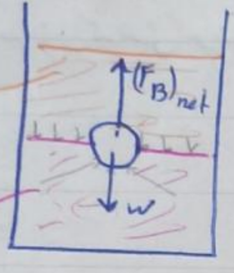
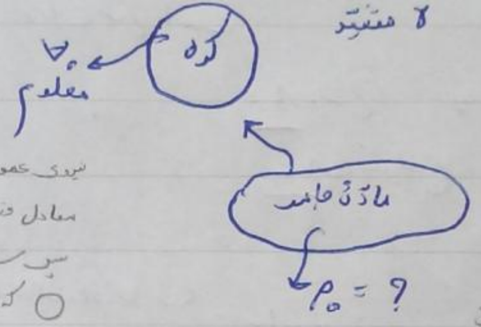
کنکور 93

مثال: از ماده جامدی با دانسیته مجهول $\rho_0$ کره‌ای با حجم معلوم $\forall_0$ ساخته شده است. کره مزبور در ظرفی مطابق شکل رها می‌شود. در داخل این ظرف دو مایع غیرقابل امتزاج با دانسیته‌های معلوم مطابق شکل ریخته شده است. فرض کنید در حالت تعادل کره مزبور در سطح مشترک بین 2 سیال واقع شود به نحوی که نصف آن در داخل هر یک از این 2 سیال قرار گیرد. دانسیته این کره ($\rho_0$) چقدر است؟

اینجا به جای مایع و گاز 2 مایع است در قبل از گاز صرف نظر کردیم ولی اینجا 2 تا مایع داریم.



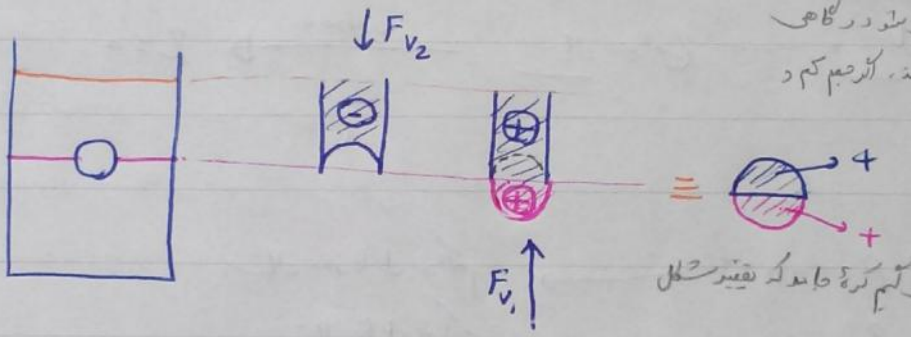
$\rho_0 = ?$



نیروی عمودی که وارد می‌شود
معادل وزن سیال بالا
پس سیال بالا کمک می‌کند به
○ که نره پایین !!

حباب به سمت بالا
حرکت کند از حالت
کروی خارج می‌شود
یعنی حباب در سیال غیرنیوتنی
می‌شود در نگاهی

حجم ثابت می‌ماند، اگر حجم کم د
زیاد می‌شه
نیروی
ارشمیدس
می‌شه
برای همین می‌گیم کره جامد که تغییر شکل
نده



یعنی حباب‌ها کروی اند بیا بود بالا منبسط و شکل [illegible]
ارشمیدسش ○ می‌شود

$$(F_B)_{net} = F_{V_1} - F_{V_2}$$

$$W = \gamma_1 \forall_1 + \gamma_2 \forall_2$$

$$\gamma_0 \cancel{\forall_0} = \gamma_1 \left(\frac{1}{2}\cancel{\forall_0}\right) + \gamma_2 \left(\frac{1}{2}\cancel{\forall_0}\right)$$

$$\boxed{\rho_0 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}}$$

## فصل 3: مقدمه‌ای بر مباحث سینماتیکی

### انواع جریان

* تعاریف ← 1) جریان لزج و غیرلزج

2) جریان قابل تراکم و غیرقابل تراکم

3) جریان ایده‌آل - غیرایده‌آل

4) دائم - غیردائم

5) جریان یک، دو، سه بعدی

6) جریان یک، دو، سه جهتی

جریان چرخشی-غیرچرخشی، درهم که نبود؟ گفتیم

تا الان جریان لزج و غیرلزج و جریان چرخشی سؤال آمده

①

**جریان لزج:** ~~$\mu \neq 0$~~ فقط به تنش استناد کنیم. (برای جریان) ولی برای سیال به $\mu$ استناد کنیم

جریانی که تنش برشی اش $\neq 0$ جریان لزج است

$\tau \neq 0 \longrightarrow$ جریان لزج

$\tau = 0 \longrightarrow$ جریان غیرلزج

$\mu \neq 0 \longrightarrow$ سیال لزج $\xrightarrow{\text{ممکن است (حالت های خاص)}} \tau = 0$ ! جلسه بعد می گوییم

$\mu = 0 \longrightarrow$ سیال غیرلزج $\xrightarrow{\text{همواره}} \tau = 0 \longrightarrow$ به طور مطلق همچین سیالی نداریم

(بجز سیر هلیم مایع که $\mu \simeq 0 \longrightarrow \tau \simeq 0$)

② به دانسیته استناد کنیم این برای سیال است نه جریان

$\rho = const$ (مستقل از P) $\longrightarrow$ سیال غیرقابل تراکم

$\rho \neq const$ (تابع فشار) $\longrightarrow$ سیال قابل تراکم

C: سرعت متقابل صوت در آن سیال خاص

V: مثلاً سرعت موشک

عدد ماخ به سرعت جسم و سرعت صوت در آن سیال خاص که جسم در آن است بستگی دارد

M: عدد ماخ

$$M = \frac{V}{C}$$

$$M = \frac{V}{C} \leqslant 0.3 \longrightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} < 1\%$$

قابل اثبات

تغییرات نسبی دانسیته

می توان از تراکم پذیری سیال چشم پوشی نمود.

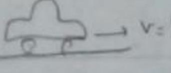
← خواص سیال

$$C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

$M \leq 0.3$ جریان غیرقابل تراکم

$M > 0.3$ جریان قابل تراکم

هوا



$v = 100 \frac{km}{h} \downarrow \frac{m}{s}$

$$C = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} = \sqrt{KRT} \simeq 340 \frac{m}{s}$$

iman

$c\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho\rho}} = 340 \frac{m}{s}$

③

گاز یا مایع

$\rho = const$ & $\mu = 0 \Longrightarrow$ سیال ایده‌آل

(مستقل از فشار)

با گاز ایده‌آل اشتباه نگیرید!

گاز ایده‌آل رابطه‌ای که در آن $P=\rho RT$ برقرار باشد. ولی به این نوع گازها گاز کامل می‌گویند تا اشتباه با نشود.

$M \leq 0.3$ & $\tau = 0 \Longrightarrow$ جریان ایده‌آل

④

جریان غیر دائم: جریانی است که یکی از سه شرط زیر در مورد آن صدق می‌کند:

1) یکی از خواص سیال تابع زمان باشد ← $\mu$ و $\gamma$ و $\sigma$ (کشش سطحی)

(خاصیتی که در مسأله تا الان ثابت در نظر بوده کم و زیاد شود ← غیر دائم)

2) یکی از خواص جریان تابع زمان باشد ← $Q$ و $\dot m$ و $\Omega$ (سرعت چرخشی) و $V$ و ---

3) یکی از خواص هندسی تابع زمان باشد ← زبری $\in$ و $L$ و ---

جریان دائم: غیر دائم نباشد ← دائم است.

⑤ **

تا حالا در مورد بعد سؤال زیاد آمده و مهم است

مثال: در یک جریان خاص مؤلفه‌های بردار سرعت در دستگاه مختصات کارتزین به صورت روابط زیر داده شده است.

$$\vec V : \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy + 5 \\ w = xy + x^2 \end{cases}$$

این جریان چند بعدی است؟

الف) یک بعدی

[✓ ب) دو بعدی]

ج) سه بعدی

د) نمی‌توان گفت.

تعداد x و y و z که در مؤلفه‌ها ظاهر شود بعد را تعیین می‌کند.

$V(x, y, z)$

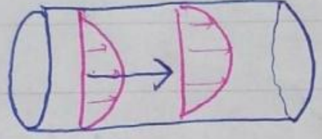
تعداد بعد یک جریان برابر است با تعداد مؤلفه‌های مکانی ظاهر شده در مؤلفه‌های بردار سرعت. (که حداکثر هم می‌تواند سه بعد باشد)

اگر به صورت $\begin{cases} u = x^2 + y^2 + t^2 \\ v = xy + 5 \\ w = x\sqrt{y} + x^2 \end{cases}$ : $\vec{v}$ سه بعد $\xleftarrow{\text{می‌شود}}$ دو بعدی غیردائم

زمان جزو بعدها نیست

* بعد بعداً اهمیت دارد که معادلات ابعادی کنیم ...

مثال. جریان پوآزی در یک لوله چند بعدی است؟
paiseuille



الف) یک

ب) دو

ج) ~

د) نمی‌توان تعیین کرد. ✓

توزیع سرعت هی تکرار می‌شود

جریان پوآزی : جریان آرام (به شرطی در هم هم‌جنس باشد) جریان توسعه یافته، دائم، آرام، غیرقابل تراکم با ویسکوزیته ثابت سیال غیرنیوتنی را پوآزی گویند بعداً در سیالات ۲ داریم.

(هر سال از این سؤال امتحانی داریم)

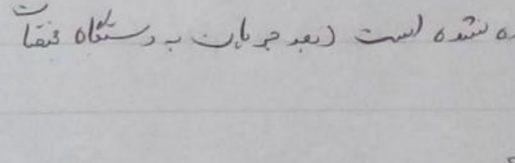
گزینه د 4 درست است چون دستگاه مختصات داده نشده است (بعد جریان به دستگاه مختصات انتخابی بستگی دارد)

معمولاً در دستگاه استوانه‌ای جریان پوآزی را حل می‌کنند.

یک مؤلفه سرعت داریم (u) که حداکثر تابع سه تا r و θ و z است.

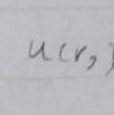
جریان توسعه یافته در جهت z چیزی تغییر نمی‌کند. $u(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$ $\partial/\partial z = 0$ $\partial/\partial \theta = 0$

جریان در جهت θ نمی‌چرخد دقت کنید محوری داریم (تمام ذرات که یک r دارند سرعت یکسان دارند مانند هم آینه دارند)
axial



پس فقط تابع r است. (یک بعدی می‌شود)

اگر جریان آرام باشد $u(r) = \frac{G}{4\mu}(R^2 - r^2)$ * است اگر درهم باشد لگاریتمی است.

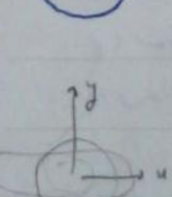


$G = \Delta p / L$ معلوم

سیالات پیشرفته.

اگر بیاییم در دستگاه مختصات کارتزین حل کنیم و حل مشکل‌تر می‌شد.

و رابطه * تبدیل به رابطه زیر می‌شود $u(x, y) = \frac{G}{4\mu}(R^2 - (x^2 + y^2))$



$G = \Delta p / L$ معلوم

جریان پوآزی در دستگاه کارتزین دو بعدی می‌شود

دوشنبه
کلاس نداریم

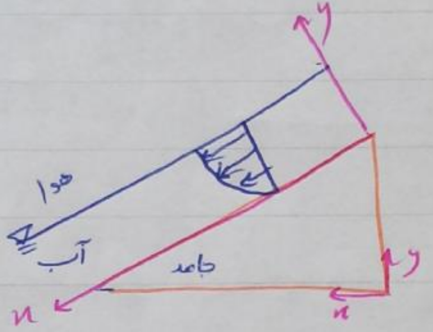
$$\vec{V} = \left| \begin{array}{l} u = \quad\quad \neq 0 \\ v = \quad\quad \neq 0 \\ w = \quad\quad \neq 0 \end{array} \right.$$

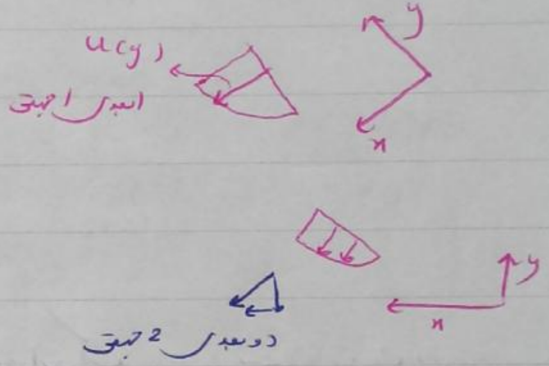
2 مثال قبل چند جهت است؟ 3 جهت

جریانی که سه مولفه سرعتش غیر صفر است ← سه جهت

تعداد مؤلفه های غیر صفر = تعداد جهت جریان (همچنین تعداد جهت جریان نیز به دستگاه مختصات بستگی دارد)

حرکت هم خیلی مهم است.





**انواع خطوط سیالات:** ← گاهی سؤال می دهند

۱) خط مسیر path line — ۱ بار سؤال 3 سال پیش

مهم ← 2) خط اثر streak line — تا حالا سؤال نیامده

3) خط جریان stream line — زیاد سؤال آمده

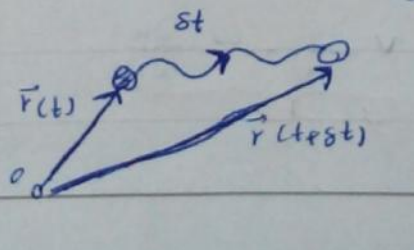
تعریف و نحوهٔ هریک به دست آوردن هرکدام مهم است.

**انواع دیدگاه ها در مکانیک سیالات.**

۱) لاگرانژی (در دینامیک جسم صلب عملاً از دیدگاه لاگرانژی استفاده می شود)

2) اویلری (میدانی) مثل میدان فشار، میدان دما، میدان سرعت

در دیدگاه لاگرانژی: ذرات سیال در حین حرکت دنبال می شود



$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

فقط یک متغیر مستقل که همان زمان است

در این دیدگاه مسائل همواره از نوع غیر دائم هستند.

در دیدگاه لاگرانژی را مشتق جزئی نداریم چون یک متغیر داریم مشتق کامل داریم

در دیدگاه اولری (میدانی): ذرات دنبال نمی‌شوند.

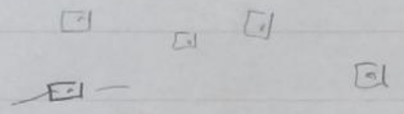
$P(x, y, z, t)$

$T(\quad)$

$\rho(\quad)$

پس مشتق جزئی داریم نه کامل ← 4 متغیر مستقل داریم $(x, y, z, t)$

در این دیدگاه می‌توان مسائل از نوع دائم نیز داشت



میدانی به دست آوردن پارامترها راحت است

$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$

$t = t_0$

---

خطوط سیالات هرکدام می‌توانند مثال هرکدام از این دیدگاه‌ها باشند.

تفسیر مشتق مادی: دو دیدگاه را به هم وصل می‌کند. (کمیت لاگرانژی را می‌توان به صورت ترم‌های اولری بیان کرد)

می‌توان در مورد یک خاصیت به صورت لاگرانژی تفکر داشت بدون اینکه ذره را دنبال کنیم.

