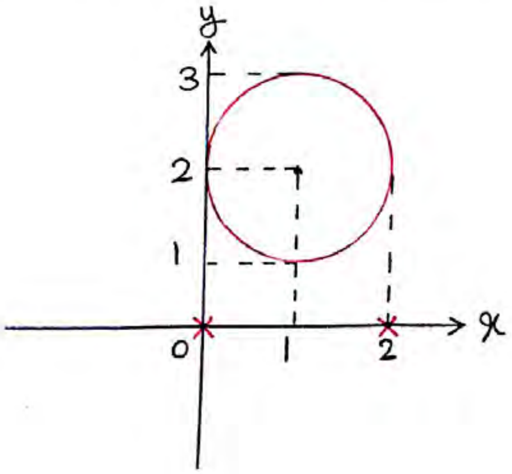
تابع $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n}$ در مسیر بسته‌ی $|z-z_0|=R$ تحلیلی نیست، پس داریم:

$$\left| \begin{array}{l} z \triangleq z_0 + re^{i\theta} \quad ; \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad , r \longrightarrow 0 \\ dz = rie^{i\theta} d\theta \end{array} \right.$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta} d\theta}{r^n e^{in\theta}} = (ir^{1-n}) \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \quad (r \longrightarrow 0) \\ 2\pi i & n = 1 \end{cases}$$

مثال: حاصل انتگرال $\oint_{|z-1-2i|=1} \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz$ را بدست آورید.

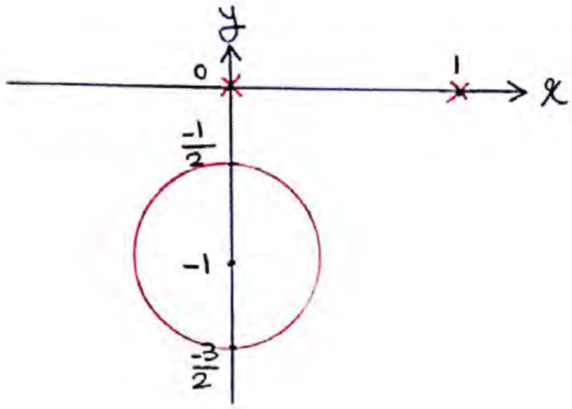
$$z^3 - 2z^2 = 0 \Longrightarrow z^2(z-2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} z=0 \\ z=2 \end{cases}$$ نقاط غیرتحلیلی



$$\oint_{|z-1-2i|=1} \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz = 0$$

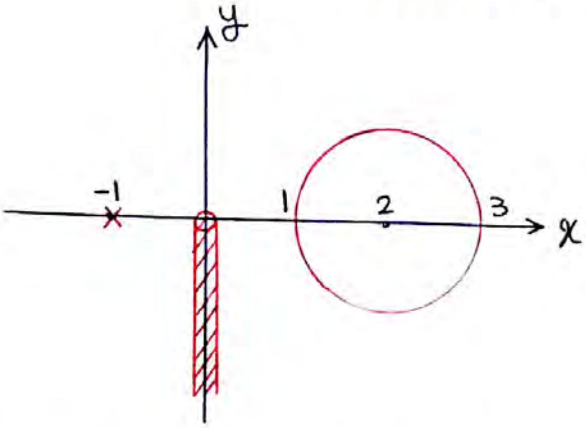
$f(z)$ در $|z-1-2i|=1$ نقطه‌ی غیرتحلیلی ندارد.

مثال: حاصل انتگرال $\oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \left(\cos z + \frac{1}{z^2(z-1)}\right)dz$ را بدست آورید.



$$\oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \left(\cos z + \frac{1}{z^2(z-1)}\right)dz = 0$$

مثال: مطلوبست محاسبه‌ی $\oint_C \frac{\ln z}{z+1}dz$ که در آن $\frac{-\pi}{2} < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ و $C: |z-2|=1$ می‌باشد.



$$\oint_C \frac{\ln z}{z+1}dz = 0$$

قضیه: اگر $f(z)$ در ناحیه‌ی همبند ساده‌ی D تحلیلی باشد، آنگاه به ازای هر z_0 و هر مسیر بسته‌ی ساده‌ی C در ناحیه‌ی D که z_0 را دربرگیرد داریم:

$$* \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

قضیه (مشتقات یک تابع تحلیلی): اگر $f(z)$ در ناحیه‌ی همبند D تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ در ناحیه‌ی D از هر مرتبه‌ای دارای مشتق است که همه‌ی این مشتقات نیز در ناحیه‌ی D تحلیلی هستند. مشتقات تابع $f(z)$ در نقطه‌ای مانند z_0 در ناحیه‌ی D عبارت‌اند از:

$$f'(z_0) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

$$\cdots$$

$$\Longrightarrow \quad * \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz = 2\pi i \,\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

مثال: حاصل انتگرال $I = \oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}dz$ را روی خم بسته‌ی $C: |z-\pi|=3$ محاسبه کنید.

$$I = 2\pi i\,(\cos \pi) = -2\pi i$$

مثال: انتگرال $I=\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$ را حساب کنید.

$$I = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

مثال: حاصل انتگرال $I=\oint_C \frac{3z+1}{z^3-z^2} dz$ را به ازای دو مسیر $C: |z|=\frac{1}{2}$ و $C: |z|=2$ بدست آورید.

$$I=\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{3z+1}{z^2(z-1)} dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{3z+1}{z-1}\right)}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{3z+1}{z-1}\right)\Big|_{z=0} = -8\pi i$$

$$I=\oint_{|z|=2} \frac{3z+1}{z^2(z-1)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{-1}{z^2} dz + \oint_{|z|=2} \frac{-4}{z} dz + \oint_{|z|=2} \frac{4}{z-1} dz = (0-4+4)2\pi i = 0$$

یادآوری (تجزیه‌ی کسرها): قاعده‌ی هویساید (Heaviside Method) $(n \in N)$

حالت اول: $$f(x) = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

$$A_1 = \lim_{x\to a_1} (x-a_1) f(x)$$
$$A_2 = \lim_{x\to a_2} (x-a_2) f(x)$$
$$\cdots$$
$$A_n = \lim_{x\to a_n} (x-a_n) f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad * \; A_i = \lim_{x\to a_i} (x-a_i) f(x) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \; ; \quad i \in N$$

حالت دوم: $$f(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

$$A_n = \frac{1}{0!} \lim_{x\to a} \left[(x-a)^n f(x)\right]$$
$$A_{n-1} = \frac{1}{1!} \lim_{x\to a} \frac{d}{dx}\left[(x-a)^n f(x)\right]$$
$$A_{n-2} = \frac{1}{2!} \lim_{x\to a} \frac{d^2}{dx^2}\left[(x-a)^n f(x)\right]$$
$$\cdots$$
$$A_2 = \frac{1}{(n-2)!} \lim_{x\to a} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[(x-a)^n f(x)\right]$$
$$A_1 = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{x\to a} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x-a)^n f(x)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad * \; A_i = \frac{1}{(n-i)!} \lim_{x\to a} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}\left[(x-a)^n f(x)\right] \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \; ; \quad i \in N$$

* با توجه به روابط فوق (روابط هویساید)، در مورد مثال قبل داریم:

$$f(z)=\frac{3z+1}{z^2(z-1)}=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\frac{B}{z-1}=\frac{-4}{z}+\frac{-1}{z^2}+\frac{4}{z-1}$$

$$B=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{3z+1}{z^2}=4$$

$$A_n=A_2=\frac{1}{0!}\lim_{z\to 0}\left[z^2\,\frac{3z+1}{z^2(z-1)}\right]=-1$$

$$A_{n-1}=A_1=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\,\frac{3z+1}{z^2(z-1)}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{3(z-1)-(3z+1)}{(z-1)^2}=-4$$

تمرین: حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید.

1. $$\oint_{|z-i\frac{\pi}{2}|=1}\frac{dz}{\sinh z}=0$$

$\sinh z=0 \Longrightarrow z=0$ نقطه‌ی غیرتحلیلی تابع $\Longrightarrow |0-i\frac{\pi}{2}|=\frac{\pi}{2}\not<1 \Longrightarrow$ تابع در ناحیه‌ی انتگرال‌گیری نقطه‌ی غیرتحلیلی ندارد

2. $$\oint_{|z+i|=1}\frac{dz}{z^2+1}=\oint_{|z+i|=1}\frac{\left(\frac{1}{z-i}\right)}{z+i}dz=2\pi i\left(\frac{1}{-2i}\right)=-\pi$$

$z^2+1=0 \Longrightarrow z=\pm i$ نقاط غیرتحلیلی $\xrightarrow{|z+i|=1} z=-i$

3. $$\int_i^{2i}(z^2-1)^3dz=\int_i^{2i}(z^6-3z^4+3z^2-1)dz=\left(\frac{z^7}{7}-\frac{3}{5}z^5+z^3-z\right)\Big|_i^{2i}$$

$$=\frac{127}{7}i^7-\frac{93}{5}i^5+7i^3-i=-\frac{1566}{35}i$$ (تابع تحلیلی)

4. $$\oint_{|z-i|=1}\frac{dz}{z^2+1}=\oint_{|z-i|=1}\frac{\left(\frac{1}{z+i}\right)}{(z-i)}dz=2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right)=\pi$$

$z^2+1=0 \Longrightarrow z=\pm i \xrightarrow{|z-i|=1} z=i$

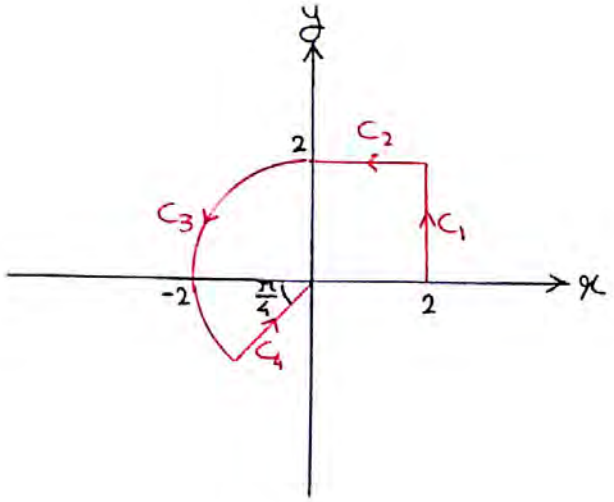
5. $$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^3}dz=2\pi i\left(\frac{\frac{d^2}{dz^2}e^z\big|_{z=0}}{2!}\right)=\pi i e^0=\pi i$$

$z^3=0 \Longrightarrow z=0$ نقطه‌ی تکین از نوع قطب مرتبه‌ی سوم

$$6.\ \oint_{|z|=2} \frac{z^4}{(z-3i)^2}\,dz = 0$$

$(z-3i)^2 = 0 \Longrightarrow z = 3i$ نقطه ی تکین از نوع قطب مرتبه ی دوم $\Longrightarrow |3i| = 3 \nless 2$ تابع در ناحیه ی انتگرال گیری تحلیلی است.

تمرین: حاصل انتگرال های زیر را در طول مسیر نشان داده شده محاسبه کنید.



$$C_1: \left| \begin{array}{l} x = 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ z = 2 + iy \Rightarrow dz = i\,dy \end{array} \right.$$

$$C_2: \left| \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 2,\ y = 2 \\ z = x + 2i \Rightarrow dz = dx \end{array} \right.$$

$$C_3: \left| \begin{array}{l} r = 2,\ \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{4} \\ z = 2e^{i\theta} \Rightarrow dz = 2ie^{i\theta}d\theta \end{array} \right.$$

$$C_4: \left| \begin{array}{l} 0 \leqslant r \leqslant 2,\ \theta = \frac{5\pi}{4} \\ z = re^{\frac{5\pi}{4}i} \Rightarrow dz = e^{\frac{5\pi}{4}i}dr \end{array} \right.$$

$$1.\ \int_C (z^2 - 2\bar{z})\,dz = \int_0^2 [(2+iy)^2 - 2(2-iy)]\,i\,dy + \int_2^0 [(x+2i)^2 - 2(x-2i)]\,dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} [(2e^{i\theta})^2 - 2(2e^{-i\theta})]\,2ie^{i\theta}d\theta + \int_2^0 [(re^{\frac{5\pi}{4}i})^2 - 2re^{\frac{-5\pi}{4}i}]\,e^{\frac{5\pi}{4}i}dr$$

$$= \int_0^2 (-6y - y^2 i)\,dy + \int_2^0 (x^2 - 2x - 4 + 4xi + 4i)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} 8i(e^{3i\theta} - 1)\,d\theta + \int_2^0 (r^2 e^{\frac{15\pi}{4}i} - 2r)\,dr$$

$$= \left(-3y^2 - \frac{y^3}{3}i\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 4x + 2x^2 i + 4xi\right)\Big|_2^0 + 8i\left(\frac{e^{3i\theta}}{3i} - \theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} + \left(\frac{r^3}{3}e^{\frac{15\pi}{4}i} - r^2\right)\Big|_2^0$$

$$= \frac{4}{3} + i\left(\frac{-106 + 5\sqrt{2}}{6} - 6\pi\right)$$

P.37

2. $\int_C (z+z\bar{z})dz = \int_C (z+|z|^2)dz = \int_0^2 (2+iy+4+y^2)\,i\,dy + \int_2^0 (x+2i+x^2+4)dx$

$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} (2e^{i\theta}+4)2ie^{i\theta}d\theta + \int_2^0 (re^{\frac{5\pi}{4}i}+r^2)e^{\frac{5\pi}{4}i}dr$

$= \int_0^2 i(y^2+iy+6)dy + \int_2^0 (x^2+x+4+2i)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} (4ie^{2i\theta}+8ie^{i\theta})d\theta + \int_2^0 (re^{\frac{5\pi}{2}i}+r^2e^{\frac{5\pi}{4}i})dr$

$= \left(\frac{y^3}{3}i - \frac{y^2}{2} + 6yi\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2xi\right)\Big|_2^0 + \left(\frac{4ie^{2i\theta}}{2i}+\frac{8ie^{i\theta}}{i}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}}$

$+\left(\frac{r^2e^{\frac{5\pi}{2}i}}{2}+\frac{r^3e^{\frac{5\pi}{4}i}}{3}\right)\Big|_2^0 = \frac{-38-8\sqrt{2}}{3} + i\left(\frac{20-16\sqrt{2}}{3}\right)$

3. $\int_C (z^2+\sin z)dz = \int_2^0 (z^2+\sin z)dz = \left(\frac{z^3}{3}-\cos z\right)\Big|_2^0 = -\frac{8}{3}+\cos 2 = -3.08$

چون تابع زیر انتگرال تحلیلی است، حاصل انتگرال مستقل از مسیر انتگرال‌گیری و فقط به نقاط ابتدا و انتهای مسیر وابسته است.

قضیه‌ی مانده: فرض کنید تابع $f(z)$ در داخل و روی مسیر بسته‌ی C به جز تعداد معدودی نقطه‌ی تکین همچون $z_1, z_2, \dots, z_k$، تحلیلی باشد. در صورت خواهیم داشت:

$$* \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=z_j} = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f(z_1)) + \operatorname{Res}(f(z_2)) + \dots + \operatorname{Res}(f(z_k))\right]$$

که انتگرال‌گیری روی C در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت صورت می‌گیرد.

مثال: حاصل انتگرال $I = \oint\limits_{|z-1|=1} z e^{-\frac{1}{z-1}}$ را بدست آورید.

$$f(z) = ze^{-\frac{1}{z-1}} = (z-1+1)e^{-\frac{1}{z-1}} = (z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}$$

$$\operatorname{Res}(f(1)) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{1!} = \frac{-1}{2}$$

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f(1)) = 2\pi i\left(\frac{-1}{2}\right) = -\pi i$$

مثال: حاصل انتگرال $\oint\limits_{|z|=2} \tan z dz$ را بدست آورید.

$$I = \oint\limits_{|z|=2} \tan z dz = \oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{\cos z} dz$$

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \xrightarrow{|z|=2} z = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{(\cos z)'} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{-\sin z} = -1$$

$$\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \lim_{z\to\frac{-\pi}{2}} \frac{\sin z}{(\cos z)'} = \lim_{z\to\frac{-\pi}{2}} \frac{\sin z}{-\sin z} = -1$$

$$I = 2\pi i(-1-1) = -4\pi i$$

مثال: حاصل انتگرال $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^4} dz$ را محاسبه کنید.

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-3}}{(2n+1)!} \Longrightarrow \operatorname{Res}(f(0)) = -\frac{1}{6}$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^4} = 2\pi i\left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{-\pi i}{3}$$

مثال: حاصل انتگرال $I = \oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\frac{1}{z} dz$ رابدست آورید.

$$I = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f(0)) + \mathrm{Res}(f(1))\right] = 2\pi i\left[\sin 1 - \sin 1\right] = 0$$

مثال: حاصل انتگرال $\oint_{|z|=1} (z+\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}}dz$ رابدست آورید.

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}} = \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right) = \frac{1}{z}+\frac{1}{2!z}+\cdots$$

$$\mathrm{Res}\, f(z)\Big|_{z=0} = \frac{1}{2!}+\frac{1}{1} = \frac{3}{2} \implies I = \oint_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}}dz = 2\pi i\left(\frac{3}{2}\right) = 3\pi i$$

مثال: حاصل انتگرال $\oint_{|z-1|=1} (\sin\frac{1}{z-1})(2z^2+z-6)\, dz$ رامحاسبه کنید.

$$f(z) = (2z^2+z-6)\sin\frac{1}{z-1} = \left[2(z-1)^2+5(z-1)-3\right]\sin\frac{1}{z-1}$$

$$= \left[2(z-1)^2+5(z-1)-3\right]\left[z-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots\right] = -\frac{2}{3!(z-1)}-\frac{3}{z-1}+\cdots$$

$$\mathrm{Res}(f(1)) = \frac{-2}{3!}-3 = -\frac{10}{3} \implies \oint_{|z-1|=1}(2z^2+z-6)\sin\frac{1}{z-1}dz = 2\pi i\left(-3-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2\pi i}{3}$$

نکته: اگر $f(z)$ تابعی زوج باشد، در بسط آن حول $z=0$، صرفاً توان های زوج z ظاهر خواهد شد. لذا مانده ی چنین تابعی حول $z=0$ قطعاً صفر است.

مثال: حاصل انتگرال $I = \oint_{|z|=4} \frac{\cot z}{z^3}dz$ را محاسبه کنید.

$\sin z \sim z \;(z\to 0) \implies z=0$ قطب مرتبه ی چهارم است.

چون $f(z) = \frac{\cot z}{z^3} = \frac{\cos z}{z^3 \sin z}$ تابعی زوج است، بسط آن حول $z=0$ شامل توان های فرد نخواهد بود. لذا مقدار مانده ی $f(z)$ در $z=0$ صفر است.

$$\mathrm{Res}(f(0)) = 0$$

$$\mathrm{Res}(f(\pi)) = \lim_{z\to\pi}\frac{\cos z}{(z^3\sin z)'} = \frac{1}{\pi^3} \qquad \implies I = 2\pi i\left(0+\frac{1}{\pi^3}-\frac{1}{\pi^3}\right) = 0$$

$$\mathrm{Res}(f(-\pi)) = \lim_{z\to-\pi}\frac{\cos z}{(z^3\sin z)'} = -\frac{1}{\pi^3}$$

نکته: توابع $|z|$، $\bar{z}$، $Re(z)$ و $Im(z)$ در هیچ نقطه‌ای از صفحه‌ی مختلط تحلیلی نمی‌باشند. بنابراین اگر چنین عباراتی در تابع زیر انتگرال ظاهر شوند، نمی‌توان از قضیه‌ی مانده استفاده نمود. ولی در مواردی که انتگرال روی مسیر $|z|=a$ صورت گیرد، می‌توان با استفاده از روابط زیر، عبارات غیرتحلیلی فوق را حذف نمود.

* $|z|=a$

* $\bar{z}=\frac{z\bar{z}}{z}=\frac{|z|^2}{z}=\frac{a^2}{z}$

* $Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{z+\frac{a^2}{z}}{2}$

* $Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}=\frac{z-\frac{a^2}{z}}{2i}$

مثال: حاصل انتگرال $\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{\bar{z}-3i}dz$ را محاسبه کنید.

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{\bar{z}-3i}dz=\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{\frac{4}{z}-3i}dz=\oint\limits_{|z|=2}\frac{ze^z}{4-3iz}dz=2\pi i\,Res\left(f\left(\frac{4}{3i}\right)\right)=2\pi i\cdot\lim_{z\to\frac{4}{3i}}\frac{ze^z}{4-3iz}$$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to\frac{4}{3i}}\frac{ze^z+e^z}{-z}=\frac{4}{9}e^{\frac{4}{3i}}$$

مثال: حاصل انتگرال $I=\oint\limits_{|z|=1}\left(\frac{z}{|z|}+\sin z\right)d\bar{z}$ را بدست آورید.

$$d\bar{z}=d\left(\frac{z\bar{z}}{z}\right)=d\left(\frac{|z|^2}{z}\right)=d\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{z^2}dz$$

$$I=\oint\limits_{|z|=1}(z+\sin z)\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz=\oint\limits_{|z|=1}\left(\frac{-1}{z}-\frac{\sin z}{z^2}\right)dz=2\pi i(-1-1)=-4\pi i$$

تمرین: حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

1. $$\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\tan z}{z^2-1}dz=\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{(z^2-1)\cos z}dz=2\pi i\left(2\times\frac{\tan 1}{2}\right)=2\pi i\tan 1$$

$$z^2-1=0\Longrightarrow z=\pm 1$$

$\cos z=0\Longrightarrow z=\frac{\pi}{2}\pm k\pi$ (در ناحیه‌ی انتگرال‌گیری قرار ندارند.)

$$Res\ f(z)\Big|_{z=1}=\lim_{z\to 1}\frac{\tan z}{z+1}=\frac{\tan 1}{2}$$

$$Res\ f(z)\Big|_{z=-1}=\lim_{z\to -1}\frac{\tan z}{z-1}=\frac{-\tan 1}{-2}=\frac{\tan 1}{2}$$

$$2.\ \oint_{|z-2-i|=2} \frac{z+1}{z^3-2z^2}\,dz = 2\pi i\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}i$$

$$z^3-2z^2=0 \Longrightarrow z^2(z-2)=0 \Longrightarrow \begin{cases} z_1=0 & \times \\ z_2=2 & \checkmark \end{cases}$$

$$\operatorname{Res}(f(2)) = \lim_{z\to 2} \frac{z+1}{z^2} = \frac{3}{4}$$

$$3.\ \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^3(z^2+1)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{-1}{2}\right) = -\pi i$$

$$z^3(z^2+1)=0 \Longrightarrow \begin{cases} z=0 & \checkmark \\ z=\pm i & \times \end{cases}$$

$$\operatorname{Res}(f(0)) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[z^3\cdot\frac{e^z}{z^3(z^2+1)}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0} \frac{(z^2-1)(z^2+1)e^z - 4z(z+1)(z-1)^2e^z}{(z^2+1)^4}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$4.\ \oint_{|z|=1} z^2e^{\frac{1}{z}}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3}i$$

$$z^2e^{\frac{1}{z}} = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-2}} \Longrightarrow \operatorname{Res}(f(0)) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$5.\ \oint_{|z+\pi i|=1} \frac{z^2}{\sinh z}\,dz = 0$$

$\sinh z = 0 \Longrightarrow z = 0$ ، $|0+\pi i| = \pi \nless 1$ (تابع در ناحیه‌ی انتگرال‌گیری تحلیلی است.)

P.40

$$6.\ \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cos\frac{1}{z}}{1-z}\,dz = 2\pi i(\cos 1 - 1)$$

$z_1 = 0 \quad \checkmark$

$z_2 = 1 \quad \times$

$$\frac{\cos\frac{1}{z}}{1-z} = \left(1 - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \cdots\right)\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right) = -\left(\frac{1}{2!\,z^2} - \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots\right)+\cdots$$

$$= \frac{1}{z}\left(\frac{-1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots\right)+\cdots$$

$$\text{Res}\,(f(0)) = -\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots = \cos 1 - 1$$

$$7.\ \oint_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^2-3iz}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3}i\right) = \frac{-2}{3}\pi$$

$$z^2 - 3iz = 0 \Longrightarrow z(z-3i) = 0 \Longrightarrow \left|\begin{array}{ll} z=0 & \checkmark \\ z=3i & \times \end{array}\right.$$

$$\text{Res}\,(f(0)) = \lim_{z\to 0} \frac{\cosh z}{z-3i} = \frac{1}{-3i} = \frac{1}{3}i$$

$$8.\ \oint_{|z|=1} \frac{\tan \pi z}{z^3}\,dz = \oint_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z^3 \cos \pi z}\,dz = 2\pi i\left(0 - \frac{8}{\pi} - \frac{8}{\pi}\right) = -32i$$

$z^3 = 0 \Longrightarrow z = 0$ (قطب مرتبه دوم)

$$\text{Res}\,(f(0)) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{\tan \pi z}{z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{\pi z \sec^2 \pi z - \tan \pi z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\pi z(\sec^2 \pi z - 1)}{z^2}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{z\to 0} \frac{2\pi \sec \pi z \cdot \pi \sec \pi z \tan \pi z}{1} = 0$$

$$\text{Res}\left(f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{\sin \pi z}{z^3 \cos \pi z} = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \cancel{\left(z-\frac{1}{2}\right)} \frac{\sin \pi z}{-z^3 \pi \cancel{\left(z-\frac{1}{2}\right)}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{-\pi}{8}} = \frac{-8}{\pi}$$

$*\ \cos z \sim -\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\ ;\ z \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{Res}\left(f\left(\tfrac{-1}{2}\right)\right)=\lim_{z\to\frac{-1}{2}}\left(z+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\sin\pi z}{z^{3}\cos\pi z}=\lim_{z\to\frac{-1}{2}}\left(z+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\sin\pi z}{z^{3}\pi\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{-\pi}{2}}{\frac{\pi}{8}}=\frac{-8}{\pi}$$

$$*\ \cos z\sim z+\frac{\pi}{2}\ ;\ z\to\frac{-\pi}{2}$$

9. $$\oint_{|z|=1}\frac{\cot z}{z}\,dz=\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z\sin z}\,dz=2\pi i(0)=0$$

$z\sin z=0 \Rightarrow z=0$ قطب مرتبه‌ی دوم

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=0}=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left[z^{2}\frac{\cos z}{z\sin z}\right]=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}(\cos z)=\lim_{z\to0}-\sin z=0$$

10. $$\oint_{|z-i|=1}z^{2}\tanh z\,dz=\oint_{|z-i|=1}z^{2}\frac{\sinh z}{\cosh z}\,dz=2\pi i\left(\frac{-\pi^{2}}{4}\right)=-\frac{\pi^{3}}{2}i$$

$$\cosh z=0\Longrightarrow\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}=0\Longrightarrow e^{2z}+1=0\Longrightarrow e^{2z}=-1\Longrightarrow 2z=\ln(-1)$$

$$\Longrightarrow z=\frac{\ln 1+i(\pi\pm2k\pi)}{2}\Longrightarrow z=\frac{\pi\pm2k\pi}{2}i\xrightarrow{|z-i|=1}z=\frac{\pi}{2}i$$

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=\frac{\pi}{2}i}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}i}\frac{z^{2}\sinh z}{(\cosh z)'}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}i}\frac{z^{2}\sinh z}{\sinh z}=\frac{-\pi^{2}}{4}$$

محاسبه‌ی انتگرال های حقیقی با استفاده از انتگرال مختلط :

۱. انتگرال های حقیقی به فرم $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ با تغییر متغیر زیر قابل حل می‌باشند:

$$z=e^{i\theta} \Longrightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}\,,\ \cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2} \Longrightarrow * \int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=\oint_{|z|=1} f(z)dz$$

مثال: انتگرال $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta}$ را حل کنید.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2}-\frac{z-z^{-1}}{2i}}=\oint_{|z|=1}\frac{2dz}{-z^2+2\sqrt{2}iz+1}=2\pi i\,\mathrm{Res}\,f(z)\Big|_{z=i(\sqrt{2}-1)}=2\pi$$

$$-z^2+2\sqrt{2}iz+1=0 \Longrightarrow z=i(\sqrt{2}\pm1)$$

$$\left|\begin{array}{l} z_1=i(\sqrt{2}+1)\Longrightarrow |z_1|>1 \\ \\ z_2=i(\sqrt{2}-1)\Longrightarrow |z_2|<1 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \mathrm{Res}\,f(z)\Big|_{z=i(\sqrt{2}-1)}=\lim_{z\to i(\sqrt{2}-1)}\frac{2}{-2z+2\sqrt{2}i+0}=-i$$

مثال: با فرض $n\in N$، انتگرال زیر را حل کنید.

$$I=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\,e^{-i(n\theta+\sin\theta)}\,d\theta$$

$$z=e^{i\theta}\Longrightarrow d\theta=\frac{dz}{iz},\ e^{-i\theta}=\frac{1}{z}$$

$$I=\int_0^{2\pi} e^{(\cos\theta-i\sin\theta)}\,e^{-in\theta}d\theta=\int_0^{2\pi} e^{e^{-i\theta}}\left(e^{i\theta}\right)^{-n}d\theta=\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}z^{-n}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{e^{\frac{1}{z}}dz}{iz^{n+1}}$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f(0))=2\pi i(0)=0$$

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}\times\frac{1}{iz^{n+1}}=\frac{1}{iz^{n+1}}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\dots\right)\xrightarrow{n\geq1}\mathrm{Res}\,f(z)\Big|_{z=0}=0$$

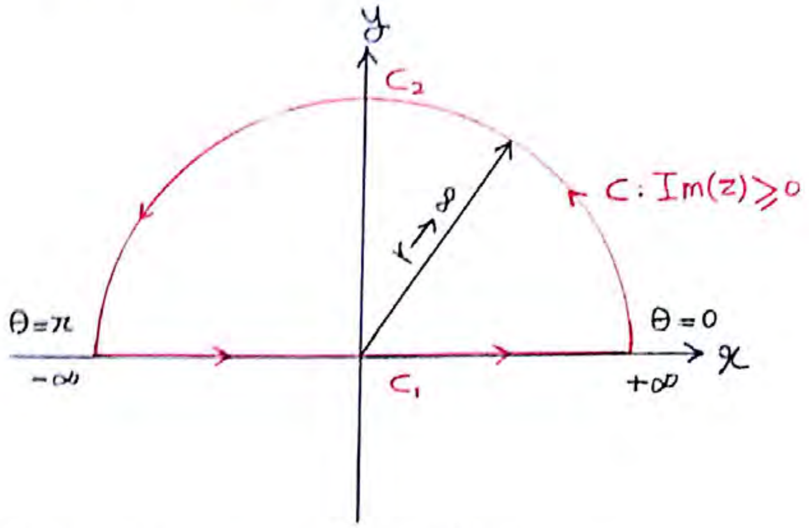
2. انتگرال های حقیقی به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای برحسب متغیر x هستند و درجه‌ی $Q(x)$

حداقل دو واحد از $P(x)$ بزرگتر باشد و $Q(x)$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int_{Im(z)\geqslant 0} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\,(Im(z_j)>0)\right)$$

$$C_1: \left| \begin{array}{l} z = x \\ \qquad\qquad -\infty < x < +\infty \\ dz = dx \end{array} \right.$$

$$C_2: \left| \begin{array}{l} z = re^{i\theta} \quad (r\to\infty) \\ \qquad\qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ dz = rie^{i\theta}d\theta \end{array} \right.$$



$$I = \int_{Im(z)\geqslant 0} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \underbrace{\cancel{\int_0^{\pi} \frac{P(re^{i\theta})}{Q(re^{i\theta})}\,rie^{i\theta}d\theta}}_{0 \leftarrow (r\to\infty)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

مثال. حاصل انتگرال $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ را محاسبه کنید.

$$I = \int_{Im(z)\geqslant 0} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(i)) = 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right) = \pi$$

$z = \pm i$ نقاط تکین مرتبه‌ی اول $\xRightarrow{Im(z)>0}$ $\mathrm{Res}\, f(z)\Big|_{z=i} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(1+z^2)'} = \lim_{z\to i} \frac{1}{2z} = \frac{1}{2i}$

مثال: حاصل انتگرال $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$ را بدست آورید.

$$I = \int_{Im(z)\geqslant 0} \frac{2z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f(i)) + \mathrm{Res}(f(2i))\right] = 2\pi i\left(\frac{i}{3} - \frac{2i}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

نقاط تکین تابع $f(z)$: $z = \pm i, \pm 2i \xRightarrow{Im(z)>0} z = +i, +2i$

$$\mathrm{Res}(f(i)) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{2z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i} \frac{2z^2}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{i}{3}$$

$$\mathrm{Res}(f(2i)) = \lim_{z\to 2i} (z-2i)\frac{2z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i} \frac{2z^2}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{-2i}{3}$$

3 - انتگرال های حقیقی به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos ax\,dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin ax\,dx$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای برحسب متغیر x هستند و درجه‌ی $Q(x)$ حداقل دو واحد از $P(x)$ بزرگتر باشد و $Q(x)$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$$* \int_{Im(z)\geq 0}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}dz=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos ax\,dx}_{Re}+i\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin ax\,dx}_{Im}$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos ax\,dx=Re\Big(\int_{Im(z)\geq 0}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}dz\Big)$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin ax\,dx=Im\Big(\int_{Im(z)\geq 0}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}dz\Big)$$

مثال: حاصل انتگرال $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$ را بدست آورید.

$$I_1=\int_{Im(z)\geq 0}\frac{e^{i2z}}{1+z^2}dz=2\pi i\Big(\frac{e^{-2}}{2i}\Big)=\frac{\pi}{e^2}$$

$$z=\pm i \underset{Im(z)\geq 0}{\Longrightarrow} z=i \Longrightarrow Res(f(i))=\lim_{z\to i}\frac{e^{i2z}}{(1+z^2)'}=\lim_{z\to i}\frac{e^{i2z}}{2z}=\frac{e^{-2}}{2i}$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx=Re(I_1)=\frac{\pi}{e^2}$$

مثال: حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+2x+5}dx$ را بدست آورید.

$$I=\int_{Im(z)\geq 0}\frac{e^{iz}}{z^2+2z+5}dz=2\pi i\Big(\frac{e^{-2}(\cos 1-i\sin 1)}{4i}\Big)=\frac{\pi e^{-2}\sin 1}{2}+i\,\frac{\pi e^{-2}\cos 1}{2}$$

$$z^2+2z+5=0\Longrightarrow z=-1\pm 2i \xrightarrow{Im(z)>0} z=-1+2i$$

$$Res(f(-1+2i))=\lim_{z\to -1+2i}(z+1-2i)\frac{e^{iz}}{z^2+2z+5}dz=\lim_{z\to -1+2i}\frac{e^{iz}}{(z+1+2i)}=\frac{e^{-2}e^{-i}}{4i}$$

$$=\frac{e^{-2}(\cos 1-i\sin 1)}{4i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+5}dx = \mathrm{Im}(I) = \frac{\pi e^{-2}\cos 1}{2}$$

نکته: در مواردی که تابع حقیقی زیرانتگرال زوج باشد، حاصل انتگرال در بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ دو برابر مقدار انتگرال در بازه‌ی $[0,+\infty)$ خواهد بود.

$$* \; f(-x) = f(x) \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

مثال: حاصل انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ را بدست آورید.

چون تابع زیر انتگرال زوج است، داریم:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{Im}(z)\geqslant 0}\frac{dz}{z^4+1} = \frac{1}{2}\left[2\pi i\left(\frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4}+\frac{e^{-i\frac{9\pi}{4}}}{4}\right)\right]$$

$$z^4+1=0 \Longrightarrow z = \underset{\checkmark}{e^{i\frac{\pi}{4}}}, \underset{\checkmark}{e^{i\frac{3\pi}{4}}}, \underset{\times}{e^{i\frac{5\pi}{4}}}, \underset{\times}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}$$

$$\mathrm{Res}(f(e^{i\frac{\pi}{4}})) = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\frac{1}{4z^3} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4}$$

$$\mathrm{Res}(f(e^{i\frac{3\pi}{4}})) = \lim_{z\to e^{i\frac{3\pi}{4}}}\frac{1}{4z^3} = \frac{e^{-i\frac{9\pi}{4}}}{4}$$

مثال. حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}dx$ را بدست آورید.

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(I) = \frac{\pi}{2e}$$

$$I = \int_{\mathrm{Im}(z)\geqslant 0}\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{-i}{2e}\right) = \frac{\pi}{e}$$

$$\mathrm{Res}(f(i)) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}\right] = \frac{-i}{2e}$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x^2)^2}dx = \mathrm{Im}(I) = 0 \Longrightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{(1+x^2)^2}dx$$ (نمی‌توان اظهار نظر کرد.)

P.43

تمرین: انتگرال های حقیقی زیر را حل کنید.

1. $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\pi+\cos\theta}$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\pi+\frac{z+z^{-1}}{2}}=\oint_{|z|=1}\frac{2dz}{i(z^2+2\pi z+1)}=2\pi i\left(\frac{-i}{\sqrt{\pi^2-1}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{\pi^2-1}}$$

$$z^2+2\pi z+1=0\Rightarrow z=-\pi\pm\sqrt{\pi^2-1}\xrightarrow{|z|=1} z=-\pi+\sqrt{\pi^2-1}=z_1$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=z_1}=\lim_{z\to z_1}\frac{2}{i(z^2+2\pi z+1)'}=\lim_{z\to z_1}\frac{-i}{z+\pi}=\frac{-i}{\sqrt{\pi^2+1}}$$

2. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

$$I=\int_{Im(z)\geqslant 0}\frac{1+z^2}{1+z^4}dz=2\pi i\left(-\sqrt{2}\,i-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$1+z^4=0\Rightarrow z=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\ ;\ k=0,1,2,3$$

$z_1=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i$ (✓) $z_2=-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i$ (✓) $z_3=-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i$ (x) $z_4=\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i$ (x)

$$\operatorname{Res}(f(z_1))=\lim_{z\to z_1}\frac{1+z^2}{4z^3}=-\sqrt{2}\,i \qquad \operatorname{Res}(f(z_2))=\lim_{z\to z_2}\frac{1+z^2}{4z^3}=-\frac{\sqrt2}{4}i$$

3. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}$

$$I=\int_{Im(z)\geqslant 0}\frac{dz}{(z^2-2z+5)^2}=2\pi i\left(\frac{-i}{64}\right)=\frac{\pi}{32}$$

$$(z^2-2z+5)^2=0\Rightarrow z=1\pm 2i\xrightarrow{Im(z)>0} z=1+2i=z_1$$

$$\operatorname{Res}(f(z_1))=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[(z-z_1)^2f(z)\right]=\lim_{z\to z_1}\frac{-1}{(z-1+2i)^3}=\frac{-i}{64}$$

4. $I=\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{13-12\cos\theta}\, d\theta$

$$I=\oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{dz}{iz}}{13-12\,\frac{z+z^{-1}}{2}} = \oint_{|z|=1} \frac{z^2+z^{-2}}{2i(-6z^2+13z-6)}\, dz = \oint_{|z|=1} \frac{(z^4+1)\, i\, dz}{(12z^2-26z+12)\, z^2}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{13}{72}i - \frac{97}{360}i\right) = \frac{8}{45}\pi$$

$z^2(12z^2-26z+12)=0 \Longrightarrow z_1=\frac{3}{2}$ (قطب مرتبه‌ی اول) (x) , $z_2=\frac{2}{3}$ (قطب مرتبه‌ی اول) (✓) , $z_3=0$ (قطب مرتبه‌ی دوم) (✓)

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{(z^4+1)i}{12z^2-26z+12}\right) = \frac{13}{72}i$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=\frac{2}{3}} = \lim_{z\to\frac{2}{3}} \frac{(z^4+1)i}{(12z^4-26z^3+12z^2)'} = \lim_{z\to\frac{2}{3}} \frac{(z^4+1)i}{48z^3-78z^2+24z} = -\frac{97}{360}i$$

5. $I=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\, dx$

$$I=\int_{\operatorname{Im}(z)\geqslant 0} \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}\, dz = 2\pi i\left(\frac{i}{2}-\frac{3i}{4}\right) = 2\pi i\left(\frac{-i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$z^4+5z^2+4=0 \Longrightarrow w^2+5w+4=0\ ;\ z^2 \triangleq w \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} w_1=-1 \Longrightarrow z^2=-1 \Longrightarrow z=\pm i \\ w_2=-4 \Longrightarrow z^2=-4 \Longrightarrow z=\pm 2i \end{array}\right.$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=i} = \lim_{z\to i} \frac{2z^2-1}{4z^3+10z} = \frac{-3}{6i} = \frac{i}{2}$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=2i} = \lim_{z\to 2i} \frac{2z^2-1}{4z^3+10z} = \frac{-9}{-12i} = \frac{-3i}{4}$$

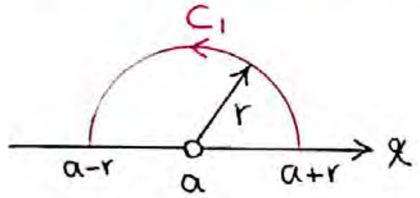
قضیه: فرض کنید $I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ باشد که در آن $f(x)$ تابعی حقیقی به فرم $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ بوده که درجه‌ی $Q(x)$ حداقل دو واحد از درجه‌ی $P(x)$ بزرگتر است و $Q(x)$ دارای ریشه‌ی حقیقی می‌باشد. در این صورت حاصل انتگرال فوق به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$* \; I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{Im(z)\geq 0} f(z)dz+\pi i\sum_{j=1}^{m}Res(f(z))\Big|_{z=a_j} \quad ; \quad Im(a_j)=0$$

$$\Rightarrow \quad I=2\pi i\sum_{j=1}^{k}Res(f(z))\Big|_{z=z_j}+\pi i\sum_{j=1}^{m}Res(f(z))\Big|_{z=a_j}$$

که z_j نقاط تکین تابع $f(z)$ واقع در نیم صفحه‌ی $Im(z)>0$ و a_j نقاط تکین قطب مرتبه‌ی اول واقع در محور حقیقی (Re) می‌باشند.