$B(x, y, z, t)$: یک خاصیت دلخواه سیال یا جریان

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t}\underbrace{\boxed{\frac{dt}{dt}}}_{1} + \frac{\partial B}{\partial x}\underbrace{\boxed{\frac{dx}{dt}}}_{u} + \frac{\partial B}{\partial y}\underbrace{\boxed{\frac{dy}{dt}}}_{v} + \frac{\partial B}{\partial z}\underbrace{\boxed{\frac{dz}{dt}}}_{w}$$

$$\frac{dB}{dt} = \underbrace{\frac{DB}{Dt}}_{\text{لاگرانژی}} = \underbrace{\frac{\partial B}{\partial t} + u\frac{\partial B}{\partial x} + v\frac{\partial B}{\partial y} + w\frac{\partial B}{\partial z}}_{\text{ترم‌های اولری}}$$

$$= \frac{\partial B}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})B$$

$$a_x\Big|_{\text{ذره}} = \frac{Du}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{زمانی}} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{شتاب جابه‌جایی}}$$

Temporal

$$\vec{\nabla}\ \Big|\ \begin{matrix}\partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z\end{matrix}$$

**• خط مسیر :** خطی است فیزیکی (قابل مشاهده) از مجموعه (از دیدگاه لاگرانژی) که توسط ذره‌ی خاصی از سیال در حین حرکت آن ترسیم می‌گردد.

(دیدگاه لاگرانژی)

ذرهٔ سیال
خط مسیر

آزمایشی سخت (در سیال) ، نحوه‌ی به دست آوردن آسان

**کنکور 90 :**

در یک جریان دو بعدی ~~[illegible]~~ غیردائم مؤلفه‌های بردار سرعت (میدان سرعت) به صورت روابط زیر داده شده است.

$$\begin{cases} u = 2xt \\ v = 3y \end{cases}$$

در لحظه‌ی $t=0$ ذره‌ی (خط مسیر) سیال واقع در نقطه‌ی $(1,1)$ دارای چه ~~موقعیتی~~ معادله‌ای است؟

**گام اول:**

$$u = 2xt = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2t\,dt \Rightarrow \ln x = t^2 + c_1 \quad \xrightarrow[\text{ذره در } (1,1)]{@\ t=0} \quad c_1 = c_2 = 0$$

$$v = 3y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3dt \Rightarrow \ln y = 3t + c_2$$

**گام دوم:** t را بین 2 رابطه حذف می‌کنیم.

$$\ln y = 3t \Rightarrow t = \frac{1}{3}\ln y$$

$$\ln x = t^2 = \left(\frac{1}{3}\ln y\right)^2 = \frac{1}{9}(\ln y)^2$$

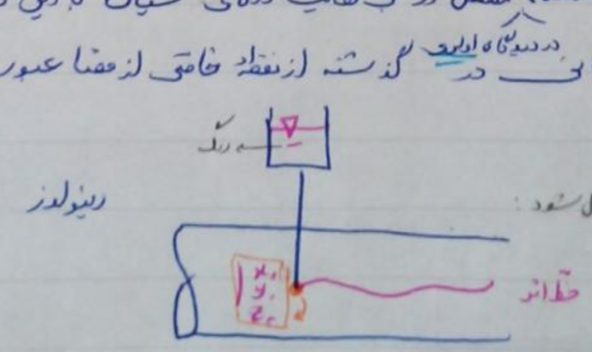
$$\Rightarrow x = e^{+\frac{1}{9}(\ln y)^2}$$

معادله‌ی خط مسیر

**• خط اثر : ≡ خط رنگ :**

آزمایش راحت ، نحوه‌ی به دست آوردن سخت

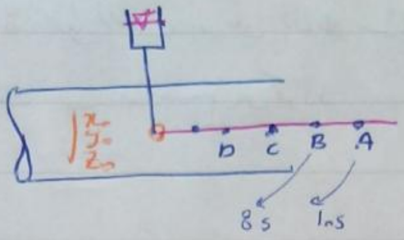
خطی است فیزیکی (قابل مشاهده) متشکل از ذره‌های سیال با این ویژگی (خاصیت) مشترک که همگی لعین ذرات در زمان‌های در (در دیدگاه اویلری) گذشته از نقطه‌ی خاصی از فضا عبور نموده‌اند (رد شده‌اند)



جریان آرام باشد تا خط اثر تشکیل شود:

(از دیدگاه اویلری)

اگر جریان موازی باشد و axial باشد:



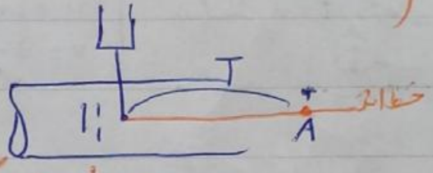
خط اثر → صاف است.

مثال: به سؤال مسأله قبل در مورد خط اثر عبوری از نقطه (1,1) در لحظه t=0 پاسخ دهید.

حل با 3 گام

ذره دلخواه روی خط اثر
$u = 2xt$
$v = 3y$

↓ برای ذره A بنویسیم



گام اول:

t=0 زمان عکسبرداری

زمان t=0 زمان عکسبرداری snap shot است

ذره A در لحظه t=T در x=1 و y=1 است. در t=0 الان در ... است.

$$u = 2xt = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2t\,dt \Rightarrow \ln x = t^2 + \boxed{c_1} \rightarrow -T^2$$

$$v = 3y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3\,dt \Rightarrow \ln y = 3t + \boxed{c_2} \rightarrow -3T$$

$$\text{ه } t = T,\quad x = 1,\quad y = 1$$

گام اول:

$$\ln x = t^2 - T^2$$
$$\ln y = 3t - 3T$$

گام دوم: زمان داده شده را اعمال می‌کنیم.

$$\ln x = -T^2$$
$$\ln y = -3T$$

گام سوم: T را حذف می‌کنیم.

$$T = -\frac{1}{3}\ln y \rightarrow \ln x = -T^2 = -\left(\frac{1}{9}(\ln y)^2\right)$$

$$\Rightarrow x = e^{-\frac{1}{9}(\ln y)^2}$$

→ با خط مسیر در یک مثال قبل فرق ندارد ولی شکلشان خیلی متفاوت است.

نکته: اگر جریان غیر دائم باشد خط مسیر و خط اثر دارای معادلات متفاوتی می‌گردند.

## • خط جریان :

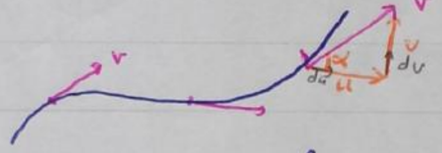
در یک جریان 2 بعدی از نوع غیردائم میدان سرعت به صورت روابط زیر داده شده است.

$u = x(1+2t)$

$v = y$

خط جریان عبوری از نقطه (1و1) در لحظه $t=0$ دارای چه معادله‌ای است؟

**خط جریان:** خطی است فرضی (نه فیزیکی) در داخل سیال با این خاصیت که ذرات سیال واقع بر این خط دارای سرعت مماس بر خط مذبور می‌باشند. (مکان هندسی نقاطی است که بردار سرعت بر خط فرضی مماس است)



$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \longrightarrow y = f(x)$$

چون جریان غیردائم است خط جریان در هر لحظه یک چیز است.

حل :

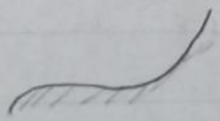
$$\xrightarrow{t=0} \begin{matrix} u = x \\ v = y \end{matrix} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

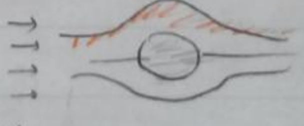
$$\ln y = \ln x + \cancel{c}^{\,0} \xrightarrow{(1,1)} y = x$$

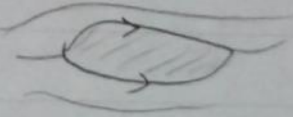
قاعده کلی: اگر جریان غیردائم باشد هر سه خط دارای معادلات متفاوتی می‌گردند.

حالت خاص: در جریان دائم هر سه خط دارای یک معادله هستند

↳ خط جریان ← خط فیزیکی است





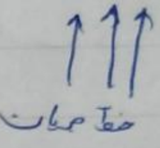


در سیالات خط جریان مهم است چون می‌توان خط جریان را با دیواره یکی گرفت.

در مثال قبلی:

حال اگر زمان داده شده را همان اول اعمال کنیم یا معادلات خط جریان را بر حسب زمان بدست آوریم و در آخر زمان را اعمال کنیم که کار اول بهتر است.

$$\begin{matrix} u = 2\pi t \\ v = 3y \end{matrix} \xrightarrow{\omega\ t=0} \begin{matrix} u = 0 \\ v = 3y \end{matrix} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \infty$$



**مثال:** در یک جریان دو بعدی غیر دائمی از نوع ـــ جهت مؤلفه‌های بردار سرعت به صورت روابط زیر داده شده‌اند در لحظهٔ $t=0$ خط جریان عبوری از نقطهٔ $(1,1)$ دارای چه معادله‌ای است؟

$$\vec{V} \begin{cases} u = ax \\ v = by \\ w = ct \overset{t=0}{=\!=} 0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{by}{ax} \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{b}{a}\right)\frac{dx}{x}$$

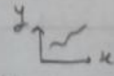
$$\overset{(1,1)}{\Longrightarrow} \ln y = \frac{b}{a}\ln x + \cancel{c} = \ln x^{(b/a)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = x^{b/a}}$$

گاهی در مسائل فقط با ln ها بازی می‌کنند آنگاه به جای c مثلاً بنویس $\ln k$

$$\ln y = \frac{b}{a}\ln x + \overset{c}{\boxed{\ln k}} = \ln x^{b/a} + \ln k = \ln (k x^{b/a})$$

$$\Longrightarrow y = \boxed{k x^{b/a}} \quad \text{معادلات پارامتری}$$



در $t=0$ شکل در صفحهٔ $xy$ و خواهد بود. $t=1$ یا $t=2$ ـــ سؤال از صفحهٔ $y$-$x$ بود

و اگر 3 بعدی باشد حال چگونه حل کرد؟

فرم کلی: $$\boxed{\frac{u}{dx} = \frac{v}{dy} = \frac{w}{dz}}$$

در این حالت 3 بعدی از فرم کلی استفاده کن و 2 به 2 حل کن.

$$\frac{u}{dx}=\frac{v}{dy}=\frac{w}{dz}$$

تصویر در صفحه xy

تصویر در صفحه yz

البته اگر خواستیم می‌توانیم u یا v را بر اساس این 2 حذف کرد

خطی که تصویرش در دو صفحهٔ عمود برهم داده شود خط خاص و منحصر به فرد

## فصل 4 :

## مباحث دینامیکی

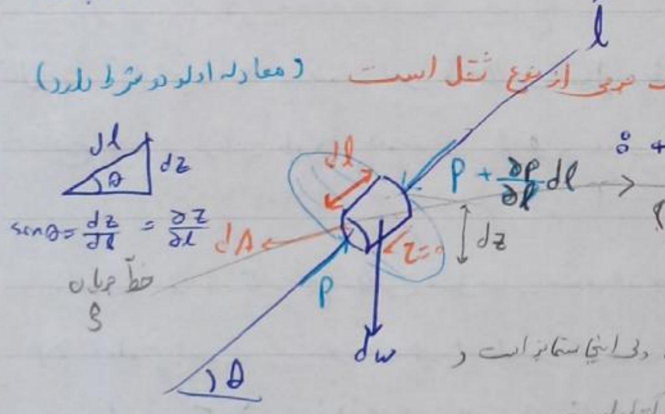
2 سال قبل در کنکور آمده بود

فرض اساسی: جریان غیرلزج است ($\tau=0$) ← معادله اولر + کاربردها ← معادله برنولی + کاربردها

اساسی

فرض اساسی: ① جریان غیرلزج $\tau=0$ و ② نیروی حجمی از نوع ثقل است (معادله اولر دو شرط دارد)

هدف: معادله اولر در راستای دلخواه $\hat{l}+$ :



$\hat{l}$
dl
dz
θ
$\sin\theta=\frac{dz}{dl}=\frac{\partial z}{\partial l}$
dA
خط جریان s
dl
$P+\frac{\partial p}{\partial l}dl$
$\tau=0$
dz
P
dw
θ

ببینیم در راستای خط جریان s چه می‌شود؟

نیروی خارجی حجمی از نیروی ثقل است

درست است که نیروی ثقل هم نیروی خارجی است ولی اینجا منظور این است

اینجا نیروی خارجی را از خارج وارد می‌کنیم و تابع پتانسیل است

نیروی ثقل را ما در وزن اعمال کردیم

$$dm=\rho\, dA\cdot dl$$
$$dw=\rho g\, dA\cdot dl$$

$$(\Sigma F_z)_l=dm\cdot a_l=\rho\, dA\cdot dl\cdot a_l$$

$$\frac{-dw\underbrace{\sin\theta}_{\frac{\partial z}{\partial l}}+p\,dA-\left(p+\frac{\partial p}{\partial l}dl\right)dA}{dA\cdot dl}=\frac{\rho\, dA\cdot dl\cdot a_l}{dA\cdot dl}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial l}-\gamma\frac{\partial z}{\partial l}=\rho a_l\longrightarrow\boxed{\frac{\partial p}{\partial l}+\rho g\frac{\partial z}{\partial l}=-\rho a_l}$$

معادله اولر در جهت $\hat{l}+$

⑨ آیا فقط در زانویی $a_r = \frac{v^2}{r}$ است؟!!

!؟ پروفیل سرعت یکنواخت؟!!

اگر به سیال ما در راستایی مثل l شتابی وارد شود فشار سیال ما در همان راستا تغییر خواهد کرد
غیر از شتاب ثقل

اگر $a=0$ تغییرات فشار و ارتفاع ما در رابطه ۴ صدق می‌کند

فرض اساسی بود!

موارد کاربرد: معادله اولر

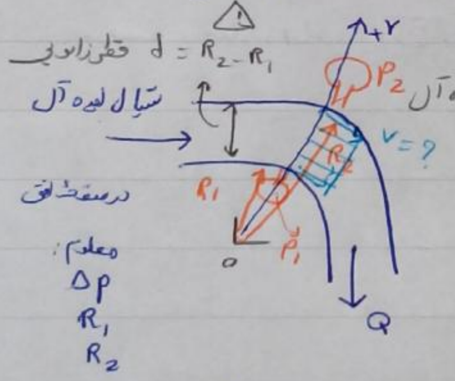
۱) سیالات غیرلزج ( $\mu = 0$ ) $\xleftarrow{\text{همواره}}$ $\tau = 0$

۲) سیالات لزج ← حالت‌های خاص
- حرکت انتقالی به صورت جسم صلب
- حرکت چرخشی به صورت جسم صلب

← یکی از روش‌های اندازه‌گیری دبی (بدون داشتن دبی‌سنج) و با داشتن فشارسنج.