اثبات: فرض کنید $z=a$ نقطه‌ی تکین از نوع قطب مرتبه‌ی اول روی محور حقیقی باشد. حاصل انتگرال تابع $f(z)$ روی مسیر C_1 به صورت زیر محاسبه خواهد شد:



مسیر C_1 نیم دایره‌ای به مرکز a و شعاع r می‌باشد. با فرض اینکه $r\to 0$، C_1 بر نقطه‌ی a منطبق خواهد شد.

سری لوران تابع $f(z)$ حول $z=a$ به صورت زیر خواهد بود:

$$f(z)=\frac{b_1}{z-a}+g(z)\;;\; b_1=Res\, f(z)\Big|_{z=a} \quad (1)$$

با توجه به اینکه $z=a$ قطب مرتبه‌ی اول است، در بسط لوران $f(z)$ حول $z=a$، کوچکترین توان $(z-a)^m$، $m=-1$ خواهد بود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $g(z)$ یک سری تیلور حول $z=a$ می‌باشد و روی مسیر C_1 تحلیلی است:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

از طرفین عبارت (1) روی C_1 انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_1}\frac{b_1}{z-a}dz+\int_{C_1} g(z)dz$$

با تغییر متغیر زیر $\int_{C_1}\frac{b_1}{z-a}dz$ قابل محاسبه است:

$$z\triangleq a+re^{i\theta} \Rightarrow dz=ire^{i\theta}d\theta \;;\; 0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

$$\int_{C_1}\frac{b_1}{z-a}dz=\int_{0}^{\pi}\frac{b_1}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta=\int_{0}^{\pi}b_1 i\,d\theta=\pi i b_1$$

$g(z)$ تحلیلی است و حاصل انتگرال آن فقط به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد:

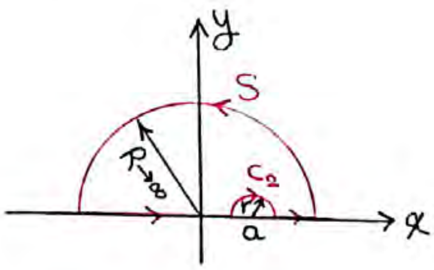
$$\int_{C_1} g(z)dz = \int_{a+r}^{a-r} g(z)dz = \int_{a+r}^{a-r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{a+r}^{a-r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(-r)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1} = 0 \quad (r \to 0)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \pi i b_1 \quad (2)$$

برای محاسبه‌ی $I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ باید انتگرال $f(z)$ را روی مسیر S بدست آوریم:



$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_S f(z)dz$$

چون جهت چرخش مسیر C_2 عکس C_1 است، خواهیم داشت:

$$\int_{C_2} f(z)dz = -\int_{C_1} f(z)dz = -\pi i b_1$$

$$I = \int_S f(z)dz = \int_{Im(z)\geqslant 0} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = \int_{Im(z)\geqslant 0} f(z)dz + \pi i b_1$$

با تعمیم روند فوق برای m نقطه‌ی تکین از قطب مرتبه‌ی اول که روی محور حقیقی قرار دارند $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$، می توان نتیجه گرفت:

$$* \; I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{Im(z)\geqslant 0} f(z)dz + \pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=a_j}$$

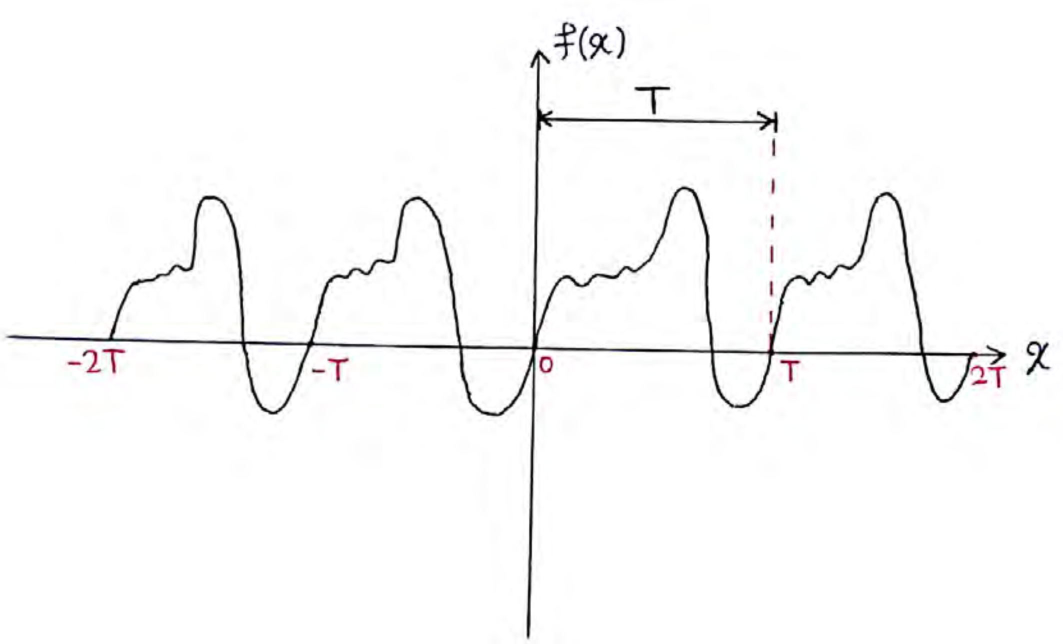
آنالیز فوریه (Fourier Analysis):

یکی از روش های اساسی پردازش یک شکل موج یا یک تابع ریاضی متناوب استفاده از توابع یا دنباله های متعامد می باشد که می توان به جای تحلیل های پیچیده، از توابعی که قابلیت مشابهی دارند ولی دارای تحلیل ساده تری هستند، استفاده نمود. یکی از این مجموعه های متعامد مهم، مجموعه ی سینوس ها و کسینوس ها یا مجموعه توابع نمایی هستند.

فوریه، ریاضی دان و فیزیکدان فرانسوی از بررسی مسائل انتقال حرارت دریافت که توابع متناوب را می توان با مجموعه ای نامتناهی از توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس نمایش داد.

تابع یا سیگنال متناوب: تابع یا سیگنالی را متناوب می نامند هرگاه شکل آن در بازه های مشخص که دوره ی تناوب نامیده می شود، تکرار شود. اگر T دوره ی تناوب تابع متناوب $f(x)$ باشد، خواهیم داشت:

$$* \ f(x+T) = f(x)$$



تابع زوج: $f(x)$ را تابعی زوج گویند هرگاه $f(-x) = f(x)$ باشد. در این صورت:

$$* \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

تابع فرد: $f(x)$ را تابعی فرد گویند هرگاه $f(-x) = -f(x)$ باشد. در این صورت:

$$* \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

نکته: اگر $f(x)$ و $g(x)$ هر دو توابعی زوج یا فرد باشند، $f(x)g(x)$ تابعی زوج خواهد بود، ولی اگر یکی زوج و دیگری فرد باشد، $f(x)g(x)$ تابعی فرد خواهد بود.

تابع متعامد: دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در فاصله ی (a,b) متعامد گوییم هرگاه:

$$* \int_{a}^{b} f(x)\overline{g(x)}dx = 0$$

در این رابطه $\overline{g(x)}$ مزدوج تابع $g(x)$ می‌باشد. اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی حقیقی باشند، با توجه به اینکه $\overline{g(x)}=g(x)$ خواهد بود، شرط متعامد بودن دو تابع به صورت زیر تفسیر خواهد یافت:

$$* \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

برای مثال توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در بازه‌ی $(0,\pi)$ متعامد هستند:

$$\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{-\cos 2x}{4}\Big|_0^\pi = \frac{-1}{4} - \frac{-1}{4} = 0$$

* با تعمیم عبارت فوق می‌توان نشان داد توابع $\sin x$ و $\cos x$ در بازه‌ی $(0,\pi)$ و ضرایب این بازه یعنی $(0,n\pi)$ متعامد هستند.

تعریف: مجموعه تابع $\phi_i(x)\Big|_{i=1}^m$ را در بازه‌ی (a,b) متعامد گوییم، هرگاه:

$$* \int_a^b \phi_i(x)\overline{\phi_j(x)}dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$$

تعریف: مجموعه تابع $\phi_i(x)\Big|_{i=1}^m$ را در بازه‌ی (a,b) متعامد یکه گوییم، هرگاه:

$$* \int_a^b \phi_i(x)\overline{\phi_j(x)}dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

مثال: آیا مجموعه تابع $f(x)=\left\{\cos nx\right\}_{n=0}^m$ در بازه‌ی $0<x<\pi$ متعامد است؟

$$n \neq m \Longrightarrow \int_0^\pi \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left[\cos(nx-mx)+\cos(nx+mx)\right]dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} + \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]\Bigg|_0^\pi = 0$$

$$n=m \Longrightarrow \int_0^\pi \cos^2 nx\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(1+\cos 2nx)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2nx}{4n}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

متعامد است.

مثال: آیا مجموعه تابع $f(x)=\left\{e^{in\frac{2\pi}{T}x}\right\}_{n=1}^m$ متناوب است؟ متعامد بودن آن را بررسی کنید.

$$f(x+T) = e^{in\frac{2\pi}{T}(x+T)} = e^{in\frac{2\pi}{T}x} \cdot \underbrace{e^{in2\pi}}_{1} = e^{in\frac{2\pi}{T}x} = f(x)$$

متناوب است.

$$\int_0^T e^{in\frac{2\pi}{T}x} \cdot e^{-im\frac{2\pi}{T}x}\, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T & n = m \end{cases}$$

چون تابع زیر انتگرال فرد است، حاصل انتگرال در دوره‌ی تناوب تابع، صفر خواهد بود.

سری فوریه: سری فوریه‌ی یک تابع در واقع بسط آن تابع به صورت مجموعه‌ای از توابع متعامد با شد. یعنی اگر مجموعه توابع $\phi_n(x)\Big|_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی متعامد یکه در بازه‌ی (a,b) باشد، آنگاه تحت شرایطی می‌توان تابع $f(x)$ را برحسب آن‌ها نوشت. صورت کلی سری فوریه‌ی یک تابع به صورت زیر است. C_nها ضرایب سری فوریه نامیده می‌شوند:

$$* \; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

برحسب نوع تابع $\phi_n(x)$، حالات زیر برای سری فوریه حاصل می‌شود:

1. اگر $\phi_n(x)$ به صورت مجموعه‌ای از توابع سینوس و کسینوس انتخاب شود، آنگاه سری بدست آمده را سری فوریه‌ی مثلثاتی می‌نامیم.

2. اگر $\phi_n(x)$ به صورت مجموعه‌ای از توابع نمایی انتخاب شود، آنگاه سری بدست آمده را سری فوریه‌ی نمایی می‌نامیم.

محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه: برای محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه، طرفین سری فوریه را در $\phi_m(x)$ ضرب نموده و در بازه‌ی $a < x < b$ از عبارت بدست آمده، انتگرال می‌گیریم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \Longrightarrow \int_a^b \phi_m(x) f(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)\, \phi_m(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x)\, dx$$

با توجه به متعامد بودن تابع $\phi_n(x)$، انتگرال $\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\, dx$ صرفاً به ازای $n=m$ مقدار $(=1)$ دارد و در صورتی که $n \neq m$ باشد، حاصل انتگرال صفر است. بنابراین:

$$* \; c_n = \int_a^b f(x) \phi_n(x)\, dx$$

سری فوریه‌ی مثلثاتی: سری فوریه‌ی یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب T، نمایشی از تابع مذکور به صورت مجموع بی‌نهایت جمله از مجموعه توابع متعامد سینوس و کسینوس $\{1, \cos \omega_0 x, \cos 2\omega_0 x, \ldots, \sin \omega_0 x, \sin 2\omega_0 x, \ldots\}$ می‌باشد که به صورت زیر نمایش داده می‌شود،

$$* \; f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x)$$

$$* \; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \; ; \; [\omega_0] = \frac{rad}{sec} = \frac{1}{sec}$$ بسامد زاویه‌ای تابع

$$* \; f = \frac{1}{T} \; ; \; [f] = \frac{1}{sec} = Hz$$ بسامد تابع

ضرایب سری فوریه :

$$* \; a_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(x)\,dx$$

$$* \; a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(x)\cos n\omega_0 x\,dx$$

$$* \; b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(x)\sin n\omega_0 x\,dx$$

* a_0 را مقدار متوسط تابع یا مقدار DC سیگنال می نامند.

معمولاً سری فوریه را در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ می‌نویسند، در این حالت دوره‌ی تناوب $T=2\pi$ بوده و سری فوریه و ضرایب آن به صورت زیر خواهند بود:

$$\omega_0 = 1 \implies * \; f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$* \; a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$* \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

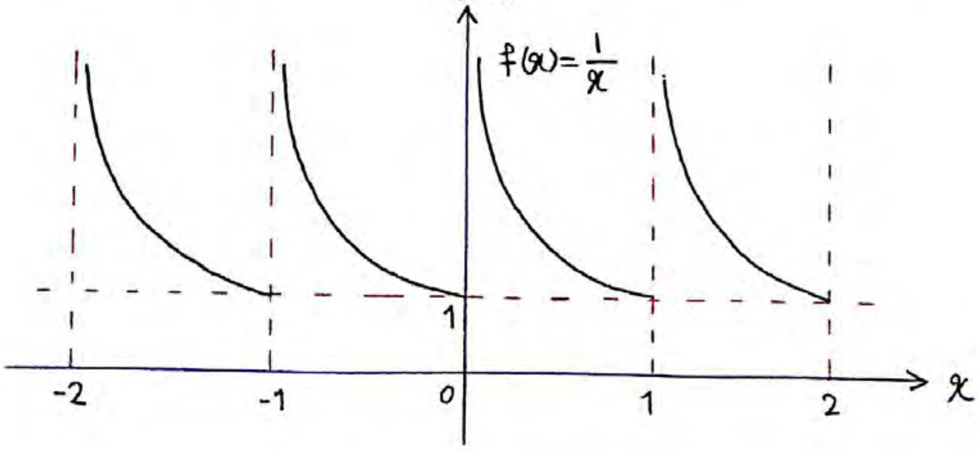
$$* \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

شرایط دیریکله: شرایط دیریکله، شرایط کافی برای همگرایی سری فوریه‌ی متناظر با یک تابع می باشند که عبارت اند از:

شرط اول دیریکله: تابع $f(x)$ در دوره‌ی تناوب خود، مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، یعنی:

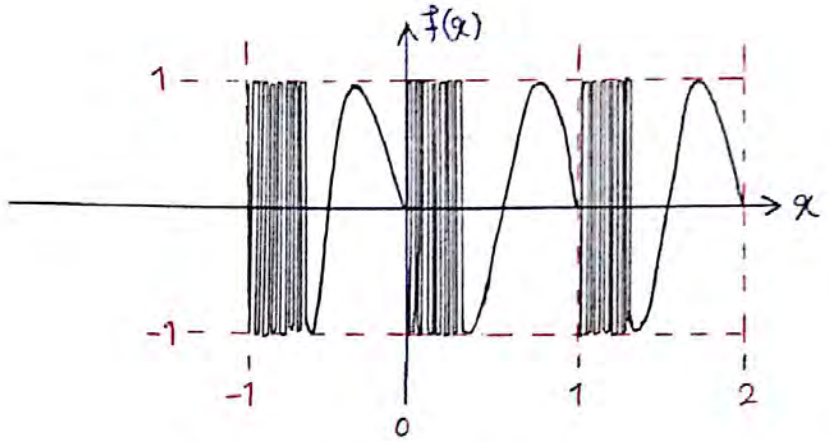
$$* \int_{(T)} |f(x)|\,dx < \infty$$

برای مثال تابع متناوب $\{f(x)=\frac{1}{x} \; ; \; 0<x<1\}$ با دوره‌ی تناوب $T=1$، شرط اول دیریکله را برآورده نمی‌کند. چون $\int_0^1 \left|\frac{1}{x}\right|dx=\infty$.



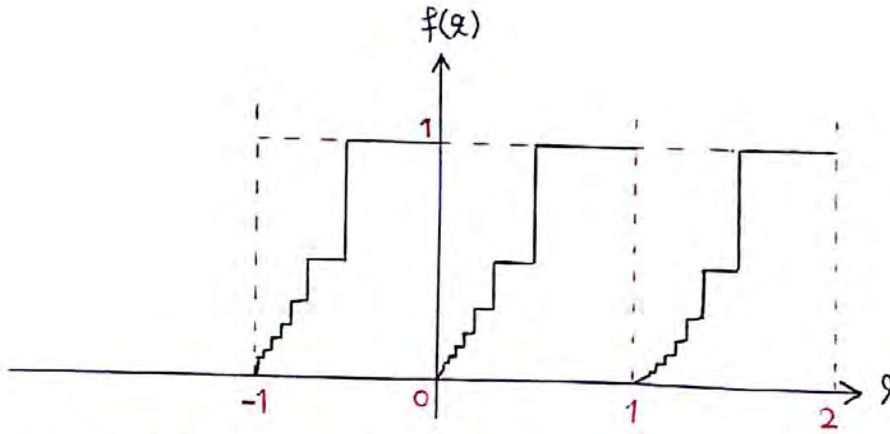
شرط دوم دیریکله. تابع $f(x)$ در دوره‌ی تناوب خود دارای تعداد محدودی اکسترمم باشد.

برای مثال تابع $\{f(x)=\sin\frac{2\pi}{x}\,;\,0<x<1\}$ با دوره‌ی تناوب $T=1$، شرط دوم دیریکله را برآورده نمی‌کند.



شرط سوم دیریکله: تابع $f(x)$ در دوره‌ی تناوب خود دارای تعداد محدودی نقاط ناپیوسته باشد.

برای مثال تابع $\{f(x)=\frac{1}{\lfloor \frac{1}{x}\rfloor}\,;\,0<x<1\}$ با دوره‌ی تناوب $T=1$، شرط سوم دیریکله را برآورده نمی‌کند.

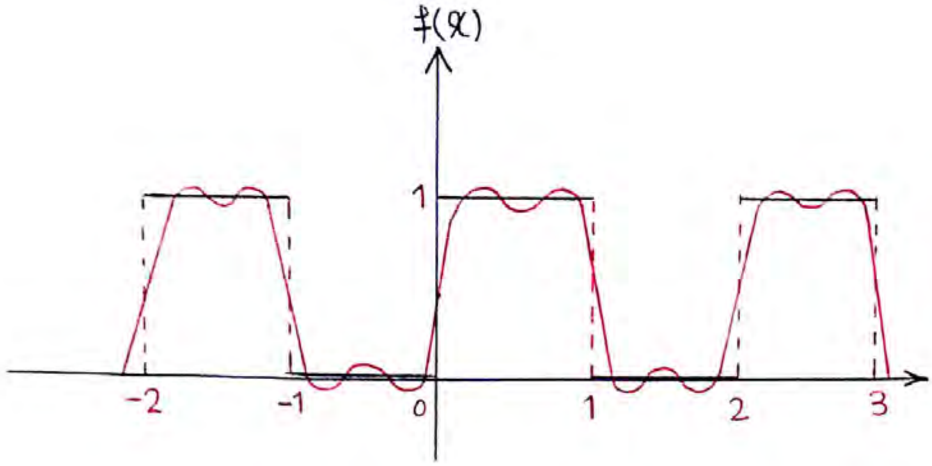


باید توجه نمود که شرایط دیریکله شروط لازم نیستند. بنابراین اگر تابع مفروض $f(x)$ شرایط دیریکله را برآورده سازد، قطعاً می‌توان آن را با سری فوریه نمایش داد ولی اگر شرایط دیریکله در مورد یک تابع برقرار نباشند، در مورد همگرایی سری فوریه‌ی متناظر با آن تابع نمی‌توان اظهار نظر کرد.