مثال: زانویی 90° در صفحه افقی را مطابق شکل در نظر بگیرید. در داخل لبه زانویی سیالی از نوع ایده‌آل جریان دارد. در دو سر داخلی و خارجی لبه زانویی 2 فشارسنج مطابق شکل نصب شده‌اند به نحوی که $\Delta p$ معلوم است. دبی خروجی از لبه زانویی چقدر است؟ (پروفیل سرعت بین 2 فشارسنج را یکنواخت فرض کنید) (البته خود سرعت مجهول است)

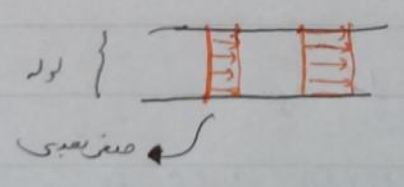
ویسکوزیته = ۰ شرط لغزش خودبه‌خود برقرار ، $\rho$ ثابت ← سیال ایده‌آل



معلوم:
$\Delta p$
$R_1$
$R_2$
$\rho$ ($\rho$ = cte)

در یک لوله یکنواخت پروفیل سرعت یکنواخت است یعنی در هر مقطع یکی است

جریان یکنواخت جریان ۰ بعدی است و در هر عمقی بودیم سرعت یکی است به آن میدان یکنواخت هم می‌گویند.



معادله اولر در جهت r بنویسیم:

$\vec{l} \longrightarrow \vec{r}$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \gamma \cancel{\frac{\partial z}{\partial r}}^{\,0} = -\rho a_r = -\rho\left(-\frac{v^2}{r}\right) = \rho\frac{v^2}{r}$$

افقی

اگر دیواره بود عملاً پروفیل سرعت داشت

ولی دیواره نباشد.

جدایی

$$\xrightarrow{\times dr} \frac{\partial p}{\partial r} dr = \rho \frac{V^2}{r} dr$$

$$\int_1^2 dp = \int_1^2 \rho \frac{V^2}{r} dr$$

$$\Delta p = \rho V^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \rho V^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$V = \sqrt{\frac{\Delta p / \rho}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}} \implies Q = V \cdot A$$

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (R_2 - R_1)^2$$

اگر سیال لزج می بود با یک ضریب تصحیح Q را بدست می آوردیم.

فشار 2 > فشار 1 است.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{V^2}{r} > 0 \qquad dr > 0 \qquad dp > 0 \qquad P_1 < P_2$$

در جهت افزایش r به سمت جلو ، P زیاد می شود. $\frac{dp}{dr}$ : تغییرات فشار در راستای r

بین نقطه 1 و 2

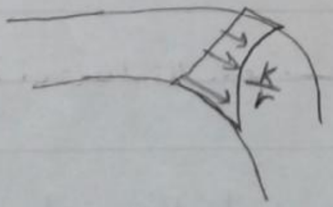
جایی که فشار min است ← احتمال کاویتاسیون است   آب جوش می آید.

سمت 1 بیشتره (احتمال کاویتاسیون)
(فشار min)

بین نقطه 1 و 2

در 1 ~~احتمال جدایی بیشتره~~ اصلا جدایی مختص سیالات لزج است نه غیر لزج

در غیر لزج جدایی امکان پذیر نیست.



جایی که فشار زیاده سرعت کم است.

بعدا می خوانیم یکنواخت بودن فرض درستی بود ولی

طراح اینو خواسته

تست: در مسئله قبل فرض کنید تغییرات را داشته به صورت $V(r)=\frac{B}{r}$ و $\rho(r)=Ar^2$ باشد. اگر $\Delta p = c\ln\frac{R_2}{R_1}$ باشد در این صورت کدام گزینه در مورد ضریب c درست است؟

$$\Delta p=\int A r^2 \frac{B^2}{r^3}\,dr \Rightarrow$$

$$A B^2 \ln\frac{R_2}{R_1} = c\ln\frac{R_2}{R_1} \rightarrow$$

$$\boxed{c = AB^2}$$

~~الف)~~

~~ب)~~

~~ج)~~

د) $AB^2$ ✓

$$\rho(r)=Ar^2$$

$$V(r)=\frac{B}{r}$$

$$\Delta p = c\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r}=\rho\frac{V^2}{r}$$

$$\rightarrow \int_1^2 dp=\int_1^2 \rho\frac{V^2}{r}\,dr$$

$$\Delta p=\int_{R_1}^{R_2} A r^2\cdot\frac{B^2}{r^2}\frac{dr}{r}$$

$$\Delta p = \underbrace{AB^2}_{c}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

تمام شد ،

---

فرض اساسی: سیال غیرلزج است

موارد کاربرد معادله اولر:

1) سیال غیرلزج است $(\mu=0)$

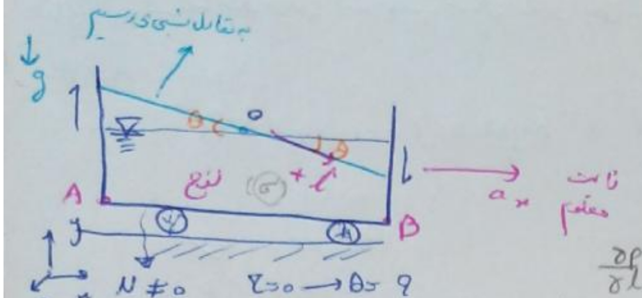
2) سیال لزج است $\overset{\text{ضعیف}}{\mu\neq 0}$

در موارد خاص می‌توان از معادله اولر استفاده کرد

- حرکت انتقالی به صورت جسم صلب
- حرکت چرخشی به صورت جسم صلب

الف) حرکت انتقالی به صورت جسم صلب

مثال: با توجه به شکل مقابل زاویه‌ای که سطح آزاد با افق می‌سازد در حالت تعادل چقدر است؟



در سیال نوع گرادیان سرعت نداریم ⇐ تنش τ=0 است

(زیرا) سرعت نه در جهت x نه در y نه در z داریم

سیال مثل یک جسم صلب است مثل شن، ماسه ...

روی سطح آزاد: گرادیان فشار = 0 فشار همه atm ⟵ $\frac{\partial p}{\partial l}=0$

$a$ در راستای x است ولی ما مجبوریم معادله اویلر را در جهت l بنویسیم پس $a_x$ را باید تجزیه کرد در راستای l

در هر راستا که اویلر می‌نویسیم شتاب را در آن راستا تجزیه

$N \neq 0 \qquad \tau = 0 \rightarrow \theta = ?$

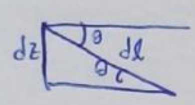
$\tau = \mu \frac{du}{dy} \rightarrow 0$   $\neq 0$

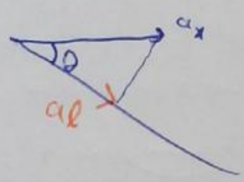
اختلاف دلتا دوان سرعت داریم

حل: $\cancel{\frac{\partial p}{\partial l}}^{\,0} + \gamma \frac{\partial z}{\partial l} = -\rho a_l$

$\hat{l} \longrightarrow$ راستای سطح آزاد

$\gamma \underbrace{\frac{\partial z}{\partial l}}_{?} = -\rho \underbrace{a_l}_{?}$





$a_l = a_x \cos\theta$

منفی

$\underset{+}{-\sin\theta} = \frac{dz}{dl} = \frac{\partial z}{\partial l}$

$dl > 0$

$dz < 0$

$-\gamma \sin\theta = -\rho(a_x \cos\theta)$

$$\boxed{tg\theta = \frac{a_x}{g}}$$

در زاویه خواص سیال ظاهر نشده نه ρ نه ...

پس به جای آب هر چی بریزیم همین زاویه را داریم ولی مثلاً به جای ~~لیتر~~ اینکه 2s برسد، 2h برسد!

مثال- در مسأله قبل اختلاف فشار بین 2 نقطه A و B واقع بر کف ظرف چقدر است؟

تغییرات فشار در کف ظرف چگونه است؟ (خطی، سهمی ...)؟!

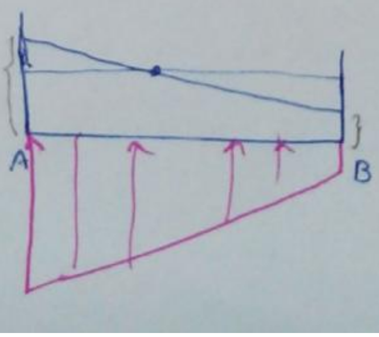
حل، $\hat{l} \rightarrow \hat{x}$   کف ظرف

$\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \cancel{\frac{\partial z}{\partial x}}^{\,0} = -\rho a_x < 0 \implies P_B < P_A$ ⟶ ★ سیال در همان سمتی که شتاب گرفته است با کاهش فشار مواجه می‌گردد.

$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x \implies p(x) = -\rho \underset{>0}{a_x} x + C$

در جهت مثبت +x

ما در این بحث سوالات شتاب ثابت داریم و $a>0$ به معنای افزاینده کاهنده نیست!

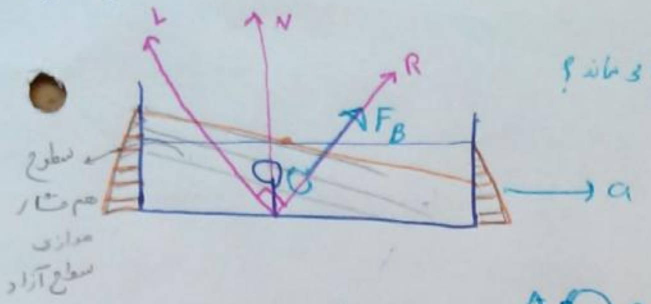


* فشار B < فشار A

(به سبب دلیل ارتفاع آب بالای B کمتر از A است)

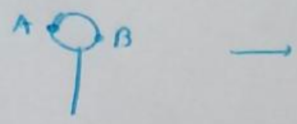
مهم ؟

مثال: در مسأله قبل فرض کنید توپ سبکی مطابق شکل به کف ظرف بسته شده باشد. در حالت تعادل در مورد راستای قرارگیری این توپ چه می‌توان گفت؟



توپ left (L) بره یا Right(R) یا vertical (N) می‌ماند؟
Neutral

الف) left
ب) Right ✓
ج) Neutral



طبق مسأله قبل

$P_A > P_B$

توپ را به سمت راست هول می‌دهد.

اگر توپ جرم داشته باشد ممکنه ظرف بره ولی توپ سرجای خود بماند ولی ما احساس می‌کنیم به left می‌ره ولی ما فرض کردیم توپ جرم ندارد و با میدان فشار اطرافش به راحتی جابجا شده و وزن را ملغی می‌کند و نیروی ارشمیدسش هم به همین صورت حرکت می‌کند.

← نیروی ارشمیدسی لزوماً عمودی نیست و می‌تواند زاویه دار باشد و جهتش حتی ممکنه به سمت پایین باشد (بعداً می‌خوانیم)

خودم: (نیروی ارشمیدس مقدارش همیشه پایا است)

کتب درسی این را در استاتیک سیالات می‌گویند.

مثال: در مسأله قبل تغییرات فشار در راستای z به چه صورت است؟

معادله اولر در راستای z می‌نویسیم.

$+\hat{l} \to +\hat{z}$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \overset{1}{\cancel{\frac{\partial z}{\partial z}}} = -\rho \overset{0}{\cancel{a_z}}$$

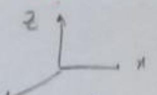
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \longrightarrow p(z) = -\gamma z + c$$

* سطوح هم فشار موازی با سطح آزاد است.

؟ سطوح هم فشار

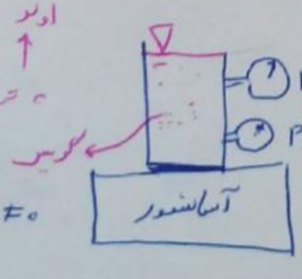
مگه نیستند ولی در سوال قبله

اند؟!



مثال: با توجه به شکل مقابل ظرفی حاوی گریس درون آسانسور قرار دارد و آسانسور با شتاب ثابت در حرکت است. در جداره‌ی این ظرف دو فشارسنج مطابق شکل نصب شده‌اند. اگر $P_A = P_B$ باشد. جهت حرکت آسانسور و مقدار شتاب آن را تعیین کنید. فرض کنید مایعی از ظرف خارج نشود.

سیال کشش نمی‌آید با هم بالا پایین می‌روند حرکت یکسان دارند



سکون $P_A > P_B$ (به اندازه‌ی $\rho g h$ به اختلاف ارتفاع)

اگر گریس را بخواهیم خیلی نیوتنی - استوکسی داریم

آنگاه آسانسور پایین می‌ره.

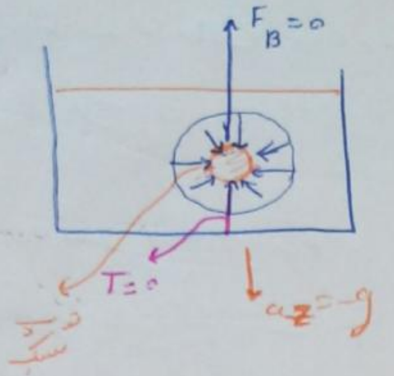
حل: $l \to \hat{z}$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \overset{+1}{\cancel{\frac{\partial z}{\partial z}}} = -\rho a_z$$

$$\overset{0}{\cancel{\frac{\partial p}{\partial z}}} + \rho g = -\rho a_z \Rightarrow a_z = -g = const < 0$$

حرکت به سمت پایین است

$P_A = P_0 \longrightarrow$ آسانسور با شتاب g در حال حرکت به سمت پایین است (سقوط آزاد)



طناب در این مسأله حالت خاص در حال شل شدن است.
$F_B$ ناشی از اختلاف فشارهای هیدرواستاتیکی است.

$$-\frac{\partial p}{\partial l} - \rho g \overset{-dx \cdot \sin\theta}{\frac{\partial z}{\partial l}} = \rho \boxed{a_l} \quad \begin{matrix} >0 \longrightarrow +l \\ <0 \longleftarrow -l \end{matrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$a_z$ را طوری تغییر کنید که ... $\Delta p = 0$ ✗

ارشمیدس به وزن جسم ربطی ندارد
وزن روی T اثر دارد نه $F_B$

مثال: در مسأله قبل فرض کنید $P_A < P_B$ باشد. در این صورت در مورد جهت حرکت آسانسور و مقدار شتاب آن چه می‌توان گفت؟

در حال سکون $P_A > P_B$ وقتی آسانسور با شتاب g به سمت پایین حرکت کند ($a_z = -g$) آنگاه $P_A = P_B$ حال اگر آسانسور با شتاب بیشتر از g به سمت پایین حرکت کند $P_B > P_A$

در حالت سکون $P_A > P_B$ ← اینجا حتماً آسانسور به سمت پایین حرکت کند ولی شتابش نه ... بلکه 2g یا ...

اگر $a_z$ و g یک سمت شتاب باشند هم را تضعیف می‌کنند چون در جهت شتاب هستند ✗ ?

حل: $l \to \hat{z}$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z}} + \gamma \frac{\partial z}{\partial z}^{+1} = -\rho a_z \rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = -\rho \underset{-1.1g}{a_z}$$

$\frac{\partial p}{\partial z} > 0$ چرا؟ ?

$P_B > P_A$

آسانسور با g، 2g

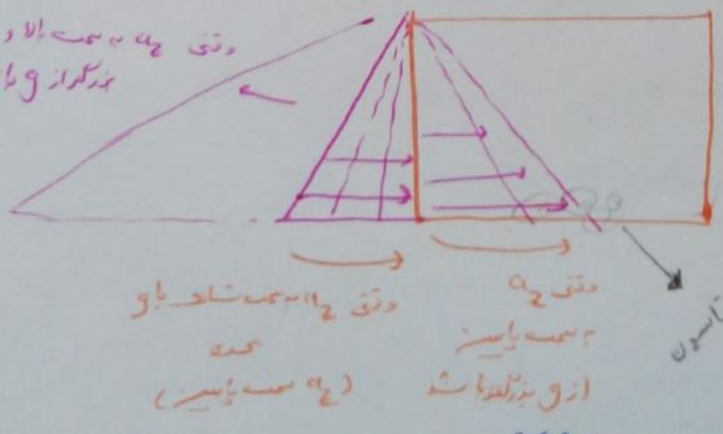
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \overset{-1.1g}{a_z} - \rho g > 0$$

$$= -\rho(\overset{-1.1g+g=-0.1g}{\underbrace{a_z + g}_{g_{eff}}})$$

شتاب مؤثر

فشار نسبی را atm و ...

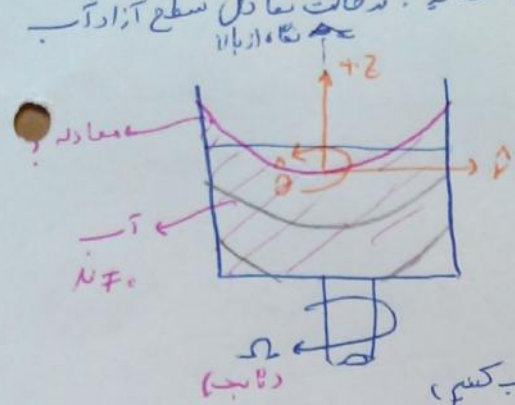
آسانسور با شتاب ثابت بزرگتر از g در حالت حرکت به سمت پایین است. $P_A < P_B$ →


وقتی $a_z$ به سمت بالا و بزرگتر از g باشد.
وقتی $a_z$ به سمت شتاب g ... ($a_z$ سمت پایین)
وقتی $a_z$ به سمت پایین از g بزرگتر باشد
کاویتاسیون

$P < P_{atm}$
کاویتاسیون

ب ) حرکت دورانی به صورت جسم صلب

مثال: ظرفی به شکل استوانه حاوی آب با سرعت زاویه‌ای ثابت ω به چرخش در می‌آید. در حالت تعادل سطح آزاد آب دارای چه معادله‌ای است؟



مقدار بالا رفتن = مقدار پایین آمدن تا حجم ثابت بماند.

سطوح هم فشار را می‌خواهیم به دست آوریم

سیال غیرلزج ~~است~~ باشد که سیال نمی‌تونه که در اثر دوران (یا اگر دیواره ظرف را چوب کنیم)

ولی این که بوده بالا مختص سیالات لزج است و ظروف خاصی که چسبندگی داشته باشند.

در ابتدا:

$\mu \frac{d\omega}{dr} \neq 0$

$\omega_B$ و $v_B$ هنوز ۰ است و به آنها سرعت زاویه‌ای منتقل نشده ولی نقاط B در r به آنها سرعت زاویه‌ای رسیده ولی نه هم اندازه ω
تنش

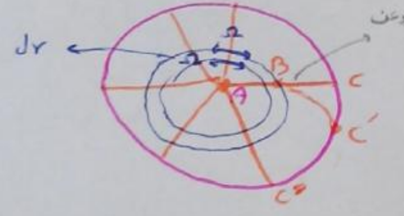
پس از گذشت چند ثانیه دیگر B هم حرکت می‌کند و دوباره A و B و C روی خط راست هستند و سرعت یکسان دارند.

در حرکت چرخشی $\frac{d\omega}{dr}$ تنش ایجاد می‌کند و گرادیان سرعت خطی هم نیست $\frac{du}{dr}$ تنش ایجاد نمی‌کند بلکه $\frac{d\omega}{dr}$ ایجاد می‌کند (گرادیان سرعت زاویه‌ای)

$\frac{d\omega}{dr} = 0$

$\cancel{\mu \frac{du}{dr}} \neq 0$

نمای از بالا



جهت P جهت g است ؟! ✗

اگر آب سطح صعود بالا پایین نرود $a_z = 0$ (اینجا دور خودش فقط داریم می‌چرخانیم)

شتاب زاویه‌ای نداریم ω ثابته $a_\theta = 0$

حرکت چرخشی به صورت جسم صلب

$$\begin{cases} a_r = -\frac{V^2}{r} \\ V = r\Omega \end{cases}$$

$a_r = \rho r \Omega^2$

$\tau = \mu \frac{d\omega}{dr} = 0$

$= 0 \longrightarrow$ معادله اولر

✗ ما وقتی مشتق جزئی نسبت به یک ترم می‌گیریم فرضمان اینه 2 ترم دیگه ثابته!

$$p(r,\theta,z) \longrightarrow dp = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial r}}_{\rho r \Omega^2} dr + \frac{1}{r} \underbrace{\cancel{\frac{\partial p}{\partial \theta}}}_{0} d\theta + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{-\gamma} dz$$

اولر

$$\hat{l} \longrightarrow \hat{r} : \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma \underbrace{\cancel{\frac{\partial z}{\partial r}}}_{0} = -\rho \overset{-\frac{V^2}{r}}{a_r} = \rho r \Omega^2$$

$$\hat{l} \longrightarrow \hat{\theta} : \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \gamma \frac{1}{r} \underbrace{\cancel{\frac{\partial z}{\partial \theta}}}_{0} = -\rho \cancel{a_\theta}^{\,0}$$

$$\hat{l} \longrightarrow \hat{z} : \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \underbrace{\cancel{\frac{\partial z}{\partial z}}}_{1} = -\rho \cancel{a_z}^{\,0}$$

$dp = \rho \Omega^2 r\,dr - \gamma\,dz$

$dp = 0 \longrightarrow$ معادله سطوح هم فشار (از جمله سطح آزاد)

نقطه شروع

به صورت سهمی گون است

paraboloid

لازم نیست سطح هم فشار داخل مایع باشد، می‌تواند سطح فشارش بیرون مایع هم باشد.

X بنویسیم

X بنویسیم

$$\rho \Omega^2 r\,dr = \rho g\,dZ$$

$$dZ = \frac{\Omega^2}{g} r\,dr \longrightarrow Z(r) = \boxed{\frac{r^2\Omega^2}{2g}} + C$$

$$\frac{V^2}{2g}$$

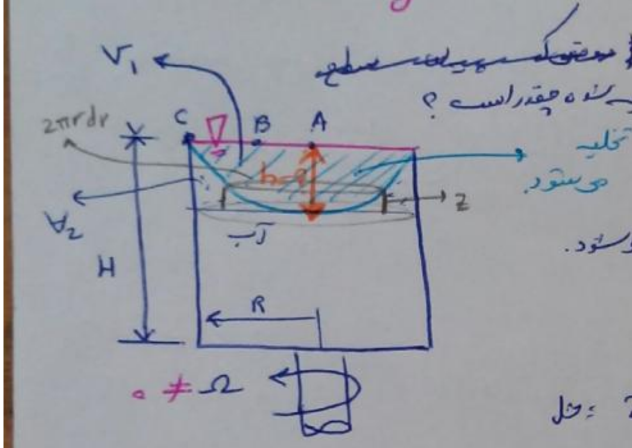
در سطح آزاد ثابت = برابر صفر است.

شلجمی X

$$@\ r=0 : Z=0$$

$$Z(r) = \frac{r^2\Omega^2}{2g}$$

مثال ۲ ظرفی داریم به ارتفاع H و شعاع R که از مایع لزجی مثل آب پر شده. ~~موقعیتی که سهمی سطح~~ با توجه به شکل مقابل الف) عمق فرورفتگی max (h) چقدر است؟ ب) حجم سیال تخلیه شده چقدر است؟



موقعی که $\Omega = 0$ ← سطح آب افقی است

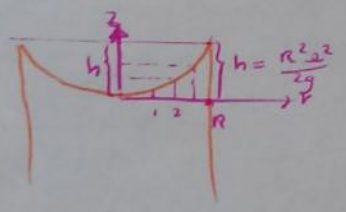
$\Omega$ ↑ دهیم ← v ↑ شیب ↑ دیگر ▨ تخلیه می‌شود.

در مرکز سطح ← Max عمق فرورفتگی را داریم.

حل: $Z(r) = \frac{V^2}{2g} = \frac{r^2\Omega^2}{2g}$

از این سیستم به عنوان دورسنج استفاده می‌شود

| r | Z |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | $\frac{\Omega^2}{2g}$ |
| 2 | |
| 3 | |
| ⋮ | |
| R | $Z_{max} = \frac{R^2\Omega^2}{2g} = h$ |



حجم سیال تخلیه شده؟!

قضیه در ریاضی مختلف سهمی‌گون

$$\forall_1 = \forall_2 = \frac{1}{2}\forall_0$$

$$\forall_0 = \pi R^2 \cdot h$$

$$\forall_0 = \pi R^2 \left(\frac{R^2\Omega^2}{2g}\right)$$

$$\forall_1 = \frac{\pi R^4\Omega^2}{4g}$$

از اندازه گیری حجم هم می‌توان به $\Omega$ رسید

سؤال امتحان زیاد

۲ برابر ← $\Omega$

۴ برابر ← $\forall$

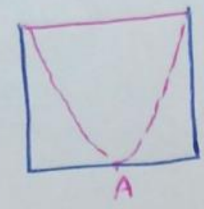
نکات

$$\forall_2 = \int d\forall = \int (2\pi r\,dr)\cdot Z = \int_0^R 2\pi r\,dr \cdot \frac{r^2\Omega^2}{2g} = \frac{\pi R^4\Omega^2}{4g}$$

$$\forall_1 = \forall_0 - \forall_2 = \frac{\pi R^4\Omega^2}{4g}$$

مثال: در مسأله قبل فرض کنید Ω به اندازه کافی بزرگ باشد به نحوی که فشار نقطه A برابر فشار atm باشد. (نقطه A کف ظرف دیگر)
در این حالت کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد حجم سیال باقی مانده در ظرف درست است؟

الف) $=\frac{1}{2}\pi R^2 H$ ✓
ب) $=\frac{1}{3}\pi R^2 H$
ج) $=\frac{1}{4}\pi R^2 H$
د) $=\frac{1}{16}\pi R^2 H$



$$\forall_1 = \forall_2 = \frac{1}{2}\forall_0$$

حل) فشار A ⟵ $P_{at}+\gamma h$   Ω باید هی زیاد شود هی تخلیه بیشتر تا سهمی نوکش به A مماس و فشار A، $P_{atm}$ شود
اول $\pi R^2 H$ بوده پس الان حتماً کوچکتر از $\pi R^2 H$ است.

یا: Ω را طوری تعیین کنید که فشار نقطه A، atm گردد؟
یعنی $h=H$ شود

$$z_{max}=\frac{R^2\Omega^2}{2g}=H \longrightarrow \Omega^2=\frac{2gH}{R^2} \longrightarrow \Omega=\frac{\sqrt{2gH}}{R} \longrightarrow P_A=P_{atm}$$

می‌گردد

## میدان فشار:

با استفاده از معادله $dp=\rho\Omega^2 r\,dr-\gamma\,dz$ میدان فشار در داخل ظرف را به دست آورید.
↳ $p(r,z)=?$

باید از معادله انتگرال گرفت ← توزیع فشار را
(C نامعین)

$$dp=\rho\Omega^2 r\,dr-\gamma\,dz \xrightarrow{\int} p(r,z)=\rho\Omega^2\frac{r^2}{2}\gamma z^1+C$$

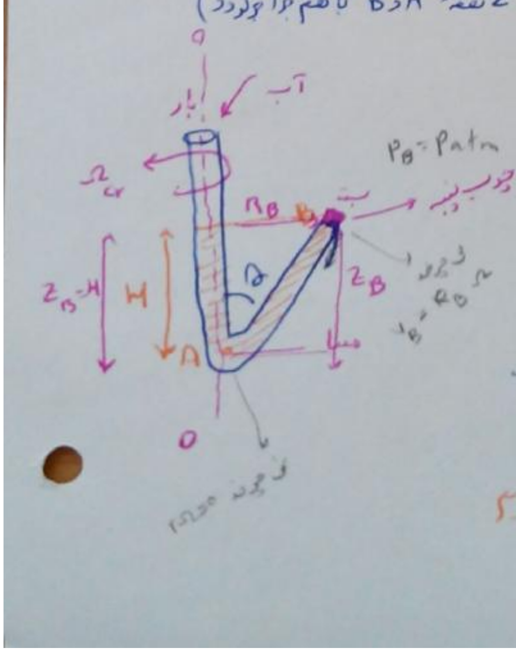
؟

حرکت چرخشی به صورت جسم صلب در هر ناحیه
با پایین رفتن فشار به صورت خطی افزایش می‌یابد.

توزیع فشار در جهت r ⟵ به صورت سهمی
" " " z ⟵ به صورت خطی

در سیال غیرقابل تراکم C مقدار نامعین ← فشار نامعین است. تا فشار نقطه‌ای را نداشته باشیم نمی‌توان فشار در نقطه دیگر را پیدا کرد ولی اختلاف فشارها را می‌توان.

مثال: با توجه به شکل مقابل Ω را طوری تعیین کنید به نحوی که $P_A=P_B$ (فشار دو نقطه A و B با هم برابر گردد)



در نقطه A فقط از z اثر می‌کند و r ندارد. چون روی خط z است فقط
ولی B، r هم دارد.
$P_B$ در اثر Ω زیاد کردن زیاد می‌شود تا با $P_A$ برابر و از آن بیشتر گردد
در بعضی کتاب‌ها r و Ω را با هم $r\Omega=V$ می‌نویسند.

برنولی + ثابت ← معادله برنولی است و از توزیع فشار برحسب r و z به معادله آخر رسیدیم
ما - ثابت   این معادله را برنولی هم می‌توان نوشت [illegible] است

(9.)

$$P(r,z) = \rho\Omega^2\frac{r^2}{2} - \gamma z' + C$$

$$P_A = \frac{1}{2}\rho V_A^2 - \gamma z_A + C$$

$$P_B = \frac{1}{2}\rho V_B^2 - \gamma z_B + C$$

→ C حذف

$$(P - \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z) = (P - \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z)$$

$$P_A - \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \gamma z_A = P_B - \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \gamma z_B$$

$$\frac{1}{2}\rho V_B^2 = \rho g z_B$$

$$V_B = R_B\cdot\Omega$$

$$tg\theta = \frac{R_B}{H}$$

$$\rightarrow R_B = H\cdot tg\theta$$

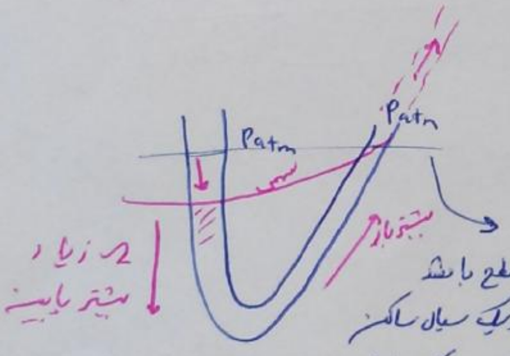
$$\Longrightarrow V_B = \sqrt{2gH}$$

$$R_B\cdot\Omega = \sqrt{2gH}$$

$$\Rightarrow \Omega_{cr} = \frac{\sqrt{2gH}}{R_B} = \boxed{\frac{\sqrt{2gH}}{H\cdot tg\theta}}$$

این مسأله — مسألهٔ حجم

مسأله فشاری — مسألهٔ سطحی



نمی توانند در یک سطح باشند
چون فقط در یک سیال ساکن
نقاط هم فشار روی یک سطح اند

هر سال از برنولی سوال آمده

اگر سر B، چوب پنبه نبود آب می ریخت بیرون چون

○ معادله ی برنولی

شرایط:

1) جریان غیرلزج است ($Z=0$) ← اویلر ← $\Sigma F = ma$ بقای مومنتوم ارضا شده (در شرط 1)

2) ذره ی خاص از سیال را در حین حرکت در نظر بگیریم (بقای جرم ارضا شده) بین 2 نقطهٔ دلخواه یا 2 ذرهٔ دلخواه نیست فقط برای یک ذره است.