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در دوره‌ی تناوب خود پیوسته‌ی تکه‌ای بوده و در هر نقطه از بازه‌ی مذکور حدهای چپ و راست داشته باشد، آنگاه سری فوریه‌ی تابع $f(x)$ در هر نقطه به جز نقاطی همچون x_0 که در آن‌ها تابع ناپیوسته است، برابر مقدار تابع $f(x)$ در آن نقطه خواهد بود و در نقاطی همچون x_0، سری فوریه برابر میانگین حدهای چپ و راست تابع در آن نقطه می‌باشد.

$$* \; x=x_0 \Longrightarrow a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 x_0+b_n\sin n\omega_0 x_0\right)=\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

مثال: سری فوریه‌ی موج مربعی $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 1<x<2\end{cases}$ را بدست آورید.



$$T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

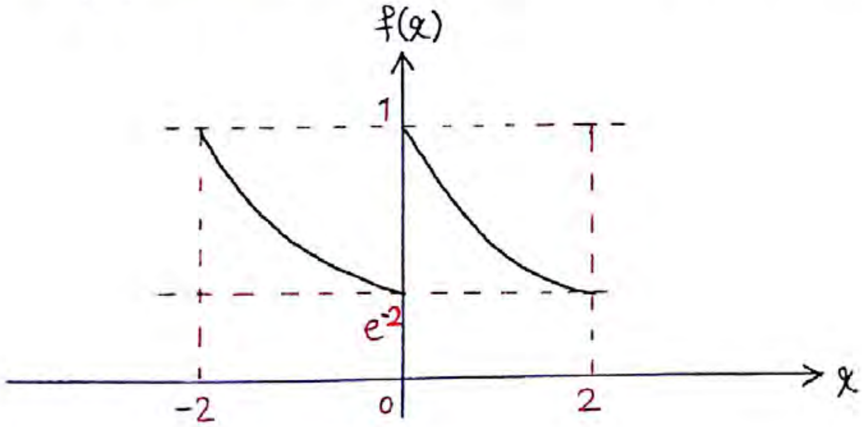
$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 1\,dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^1 1\cos n\pi x\,dx = \left.\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right|_0^1 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^1 1\sin n\pi x\,dx = \left.\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right|_0^1 = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)\sin n\pi x$$

مثال. تابع $\{f(x) = e^{-x} \;;\; 0 < x < 2\}$ مفروض است. سری فوریه‌ی این تابع را نوشته وسپس مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را بدست آورید.



$$T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\left.(-e^{-x})\right|_0^2 = \frac{1-e^{-1}}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 e^{-x}\cos n\pi x\,dx = \frac{n\pi}{1+n^2\pi^2}(1-e^{-2})$$

$$I = \int e^{-x}\cos n\pi x\,dx = e^{-x}\frac{\sin n\pi x}{n\pi} - e^{-x}\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2} - \int e^{-x}\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}dx \Longrightarrow$$

$$I = e^{-x}\frac{\sin n\pi x}{n\pi} - e^{-x}\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2} - \frac{I}{n^2\pi^2} \Longrightarrow$$

$$I = \frac{e^{-x}\,n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(n\pi\sin n\pi x - \cos n\pi x\right) + C$$

	مشتق	انتگرال
$\oplus$	e^{-x}	$\cos n\pi x$
$\ominus$	$-e^{-x}$	$\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
$\oplus$	e^{-x}	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 e^{-x}\sin n\pi x\,dx = \frac{n^2\pi^2}{1+n^2\pi^2}(1-e^{-2})$$

$$I = \int e^{-x}\sin n\pi x\,dx = -e^{-x}\frac{\cos n\pi x}{n\pi} - e^{-x}\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2} - \int e^{-x}\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}dx \Longrightarrow$$

$$I = -e^{-x}\frac{\cos n\pi x}{n\pi} - e^{-x}\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2} - \frac{I}{n^2\pi^2} \Longrightarrow$$

$$I = \frac{-e^{-x}\,n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(\sin n\pi x + n\pi\cos n\pi x\right) + C$$

	مشتق	انتگرال
$\oplus$	e^{-x}	$\sin n\pi x$
$\ominus$	$-e^{-x}$	$\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x$
$\oplus$	e^{-x}	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x$

$$f(x) = \frac{1-e^{-2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{1+n^2\pi^2}(1-e^{-2})\cos n\pi x + \frac{n^2\pi^2}{1+n^2\pi^2}(1-e^{-2})\sin n\pi x\right)$$

$$x=0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{1+n^2\pi^2}(1-e^{-2}) + \frac{1-e^{-2}}{2} = \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n + \frac{1-e^{-2}}{2} = \frac{e^0+e^{-2}}{2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n = e^{-2}$$

مثال: سری فوریه‌ی تابع $\{f(x)=x^2\ ;\ 0<x<2\pi\}$ را بدست آورده و حاصل این سری را در نقاط $x=\pi$ و $x=2\pi$ حساب کنید.
به کمک این سری، ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$T=2\pi \Longrightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{2\pi}=1$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx=\frac{4\pi^2}{3}$$

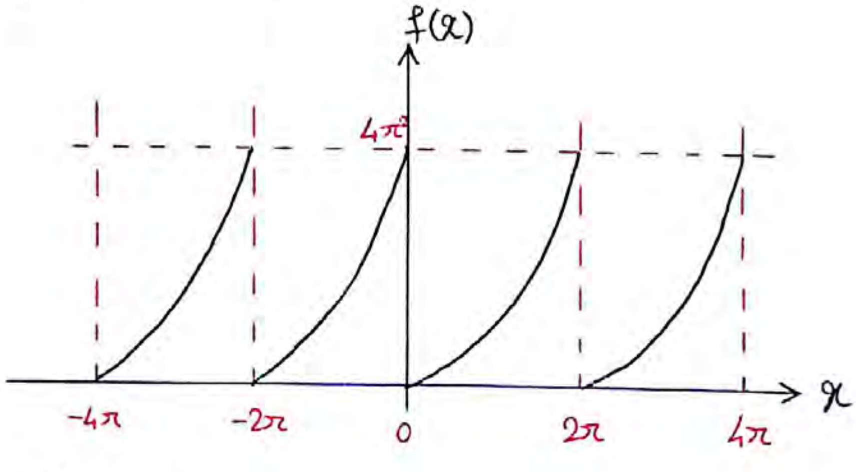
$$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{-4\pi}{n}$$

	مشتق	انتگرال
$\oplus$	x^2	$\cos nx$
$\ominus$	$2x$	$\frac{1}{n}\sin nx$
$\oplus$	2	$\frac{-1}{n^2}\cos nx$
$\ominus$	0	$\frac{-1}{n^3}\sin nx$

	مشتق	انتگرال
$\oplus$	x^2	$\sin nx$
$\ominus$	$2x$	$\frac{-1}{n}\cos nx$
$\oplus$	2	$\frac{-1}{n^2}\sin nx$
$\ominus$	0	$\frac{1}{n^3}\cos nx$

$$f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos n\pi x-\frac{4\pi}{n}\sin n\pi x\right)$$



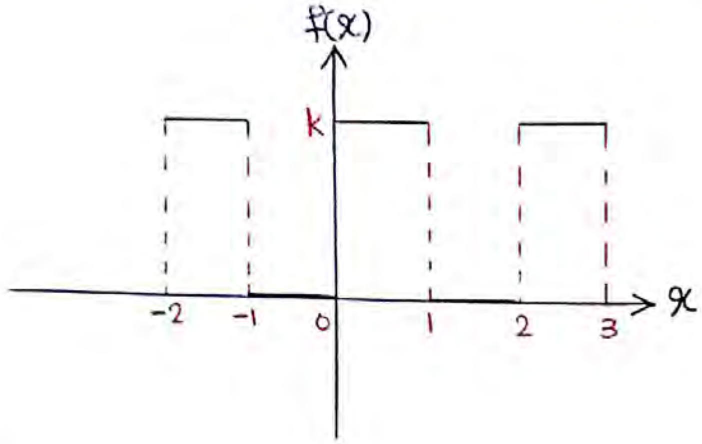
$$x=\pi \quad (\text{پیوسته}) \Longrightarrow f(\pi)=\pi^2$$

$$x=2\pi \quad (\text{ناپیوسته}) \Longrightarrow f(2\pi)=\frac{f(2\pi^+)+f(2\pi^-)}{2}=\frac{0+4\pi^2}{2}=2\pi^2$$

$$2\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=\frac{6\pi^2-4\pi^2}{3}=\frac{2\pi^2}{3} \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \Longrightarrow \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

مثال. به کمک سری فوریه‌ی تابع زیر، مقدار عبارت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ را بدست آورید.



$$f(x)=\begin{cases} k & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<2 \end{cases}$$

$$T=2 \Longrightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^1 k\,dx=\frac{k}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 k\cos n\pi x\,dx+\int_1^2 0\cos n\pi x\,dx\right]=\frac{k}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1=0$$

$$b_n=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 k\sin n\pi x\,dx+\int_1^2 0\cos n\pi x\,dx\right]=\frac{-k}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{-k}{n\pi}\left[\cos n\pi-\cos 0\right]$$

$$=\frac{-k}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\frac{k}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases} \frac{2k}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{k}{2}+\sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ فرد})}}^{\infty}\frac{2k}{n\pi}\sin n\pi x$$

$$f(x)=\frac{k}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2k}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\pi x$$

$$x=\frac{1}{2}\ (\text{پیوسته}) \Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=k=\frac{k}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2k}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{k}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2k}{(2n+1)\pi}(-1)^n$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}=\frac{1}{2} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}=\frac{\pi}{4}$$

تمرین : سری فوریه‌ی توابع زیر را بدست آورید.

1. $f(x) = \sin x \; ; \; 0 < x < \pi$

$$T = \pi \Longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{-1}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos 2nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(x+2nx) + \sin(x-2nx)\right] dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin(1+2n)x \, dx + \int_0^{\pi} \sin(1-2n)x \, dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(1+2n)x}{1+2n}\Big|_0^{\pi} + \frac{-\cos(1-2n)x}{1-2n}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1+2n} + \frac{2}{1-2n}\right) = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

$b_n = 0$ (تابع $f(x)$ زوج است.)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos 2nx$$

2. $f(x) = x \; ; \; -2 < x < 2$

$$T = 4 \Longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$a_0 = 0$, $a_n = 0$ (تابع $f(x)$ فرد است.)

	مشتق	انتگرال
$\oplus$	x	$\sin \frac{n\pi}{2}x$
$\ominus$	1	$\frac{-2}{n\pi}\cos \frac{n\pi}{2}x$
$\oplus$	0	$\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin \frac{n\pi}{2}x$

$$b_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} x \sin \frac{n\pi}{2}x \, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-4}{n\pi}(-1)^n + \frac{-4}{n\pi}(-1)^n\right] = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}x$$

سری‌های فوریه‌ی توابع زوج و فرد:

— اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، ضرایب b_n سری فوریه‌ی آن صفر خواهد بود:

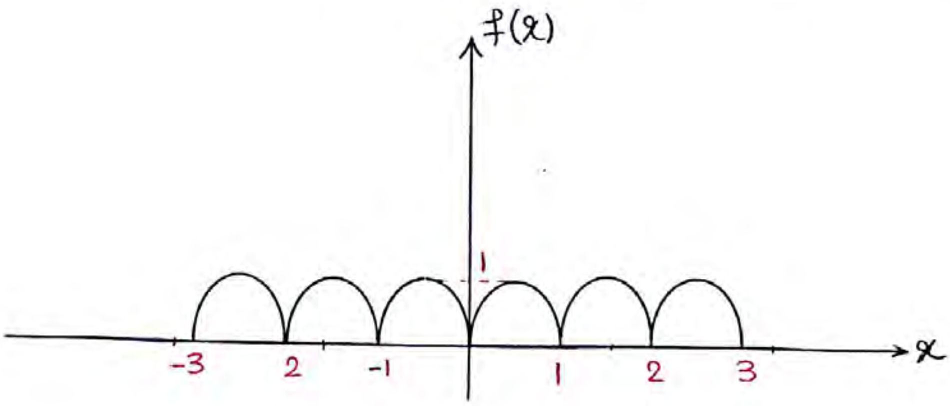
$$* \; b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} \underbrace{f(x)\sin n\omega_0 x}_{\text{فرد}}\, dx = 0$$

— اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، ضرایب a_n و مقدار a_0 سری فوریه‌ی آن صفر خواهد بود:

$$* \; a_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(x)\, dx = 0$$

$$* \; a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} \underbrace{f(x)\cos n\omega_0 x}_{\text{فرد}}\, dx = 0$$

مثال: دوره‌ی تناوب و سری فوریه‌ی تابع $f(x) = |\sin \pi x|$ را بدست آورید.



$$T = 1 \implies \omega_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^1 \sin \pi x\, dx = \frac{-1}{\pi}\cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 \sin \pi x \cos 2n\pi x\, dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\left[\sin(\pi + 2n\pi)x + \sin(\pi - 2n\pi)x\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sin(1+2n)\pi x + \sin(1-2n)\pi x\right] dx = \left[-\frac{\cos(1+2n)\pi x}{(1+2n)\pi} - \frac{\cos(1-2n)\pi x}{(1-2n)\pi}\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\right) = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

$b_n = 0$ (تابع زوج)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos 2n\pi x$$

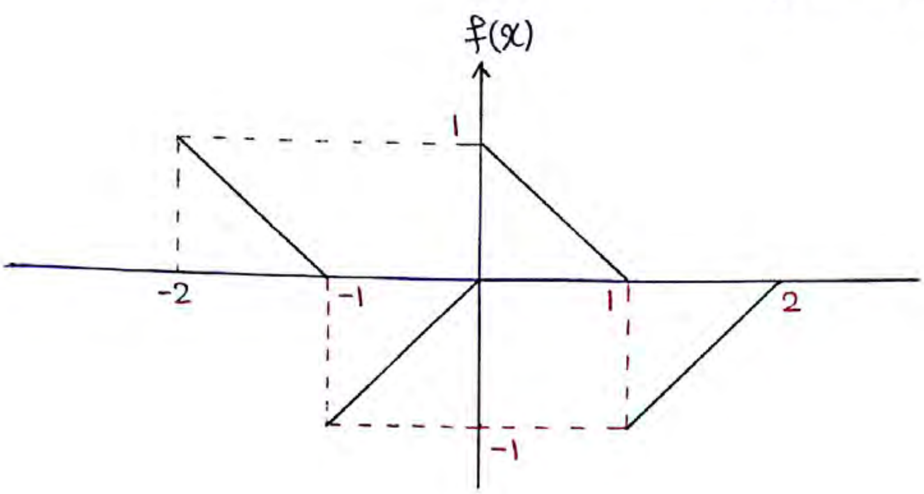
سری فوریه ی توابع متقارن نیم موج:

تابع $f(x)$ را در صورتی که یکی از دو حالت زیر برقرار باشد، متقارن نیم موج می نامند:

1. $f(x+\frac{T}{2}) = -f(x)$ باشد. در این صورت ضرایب a_n و b_n به ازای nهای زوج صفر است.

2. $f(x+\frac{T}{2}) = f(x)$ باشد. در این صورت ضرایب a_n و b_n به ازای nهای فرد صفر است.

مثال: سری فوریه ی تابع زیر را بدست آورید.



$$T=2 \Longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)\,dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_{-1}^{0} x\cos n\pi x\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)\cos n\pi x\,dx\right] = \frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_{-1}^{0} x\sin n\pi x\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)\sin n\pi x\,dx\right] = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ فرد})}}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi x + \frac{2}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\pi x\right)$$

سری فوریه ی توابع غیرمتناوب:

اگر $f(x)$ یک شکل موج غیرمتناوب باشد که در بازه ی $(0, L)$ مخالف صفر و در خارج آن مساوی صفر باشد، آنگاه به روش های زیر می توان برای سری فوریه نوشت:

۱. متناوب کردن $f(x)$ به صورت تابعی زوج با استفاده از تابع کمکی $g(x)$ (بسط نیم دامنه ی کسینوسی)

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x<L \\ f(-x) & -L<x<0 \end{cases}$$

$$f(x)=g(x)\ ;\ 0<x<L \Longrightarrow * f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 x \quad ; \quad -\infty<x<\infty$$

$$T=2L\ ;\ \omega_0=\frac{\pi}{L}$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(x)dx \Longrightarrow * a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$a_n=\frac{2}{2L}\int_{-L}^{L} g(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{2L}x\right)dx \Longrightarrow * a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$* b_n=0$$

2. متناوب کردن $f(x)$ به صورت تابعی فرد با استفاده از تابع کمکی $g(x)$ (بسط نیم دامنه ی سینوسی)

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x<L \\ -f(-x) & -L<x<0 \end{cases}$$

$$f(x)=g(x)\ ;\ 0<x<L \Longrightarrow * f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 x \quad ; \quad -\infty<x<\infty$$

$$T=2L\ ;\ \omega_0=\frac{\pi}{L}$$

$$* a_0=0$$

$$* a_n=0$$

$$b_n=\frac{2}{2L}\int_{-L}^{L} g(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{2L}x\right)dx \Longrightarrow * b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

مثال: بسط نیم دامنه‌ی سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ \frac{1}{2} & 1<x<2\end{cases}$ را بدست آورید.

$$a_0=0\ ,\ a_n=0$$

$$L=2 \Longrightarrow b_n=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx+\int_1^2\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx\right]$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx\Big|_1^2$$

$$=\frac{-2}{n\pi}\left[0-1+\frac{1}{2}\left((-1)^n-0\right)\right]=\frac{1}{n\pi}\left[2-(-1)^n\right]$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[2-(-1)^n\right]\sin\frac{n\pi}{2}x$$

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری فوریه:

فرض کنید $f(x)$ تابعی با دوره‌ی تناوب $T=2L$، در فاصله‌ی $(-L,L)$ تعریف شده بوده و دارای سری فوریه به فرم زیر باشد:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی فوق خواهیم داشت،

$$*\ \int f(x)dx=a_0x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left(a_n\sin\frac{n\pi}{L}x-b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right)+C$$

بدلیل وجود ترم a_0x، عبارت فوق سری فوریه‌ی تابع $\int f(x)dx$ نمی‌باشد. ولی با فرض معلوم بودن سری فوریه‌ی تابع $f(x)$، سری فوریه‌ی تابع $\int f(x)dx-a_0x$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$*\ \int f(x)dx-a_0x=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left(a_n\sin\frac{n\pi}{L}x-b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right)$$

C در سری فوق مقدار میانگین (DC) تابع $\int f(x)dx-a_0x$ می‌باشد.

اگر از سری فوریه‌ی تابع $f(x)$ مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$*\ \frac{d}{dx}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(-a_n\sin\frac{n\pi}{L}x+b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right)$$

اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، به یقین می‌توان گفت بسط فوق سری فوریه‌ی تابع $\frac{d}{dx}f(x)$ است. زیرا مقدار میانگین تابع $\frac{d}{dx}f(x)$ در سری فوق صفر است و این نشان می‌دهد $\frac{d}{dx}f(x)$ تابعی فردی باشد و تابع اولیه‌ی آن ($f(x)$) بایستی زوج باشد.

مثال: سری فوریه‌ی تابع $f(x)=x^2\,;\,-\pi<x<\pi$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

سری فوریه‌ی عبارت $x^3-\pi^2x$ را در بازه‌ی $(-\pi,\pi)$ بدست آورید.

$$\int f(x)dx-a_0x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left(a_n\sin\frac{n\pi}{L}x-b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{x^3}{3}-\frac{\pi^2}{3}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\sin nx+C$$

$$x^3-\pi^2x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n}{n^3}\sin nx+C\Rightarrow x^3-\pi^2x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$x=0\Rightarrow 0=0+C\Rightarrow C=0$$

مثال. اگر سری فوریه‌ی تابع $f(x)=|x|\,;(-\pi,\pi)$ به صورت $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)$ باشد، حاصل سری $I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x<\pi\\ 0 & x=0\\ -x & -\pi<x<0\end{cases}\qquad f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

$$\int f(x)dx=\begin{cases}\frac{x^2}{2} & 0<x<\pi\\ 0 & x=0\\ \frac{-x^2}{2} & -\pi<x<0\end{cases}\qquad \int f(x)dx=\frac{\pi}{2}x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}+C$$

$$x=0\Rightarrow C=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^3}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{8}\right)=\frac{\pi^2}{32}$$

تمرین: سری فوریه‌ی تابع $f(x)=\frac{x}{2}$ را در بازه‌ی $-\pi<x<\pi$ بدست آورده و به کمک آن سری فوریه‌ی $g(x)=x^2$ را در بازه‌ی مذکور بدست آورید.

چون تابع $f(x)$ در بازه‌ی داده شده زوج است، $a_0=0$ و $a_n=0$ می‌باشد.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}(-1)^n\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

	مشتق	انتگرال
+	x	$\sin nx$
-	1	$\frac{-1}{n}\cos nx$
+	0	$\frac{-1}{n^2}\sin nx$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4} = \frac{g(x)}{4}$$

$$\Longrightarrow g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx + C$$

$$x=\pi \Longrightarrow \pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n + C \Longrightarrow \pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} + C \Longrightarrow \pi^2 = 4\left(\frac{\pi^2}{6}\right) + C$$

$$\Longrightarrow C = \frac{\pi^2}{3}$$

$$g(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

تساوی پارسوال: فرض کنیم $f(x)$ تابعی متناوب در بازه‌ی $(-L,L)$ و دارای سری فوریه ای به صورت زیر باشد:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

با ضرب $f(x)$ به دو طرف عبارت فوق و انتگرال‌گیری از آن در بازه‌ی $(-L,L)$ براساس خواص توابع متعامد سینوس و کسینوس به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم که به تساوی پارسوال معروف است:

$$* \quad \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \quad ; \quad T = 2L$$

مثال. اگر سری تابع متناوب $f(x) = x^2 \ ; \ -\pi < x < \pi$ به صورت $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$ باشد، حاصل سری $I = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ را بدست آورید.

سمت چپ تساوی پارسوال: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{5\pi}x^5\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^4}{5}$

سمت راست تساوی پارسوال: $2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{n^4} + 0\right)$

$$\frac{2\pi^4}{5}=\frac{2\pi^4}{9}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

مثال: اگر سری فوریه ی تابع $f(x)=\sin x\,;\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi$ به صورت $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\right)\cos nx$ باشد، حاصل سری $\frac{1}{1^2\cdot3^2}+\frac{1}{3^2\cdot5^2}+\frac{1}{5^2\cdot7^2}+\cdots$ را بدست آورید.

$$L=\pi\ ,\ T=2\pi,\ a_0=\frac{2}{\pi}\ ,b_n=0$$

$$a_n=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}=\begin{cases}-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(n-1)(n+1)} & n\ \text{زوج}\\ 0 & n\ \text{فرد}\end{cases}$$

سمت چپ تساوی پارسوال: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos2x}{2}dx=1$

سمت راست تساوی پارسوال: $2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\frac{8}{\pi^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$

$$\Longrightarrow 1=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}\Longrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)=\frac{\pi^2-8}{16}$$

تمرین: سری فوریه ی تابع $f(x)=x^3\,;\,[-\pi,\pi]$ را بیابید.

$$L=\pi\ ,\ T=2\pi$$

$a_0=0\ ,\ a_n=0$ (تابع فرد)

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(3n^2x^2-6)\sin nx+(6nx-n^3x^3)\cos nx}{n^4}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2(-1)^n(6-n^2\pi^2)}{n^3}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n(6-n^2\pi^2)}{n^3}\sin nx$$

تمرین: به کمک سری فوریه ی تابع متناوب $f(x)=e^{-x}\,;(-\pi,\pi)$، حاصل سری $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ را بدست آورید.

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x}dx=\frac{1}{2\pi}(-e^{-x})\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}(e^{\pi}+e^{-\pi})=\frac{1}{\pi}\cosh\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-x}(n\sin nx - \cos nx)}{n^2+1}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

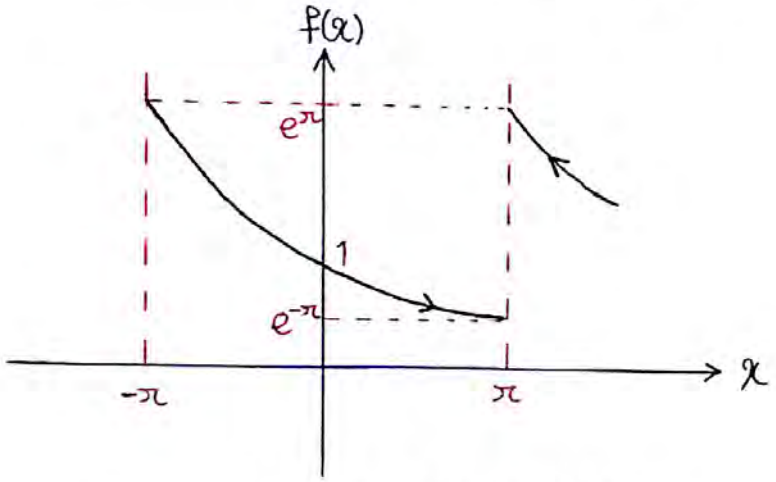
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-e^{-\pi}(-1)^n}{n^2+1} + \frac{e^{\pi}(-1)^n}{n^2+1}\right] = \frac{(-1)^n}{\pi(n^2+1)}(e^{\pi}-e^{-\pi}) = \frac{2(-1)^n}{\pi(n^2+1)}\sinh\pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}\sin nx\, dx = \frac{-1}{\pi}\left[\frac{e^{-x}(\sin nx + n\cos nx)}{n^2+1}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left[\frac{ne^{-\pi}(-1)^n}{n^2+1} - \frac{ne^{\pi}(-1)^n}{n^2+1}\right] = \frac{n(-1)^n}{\pi(n^2+1)}(e^{\pi}-e^{-\pi}) = \frac{2n(-1)^n}{\pi(n^2+1)}\sinh\pi$$

$$f(x) = \frac{\cosh\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{\pi(n^2+1)}\sinh\pi\cdot\cos nx + \frac{2n(-1)^n}{\pi(n^2+1)}\sinh\pi\cdot\sin nx\right]$$

$$x=\pi \Rightarrow \frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = \frac{\cosh\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh\pi}{\pi(n^2+1)} \Rightarrow \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = \frac{\cosh\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh\pi}{\pi(n^2+1)}$$



$$\Rightarrow \cosh\pi = \frac{\cosh\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh\pi}{\pi(n^2+1)} \Rightarrow \cosh\pi - \frac{\cosh\pi}{\pi} = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

$$\Rightarrow \pi\cosh\pi - \cosh\pi = 2\sinh\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi-1}{2}\cdot\frac{\cosh\pi}{\sinh\pi}$$

تمرین: سری فوریه ی تابع $f(t)=\begin{cases} t & 0<t<1 \\ 2-t & 1<t<2 \end{cases}$ رابدست آورید.

$$T=2 \Rightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 t\,dt+\int_1^2 (2-t)\,dt\right]=\frac{1}{2}\left[t\Big|_0^1+\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\left[\int_0^1 t\cos n\pi t+\int_1^2 (2-t)\cos n\pi t\right]=\left(\frac{n\pi t\sin n\pi t+\cos n\pi t}{n^2\pi^2}\right)\Big|_0^1$$

$$-\left(\frac{(n\pi t-2n\pi)\sin n\pi t+\cos n\pi t}{n^2\pi^2}\right)\Big|_1^2=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}$$

$b_n=0$ (تابع زوج)

$$f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\cos n\pi t$$

تمرین: سری فوریه ی تابع $-1<x<1$ ؛ $f(x)=|x|$ رابدست آورید.

$$T=2 \Rightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^0 -x\,dx+\int_0^1 x\,dx\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\left[\int_{-1}^0 -x\cos n\pi x\,dx+\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx\right]=\left(\frac{n\pi x\sin n\pi x+\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\Big|_0^{-1}$$

$$+\left(\frac{n\pi x\sin n\pi x+\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\Big|_0^1=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}$$

$b_n=0$ (تابع زوج)

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

تمرین: سری فوریه تابع $f(t)=\cos^2 t$ را در بازه‌ی $(0,\pi)$ بدست آورید.

$$T=\pi \Longrightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 t\cos 2nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos 2nt+\cos 2t\cos 2nt)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos 2nt\,dt+\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos 2(n-1)t+\cos 2(n+1)t\right]dt\right]$$

$$=\left[\frac{(n^2-n)\sin 2(n+1)t+(n^2+n)\sin 2(n-1)t+(2n^2-2)\sin 2nt}{4n\pi(n^2-1)}\right]\Bigg|_0^{\pi}=0$$

عبارت فوق نشان می‌دهد a_n به ازای مقادیر $n\geq 2$ صفر است ولی باید توجه داشت عبارت a_n به ازای $n=1$ تعریف نشده است و a_1 باید جداگانه حساب شود:

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 t\cos 2t\,dt=\left(\frac{\sin 4t+4\sin 2t+4t}{8}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}$$

$b_n=0$ (تابع زوج)

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t$$

انتگرال فوریه:

سری فوریه ابزار قدرتمندی برای تحلیل مسائل شامل توابع متناوب است. با توجه به اینکه تعداد زیادی از مسائل عملی به توابع نامتناوب مربوط می‌شوند، لذا لازم است که مطالب ارائه شده در مورد سری فوریه را تعمیم داد تا توابع نامتناوب را نیز در برگیرند. تابع نامتناوب $y=f(x)$ که در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف شده است، دارای سری فوریه نیست ولی تابع متناوب $y=f_L(x)$ با دوره‌ی تناوب L را می‌توان بررسی نموده و L را به سمت بی‌نهایت میل داد. حال اگرچه تابع حاصل متناوب نیست ولی می‌توان بسط آن را به صورت سری فوریه‌ی تابع $y=f_L(x)$ زمانی که $L\to\infty$ نمایش داد. عبارت به دست آمده انتگرال فوریه نامیده می‌شود. انتگرال فوریه ابزاری قدرتمند برای تحلیل توابع نامتناوب است.

قضیه (انتگرال فوریه): فرض کنید تابع $f(x)$ در هر فاصله قطعه‌ای پیوسته و در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست بوده و $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ باشد. آن گاه تابع $f(x)$ را می‌توان با رابطه‌ی زیر که انتگرال فوریه نامیده می‌شود نمایش داد که در نقاط پیوستگی مقدار آن با مقدار تابع یکسان بوده و در نقاط ناپیوستگی مقدار آن با میانگین حد چپ و راست تابع در آن نقطه برابر است.

$$* \ f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

$$* \ A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$* \ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، خواهیم داشت (انتگرال فوریه‌ی کسینوسی):

$$* \ B(\omega)=0$$

$$* \ A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، خواهیم داشت (انتگرال فوریه‌ی سینوسی):

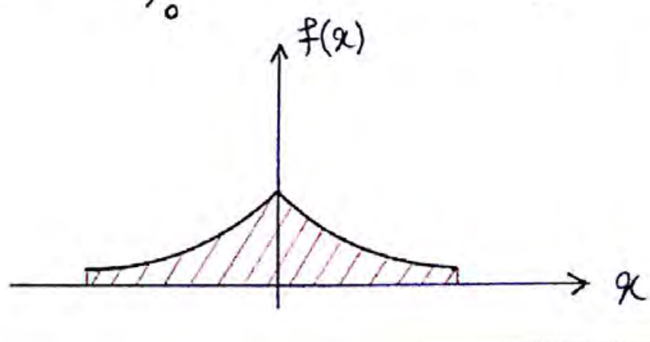
$$* \ A(\omega)=0$$

$$* \ B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$$

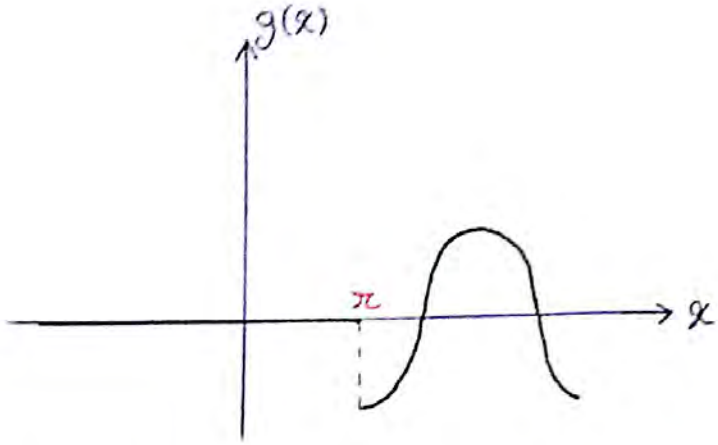
مثال: آیا توابع زیر را می‌توان با انتگرال فوریه نمایش داد؟

1. $f(x)=e^{-|x|}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=2\int_0^{\infty}|f(x)|dx=2\int_0^{\infty}e^{-x}dx=-2e^{-x}\Big|_0^{\infty}=2<\infty \quad (\checkmark)$$



$$2.\ g(x)=\begin{cases}0 & x<\pi\\ \cos x & x\geq\pi\end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,dx=\int_{\pi}^{\infty}|\cos x|\,dx=\infty \qquad (\times)$$

مثال انتگرال فوریه ی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0<x<1\\ -\frac{\pi}{2} & -1<x<0\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ را بدست آورید.

$A(\omega)=0$ (تابع فرد)

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\pi}{2}\sin\omega x\,dx=-\frac{1}{\omega}\cos\omega x\Big|_0^1=\frac{-1}{\omega}(\cos\omega-1)$$

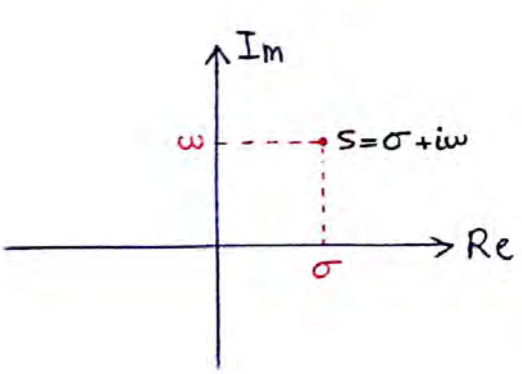
$$B(\omega)=\frac{1-\cos\omega}{\omega}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega x\,d\omega$$

تبدیل لاپلاس: فرض کنید تابع $f(t)$ در بازه‌ی $[0,\infty)$ انتگرال پذیر باشد، در این صورت تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$* \ F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)\,dt$$

که در آن s عددی مختلط به صورت $s=\sigma+i\omega$ می‌باشد.



ویژگی های تبدیل لاپلاس:

$$1.\ \mathcal{L}\{af(t)\pm bg(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}\pm b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$2.\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^n\mathcal{L}\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

تبدیل لاپلاس توابع متداول:

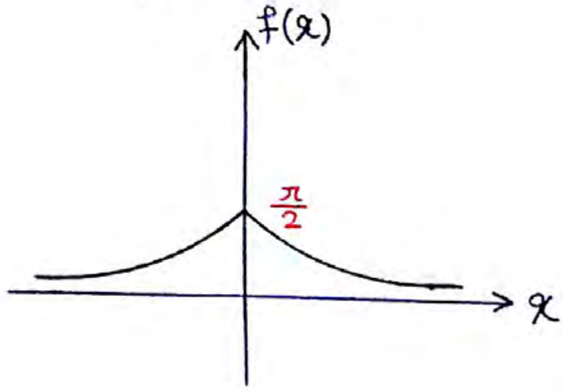
$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>a$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>a$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$

انتگرال های لاپلاس:

- برای تابع $x\geqslant 0$; $f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-kx}$ باشرط $f(x)=f(-x)$ ($f(x)$ تابع زوج) انتگرال فوریه ی کسینوسی می نویسیم:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\pi}{2}e^{-kx}\cos\omega x\,dx=\int_{0}^{\infty}e^{-kx}\cos\omega x\,dx$$

$$=\mathcal{L}\{\cos\omega x\}(k)=\frac{k}{k^2+\omega^2}\quad ;\quad k>0$$



$$f(x)=\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\int_{0}^{\infty}\frac{k}{k^2+\omega^2}\cos\omega x\,d\omega$$

تابع زوج $f(x)$ $*$ $\frac{\pi}{2}e^{-kx}=\int_{0}^{\infty}\frac{k}{k^2+\omega^2}\cos\omega x\,d\omega$

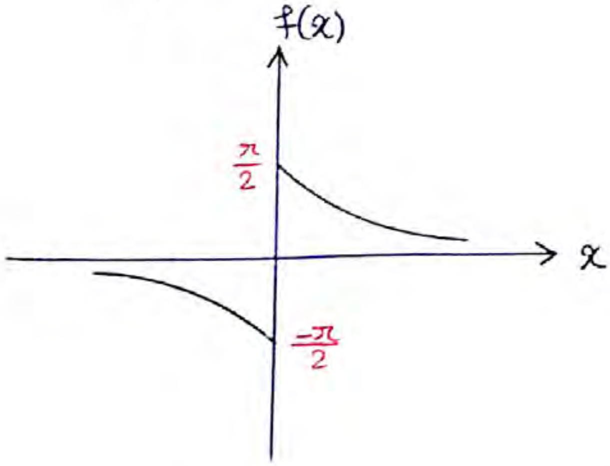
- برای تابع $x \geq 0$; $f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-kx}$ با شرط $f(x)=-f(-x)$ ($f(x)$ تابع فرد) انتگرال فوریه ی سینوسی را بنویسید:

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\pi}{2}e^{-kx}\sin\omega x\,dx=\int_{0}^{\infty}e^{-kx}\sin\omega x\,dx$$

$$=\mathcal{L}\{\sin\omega x\}(k)=\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\quad ; k>0$$

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega=\int_{0}^{\infty}\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\sin\omega x\,d\omega$$

$$\text{تابع فرد } f(x) * \frac{\pi}{2}e^{-kx}=\int_{0}^{\infty}\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\sin\omega x\,d\omega$$



مثال: انتگرال فوریه ی تابع $x>0$; $f(x)=e^{-x}$ را با شرط $f(x)=f(-x)$ را محاسبه کنید.

$$k=1 \Longrightarrow e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\cos\omega x\,d\omega$$

مثال: با استفاده از انتگرال فوریه ی تابع $x>0$; $f(x)=e^{-2x}$ با شرط $f(x)=f(-x)$ حاصل انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{4+\omega^2}\cos 2\omega\,d\omega$ را حساب کنید.

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-2x}\cos\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\mathcal{L}\{\cos\omega x\}\Big|_{s=2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=2}$$

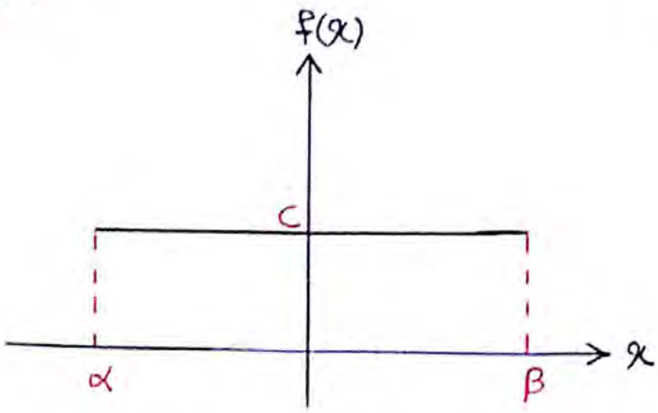
$$=\frac{4}{\pi(4+\omega^2)}$$

$$f(x)=e^{-2x}=\int_{0}^{\infty}\frac{4}{\pi(4+\omega^2)}\cos\omega x\,d\omega$$

$$x=2 \Longrightarrow e^{-4}=\int_{0}^{\infty}\frac{4}{\pi(4+\omega^2)}\cos 2\omega\,d\omega \Longrightarrow \int_{0}^{\infty}\frac{1}{4+\omega^2}\cos 2\omega\,d\omega=\frac{\pi}{4}e^{-4}$$

مثال: درصورتی که $f(x)=\begin{cases}0 & x<\alpha\\ c & \alpha<x<\beta\\ 0 & x>\beta\end{cases}$ بوده و مقادیر $\alpha<0$ ، $\beta>0$ و c اعداد ثابتی باشند، درصورتی که برابر با

$f(x)=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$ است، مقادیر α ، β و c را محاسبه کنید.



با توجه به انتگرال فوریه‌ی تابع می‌توان نتیجه گرفت که $f(x)$ تابعی زوج است.

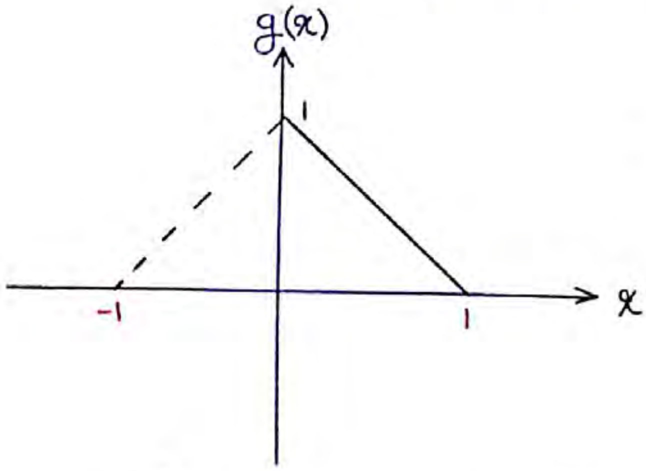
بنابراین $|\beta| = |\alpha|$ می‌باشد.

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\beta} c\cdot\cos\lambda x\,dx = \frac{2c}{\pi\lambda}\sin\lambda x\Big|_0^{\beta} = \frac{2c}{\pi\lambda}\sin\beta\lambda$$

$$f(x) = \int_0^{\infty}\frac{2c}{\pi\lambda}\sin\beta\lambda\cos\lambda x\,dx \implies \frac{2c}{\pi} = 1 \implies c = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = 1 \implies \alpha = -1$$

مثال: در معادله‌ی انتگرالی $\int_0^{\infty} f(\omega)\cos\omega x\,d\omega = \begin{cases} 1-x & 0\le x\le 1 \\ 0 & x>1\end{cases}$ تابع $f(\omega)$ را محاسبه کنید.



از روی انتگرال فوریه‌ی تابع فوق می‌توان نتیجه گرفت این تابع زوج است.

$$g(x) = \int_0^{\infty}\underbrace{f(\omega)}_{A(\omega)}\cos\omega x\,d\omega$$

مشتق	انتگرال
$\oplus$ $1-x$	$\cos\omega x$
$\ominus$ -1	$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$
$\oplus$ 0	$\frac{-1}{\omega^2}\cos\omega x$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-x}{\omega}\sin\omega x - \frac{1}{\omega^2}\cos\omega x\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega + \frac{1}{\omega^2}\right) = \frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$$

$$f(\omega) = A(\omega) = \frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$$

مثال: انتگرال فوریه‌ی $f(x) = \begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x & |x|\le\pi \\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$ را بدست آورید.

$f(x)$ تابعی فرد است.