3) جریان دائم است. (خط مسیر ≡ خط جریان)

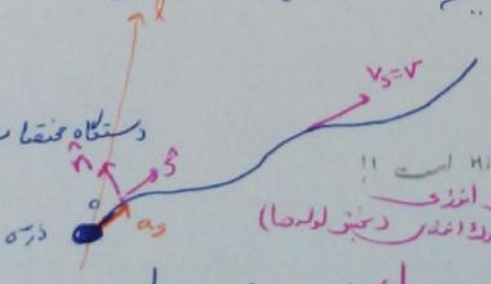
4) سیال غیرقابل تراکم است.

5) ρ ثابت است.

(6) بدون انتقال کار و 7) بدون انتقال حرارت ) بقای انرژی

Hidden است !!

(معادلهٔ انرژی در بخش لوله‌ها)



(*) اینجا چون مماسی است $l\,V_n\frac{\partial V_s}{\partial n}$ نداریم (در خود معادله V، $V_s$ است)

چون جریان دائم است $\frac{\partial V_s}{\partial t} = 0$

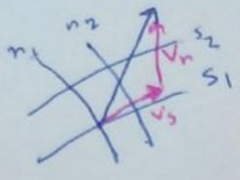
$$V_s(s,t) = a_s = \frac{dV_s}{dt} = \frac{\partial V_s}{\partial t}\overset{1}{\cancel{\frac{dt}{dt}}} + \frac{\partial V_s}{\partial s}\overset{V_s}{\frac{ds}{dt}}$$

مشتق اویلری

$$a_s = \overset{\text{دائم}}{\cancel{\frac{\partial V_s}{\partial t}}} + V_s\frac{\partial V_s}{\partial s} + \cancel{V_n\frac{\partial V_s}{\partial n}}$$

(7)

⊛



$$\frac{\partial p}{\partial l} + \gamma \frac{\partial z}{\partial l} = -\rho a_l$$

$$\hat{l} \longrightarrow \hat{s}$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \gamma \frac{\partial z}{\partial s} = -\rho a_s = -\rho \left( V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} ds + \gamma \frac{\partial z}{\partial s} ds + \rho \left( V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} \right) ds = 0$$

ρ تابع دما بود ↙

$$dp + \gamma dz + \rho d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{dp}{\rho} + g dz + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0$$

$$① \int \frac{dp}{\rho} + \int g dz + \underbrace{\int d\left(\frac{V^2}{2}\right)}_{=\frac{V^2}{2}} = c \Rightarrow \boxed{\frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = c_1} \; *$$

معادله برنولی

(اگر ρ و g ثابت نبود دیگه معادله به فرم * نیست و باید از رابطه ① استفاده کرد)

$$* \xrightarrow{\times \rho} \boxed{P + \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho V^2} + \underbrace{\gamma Z} = C_2}$$

نسخه فشاری

$P$ ← فشار ترمودینامیکی (فشار استاتیک)

$\frac{1}{2}\rho V^2$ ← فشار دینامیکی

$\gamma Z$ ← فشار هیدرواستاتیکی

$C_2$ ← $P_t$ فشار کل

معادله برنولی یک نسخه انرژی هم دارد

$P + \gamma Z =$ فشار پیزومتریک

$$z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = C$$

یا $\gamma z + P + \frac{1}{2}\rho V^2 = C$

$P + \frac{1}{2}\rho V^2 =$ فشار سکون

$P_2$ را طوری تنظیم می‌کنیم که برنولی برقرار باشد در 1 و 2 برابر

اگر سفت وصل کنیم کار دهد یا حرارت به آب بدهیم ← برنولی نقض می‌شود

× برای ρ ثابت در برنولی شرط 8 ام هم داریم ← عدم چرخش بعداً

بین برنولی و اویلر، اویلر کاربردی تر است. ← قبلی قید و شرط دارد. (برنولی حالت انتگرالی و غیر قابل تراکم اویلر است)

اویلر ← دیفرانسیلی
برنولی ← انتگرالی

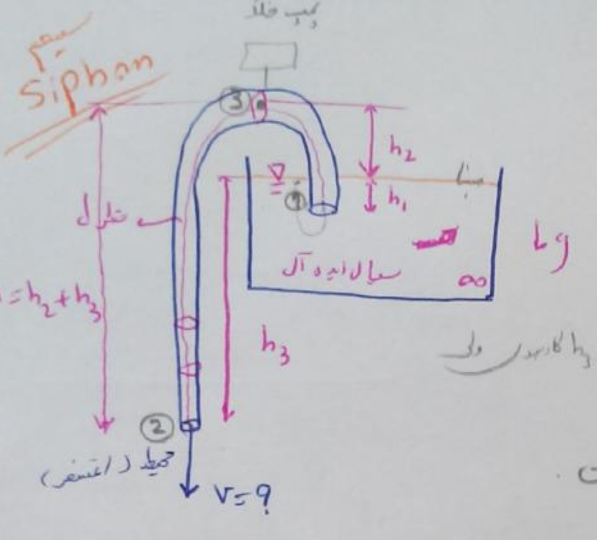
## کاربردهای معادلهٔ برنولی :

1) سیالات ایده آل ⟵ در اغلب موارد می توان استفاده کرد.

به حدود، غیرلزج ← شرط ادامه برقرار

2) سیالات لزج ⟵ در موارد خاص می توان از معادلهٔ برنولی استفاده کرد.

مثال: با توجه به شکل مقابل سرعت تخلیهٔ سیال چقدر است؟



ظرف بزرگ مثل دریاچه که در آن یک سیال ایده آل است.

$v = \sqrt{2gh_1}$ (الف

$= \sqrt{2g(h_1+h_2)}$ (ب

$= \sqrt{2g(h_1+h_2+h_3)}$ (ج

$= \sqrt{2gh_3}$ (د ✓

در کار siphon هر سه $h_1$ و $h_2$ و $h_3$ کاربرد دارند ولی در سرعت تخلیه $h_3$ فقط

همهٔ شرط های برنولی اینجا صادق است.

حل:

$$\cancel{P_1} + \frac{1}{2}\rho \overset{\simeq 0}{\cancel{V_1}}^2 + \gamma \overset{0}{\cancel{Z_1}} = \cancel{P_2} + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma \underset{h_3}{\boxed{Z_2}}$$

$$\boxed{V_2 = v = \sqrt{2g h_3}}$$

برنولی بین 1 و 2 : ← هر دو atm اند.

$V_1 \simeq 0$ چون سطح تقریباً خیلی بزرگه!

سرعت تخلیه به قطر بستگی ندارد ولی دبی به قطرش هم بستگی دارد

$V \times \underline{\underline{A}} = Q$

آب باشه، روغن یا هرچی

$V_j \simeq \sqrt{g h_3}$

اگر آب نبود

$V_2 = v = C_v \sqrt{2g h_3}$

ظرف کوچک ×

$h_1$ مهم است اگر چه اینجا دارد نمی شه ولی در کارکرد siphon مؤثره

★ مثال مهم

در سؤال قبل فشار بالاترین نقطهٔ siphon چقدر است؟

بالاترین نقطهٔ siphon حساس است چون کمترین فشار را دارد ممکنه بیفتد زیر فشار بخار سیال و به جوش بیاید و siphon از کار می افتد (×) $H_1$ هم باید حداقل باشد بود هر باشه بزنه بیرون از کار می افتد.

سرعت 2 = سرعت 3 می توان برنولی را بین 1 و 3 یا 2 و 3 نوشت

برنولی بین 1 و 3

$$\overset{P_{atm}}{\cancel{P_1}} + \frac{1}{2}\rho \overset{\simeq 0}{\cancel{V_1}}^2 + \gamma \overset{0}{\cancel{Z_1}} = P_3 + \frac{1}{2}\rho V_3^2 + \gamma \boxed{Z_3}\ h_2$$

سطح مقطع ثابت، سیال $\rho$ ثابت $\xrightarrow[\text{مهم}]{\text{پیوستگی}}$ در تمام مقاطع سرعت یکسان

$v_2 = v = \sqrt{2g h_3} = V_3$

$P_3 = P_{at} - \frac{1}{2}\rho V_3^2 - \gamma h_2$

$$\boxed{P_3 = P_{at} - \gamma(h_2 + h_3)} < P_{at}$$

چقدر $P_3$ زیر $P_{at}$ است؟ $\gamma\overset{\text{ارتفاع حبس}}{(h_2+h_3)}$

$P_v$

حداکثر $h_2 + h_3$ برای آب حدود $10^m$ است.

اگر $P_3 < P_v$ ⟵ siphon از کار می افتد.

★ در نقطهٔ 3 ترک خورده و فواره بزنیم. ارتفاع فواره؟! اگر بالا سوراخ شه هوا می‌ره تو و در واقع فواره نداریم چون $P_3 < P_{at}$

و

## موارد کاربرد معادله برنولی در مورد سیالات لزج

1) در صورت معلوم بودن ضرایب تصحیح (سرعت، دبی ....)

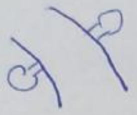
حلقه‌ی پیش :

ضریب کاویتاسیون

$$V = \sqrt{\frac{\Delta P/\rho}{\ln(R_2/R_1)}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{\Delta P/\rho}{\ln(R_2/R_1)}} \; \frac{\pi}{4}(R_2-R_1)^2$$

$\rightarrow \mu = 0$



اعمال ضرایب تصحیح جریان لزج :

$$V = \text{ضریب سرعت } C_v \sqrt{\frac{\Delta P/\rho}{\ln(R_2/R_1)}}$$

$$Q = \text{ضریب تخلیه } C_d \sqrt{\frac{\Delta P/\rho}{\ln(R_2/R_1)}} \cdot \frac{\pi}{4}(R_2-R_1)^2$$

(آب سیال لزج است)

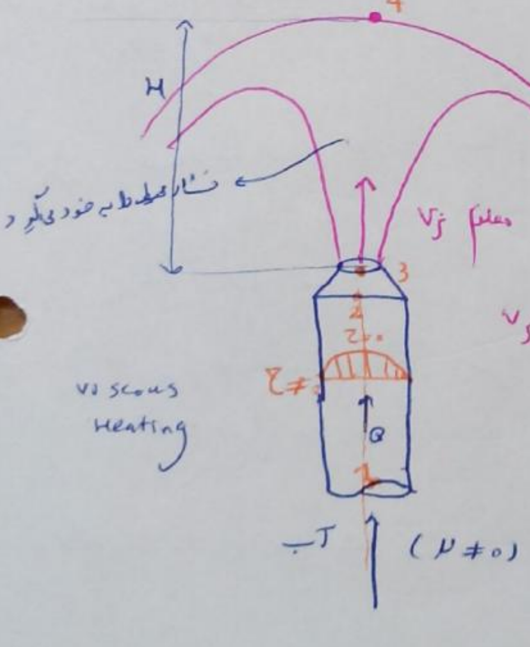
2) برای چک کردن عملکرد یک سیستم در بهترین حالت

3) در جت‌های آزاد.

جت آزاد Free jet

جت یک مایع در گاز (معمولاً هوا) را جت آزاد گویند ← interface داریم

یک گاز در گاز دیگر جت ~~آزاد~~ نمی/ ترکیب می‌شوند.

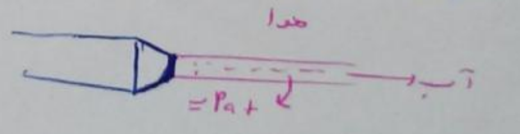


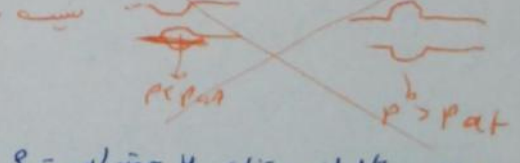
$V_j = \frac{Q}{A}$

جت در محیط مایعات به طور کلی از ٤ با سرعت زیاد را

جت آزاد گویند که : دو تا :

فشار محیط را به خود می‌گیرد مثلاً atm است جت آزاد ما atm است





پس از 2 و بنویسیم 2 و 3 می‌توان

از معادله برنولی استفاده کرد

(Z≠0)

با

البته در دیواره

مثال، با توجه به شکل بالا ارتفاع H چقدر است؟

سیال لزج است به دیواره می‌چسبد ما تنش برشی داریم و نمی‌توانیم

معادله برنولی بنویسیم بین: از 2و1 و 3و2

ولی برای مرکز هم می‌توان نوشت! ←

دار 7 شرط ا شرطش نقض میشه

(حرارت)

درسته که در لایه‌ی ٤ی علی مرکز تنش برشی نداریم در لایه ٤ی

ولی در مرکز هم تنش برشی نداریم سیال در اثر تنش برشی گرم است دبی زیاد

انتقال حرارت نداریم پس شرط 7 برنولی نقض می‌شه !!

برنولی بین 3 و 2

$$\cancel{P_3} + \frac{1}{2}\rho \underset{\downarrow\, V_j^2}{V_3^2} + \gamma \overset{0}{\cancel{Z_3}} = \cancel{P_4} + \frac{1}{2}\rho \overset{0}{\cancel{V_4^2}} + \gamma \boxed{Z_4} \to H$$

$$\Rightarrow \boxed{H \cong \frac{V_1^2}{2g}}$$

چرا تقریبی شد

$\alpha \cong 1$

بین گاز و مایع ۰ = ح (حلقه ۱)

مهم Q کم و زیاد نشده

سطح آب حتی‌الامکان

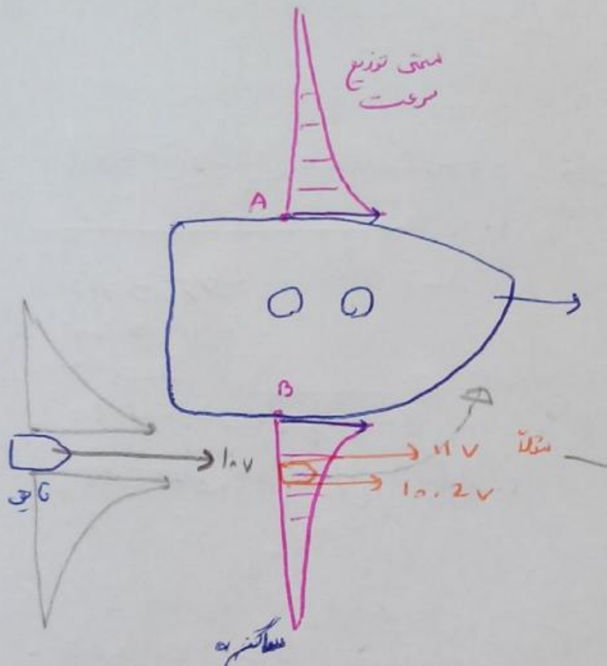
انتقال حرارت α از تغییر سطح صرف‌نظر

کار هم نداریم.