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{2}\sin x\sin\omega x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(1-\omega)x-\cos(1+\omega)x]\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)x-\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)x\right]\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\omega}\sin(\pi-\omega\pi)-\frac{1}{1+\omega}\sin(\pi+\omega\pi)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega}+\frac{\sin\omega\pi}{1+\omega}\right)$$

$$=\frac{(1+\omega)+(1-\omega)}{2(1-\omega^2)}\sin\omega\pi=\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$$

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\omega x\,dx$$

تمرین: با استفاده از معادله‌ی انتگرالی $\int_0^\infty P(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 3 & 1<x<2\\ 0 & x>2\end{cases}$، تابع $P(\omega)$ را محاسبه کنید.

با توجه به انتگرال فوریه‌ی داده‌شده، تابع فوق زوج است.

$$f(x)=\int_0^\infty \underbrace{P(\omega)}_{A(\omega)}\cos\omega x\,d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1\cos\omega x\,dx+\int_1^2 3\cos\omega x\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\omega x}{\omega}\Big|_0^1+3\frac{\sin\omega x}{\omega}\Big|_1^2\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}+3\frac{\sin 2\omega}{\omega}-3\frac{\sin\omega}{\omega}\right)=\frac{2}{\pi}\left(3\frac{\sin 2\omega}{\omega}-2\frac{\sin\omega}{\omega}\right)$$

$$P(\omega)=A(\omega)=\frac{6\sin 2\omega}{\pi\omega}-\frac{4\sin\omega}{\pi\omega}$$

تمرین: با استفاده از انتگرال فوریه، درستی روابط زیر را نشان دهید.

$$1.\ \int_0^\infty \frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{\pi}{2} & x=0\\ \pi e^{-x} & x>0\end{cases}$$

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} A(\omega)=\dfrac{1}{1+\omega^2}\\[2ex] B(\omega)=\dfrac{\omega}{1+\omega^2}\end{array}\right.$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\pi e^{-x}\cos\omega x\,dx=\int_{0}^{\infty}e^{-x}\cos\omega x\,dx=\mathcal{L}\{\cos\omega x\}\Big|_{s=1}=\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\pi e^{-x}\sin\omega x\,dx=\int_{0}^{\infty}e^{-x}\sin\omega x\,dx=\mathcal{L}\{\sin\omega x\}\Big|_{s=1}=\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

حاصل انتگرال فوریه در نقطه‌ی $x=0$:

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{\pi e^{0}+0}{2}=\frac{\pi}{2}$$

2. $$\int_0^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\cos\omega x\,d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\ ,\ B(\omega)=0$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\pi}{2}\cos x\cos\omega x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x\right]dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(1+\omega)x}{1+\omega}+\frac{\sin(1-\omega)x}{1-\omega}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(1-\omega)\cos\frac{\pi}{2}\omega+(1+\omega)\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\right]=\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}$$

تبدیلات فوریه :

تبدیل فوریه‌ی کسینوسی: اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، تبدیل فوریه‌ی کسینوسی و عکس تبدیل فوریه‌ی کسینوسی برای آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f(x)=f(-x)\Longrightarrow f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,dx\ ;\ A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}A(\omega)\Longrightarrow\quad *\ \mathcal{F}_c\{f(x)\}=\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$$ تبدیل فوریه‌ی کسینوسی

$$*\ \mathcal{F}_c^{-1}\{\hat{f}_c(\omega)\}=f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$ عکس تبدیل فوریه‌ی کسینوسی

تبدیل فوریه‌ی سینوسی: اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، تبدیل فوریه‌ی سینوسی و عکس تبدیل فوریه‌ی سینوسی برای آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = -f(-x) \Longrightarrow f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\,dx \;;\; B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,B(\omega) \Longrightarrow * \; \mathcal{F}_s\{f(x)\} = \hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$ تبدیل فوریه‌ی سینوسی

$$* \; \mathcal{F}_s^{-1}\{\hat{f}_s(\omega)\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \hat{f}_s(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$ عکس تبدیل فوریه‌ی سینوسی

ویژگی‌های تبدیلات فوریه‌ی کسینوسی و سینوسی:

درصورتی که $f(x)$ و $g(x)$ توابع زوج باشند، خواهیم داشت:

1. $\mathcal{F}_c\{af(x) \pm bg(x)\} = a\mathcal{F}_c\{f(x)\} \pm b\mathcal{F}_c\{g(x)\}$

اگر علاوه بر تابع $f(x)$ مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم آن نیز در شرایط تعریف انتگرال فوریه صدق کنند و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ باشد، دراین صورت:

2. $\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = -\omega\mathcal{F}_c\{f(x)\}$

3. $\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -\omega^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f'(0)$

درصورتی که $f(x)$ و $g(x)$ توابع فرد باشند، خواهیم داشت:

4. $\mathcal{F}_s\{af(x) \pm bg(x)\} = a\mathcal{F}_s\{f(x)\} \pm b\mathcal{F}_s\{g(x)\}$

اگر علاوه بر تابع $f(x)$ مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم آن نیز در شرایط تعریف انتگرال فوریه صدق کنند و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ باشد، دراین صورت:

5. $\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = \omega\mathcal{F}_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f(0)$

6. $\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -\omega^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0)$

مثال: تبدیل فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x) = e^{-kx} \;;\; k>0$ را محاسبه کنید.

$$f''(x) = k^2e^{-kx} = k^2 f(x) \Longrightarrow \mathcal{F}_c\{f''(x)\} = k^2\mathcal{F}_c\{f(x)\}$$

$$\Longrightarrow -\omega^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f'(0) = k^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} \Longrightarrow \mathcal{F}_c\{f(x)\} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{f'(0)}{k^2+\omega^2}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}_c\{f(x)\} = \hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{k}{k^2+\omega^2}$$

تبدیل فوریه:

با استفاده از تعریف انتگرال فوریه، تبدیل فوریه و عکس تبدیل فوریه را می‌توان استخراج نمود:

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos\omega v\,dv \quad , \quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\omega v\,dv$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[\Big(\int_{\infty}^{\infty}f(v)\cos\omega v\,dv\Big)\cos\omega x+\Big(\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\omega v\,dv\Big)\sin\omega x\Big]d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\big(\cos\omega v\cos\omega x+\sin\omega v\sin\omega x\big)dv\Big]d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos(v-x)\omega\,dv\Big]d\omega$$

$\cos(v-x)\omega$ تابعی زوج از ω است و با توجه به عبارت فوق، $f(x)$ نیز تابعی زوج می‌باشد، بنابراین:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos(v-x)\omega\,dv\Big]d\omega \qquad (1)$$

$$0=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\,i\sin(v-x)\omega\,dv\Big]d\omega \qquad (2)$$

$$(1)+(2)\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\{\cos(v-x)\omega-i\sin(v-x)\omega\}dv\Big]d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{-i\omega(v-x)}dv\Big]d\omega$$

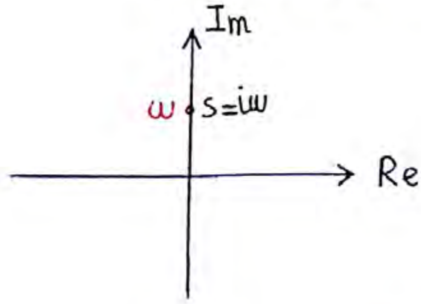
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{-i\omega v}dv\Big]e^{i\omega x}d\omega$$

$$v\triangleq x\Longrightarrow \quad *\ \mathcal{F}\{f(x)\}=\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}f(x)\,dx$$ تبدیل فوریه

$$*\ \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)\,d\omega$$ عکس تبدیل فوریه

می توان نتیجه گرفت که تبدیل فوریه حالت خاصی از تبدیل لاپلاس به ازای $s \equiv i\omega$ می باشد. بنابراین با دانستن تبدیل لاپلاس یک تابع، تبدیل فوریه ی آن را به صورت زیر می توان محاسبه نمود:

$$* \ \mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{L}\{f(x)\}\Big|_{s=i\omega}$$



ویژگی های تبدیل فوریه:

1. تبدیل فوریه تبدیلی خطی است.

$$\mathcal{F}\{af(x) \pm bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} \pm b\mathcal{F}\{g(x)\}$$

2. اگر علاوه بر تابع $f(x)$ مشتقات آن تا مرتبه ی nام نیز در شرایط تعریف انتگرال فوریه صدق کنند و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ باشد، در این صورت:

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (i\omega)^n \mathcal{F}\{f(x)\} = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$$

3. خاصیت تقارن تبدیل فوریه:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(\omega) \Longrightarrow \mathcal{F}\{\hat{f}(x)\} = f(-\omega)$$

4. پیچش (Convolution):

$$* \ (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt = (g*f)(x)$$

$$\mathcal{F}\{(f*g)(x)\} = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\{f(x)\}\mathcal{F}\{g(x)\}$$

مثال: تبدیل فوریه ی تابع $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ را در صورتی که تبدیل فوریه ی تابع $e^{-a|x|}$ به صورت $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{\omega^2+a^2}$ باشد، بدست آورید.

$$\mathcal{F}\{e^{-a|x|}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{\omega^2+a^2}$$

$$\mathcal{F}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{\omega^2+a^2}\right\} = e^{-a|-\omega|} \Longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,a\,\mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = e^{-a|\omega|} \Longrightarrow \mathcal{F}\{f(x)\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-a|\omega|}}{a}$$

تبدیل فوریه زمان:

اگر x تابعی از زمان باشد ($x=x(t)$)، معمولاً تبدیل فوریه را برای تابع $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌کنند:

* $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

* $\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$

* $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \mathcal{L}\{x(t)\}\Big|_{s=i\omega}$

* $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \Longrightarrow \mathcal{F}\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$

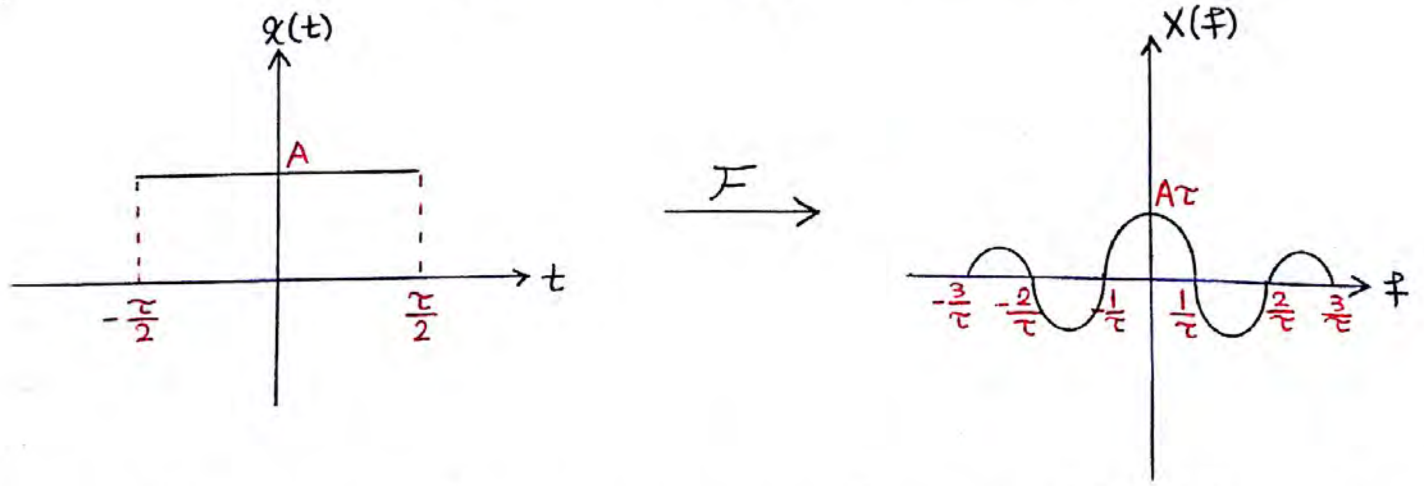
* $\omega = 2\pi f$; f: بسامد (فرکانس)

تابع سینک (sinc):

* $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \leqslant \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = 2A\,\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$$

$$\omega = 2\pi f \Longrightarrow X(f) = 2A\,\frac{\sin \pi f\tau}{2\pi f} = A\tau\frac{\sin\pi f\tau}{\pi f\tau} = A\tau\operatorname{sinc}(f\tau)$$



$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-i\omega t}dt = \frac{-A}{i\omega}\, e^{-i\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2A}{\omega}\cdot\frac{e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}}{2i} = 2A\,\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$$

مثال: تبدیل فوریه ی تابع $x(t)=e^{-t}$ را بدست آورید.

$$\mathcal{F}\{e^{-t}\}=\mathcal{L}\{e^{-t}\}\Big|_{s=i\omega}=\frac{1}{s+1}\Big|_{s=i\omega}=\frac{1}{i\omega+1}$$

$$X(\omega)=\frac{1}{i\omega+1}\xrightarrow{\omega=2\pi f}X(f)=\frac{1}{2i\pi f+1}$$

مثال: تبدیل فوریه‌ی تابع $x(t)=\begin{cases}1 & |t|\leqslant 2\\ 0 & |t|>2\end{cases}$ را بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\tau}{2}=2\Rightarrow\tau=4\\ A=1\end{array}\right|\Rightarrow X(\omega)=2\,\frac{\sin 2\omega}{\omega}\ ,\ X(f)=4\,\mathrm{sinc}(4f)$$

مثال: با توجه به معادله‌ی دیفرانسیل $\ddot{x}+4x=\begin{cases}e^{-2t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ ، تبدیل فوریه‌ی $x=x(t)$ را محاسبه کنید.

$$(i\omega)^2X(\omega)+4X(\omega)=\int_0^{\infty}e^{-2t}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{s+2}\Big|_{s=i\omega}=\frac{1}{i\omega+2}$$

$$(-\omega^2+4)\,X(\omega)=\frac{1}{i\omega+2}\Longrightarrow X(\omega)=\frac{1}{(i\omega+2)(-\omega^2+4)}$$

اتحادهای مثلثاتی پرکاربرد در آنالیز فوریه:

1. $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$

2. $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$

3. $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

4. $\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

5. $\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

6. $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}\ ,\ \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE)

تعریف: معادلات دیفرانسیلی را که شامل یک یا چند مشتق جزئی از یک تابع چند متغیره باشد، معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) می‌نامیم.

مرتبه‌ی بالاترین مشتق موجود در PDE را مرتبه‌ی معادله می‌نامیم.

چنان‌چه بتوان PDE را به گونه‌ای بیان کرد که شامل هیچ جمله‌ی غیرخطی از تابع و مشتقات تابع نباشد، آن را خطی می‌نامند.

اگر هر جمله از PDE شامل تابع و یا یکی از مشتقات تابع باشد، آن را همگن می‌نامیم و در غیر این صورت معادله‌ی PDE مذکور، غیرهمگن نامیده می‌شود.

برای مثال همه‌ی معادلات دیفرانسیل زیر PDE هستند:

$$x^2 y \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 4y^2 \frac{\partial u}{\partial x} = xy$$ مرتبه‌ی سوم خطی غیرهمگن

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$ مرتبه‌ی دوم خطی همگن

$$u_x + y\,u_y - u = 0$$ مرتبه‌ی اول خطی همگن

PDE های مرتبه‌ی دوم مهم:

1. معادله‌ی موج یک بعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2. معادله‌ی گرمای یک بعدی
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3. معادله‌ی لاپلاس دوبعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\nabla^2 u = 0)$$

4. معادله‌ی پواسون دوبعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

5. معادله‌ی موج دوبعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

6. معادله‌ی لاپلاس سه‌بعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\nabla^2 u = 0)$$

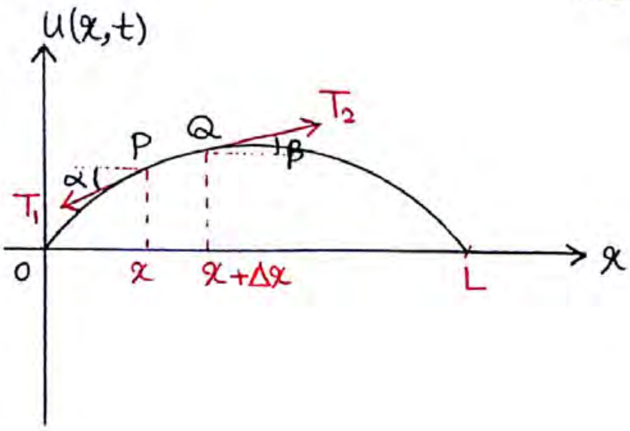
معادله‌ی موج یک بعدی (مدل تار مرتعش):

فرضیات:

1. جرم تار در طول تار همگن است و تار هیچ مقاومتی نسبت به خم شدن ندارد.

2. تار به خوبی کشیده شده و در نتیجه نیروی وزن تار تاثیری روی حرکت آن ندارد.

3. جا به جایی تار فقط در راستای عمودی بوده و جا به جایی افقی آن صفر است.



$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = \text{const.} = T \qquad (\text{فرض } 3)$$

$$T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\beta = \text{شتاب} \times \text{جرم} \qquad (\text{قانون دوم نیوتن})$$

$$\Longrightarrow T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\beta = \rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

ρ: چگالی طولی تار

با تقسیم طرفین رابطه‌ی (1) بر T داریم:

$$\frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} - \frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} = \frac{\rho \Delta x}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Longrightarrow \tan\alpha - \tan\beta = \frac{\rho \Delta x}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} = \frac{\rho \Delta x}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\rho}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\xRightarrow{\frac{\rho}{T} > 0} \frac{\rho}{T} = \frac{1}{c^2};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Longrightarrow * \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ; \ c^2 = \frac{T}{\rho}$$

T: کشش تار

ρ: چگالی طولی تار

حل معادله‌ی موج یک بعدی به روش جداسازی متغیرها (روش ضربی):

معادله‌ی موج یک بعدی را با شرایط مرزی و شرایط اولیه‌ی زیر حل خواهیم کرد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

L: طول تار $\Longrightarrow u(0,t) = u(L,t) \ ; \ t \geqslant 0 \qquad (2)$ شرایط مرزی (معادله کرانه‌ای)

$u(x,0) = f(x) \qquad (3)$ شرایط اولیه (موقعیت اولیه)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x) \qquad (4)$$ شرایط اولیه (سرعت اولیه)

عملاً با حل این مسأله، موقعیت عمودی طول x ام تار مرتعش در لحظه‌ی t بدست می‌آید. مسأله یافتن جوابی از معادله (1) است که در شرایط (2)، (3) و (4) صدق کند. بدین منظور سه مرحله‌ی زیر را طی می‌کنیم:

مرحله‌ی اول: با بکار بردن روش جداسازی متغیرها، دو معادله‌ی دیفرانسیل معمولی (ODE) بدست می‌آید.

مرحله‌ی دوم: جواب هایی از دو معادله‌ی ODE را که در شرط (2) صدق می‌کنند، تعیین می‌کنیم.

مرحله‌ی سوم: جواب های حاصل را طوری ترکیب می‌کنیم که عبارت حاصل جواب معادله‌ی (1) باشد و در شروط (3) و (4) صدق کند.

در مرحله‌ی اول با انتخاب $u(x,t)$ به شکل (5) و مشتق‌گیری از آن و جایگذاری در معادله‌ی (1) خواهیم داشت:

$$u(x,t)=F(x)\,G(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=F'(x)G(t) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=F(x)\dot G(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''(x)G(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F(x)\ddot G(t)$$

$$\xrightarrow{(1)} F(x)\ddot G(t)=c^2F''(x)G(t)$$

$$\Rightarrow F\ddot G=c^2F''G \Longrightarrow \frac{\ddot G}{c^2G}=\frac{F''}{F} \Longrightarrow \frac{\ddot G}{c^2G}=\frac{F''}{F}=k$$

سمت چپ تساوی فوق تابعی از t و سمت راست آن تابعی از x است. بشرط اینکه این دو عبارت با هم برابر باشند آن است که هر دو برابر مقداری ثابت مانند k باشند. بدین ترتیب دو معادله‌ی دیفرانسیل معمولی (ODE) حاصل می‌شود:

$$F''-kF=0 \quad (6) \qquad\qquad \ddot G-c^2kG=0 \quad (7)$$

در مرحله‌ی دوم توابع F و G که جواب های معادلات (6) و (7) هستند را طوری تعیین می‌کنیم که $u(x,t)=F(x)\,G(t)$ در شرط (2) صدق کند.

$$u(0,t)=F(0)G(t)=0 \quad , \quad u(L,t)=F(L)G(t)=0$$

با توجه به عبارات فوق باید $G(t)=0$ باشد که در این صورت $u(x,t)=0$ خواهد بود که امکان پذیر نیست. بنابراین باید:

$$F(0)=F(L)=0 \quad (8)$$

مقدار ثابت k در معادله‌ی (6) باید منفی باشد. زیرا اگر $k=0$ باشد، خواهیم داشت:

$$F''=0 \Longrightarrow F'=a \Longrightarrow F=ax+b \xrightarrow{(8)} a=b=0$$

$a=b=0$ به معنی صفر شدن تابع $u(x,t)$ است که مورد قبول نیست.

اگر $k>0$ باشد، می‌توان نوشت $k=\mu^2$ و جواب عمومی معادله‌ی (6) به صورت زیر خواهد بود:

$$F(x)=Ae^{\mu x}+Be^{-\mu x} \xRightarrow{(8)} A=B=0$$

$A=B=0$ نیز به معنی صفر شدن تابع $u(x,t)$ است و مورد قبول نیست.

لذا تنها حالت مورد قبول $k<0$ می‌باشد و می‌توان نوشت $k=-p^2$. در این صورت جواب عمومی معادله‌ی (6) به صورت زیر است:

$$F(x)=A\cos px+B\sin px$$

با اعمال شرط های (8) در عبارت فوق داریم:

$$x=0 \Longrightarrow F(0)=A=0$$

$$x=L \Longrightarrow F(L)=B\sin pL=0 \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} B\neq 0 \quad \text{(صفر شدن B به معنی صفر شدن تابع u است.)} \\ \\ \sin pL=0 \Longrightarrow pL=n\pi \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow p_n=\frac{n\pi}{L}\;;\; n=1,2,\ldots \qquad (9)$$

با فرض $B=1$ داریم:

$$F(x)=F_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x \quad ; \quad n=1,2,\ldots \qquad (10)$$

به ازای $k=-p_n^2=-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$، معادله‌ی (7) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\ddot{G}+\lambda_n^2 G=0\;;\;\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$$

$$G_n(t)=a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t$$

$$u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=\left(a_n\cos\frac{cn\pi}{L}t+b_n\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x\;;\;n=1,2,\ldots \qquad (11)$$

جواب معادله‌ی (1) مجموع سری جواب های ممکن است:

$$* \; u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{cn\pi}{L}t+b_n\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (12)$$

از شرط (3) داریم:

$$u(x,0)=f(x) \Longrightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (13)$$

مشخص است که $f(x)$ تابعی فرد با دوره‌ی تناوب $2L$ می‌باشد:

$$* \; a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \;;\; n=1,2,\dots \qquad (14)$$

از شرط (4) داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x) \Longrightarrow g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{cn\pi}{L}\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (15)$$

مشخص است که $g(x)$ تابعی فرد با دوره‌ی تناوب $2L$ می‌باشد:

$$b_n\left(\frac{cn\pi}{L}\right) = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \Longrightarrow$$

$$* \; b_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \;;\; n=1,2,\dots \qquad (16)$$

جواب معادله‌ی موج یک بعدی:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;;\; c=\frac{T}{\rho}$$

$$\begin{cases} u(0,t)=u(L,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x) \end{cases}$$

$$* \; u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{cn\pi}{L}t + b_n\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$* \; a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \;;\; n=1,2,\dots$$

$$* \; b_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \;;\; n=1,2,\dots$$

دسته‌بندی معادلات PDE: صورت کلی هر معادله‌ی PDE مرتبه‌ی دوم به صورت زیر است:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

نوع PDE	تعریف	نمونه
هذلولی گون (هذلولوی)	$AC-B^2<0$	معادله‌ی موج
سهمی گون (سهموی)	$AC-B^2=0$	معادله‌ی گرما
بیضی گون (بیضوی)	$AC-B^2>0$	معادله‌ی لاپلاس

حل دالامبر معادله موج:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{cn\pi}{L} t + b_n \sin \frac{cn\pi}{L} t\right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx \;;\; n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx \;;\; n = 1, 2, \ldots$$

درحالت خاص اگر $g(x)=0$ باشد، جواب معادله موج به صورت زیر خواهد بود:

$$g(x) = 0 \Longrightarrow b_n = 0 \Longrightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} ct\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \Longrightarrow$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin \frac{n\pi}{L}(x+ct) + a_n \sin \frac{n\pi}{L}(x-ct)\right]$$

از طرفی: $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x$ $\Longrightarrow$

$$* \; u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$

درحالتی که $g(x) \neq 0$ باشد، برای حل دالامبر معادله موج، دو متغیر جدید v و w را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v = x + ct \qquad\qquad w = x - ct$$

دراین صورت می‌توان گفت $u(x,t)$ تابعی از v و w ($u(v,w)$) می‌شود:

$$u_x = u_v v_x + u_w w_x = u_v + u_w$$

$$u_{xx} = (u_v + u_w)_x = u_{vv} v_x + u_{vw} w_x + w_{wv} v_x + u_{ww} w_x = u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww} \quad (1)$$

به روش مشابه: $u_{tt} = c^2 (u_{vv} - 2u_{vw} + u_{ww}) \quad (2)$

معادله موج: $u_{tt} = c^2 u_{xx} \xrightarrow[(2)]{(1)} c^2(u_{vv} - 2u_{vw} + u_{ww}) = c^2(u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww})$

$$\Longrightarrow 4u_{vw} = 0 \Longrightarrow u_{vw} = 0$$

$$u_v = h(v) \Longrightarrow u = \overbrace{\int h(v)\, dv}^{\phi(v)} + \psi(w) = \phi(v) + \psi(w)$$

$$u(x,t)=\phi(x+ct)+\psi(x-ct) \qquad (3)$$

$$u(0,t)=0 \Longrightarrow \phi(ct)+\psi(-ct)=0 \Longrightarrow \phi(ct)=-\psi(-ct)$$

بنابراین ϕ و ψ توابع هم‌جنس بوده و هر دو فرد هستند.

$$u(L,t)=0 \Longrightarrow \phi(L+ct)+\psi(L-ct)=0 \Longrightarrow \phi(L+ct)-\phi(ct-L)=0$$

$$\Longrightarrow \phi(ct+L)=\phi(ct-L)$$

پس ϕ و ψ توابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $2L$ می‌باشند.

$$u(x,0)=f(x) \Longrightarrow \phi(x)+\psi(x)=f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x) \Longrightarrow \left[c\phi'(x+ct)-c\psi'(x-ct)\right]\Big|_{t=0}=g(x)$$

$$\Longrightarrow c\phi'(x)-c\psi'(x)=g(x) \Longrightarrow \phi(x)-\psi(x)=\underbrace{\phi(x_0)-\psi(x_0)}_{k(x_0)}+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$$

اگر عبارت بدست آمده‌ی فوق را با عبارت (3) جمع کرده و حاصل را بر 2 تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\phi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+K(x_0)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds\right]$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-k(x_0)-\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds\right]$$

$$u(x,t)=\phi(x+ct)+\psi(x-ct) \Longrightarrow * \; u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

مثال: جواب دالامبر معادله‌ی موج را در صورتی که $c=1$ و $u(0,t)=u(L,t)=0$ باشد، در هر یک از شرایط اولیه‌ی زیر بدست آورید:

الف) $f(x)=0.01(x^3-x^5)$, $g(x)=0$

$$u(x,t)=\frac{0.01}{2}\left[(x+t)^3+(x-t)^3-(x+t)^5-(x-t)^5\right]$$

ب) $f(x)=\sin^2 \pi x$, $g(x)=\sin \pi x$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sin^2\pi(x+t)+\sin^2\pi(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin \pi s\,ds \Longrightarrow$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sin^2\pi(x+t)+\frac{1}{2}\sin^2\pi(x-t)-\frac{1}{2\pi}\cos\pi(x+t)+\frac{1}{2\pi}\cos\pi(x-t)$$

مثال: جواب معادله‌ی موج را در صورتی که $c=1$ ، $L=\pi$ ، $g(x)=0$ و $f(x)=k\sin 2x$ باشد، بدست آورید.

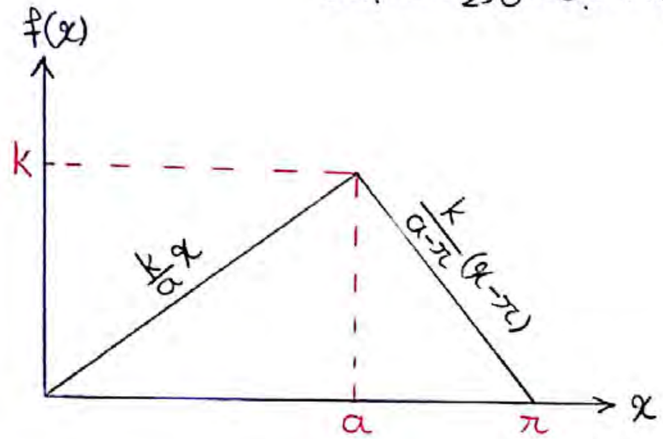
$$g(x)=0 \Longrightarrow b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} k\sin 2x \sin nx\, dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{k}{2}\left[\cos(2-n)x-\cos(2+n)x\right]dx$$

$$=\frac{k}{\pi}\left[\frac{1}{2-n}\sin(2-n)x-\frac{1}{2+n}\sin(2+n)x\right]\Bigg|_0^{\pi}=\begin{cases}k & n=2\\ 0 & n\neq 2\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt\sin nx=k\cos 2t\sin 2x$$

مثال: جواب معادله‌ی موج را با شرایط $c=1$ ، $L=\pi$ ، $g(x)=0$ و $f(x)$ مطابق شکل زیر، محاسبه کنید.



$$g(x)=0 \Longrightarrow b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\, dx$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{a}\frac{k}{a}x\sin nx\, dx+\frac{2}{\pi}\int_a^{\pi}\frac{k}{a-\pi}(x-\pi)\sin nx\, dx$$

	مشتق	انتگرال
$\oplus$	$\frac{k}{a}x$	$\sin nx$
$\ominus$	$\frac{k}{a}$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
$\oplus$	0	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

	مشتق	انتگرال
$\oplus$	$\frac{k}{a-\pi}(x-\pi)$	$\sin nx$
$\ominus$	$\frac{k}{a-\pi}$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
$\oplus$	0	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$a_n=\frac{2k}{\pi}\left(-\frac{x}{na}\cos nx+\frac{1}{n^2a}\sin nx\right)\Bigg|_0^{a}+\frac{2k}{\pi}\left[-\frac{x-\pi}{n(a-\pi)}\cos nx+\frac{1}{n^2(a-\pi)}\sin nx\right]\Bigg|_a^{\pi}$$

$$=\frac{2k}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos na+\frac{1}{n^2a}\sin na+\frac{a-\pi}{n(a-\pi)}\cos na-\frac{1}{n^2(a-\pi)}\sin na\right]$$

$$a_n=\frac{2k\sin na}{n^2a(\pi-a)}$$

$$u(x,t)=\frac{2k}{a(\pi-a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n^2}\cos nt\cdot\sin nx$$

مثال: مطلوب است حل معادله‌ی دیفرانسیل $xu_x=yu_y$ به روش تفکیک متغیرها.

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

$$x\underbrace{X'Y}_{u_x}=y\underbrace{Y'X}_{u_y}\implies\frac{xX'}{X}=\frac{yY'}{Y}=k$$

$$\left.\begin{aligned}&X'-\frac{k}{x}X=0\implies X(x)=c_1x^k\\&Y'-\frac{k}{y}Y=0\implies Y(y)=c_2y^k\end{aligned}\right|\implies u(x,y)=c_1c_2(xy)^k=c(xy)^k$$

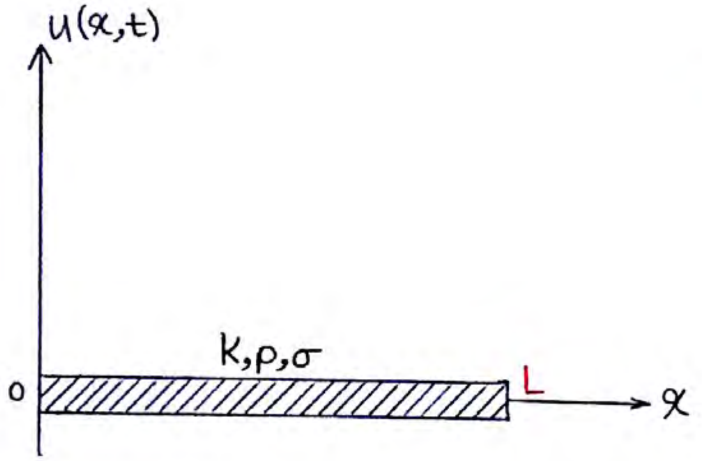
معادله‌ی گرمای یک بعدی:

$$*\ \frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\ ;\ c^2=\frac{k}{\rho\sigma}$$

k → ضریب انتقال گرما

σ → گرمای ویژه

ρ → چگالی



حل معادله‌ی گرما به روش جداسازی متغیرها.

حالت اول: یک میله از دو طرف کرانداز به طول L با شرایط مرزی (دمای کرانه ها) صفر.

شرایط مرزی: $u(0,t)=u(L,t)=0$

شرایط اولیه: $u(x,0)=f(x)$

$$u(x,t)=F(x)G(t)$$

معادله‌ی گرما: $F\dot G=c^2F''G\implies\dfrac{F''}{F}=\dfrac{\dot G}{c^2G}=-\lambda^2\implies\left|\begin{aligned}&F''+\lambda^2F=0\\&\dot G+\lambda^2c^2G=0\end{aligned}\right.$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x \\ G(t) = C\,e^{-\lambda^2 c^2 t} \end{cases}$$

$$U(0,t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$U(L,t) = 0 \Rightarrow A\sin\lambda L = 0 \Rightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ \lambda L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}\ ;\ n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$F_n(x) = A_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$G_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$U_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cdot e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \quad ;\ B_n = A_n C_n$$

$$* \quad U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$U(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$* \quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad ;\ n = 1, 2, \dots$$

حالت دوم: یک میله از دو طرف کراندار به طول L با شرایط مرزی (دمای کرانه‌ها) غیرصفر.

شرایط مرزی: $U(0,t) = T_0 \quad , U(L,t) = T_1$

شرایط اولیه: $U(x,0) = f(x)$

برای حل معادله‌ی گرما در این حالت، تابع گرما را به دو عبارت تفکیک می‌کنیم (Superposition) که عبارت $W(x,t)$ معادل تابع گرما در حالت اول یا به عبارتی تابع گرمای یک بعدی با شرایط مرزی صفر و عبارت $V(x)$ بیانگر توزیع گرما به صورت خطی و مستقل از زمان می‌باشد.

$$U(x,t) = W(x,t) + V(x)$$

$$U(0,t) = T_0 \Rightarrow \underbrace{\cancel{W(0,t)}}_{0} + V(0) = T_0 \Rightarrow V(0) = T_0$$

$$U(L,t) = T_1 \Rightarrow W(L,t) + V(L) = T_1 \Rightarrow V(L) = T_1$$

از آن جایی که $V(x)$ توزیع خطی گرما را از ابتدا تا انتهای میله نشان می‌دهد، تابعی درجه یک از x خواهد بود:

$$V(x) = \frac{T_1 - T_0}{L}x + T_0$$

P.66

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \implies \frac{\partial w}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}^{\,0} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c^2 \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}^{\,0} \implies \frac{\partial w}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

معادله ی حاصل، معادله ی گرما با شرایط مرزی حالت اول است:

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$* \; U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} + V(x) \quad ; \quad V(x) = \frac{T_1 - T_0}{L} x + T_0$$

$$U(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x + V(x)$$

$$h(x) = f(x) - V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$* \; B_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - V(x)] \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

حالت سوم: یک میله ی کراندار به طول L با شرایط مرزی عایق شده (انتقال گرما در کرانه ها صفر است.)

شرایط مرزی: $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$

شرایط اولیه: $U(x,0) = f(x)$

$$U(x,t) = F(x) G(t)$$

معادله ی گرما: $F\dot{G} = c^2 F'' G \implies \frac{F''}{F} = \frac{\dot{G}}{c^2 G} = -\lambda^2 \implies \left| \begin{array}{l} F'' + \lambda^2 F = 0 \\ \dot{G} + \lambda^2 c^2 G = 0 \end{array} \right.$

$$\implies \left| \begin{array}{l} F(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \\ G(t) = C e^{-\lambda^2 c^2 t} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \implies F'(0) G(t) = 0 \implies F'(0) = 0 \implies \{A\lambda \cos \lambda x - B\lambda \sin \lambda x\}\Big|_{x=0} = 0$$

$$\implies A = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \implies F'(L) = 0 \implies \{-B\lambda \sin \lambda x\}\Big|_{x=L} = 0 \implies \left| \begin{array}{l} B \neq 0 \\ \lambda L = n\pi \implies \lambda_n = \frac{n\pi}{L} ; n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

$$F_n(x) = B_n \cos \lambda_n x = B_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$
$$G_n(x) = C_n \, e^{-\lambda_n^2 c^2 t}$$
$$\Longrightarrow u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$
$$A_n = B_n C_n$$

$$* \; u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} + A_0$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{L} x + A_0$$

$$* \; A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \; ; \quad n = 1, 2, \dots \qquad * \; A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \, dx$$

حالت چهارم: یک میله از دو طرف بی‌کران.

شرایط مرزی: $u(-\infty, t) = u(\infty, t) = 0$

شرایط اولیه: $u(x, 0) = f(x) \; ; \; -\infty < x < \infty$

$$u(x,t) = F(x) G(t)$$

معادله‌ی گرما: $F\dot{G} = c^2 F'' G \Longrightarrow \frac{F''}{F} = \frac{\dot{G}}{c^2 G} = -p^2 \Longrightarrow \begin{cases} F'' + p^2 F = 0 \\ \dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F(x) = A(p) \cos px + B(p) \sin px \\ G(t) = C e^{-c^2 p^2 t} \end{cases}$$

$$u(x,t;p) = \left[A(p) \cos px + B(p) \sin px\right] e^{-c^2 p^2 t}$$

$$* \; u(x,t) = \int_0^{\infty} \left[A(p) \cos px + B(p) \sin px\right] e^{-c^2 p^2 t} \, dp$$

در این حالت ضرایب A و B تابعی از p هستند. از آن جایی که معادله‌ی گرما معادله‌ای همگن است، جواب کلی آن به شکل مجموع تمامی جواب‌های ممکن خواهد بود. در حالت های قبل جواب ها به شکل گسسته ($n = 1, 2, \dots$) بودند و جواب کلی معادله حاصل مجموع (Σ) جواب های ممکن بود ولی در این حالت چون جواب های ممکن پیوسته اند، شکل جواب کلی معادله به صورت انتگرال می باشد.

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^{\infty} \left[A(p) \cos px + B(p) \sin px\right] dp$$

$$* \; A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos pv\, dv \qquad * \; B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin pv\, dv$$

$$\Longrightarrow \; * \; u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(px - pv)\,dv\right] e^{-c^2p^2t}\,dp$$

مثال: مطلوب است حل معادله ی گرمای یک بعدی با شرایط مرزی و اولیه ی زیر:

$$1.752\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(10,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) = \sin(0.1\pi x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

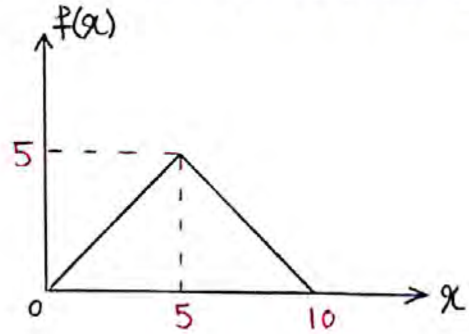
$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{10}\int_0^{10}\sin\frac{\pi x}{10}\sin\frac{n\pi}{10}x\,dx = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right) e^{-\left(\frac{1.752\pi^2}{100}\right)t}$$

مثال: مطلوب است حل معادله ی گرمای یک بعدی با شرایط مرزی و اولیه ی زیر:

$$1.752\,u_{xx} = u_t$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(10,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x & 0<x<5 \\ 10-x & 5<x<10 \end{cases} \end{cases}$$



$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{10}\left[\int_0^5 x\sin\frac{n\pi}{10}x\,dx + \int_5^{10}(10-x)\sin\frac{n\pi}{10}x\,dx\right] = \frac{40}{n^2\pi^2}\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n^2\pi^2}\sin n\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right) e^{-\left(\frac{1.752n^2\pi^2}{100}\right)t}$$

مثال: مطلوب است حل معادله‌ی گرمای یک بعدی با شرایط مرزی و اولیه‌ی زیر:

$$u_{xx} = u_t$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) = x^2 \end{cases}$$

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{x^3}{3\pi}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$u(x,t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)\, e^{-n^2 t}$$

مثال: مطلوب است حل معادله‌ی گرمای یک بعدی با شرایط مرزی و اولیه‌ی زیر:

$$c^2 u_{xx} = u_t$$

$$u(-\infty,t) = u(\infty,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} u_0 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} u_0 \cos px\,dx = \frac{2u_0}{\pi p}\sin p$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\,dx = 0 \qquad \text{(تابع فرد)}$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \left[A(p)\cos px + B(p)\sin px\right] e^{-c^2p^2t}\,dp$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{2u_0}{\pi p} \sin p \cos px \cdot e^{-c^2p^2t}\,dp$$

معادله‌ی گرمای دوبعدی در حالت پایا

معادله‌ی گرمای دوبعدی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad ; c^2 = \frac{K}{\rho\sigma}$$

درصورتی که جریان گرما پایا (مستقل از زمان) باشد، آن گاه $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ بوده و معادله‌ی گرمای دوبعدی به معادله‌ی لاپلاس دوبعدی تبدیل می‌شود:

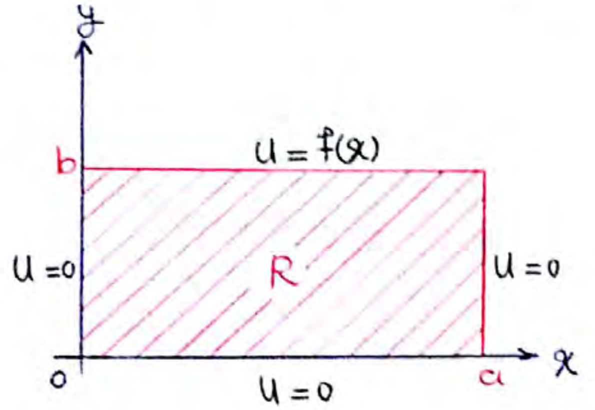
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

در این صورت، یک مسأله‌ی گرما شامل معادله‌ی لاپلاس فوق در یک ناحیه مانند R واقع در صفحه‌ی xy و شرط کرانه‌ای مشخص بر روی منحنی C که بر روی R واقع است، حاصل می‌شود. چنین مسأله‌ای را یک مسأله با مقدار کرانه‌ای می‌گویند.