$P_3 = P_4 = P_{atm}$

معلوم $V_3 = V_j$

آب همین طور که بالا می‌آید سرعتش کم می‌شود $V_4 = 0$



مهم سؤال باشد (موشکی)

اثر برنولی

سرعت سیال ↑ فشار ↓ و برعکس

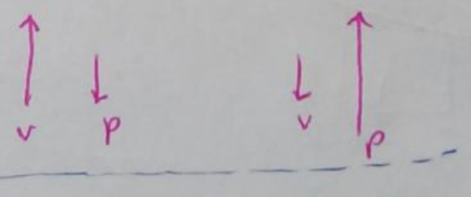
کشتی بزرگ حرکت می‌کند قایق‌های کوچک اطرافش حرکت می‌کنند.
(موتور از کنار کاملاً رد می‌شود)

قایق وقتی کنار کشتی برسد به سمت کشتی می‌رود. (منحرف می‌شود.)

(P کاهش می‌یابد)

دو منشعب
برای کشتی هم این طور است ولی چون جرم کشتی زیاد است اتفاقی نمی‌افتد برای کشتی)

منظور از اثر برنولی این است که اگر بنا به هر دلیلی در یک مقطع خاص برای سیالات لزج سرعت سیال افزایش یا کاهش یابد فشار سیال نیز متناسب با آن کاهش یا افزایش می‌یابد با فرض این که تغییر ارتفاع قابل چشم‌پوشی باشد
($\Delta Z$ نقشی ایفا نکند)



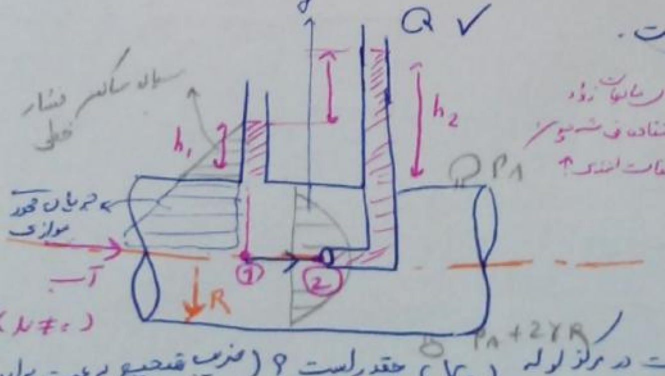
- یکی از کاربردهای معادله برنولی در دستگاه‌های اندازه‌گیری است.

لوله پیتو pitot tube

← سرعت‌سنجی یا دبی‌سنجی
برای

← معمولاً برای گازها ولی برای مایعات زیاد استفاده می‌شود
تلفات انرژی؟

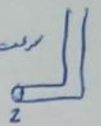
~~فشار دینامیکی~~ ~~فشار استاتیک~~ ~~فشار~~ کل اندازه می‌گیرد



- با توجه به شکل بالا با فرض معلوم بودن ρ و ρ و $h_2$ و $h_1$ و R سرعت در مرکز لوله ($V_c$) چقدر است؟ (ضریب تصحیح سرعت برابر با مقدار معلوم $C_v$ است)

سیال در لوله 2 بوده بالا وایستد .

ارتفاع ایستادن به شتاب جاذبه برگز نمی‌گیرد آنو نگرفته تغییرات از نوع $\gamma$ هیدرواستاتیکی است .



تمام سیال ساکن بود سرعت 0 است از جمله در 2 . $V_2=0$

$V_2=0$ نقطه سکون

حل: $P_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2+\cancel{\gamma z_1} = P_2+\frac{1}{2}\rho \underset{0}{\cancel{V_2^2}}+\cancel{\gamma z_2}$

$\longrightarrow \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2-P_1 = \gamma(h_2-h_1)$

$\frac{1}{2}\rho V_1^2=\gamma\Delta h \longrightarrow V_1=\underline{C_v}\sqrt{2g\Delta h}$

x فشار برابر $\infty$

$P_2=P_{at}+\gamma(h_2+R)$

$P_1=P_{at}+\gamma(h_1+R)$

دینامیک ذره‌ای از سیال → معادله مومنتوم (2 سؤال در کنکور 93!)

---

13/5/93

جلسه 5

## بخش 5

## دینامیک توده‌ای از سیال لزج

الان دیگه سیال می‌تونه لزج باشد .

### روش ~~حجم~~ حجم کنترلی (انتگرالی)

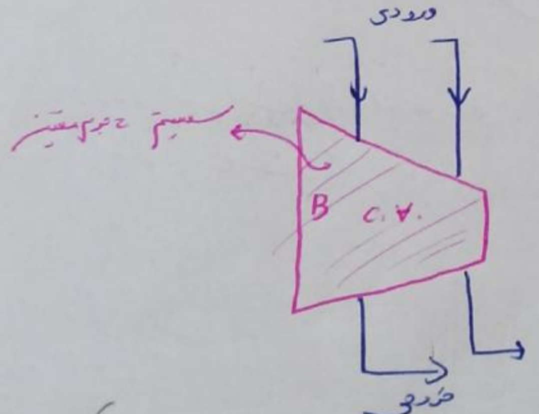
در سالات 2 همین کارها را دیفرانسیلی از ناویراستوکس می‌کردیم

اساس این روش قضیه زیر است

- قضیه انتقال رینولدز (قضیه حجم کنترل)

حجم خاص داریم که شکل و سایز خاص ما است و با آن حجم همراه است

می‌تواند بیش از یک ورودی خروجی داشته باشد .



B خاصیت دلخواه ماده
→ m جرم
→ $m\vec{V}=\vec{M}$ مومنتوم خطی
→ $\vec{r}\times m\vec{V}=\vec{H}$ مومنتوم زاویه‌ای
→ E انرژی

c.v حجم کنترل

sys سیستم

$\frac{\partial}{\partial t}(B)_{c.v.}=?$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{c.v.}=\left(\frac{dB}{dt}\right)_{sys}+\Sigma\dot{B}_{in}-\Sigma\dot{B}_{out}$$

$$\underbrace{\underbrace{\left(\frac{dB}{dt}\right)_{sys.}}_{\text{لاگرانژی}}=\underbrace{\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{c.v.}+\Sigma\dot{B}_{out}-\Sigma\dot{B}_{in}}_{\text{اویلری}}}_{\text{رینولدز}}$$

۱. معادلات پایستاری حالت عمومی جریان است؟ آیا برای غیرنیوتنی هم هست؟!

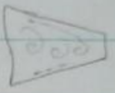
$$\underset{\text{بقای جرم}}{0} = \left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys.} = \left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)_{c.v} + \Sigma \dot m_{out} - \Sigma \dot m_{in}$$ ✓ معادله پیوستگی

سؤال ساده داشتیم

$$\underset{\text{بقای مومنتوم خطی}}{\Sigma \vec F} = \left(\frac{d\vec M}{dt}\right)_{sys} = \left(\frac{\partial \vec M}{\partial t}\right)_{c.v} + \Sigma \dot{\vec M}_{out} - \Sigma \dot{\vec M}_{in}$$ ✓✓ ۲ سؤال امتحانی پارسال آمد

معادله مومنتوم خطی

حل جریان vortex



$$\underset{\text{بقای مومنتوم زاویه‌ای}}{\Sigma \vec T} = \left(\frac{d\vec H}{dt}\right) = \left(\frac{\partial \vec H}{\partial t}\right)_{c.v} + \Sigma \dot{\vec H}_{out} - \Sigma \dot{\vec H}_{in} \longrightarrow$$ تا حالا نیامده محتمل

معادله مومنتوم زاویه‌ای

[illegible]

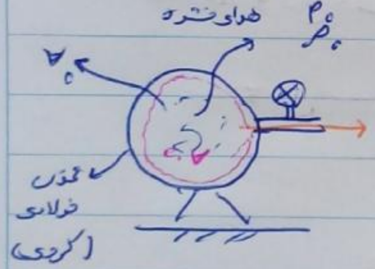
$$\underset{\text{بقای انرژی}}{\dot Q - \dot W} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{sys} = \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{c.v.} + \Sigma \dot E_{out} - \Sigma \dot E_{in} \longrightarrow$$ بحث جریان در لوله

بخش جریان در لوله

لایه و رینولدز

مثال: با توجه به شکل معادله تابع $\rho$ برحسب زمان به چه صورت است؟

(فرض کنید در هر لحظه از زمان تمامی ذرات سیال دارای یک دانسیته هستند)



$\dot m(t) = k\rho(t)$

حل از روش حجم کنترلی

مخزن را حجم کنترل می‌گیریم

ورودی ندارد و فقط در سمت راست یک خروجی دارد.

$$\boxed{\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{k}{\forall_0}t}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\ln\frac{\rho}{\rho_0} = \ln\rho - \ln\rho_0 = -\frac{k}{\forall_0}t}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(M)_{c.v} + \Sigma \dot M_{out} - \Sigma \dot M_{in} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho V_0) + k\rho$$

$$0 = V_0\frac{\partial \rho}{\partial t} + k\rho$$

$$0 = V_0\frac{d\rho}{dt} + k\rho \longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{k}{V_0}dt \rightarrow \ln\rho = -\frac{k}{V_0}t + \overset{\ln\rho_0}{C}$$

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{k}{V_0}t}$$

کاربردهای معادله مومنتم (خطی)

اگر جریان دائم باشد.

$$\Sigma \vec{F} = \overset{0}{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{M})_{c.v.}}} + \Sigma \dot{M}_{out} - \Sigma \dot{M}_{in}$$

1) مسائل از نوع جریان داخلی (سیال با یک دیواره محصور شده) مثل لوله، زانویی، شیپوره ...)

← کمتر داده شده، ساده‌تر، تنوع کمتر

2) مسائل جریان خارجی (سیال خارج از جسم)، کره، استوانه، بال هواپیما ...

سیال خارج

منظور بیشتر

برخورد جت سیال با سطوح ← مثل توربین جریان آبی یا پمپ

پره
Vane

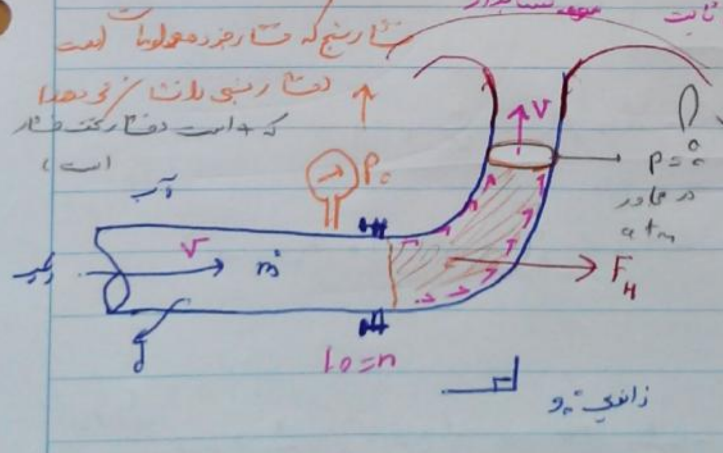
مثل سؤال پارسال

← بیشتر سؤال می‌دهند، تنوع بیشتر

پارسال 2 نوع سؤال از این

مثلاً ما 3 نوع جت داریم
- افق
- مایل
- قائم

چند نوع سطوح داریم
- تخت - خمیده
- ساکن - متحرک
  - شتابدار
  - سرعت ثابت



فشارسنج که فشار جزء معلومات است
فشارسنجی بالا نشان می‌دهد
که + است (فشار گیج فشار است)
آب
$P_0$
$V$
$\dot{m}$
$F_H$
$p = 0$
در فشار atm
$10 = n$
زانویی ۹۰

سؤال زانویی برای امتحان جالب است!

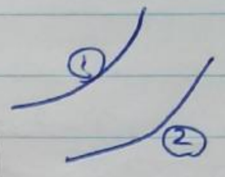
زانویی سیال را تخلیه می‌کند در atm!

سرعت تغییر نمی‌کند چون سطح مقطع کم و زیاد نشده!

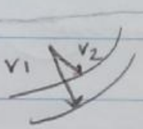
مثال) با توجه به شکل بالا نیروی کششی وارد بر هر پیچ چقدر است؟

مثلاً نیرو ناشی از ~~تغییر~~ مومنتوم سیال است نیرو در اثر تغییر مومنتوم سیال و توان ربط دارد

سیال داخل زانویی را حجم کنترل می‌گیریم



* چه سیال ایده‌آل چه نه، $P_2 > P_1$



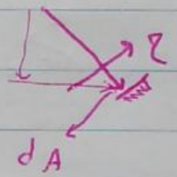
هرچه $p>0$ $r>0$

$r_1 > r_2 \rightarrow P_2 > P_1$

$F_H$ نیروی سیال به دیواره از چپ به راست

هم $F_x$ هم $F_v$، مؤلفه فشاری و تنش برشی دارند.

$$F_H = (F_H)_p + (F_H)_\tau$$
$$F_v = (F_v)_p + (F_v)_\tau$$



τ داریم چون سیال لزج است.

؟ فقط به زانویی وارد می‌شود

نیروهای وارد بر دیواره و سیال را بنویسید (توزیع فشار و تنش برشی را رسم کنید)

سپس فشار و τ در دیواره و سیال ثبت کنید.

در مقطع 1 سیال: $\tau = 0$ (حرکت در راستای ↕ نداریم، سیال عمود بر سطح وارد می‌شود)

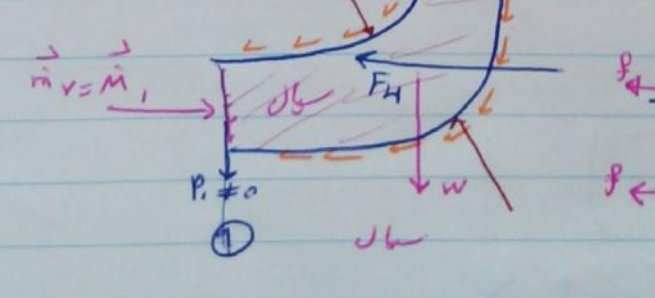
2 سیال: $\tau = 0$ (سیال به تماس با هوا)

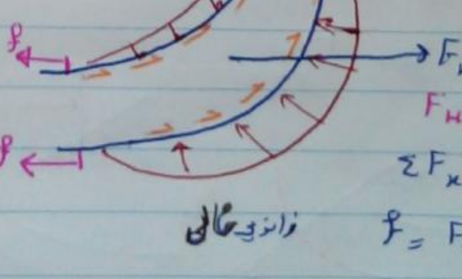
یک زانویی با سطح مقطع ثابت مومنتوم را از نظر مقدار عوض نمی‌کند از نظر جهت عوض می‌کند.

به علت این که $P_0$ اثر نگذارد و ورودی $\dot m$ ...

$\vec{\dot M} = \dot m \vec V$

$Q/A = V$ سرعت متوسط


تنش برشی،
$\vec{\dot M_2} = \dot m \vec V$
②
$P_2 = 0$
$\dot m v = \vec{\dot M_1}$
سیال
$F_H$
W
$P_1 \neq 0$
①
سیال


تنش برشی
فشار
f
f

زانویی خالی

$F_H = ?$

$F_H = \dot m v + P_0 A$

$\Sigma F_x = 0$

$f = F_H / 2$

از چپ به راست

$F_H = ?$

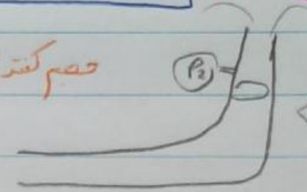
عمومی

$$\Sigma F_x = (\cancelto{0}{\vec{\dot m}_{out}})_x - (\vec{\dot m}_{in})_x = -\dot m V \longrightarrow$$ معادلات مانا را برای سیال می‌نویسیم

$$\bigcirc\!\!\!\!-F_x + P_1 A)_x = -\dot m V \longrightarrow \boxed{F_x = \dot m V + P_1 A} > 0 \longrightarrow$$ جهت نیرویی دارد به زانویی درست انتخاب شده بود

اثرش جهتی و مقداری

حجم کنترل را برای سیال در نظر گرفتیم و معادلات را برای سیال می‌نویسیم.



★ اگر بود

اگه $P_2 = 0$ که به خاطر اینه که اتمسفریه $P_2A$ (ما باز هم ترم

به خاطر اینکه در راستای x ترم ندارد)

مثال:

در مسأله قبل مقدار نیروی عمودی چقدر است؟ در چه جهتی به زانویی اثر می‌کند. (از وزن سیال داخل زانویی صرف نظر کنید.) ← معمولاً هم در مسائل با نیروهای دیگر کوچک است (با فرض معلوم بودن دما در $\dot m$ و $V$، $P_0$)

← یعنی جریان دائم است:

$$\Sigma F_z = (\Sigma \vec{\dot m}_{out})_z - (\Sigma \vec{\dot m}_{in})_z = (+\dot m V) - 0 = \dot m V$$

$$-F_v - \overset{\simeq 0}{\cancel{W}} = \dot m V \longrightarrow F_v = -\dot m V < 0$$

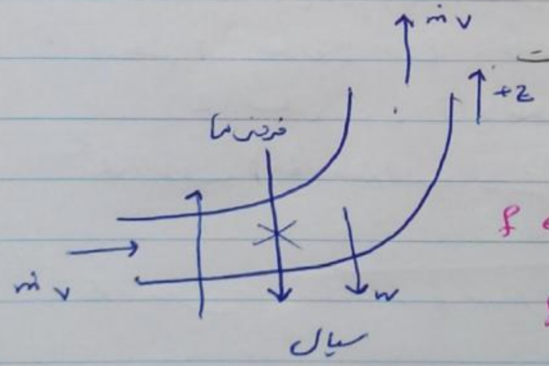
نیروی عمودی از بالا به پایین به زانویی اثر می‌کند

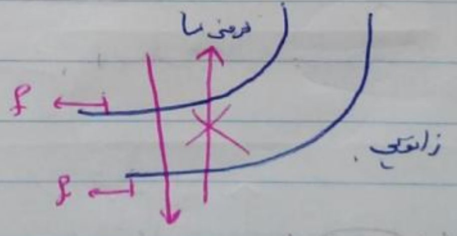
معمولاً در زانویی‌ها W سیال صرف نظر کنیم

← ما جهت را از اول مان از پایین به بالا بود حالا که ⊖ شد یعنی جهت ما اشتباه بود.

در فورس‌ها می‌فهمیم چقدر تنش چقدر فشار است

ولی در حقیقت اینجا اثر فشار بیشتر از تنش است





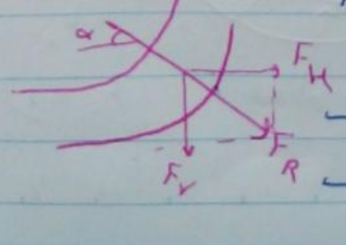
$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_v^2}$$

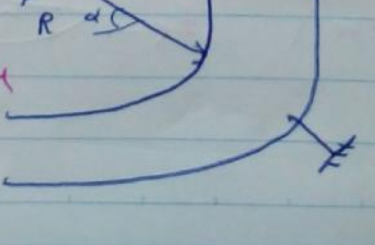
$$\tan\alpha = \frac{F_v}{F_x}$$

جریان دائم است اگر دائم نبود $\dot m = at$

شارش هم تغییر می‌کند پس

ما باید دائم هم فرض کنیم

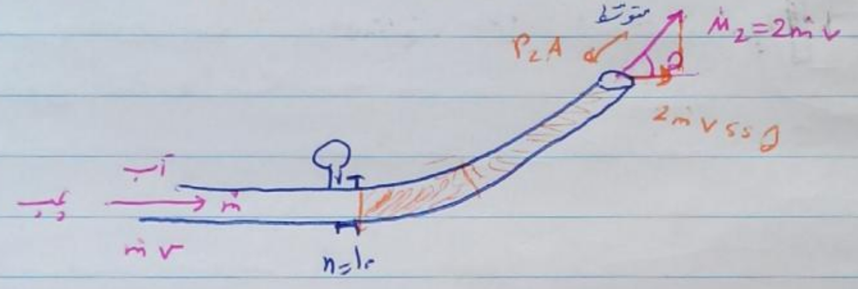




روی $P_0$ و عملکرد پمپ ($\dot m$) تأثیر نمی‌گذارد ⟸ ممکنه در امتحان این را زاویه دار کنند یا تنگ بکنند.
ولی بار $\dot m$ ثابت است و تابع
$\dot m$ ~~ثابت~~ ولی سرعت تغییر می‌کند مومنتم تغییر می‌کند زمان نیست

$\dot m$ ممکنه تغییر کند ولی بار مقدار جوییش ثابت است و تابع زمان نیست.

مثال: به مثال مسألهٔ قبل بازگردید فرض کنید زانویی به اندازهٔ زاویهٔ θ موجب تغییر مسیر سیال گردد (زاویه‌ی نازل θ باشد) پاسخ دهید. (فرض کنید سرعت متوسط تخلیه دو برابر سرعت متوسط در ورود است)



$$\boxed{\sum F_x} = (\vec{\dot M}_{out})_x - (\vec{\dot M}_{in})_x = (+2\dot m V\cos\theta) - (+\dot m V)$$

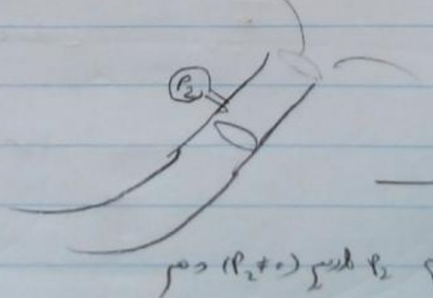
$$-F_H + P_1 A - \cancel{(P_2 A)}\cos\theta$$

$$\longrightarrow \underline{F_H = P_0 A - 2\dot m V\cos\theta + \dot m V}$$

قانون پیوستگی

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(m)_{c.v} + (\dot m_{out}) - (\dot m_{in})$$

اگر بود:



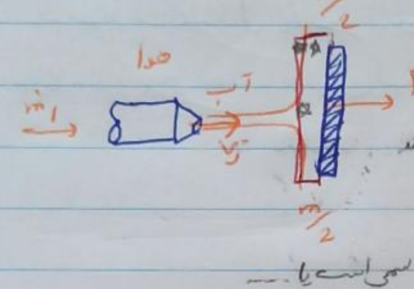
$\longrightarrow$ اینجا
$P_2 A\cos\theta$
اثر داشت چون هم $P_2$ داریم $(P_2 \neq 0)$ و هم
در جهت x مؤلفه دارد.

$\dot m = \rho Q \rightarrow \dot m = \rho A V$ ؟ جت آزاد ؟

## • مسائل جریان خارجی : با مثال 2 سؤال

مثال: با توجه به شکل مقابل نیروی وارده بر صفحه چقدر است؟

(اینجا نیروی عمودی اصلاً نداریم.)



نیرو از چپ به راست وارد می‌کند.

پس نیرو ناشی از چیست؟ فقط فشار. چون $\overset{\text{تنش}}{\tau}$ ها هم را خنثی می‌کنند

سیال در نقطه سکون فشار max دارد

رابطه فشار به صورت روبه‌رو است که نمی‌دانیم خطی است تحقیقاً نمی‌دانیم سهمی است یا ...

← سرعت خروجی از تیغه‌ها چیست؟

مثل جت آزاد است به همین دلیل حجم کنترل را کمی بیرون ▯ گرفتیم

سرعت خروجی از تیغه هم همان سرعت ورودی است ($V_j$) به اندازه نوشتن برنولی بین * و ** است ($P = P_{atm}$ ، اختلاف ارتفاع ناچیز ، تنش نداریم و نتیجه می‌گیریم معادله برنولی را اجازه داریم بنویسیم

در مسائل جریان خارجی فشار نداریم چون خروجی هست در حقیقت شیپوره است وقتی آب به آب بیرون دیگه فشارش atm است

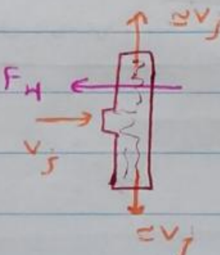
به خاطر بودن سرعت‌ها یکسان نه وقتی آب میره بیرون فشارش فشار اتمسفره در مسائل جریان خارجی معمولاً فشار نداریم.

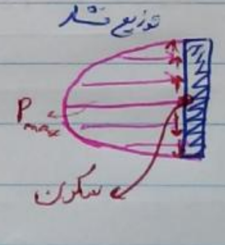
خروجی‌ها (V) ها عمودی است که سرعت افقی ندارد.

جت‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند.

داخل حجم کنترلی سوال با حجم سینی

اثر این داخل روی سوزن‌ها است.





$\longrightarrow F_H = F$

$F_H = \int p \, dA$
؟

نیروهایی که به وسیله رابطه بالا بدست نیروهای اینرسی اند. (از نوع زمانی یا جابه‌جایی که اینجا از نوع جابه‌جایی است.)

اگر توزیع فشار هم داشتیم $\int$ می‌گرفتیم جواب‌ها یکی می‌شد

$$F_H = \Sigma F_x = (\Sigma \dot m_{out})_x - (\Sigma \dot m_{in})_x = -\dot m V_j$$

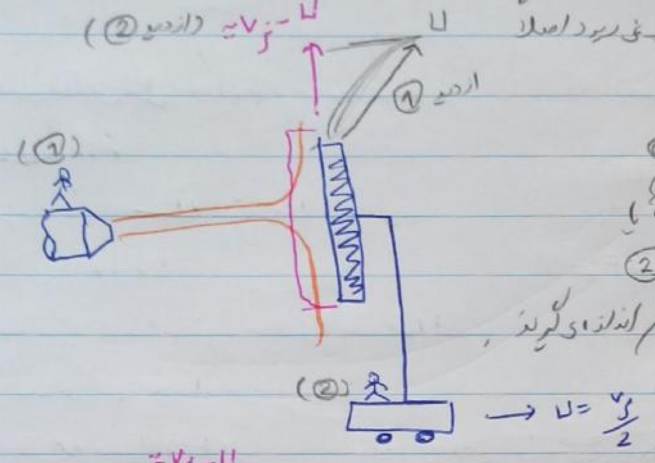
$$F_H = \dot m V_j = \rho A_j V_j^2$$

نیروی اینرسی

مثال: در مسأله قبل فرض کنید. پره با سرعت ثابت $U = \frac{V_j}{2}$ از چپ به راست در حال حرکت باشد. نیروی وارد بر پره در این حالت چقدر است؟

$\rho A_j V_j^2 >$ مطمئناً کمتر است.

اگر پره با سرعت خود $V_j$ حرکت کند آب نمی‌رسد اصلاً


$U$
$= V_j - U$ (از دید ②)
از دید ①
(①)
(②)
$\to U = \frac{V_j}{2}$

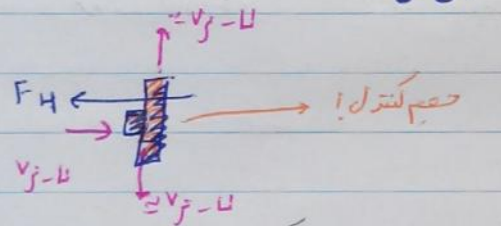
(پارسال هر دو را متحرک گرفتند)

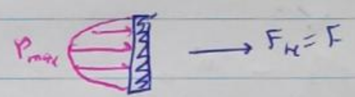
① حق انتخاب: نسبت به ناظر روی شیپوره یا (ساکن)

② ناظر روی وسیله متحرک (متحرک)

هر دو یکسان نمی‌بینند ولی نیروی یکسان اندازه می‌گیرند.

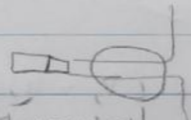
ناظر دومی


$\approx V_j - U$
$F_H$
$V_j - U$
$\approx V_j - U$
حجم کنترل!


$P_{max}$
$\longrightarrow F_x = F$

اینجا نسبت به ناظر متحرک حل می‌کنیم راحت‌تر.

ناظر ساکن: به حجم کنترل ما یک احتساب کنیم که $\frac{\partial}{\partial t}$ دارد و کمی سخت‌تر است.



اینجوری هم حجم کنترل گرفت.

$$F_x = \Sigma F_x = (\Sigma \dot m_{out})_x - \left[(\dot m_{in})_x\right]$$

نسبت به ناظر متحرک

$$\to F_x = \underbrace{\rho A_j (V_j - U)}(V_j - U)$$

$\dot m$ از دید ناظر متحرک

$$F_x = \rho A_j (V_j - U)^2 = \frac{1}{4}\rho A_j V_j^2$$

$$U = +\frac{V_j}{2}$$

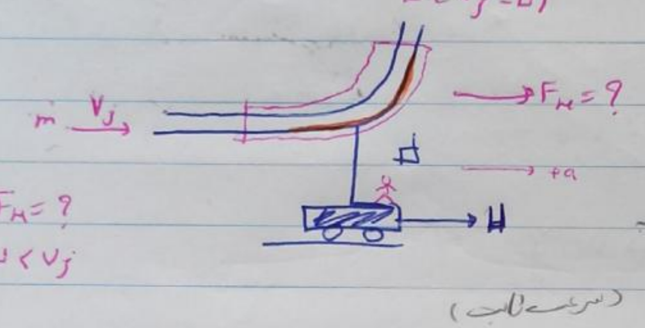
نسبت به قبل $\frac{1}{4}$ شد.

اگر با همین سرعت به سمت شیپوره رود تقریباً ۲ برابر می‌شود.

تا الان برای جت افقی - سطح تخت حل کردیم.