حال می‌خواهیم معادله‌ی لاپلاس را در مستطیل R با فرض اینکه دمای $u(x,y)$ در ضلع فوقانی مستطیل برابر با تابع مفروض $f(x)$ و در سه ضلع دیگر صفر باشد، محاسبه کنیم، هرگاه مقدار u بر روی منحنی C با مقدار کرانه‌ای مشخص باشد. (مسأله‌ی دیریکله)

با اعمال روش ضربی یا روش جداسازی متغیرها، در مورد معادله‌ی لاپلاس فوق داریم:

$$u(x,y) = F(x)G(y) \implies \frac{1}{F}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -k < 0$$



$g(y) \neq 0$

شرایط کرانه‌ای در $x=0$ و $x=a$ ایجاب می‌کند که $F(0) = F(a) = 0$ باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + kF = 0 \quad ; \; F(0) = F(a) = 0$$

$$F(x) = F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}k \quad ; \; n = 1, 2, \dots \quad , k = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G = 0 \implies G(y) = G_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

شرط کرانه‌ای در $y=0$ ایجاب می‌کند که $G_n(0) = 0$ باشد. بنابراین داریم:

$$G_n(0) = A_n + B_n = 0 \implies B_n = -A_n \implies G_n(y) = A_n\left(e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right) = 2A_n \sinh\frac{n\pi}{a}y$$

با فرض $A_n^* = 2A_n$ خواهیم داشت:

$$u_n(x,y) = F_n(x)G_n(y) = A_n^* \sin \frac{n\pi}{a}x \cdot \sinh \frac{n\pi}{a}y$$

رابطه‌ی $u_n(x,y)$ در شرایط کرانه‌ای اضلاع پایین، چپ و راست مستطیل R صدق می‌کند و باید در شرط کرانه‌ای ضلع فوقانی مستطیل نیز صدق کند:

$$u(x,b) = f(x)$$

جواب کلی معادله‌ی گرمای دوبعدی در حالت پایا به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$$

$$u(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{n\pi}{a}x \cdot \sinh \frac{n\pi}{a}b$$

عبارت فوق بیانگر این امر است که $f(x)$ را می‌توان برحسب سری فوریه‌ی سینوسی نوشت و عبارت $A_n^* \sinh \frac{n\pi}{a}b$ بیانگر ضریب b_n در سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ می‌باشد:

$$b_n = A_n^* \sinh \frac{n\pi}{a}b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a}x\,dx \quad ; n=1,2,\dots$$

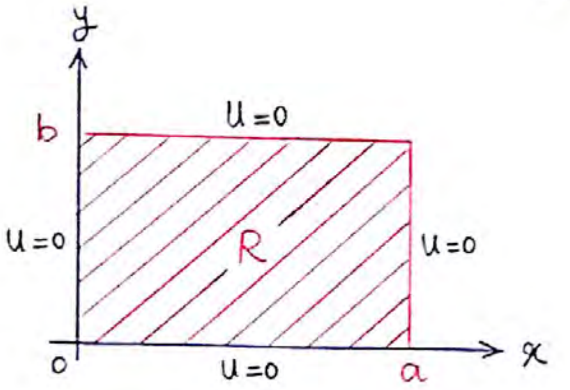
بنابراین شکل کلی جواب معادله‌ی گرمای دوبعدی در حالت پایا به شکل زیر خواهد بود:

$$* \; u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{n\pi}{a}x \cdot \sinh \frac{n\pi}{a}y$$

$$* \; A_n^* = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi}{a}b} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a}x\,dx \quad ; n=1,2,\dots$$

معادله‌ی موج دو بعدی:

معادله‌ی حاکم بر حرکت یک غشای کشیده شده مانند پوسته‌ی یک طبل، معادله‌ی موج دو بعدی با شرایط مرزی (کرانه‌ای) و شرایط اولیه‌ی زیر است.
در این مثال غشای کشیده شده مستطیلی فرض می‌شود تا در دستگاه مختصات کارتزین قابل تحلیل باشد:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \; ; \; c^2 = \frac{T}{\rho} \qquad (1)$$

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \qquad (2)$$

$$; \; t \geqslant 0$$

شرایط مرزی

$$u(x,y,0) = f(x,y) \qquad (3)$$ موقعیت اولیه‌ی غشا

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y) \qquad (4)$$ سرعت اولیه‌ی غشا

برای حل معادله به روش ضربی یا روش جداسازی متغیرها، جواب هایی از معادله‌ی (1) را که در شرایط مرزی (2) صدق کنند را تعیین می‌کنیم:

$$u(x,y,t) = F(x,y)\,G(t) \qquad (5)$$

$$F\ddot{G} = c^2\left(F_{xx}G + F_{yy}G\right) \quad (6) \implies \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{F}\left(F_{xx} + F_{yy}\right)$$

از آن جایی که سمت چپ عبارت فوق تابعی از t و سمت راست آن مستقل از t است، طرفین تساوی فوق بایستی برابر مقداری ثابت باشد که طبق استدلال های مطرح شده در حل معادله‌ی موج یک بعدی، این مقدار ثابت باید عددی منفی باشد:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{F}\left(F_{xx} + F_{yy}\right) = -\nu^2$$

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \quad ; \; \lambda = c\nu \qquad (7)$$

$$F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0 \qquad (8)$$

معادله‌ی بدست آمده در قسمت (8) به معادله‌ی هلمهولتز معروف است. برای حل این معادله نیز می‌توان از روش جداسازی متغیرها استفاده کرد:

$$F(x,y) = H(x)\,Q(y) \qquad (9)$$

با جایگذاری عبارت (9) در معادله‌ی (8) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2H}{dx^2}\cdot Q = -\left(H\cdot\frac{d^2Q}{dy^2} + \nu^2 HQ\right) \qquad (10) \implies \frac{1}{H}\cdot\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + \nu^2 Q\right)$$

تساوی فوق زمانی برقرار است که هر دو طرف تساوی با یک مقدار منفی برابر باشند:

$$\frac{1}{H}\cdot\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2}+\nu^2Q\right) = -k^2$$

از عبارت فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{d^2H}{dx^2}+k^2H=0 \qquad (11)$$

$$\frac{d^2Q}{dy^2}+p^2Q=0 \;;\; p^2=\nu^2-k^2 \qquad (12)$$

جواب های عمومی معادلات دیفرانسیل (11) و (12) به صورت زیر می‌باشند که در آن‌ها A ، B ، C و D ضرایب ثابت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} H(x)=A\cos kx+B\sin kx \\ Q(y)=C\cos py+D\sin py \end{array}\right| \xrightarrow{(5)} u(x,y,t)=F(x,y)G(t) \xrightarrow{(9)} u(x,y,t)=H(x)Q(y)G(t)$$

براساس شرایط مرزی (2) و با توجه به اینکه $G(t)\neq 0$، برروی کرانه های متناظر با $x=0$ ، $x=a$ ، $y=0$ و $y=b$ تابع $F(x,y)=H(x)Q(y)$ بایستی صفر باشد:

$$H(0)=H(a)=0 \quad , \quad Q(0)=Q(b)=0$$

$$H(0)=0 \Longrightarrow A=0$$

$$H(a)=0 \Longrightarrow B\sin ka=0 \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} B\neq 0 \\ \sin ka=0 \Longrightarrow ka=m\pi \Longrightarrow k=\frac{m\pi}{a}\;;\; m=1,2,\ldots \end{array}\right.$$

$$Q(0)=0 \Longrightarrow C=0$$

$$Q(b)=0 \Longrightarrow D\sin pb=0 \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} D\neq 0 \\ \sin pb=0 \Longrightarrow pb=n\pi \Longrightarrow p=\frac{n\pi}{b}\;;\; n=1,2,\ldots \end{array}\right.$$

با فرض $B=D=1$ داریم:

$$H_m(x)=\sin\frac{m\pi}{a}x \quad , \quad Q_n(y)=\sin\frac{n\pi}{b}y \;;\; m,n=1,2,\ldots$$

$$F_{m,n}(x,y)=H_m(x)Q_n(y)=\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y \;;\; m,n=1,2,\ldots \qquad (13)$$

$$(7),(12) \Longrightarrow \lambda=c\sqrt{\nu^2+p^2} \Longrightarrow \lambda_{m,n}=c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}} \qquad (14)$$

با مشخص شدن $\lambda_{m,n}$ ، جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل (7) بدست می‌آید:

$$G_{m,n}(t) = B_{m,n}\cos\lambda_{m,n}t + B^*_{m,n}\sin\lambda_{m,n}t \quad ; m,n = 1,2,\dots$$

$$u_{m,n}(x,y,t) = F_{m,n}(x,y)\,G_{m,n}(t) = \left[B_{m,n}\cos\lambda_{m,n}t + B^*_{m,n}\sin\lambda_{m,n}t\right]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$; m,n = 1,2,\dots \qquad (15)$$

ضرایب مجهول عبارت (15) را به کمک شرایط اولیه‌ی (3) و (4) می‌توان محاسبه کرد:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}(x,y,t)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_{m,n}\cos\lambda_{m,n}t + B^*_{m,n}\sin\lambda_{m,n}t\right]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y \qquad (16)$$

$$u(x,y,0) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y \qquad (17)$$

سری فوق را سری فوریه‌ی دوگانه می‌نامیم. در واقع تابع دو متغیره‌ی $f(x,y)$ را توسط سری دوگانه‌ی فوریه‌ی فوق می‌توان بسط داد. ضریب $B_{m,n}$ را به صورت زیر می‌توان بدست آورد:

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}\sin\frac{n\pi}{b}y \qquad (18)$$

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y)\sin\frac{m\pi}{a}x$$

$$K_m(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx \qquad (19)$$

بنابراین $K_m(y)$ ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $f(x,y)$ مطابق رابطه‌ی (19) محاسبه می‌شود. همچنین ضریب $B_{m,n}$ سری فوریه‌ی سینوسی $K_m(y)$ براساس روابط (18) و (19) بدست خواهد آمد:

$$B_{m,n} = \frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

$$B_{m,n} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy \;;\; m,n = 1,2,\dots \qquad (20)$$

برای محاسبه‌ی ضریب $B^*_{m,n}$ از شرط اولیه‌ی (4) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B^*_{m,n}\lambda_{m,n}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y \qquad (21)$$

مشابه حالت (17) عبارت فوق را نیز می‌توان یک سری فوریه‌ی دوگانه درنظر گرفت و ضریب $B^*_{m,n}$ را حساب کرد:

$$B^*_{m,n} = \frac{4}{ab\lambda_{m,n}} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \, dx\,dy \; ; \; m,n = 1,2,\ldots \qquad (22)$$

بنابراین جواب کلی معادله‌ی موج دوبعدی با شرایط مرزی و شرایط اولیه‌ی (2)، (3) و (4) به صورت زیر خواهد بود:

$$* \; u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{m,n} \cos\lambda_{m,n} t + B^*_{m,n} \sin\lambda_{m,n} t \right] \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{m\pi}{b}y$$

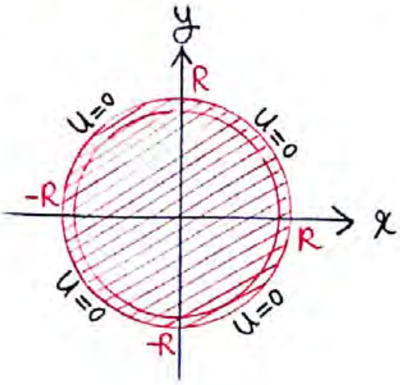
$$* \; \lambda_{m,n} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \; ; \; m,n = 1,2,\ldots$$

$$* \; B_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \cdot dx\,dy \; ; \; m,n = 1,2,\ldots$$

$$* \; B^*_{m,n} = \frac{4}{ab\lambda_{m,n}} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin\frac{m\pi}{a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \, dx\,dy \; ; \; m,n = 1,2,\ldots$$

معادله‌ی موج دوبعدی در دستگاه مختصات قطبی:

برای حل معادله‌ی موج دوبعدی در دستگاه مختصات قطبی، غشای مرتعش را دایره‌ای درنظر می‌گیریم تا در دستگاه مختصات قطبی قابل تحلیل باشد:



$$* \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad ; \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

اگر فرض کنیم ارتعاش غشای دایره‌ای نسبت به دوران متقارن است، u مستقل از θ خواهد بود:

$$* \quad u = u(r,t)$$

$u(R,t) = 0 \; ; \; t \geqslant 0 \qquad (1)$ شرط مرزی

$u(r,0) = f(r) \qquad (2)$ موقعیت اولیه‌ی غشا

$\frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = g(r) \qquad (3)$ سرعت اولیه‌ی غشا

لاپلاسین در مختصات قطبی:

$$u = u(x,y) \Longrightarrow \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u = u(r,\theta) \Longrightarrow \nabla^2 u = ?$$

$$r = r(x,y) \quad , \quad \theta = \theta(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (\mathrm{I})$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} \Longrightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3} \quad (\mathrm{II})$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -y\left(\frac{-2}{r^3}\right) r_x = \frac{2xy}{r^4} \quad (\mathrm{III})$$

$$\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III} \Longrightarrow u_{xx}=\frac{x^2}{r^2}u_{rr}-2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta}+\frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta}+\frac{y^2}{r^3}u_r+2\frac{xy}{r^4}u_\theta$$

$$(+)$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ بر طریق مشابه برای $\Longrightarrow u_{yy}=\frac{y^2}{r^2}u_{rr}+2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta}+\frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta}+\frac{x^2}{r^3}u_r-2\frac{xy}{r^4}u_\theta$

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

$$\Longrightarrow * \ \nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

معادلهٔ موج دوبعدی در مختصات قطبی $* \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)\ ;\ c^2=\frac{T}{\rho}$

u مستقل از θ $\Longrightarrow * \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right)\ ;\ c^2=\frac{T}{\rho} \qquad (4)$

$u(r,t)=W(r)G(t)\xrightarrow{(4)}\frac{\ddot G}{c^2 G}=\frac{1}{W}\left(W''+\frac{1}{r}W'\right)=-k^2$ (مقدار منفی)

$$\Longrightarrow \ddot G+\lambda^2 G=0 \quad ;\ \lambda=ck \qquad (5)$$

$$W''+\frac{1}{r}W'+k^2W=0 \qquad (6)$$

$$kr\triangleq s \Longrightarrow \frac{1}{r}=\frac{k}{s}\Longrightarrow W'=\frac{dW}{dr}=\frac{dW}{ds}\cdot\frac{ds}{dr}=\frac{dW}{ds}k\Longrightarrow W''=\frac{d^2W}{dr^2}=\frac{d^2W}{ds^2}k^2$$

$$\xrightarrow{(6)}\frac{d^2W}{ds^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{dW}{ds}+W=0 \quad (7)$$

معادلهٔ (7) یک معادلهٔ ODE از نوع بسل با پارامتر $\nu=0$ می‌باشد و جواب آن توابع بسل J_0 و Y_0 خواهند بود.

$* \ J_\nu=x^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \quad ;\ \Gamma(\nu+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^\nu dt$ (تابع گاما)

$$* \ Y_\nu=\frac{1}{\sin\nu x}\left(J_\nu\cos\nu\pi-J_{-\nu}\right)$$

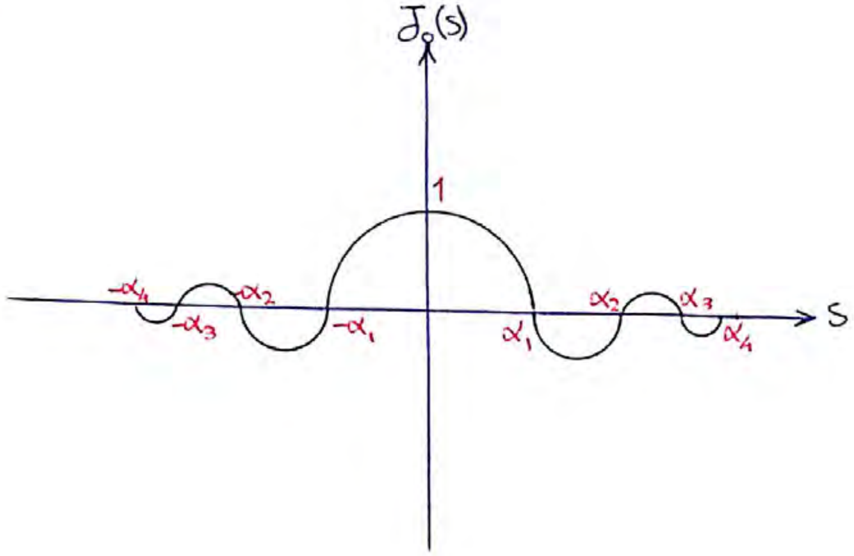
جواب Y_0 برای معادلهٔ (7) مورد قبول نیست زیرا $Y_0\to\infty$ و $u\to\infty$ خواهد بود. درحالی که تغییر شکل غشای دایره‌ای همواره محدود است و به بی‌نهایت میل نمی‌کند.

$$Y_0=\lim_{\nu\to 0}Y_\nu=\infty$$

بنابراین در جواب معادلهٔ (7) داریم:

$$W(r)=J_0(s)=J_0(kr)\ ;\ s=kr$$

$(1)\Longrightarrow u(R,t)=0\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} W(R)=J_0(kR)=0\Longrightarrow s=kR=\alpha_1,\alpha_2,\dots \\ G(t)\neq 0\ ;\ u(r,t)\neq 0\end{array}\right.$ (صفرهای تابع بسل)



m	α_m
1	2.4048
2	5.5201
3	8.6537
4	11.7915
5	14.9309

$$kR=\alpha_m \Rightarrow k_m=\frac{\alpha_m}{R}\ ;\ m=1,2,\dots \quad (8) \Longrightarrow W_m(r)=J_0(k_m r)=J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) \quad (9)$$
$$;m=1,2,\dots$$

$$\lambda_m=ck_m=c\left(\frac{\alpha_m}{R}\right) \Longrightarrow G_m(t)=A_m\cos\lambda_m t+B_m\sin\lambda_m t \quad (10)$$

$$\Longrightarrow u_m(r,t)=W_m(r)G_m(t)=(A_m\cos\lambda_m t+B_m\sin\lambda_m t)J_0(k_m r)\ ;\ m=1,2,\dots \quad (11)$$

$$\Longrightarrow u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos\lambda_m t+B_m\sin\lambda_m t)J_0(k_m r)\ ;\ m=1,2,\dots \quad (12)$$

$$\xrightarrow{(2)} u(r,0)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)=f(r) \quad (13)$$

سری فوق سری فوریه - بسل نام دارد و A_m ضریب سری فوریه-بسل است:

$$A_m=\frac{2}{R^2J_1^2(\alpha_m)}\int_0^R rf(r)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)dr\ ;\ m=1,2,\dots \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{m=1}^{\infty}(-A_m\lambda_m\sin\lambda_m t+B_m\lambda_m\cos\lambda_m t)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)\xrightarrow{(3)} u_t(r,0)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\lambda_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)=g(r)$$

سری فوق، سری فوریه - بسل با ضریب $B_m\lambda_m$ است؛ بنابراین:

$$B_m=\frac{2}{\lambda_m R^2J_1^2(\alpha_m)}\int_0^R rg(r)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)dr\ ;\ m=1,2,\dots \quad (15)$$

پس جواب کلی معادله‌ی موج دوبعدی با شرایط مرزی و شرایط اولیه‌ی (1)، (2) و (3) به صورت زیر است:

$$* \ u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cos c\left(\frac{\alpha_m}{R}\right)t+B_m\sin c\left(\frac{\alpha_m}{R}\right)t\right)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$

$$* \ A_m=\frac{2}{R^2J_1^2(\alpha_m)}\int_0^R rf(r)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)dr\ ,\ B_m=\frac{2}{c\,\alpha_m R\,J_1^2(\alpha_m)}\int_0^R rg(r)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)dr\ ;m=1,2,\dots$$