مثال: کنکور ۹۳: جت افقی - سطح غیر تخت:

جت آب مطابق شکل به یک پره برخورد نموده و به اندازه ۹۰° تغییر مسیر می‌دهد. نیروی افقی وارده بر این پره چقدر است؟



$F_H = ?$
$U < V_j$

چون برخورد کرده مسلماً $U < V_j$

فشار اتمی + ۲ برشی ← $F_H$ ← سیال (تنش)

حرکت می‌کند به دلیل نیروی drag ← سرعت به حد خودش رسیده ($U$)

ناظر: ناظر روی جسم متحرک

$$\Sigma F_x = \cancel{(\vec{\dot m}_{out})_x}^{0} - (\dot m_{in})_x$$

سیال به پره $\xrightarrow{F_H}$

پره به سیال $(-F_H)$

$$\boxed{-} F_H = -(\dot m_1)$$

نسبت به ناظر متحرک

$$F_H = \rho A_j (V_j - u)\cdot(V_j - u) = \rho A_j (V_j - u)^2$$

(حرکت مشابه مسئله بالا است، حل می‌کنیم)

مثال: در مسئله قبل سرعت $U$ را طوری تعیین کنید به طوری که توان منتقل شده به پره max گردد.

تابع درجه 3

$$\dot W(U) = F\cdot U = \rho A_j (V_j - U)^2 \cdot U$$

$$\frac{d\dot W(U)}{du} = 0 \xrightarrow{\text{معادله درجه 2}} \begin{cases} U_1 = V_j \\ U_2 = V_j/3 \end{cases}$$

که اصلاً در کار ما حاصل نشود $U_1 = V_j$ غیر قابل قبول → Min

نشون بدیم، نیاز به رسم نیست

$U_2 = \frac{V_j}{3}$ قابل قبول → Max

الف) $U = V_j/2$

ب) $U = V_j/3$ ✓

ج) $U = V_j/4$

د) $U = V_j/8$

؟

سؤال کتاب و استاد (حرکت شتابدار)

مثال: در مسألهٔ قبل فرض کنید جرم گاری و پره برابر M باشد تابع U برحسب زمان به چه صورت است؟ (حرکت شتابدار است هنوز به سرعت حد نرسیده تازه گاز داده است آب را باز کردیم)

(از نیروی مقاومت هوا صرف‌نظر کنید) (از اصطکاک چرخ‌ها با زمین صرف‌نظر کنید) (از جرم لایهٔ آب چسبیده به پره نیز صرف‌نظر کنید) $m << M$

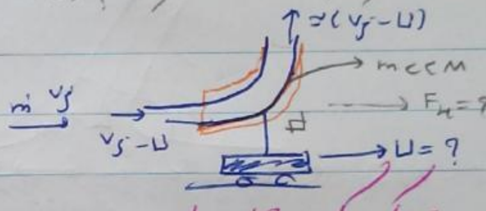
← drag صفر یا drag و اصطکاک صرف‌نظر کن

☆ اگر drag هوا و اصطکاک چرخ‌ها نباشد: سرعت حد گاری می‌شود همان سرعت جت از گاری (ولی در عمل این نمی‌شود)

چون جرم دارند با گذشت زمان $U(t)$ است یعنی حرکت شتابداره.

$$\Sigma F_x = M \boxed{\frac{dU}{dt}}$$

شتاب



وقتی که حرکت شتابدار است باید از سرعت مطلق استفاده شود (در حالت کلی) و حرکت را نسبت به ناظر ساکن یا در حال حرکت با سرعت ثابت حل کرد نه ناظری که تحت شتاب است.

* اگر حرکت شتابدار باشد لازم است در حالت کلی در معادلهٔ مومنتوم (در بخش برداری آن) از سرعت مطلق استفاده شود. $\vec{V}$

$$\dot M = \dot m \boxed{\vec V} \longrightarrow \text{مطلق}$$

$\dot m$ ↓ همواره نسبی است
همواره نسبت به سطح کنترل

برداری بودن $\dot M$ به خاطر $V$ است.

حالت خاص: اگر حرکت شتابدار از نوع مستقیم الخط باشد (شتاب جانب مرکز نباشد) در این صورت می‌توان در معادلهٔ مومنتوم از سرعت نسبی استفاده کرد. Panton

؟ از دید کدام ناظر است؟

$$\dot M = \dot m \vec V_r \longleftarrow$$

لایهٔ آب
معادل $(M + m')$ ← $\simeq 0$

$$\rho A_j (V_j - U)^2 = F_x = \Sigma F_x = M \frac{dU}{dt}$$

شتاب

$$\boxed{\rho A_j (V_j - U)^2 = M \frac{dU}{dt}}$$

معادله دیفرانسیل سرعت برحسب زمان

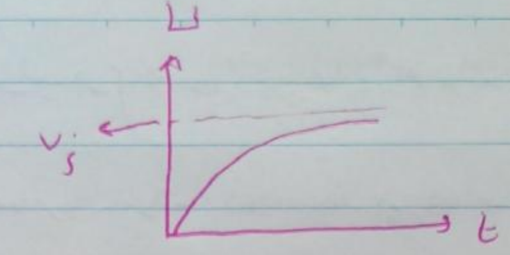
حل کنیم: فرض کنیم دبی ثابت است

حل تحلیلی

$$U(t) = \frac{K t V_j^2}{1 + K t V_j} \qquad \left(\text{که } K = \frac{\rho A_j}{M}\right)$$

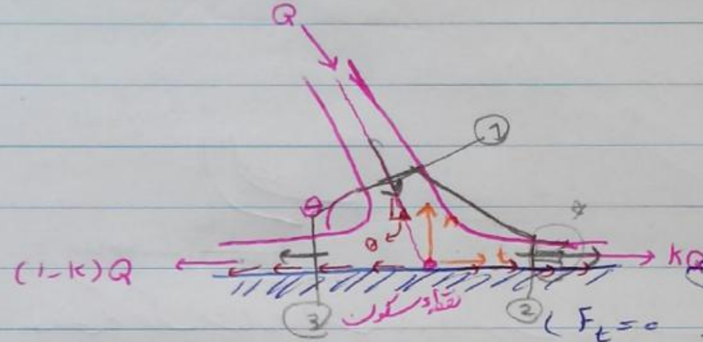
$M$ ← جرم گاری

(سرعت جت $V_j$) با فرض اینکه ثابت بماند.



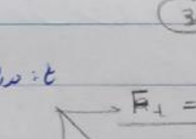
* جت مایل
* جت قائم

مثال: کنکور 93 (جت مایل)



جت آب مطابق شکل به یک صفحهٔ تخت افق برخورد می‌نماید. با این فرض که در راستای صفحه نیروی وارد بر آن (صفحه) ۰ باشد. ($F_t = 0$) مقدار K چقدر است؟

t: در راستای صفحه



فرض

حجم کنترل به شکل بالا بگیر.

(به اندازهٔ کافی از توری فاصله بگیریم آنجا هست که فشار atm نیست) ما باید به اندازهٔ کافی از ... تا جایی که $p \neq p_{atm}$ است دور شویم تا $p = p_{atm}$ شود

یک ورودی و 2 خروجی دارد

$$\Sigma F_t = (\Sigma \vec{\dot m}_{out})_t - (\Sigma \vec{\dot m}_{in})_t$$

$$0 = (+\dot m_2 V_2 - \dot m_3 V_3) - (+\dot m_1 V_1 \cos\theta)$$

$$V_1 \simeq V_2 \simeq V_3$$

و برنولی بنویسیم در ورودی خروجی حجم کنترل که $p = p_{atm}$ ورودی‌ها و خروجی‌ها برابر باشد. در برنولی برای جت آزاد می‌نویسیم

سه سرعت برابرند) تغییر ارتفاع نداریم
تقریباً
(دقیقاً - فاصله هست
جواب کتاب = نیست و ≃ است)

$$\begin{cases} \dot m_1 = \rho Q_1 = \rho Q \\ \dot m_2 = \rho Q_2 = \rho (KQ) \end{cases}$$

$$\dot m_3 = \rho Q_3 = \rho (1-K) Q$$

$$\boxed{K = \frac{1+\cos\theta}{2}}$$

مقدار حدی K ← $\frac{1}{2}$ است ← نصف به چپ نصف به راست.

وقتی $\theta = \frac{\pi}{2}$

فرض $F_t = 0$ قابل قبول می‌تواند باشد چون

$z_{\text{چپ}} \neq z_{\text{راست}}$

ولی می‌شه تنظیم کرد

$\underbrace{\int z\,dA}_{\text{چپ}} = \underbrace{\int z\,dA}_{\text{راست}}$ بشود

به نظر من آب سیال ما صاف است به سمت راست بره پس چرا به چپ هم میره؟!

چون اگر فقط به سمت راست بره مومنتوم برقرار نیست

قانون بقای مومنتوم باعث حرکت سیال به سمت چپ می‌شود

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sum \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} \\ \dot{m}_2 + \dot{m}_3 &= \dot{m}_1 \end{aligned}\right\}$$

معادلهٔ مومنتوم برای سیال می‌نویسیم

اگر می‌خواهیم در مسئلهٔ قبل ۱۰N به صفحه به سمت راست وارد شود $\xrightarrow{+10N}$ کشاه

به سیال ۱۰- وارد می‌شود

$$\sum F_n \neq 0 \quad = -10 = (\dot{m}_2 V - \dot{m}_3 V_3) - (\dot{m}_1 V \cos\theta)$$

مثال: در مسئلهٔ قبل نیروی عمود را حساب کنید.

افقی نداریم عمودی؟

$$\sum F_n = (\cancel{\sum \dot{m}_{out}}^{\,0})_n - (\dot{m}_{in})_n = -(-\dot{m} V \sin\theta)$$

خروجی در راستای n مؤلفه ندارد.

$$\underline{+F_n = \dot{m} V \sin\alpha}$$

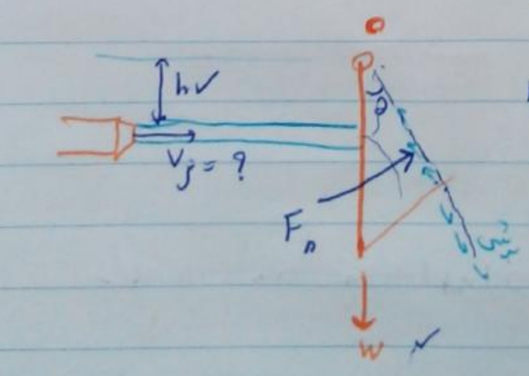
$F_n$ روی صفحه به سمت پایین $(-F_n)$

روی سیال به سمت بالا است

در نقطهٔ سکون [illegible] فشار داریم

سرعت سیال ۰ :

مکانیزمی برای اندازه‌گیری سرعت جت خروجی خارج از شیپوره:



هرچقدر سیال بالا می‌ره چقدر پایین میره استفاده از K

سیال بالا می‌ره ≠ پایین میره بیشتر پایین

میره

$$\sum M_O = 0$$

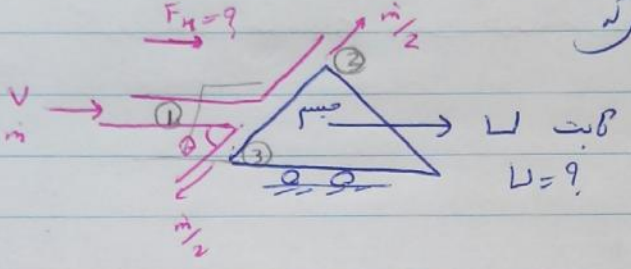
مجموع گشتاور W و $F_n$ حول O = 0 ←

$F_n = \dot{m} V \sin\alpha$ ← $F_n$ ✓

V ✓

برش‌ها حول o گشتاور ایجاد نمی‌کنند،

مثال: سؤال کنکور ۹۲ که با سؤال امتحانی 5 سال پیش مفهوم نزدیک دارند.



با توجه به شکل سرعت U را طوری تعیین کنید به طوری که توان منتقل شده به جسم، max گردد.

مؤلفه‌ی افقی باعث حرکت به راست شده

$$\dot{W} = F_H \cdot U$$

Ẇ = نیروی افقی × سرعت در جهت راست

$$(\sum \vec{F})_x = (\sum \vec{\dot{M}}_{out})_x - (\vec{\dot{M}}_{in})_x$$

$$-F_H = (+\frac{\dot{m}}{2} V \cos\theta - \frac{\dot{m}}{2} V \cos\theta) - (\dot{m} V) \Rightarrow F = (\underset{\text{نسبی}}{\dot{m}}\ \underset{\text{نسبی}}{V})$$

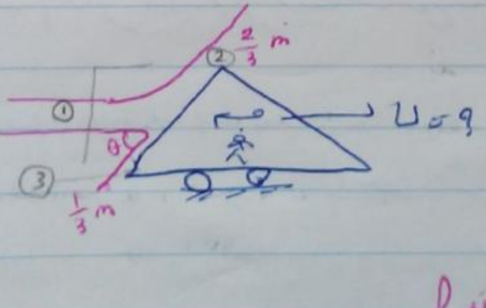
نسبت به ناظر متحرک)

$$F_H = \rho A_j (V_j - U)^2$$

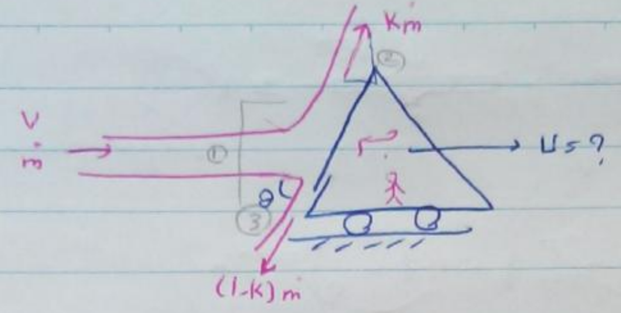
$$W = F_H \cdot U = \rho A_j (V_j - U)^2 \cdot U \xrightarrow{\text{درجه } 3} \frac{d\dot{W}}{dU} = 0 \Rightarrow \boxed{U = \frac{V_j}{3}}$$

مقاومت سیال کمتر    مقاومت بیشتر

در سؤال قبل فرض کنید تقسیم دبی به صورت نشان داده شده در شکل باشد ($\frac{2}{3}\dot{m}$ ، $\frac{1}{3}\dot{m}$)



استاد با $K\dot{m}$ و $(1-K)\dot{m}$ حل کردند!



$$(\vec{\Sigma F})_x = (\Sigma \vec{\dot m}_{out})_x - (\Sigma \vec{\dot m}_{in})_x$$

$$-F_x = [(+k\dot m V\cos\theta) - (1-k)\dot m V\cos\theta] - (\dot m V)$$

$$= (k\dot m V\cos\theta + k\dot m V\cos\theta) - \dot m V = (\underbrace{\qquad}_{\text{k و θ و ... دارد}})\dot m V$$

$\theta = ?$

بیشتر سئوال بالا در مورد کتاب پاسخ داده شده در حالت $\dot W_{max}$ ؛ U بیشتر شد یا کمتر ؟ بستگی به θ ؟

تغییر نمی کنه

$$-F_x = (\underbrace{\qquad}_{\text{k و θ و ... دارد}})\rho A_j (V_j - U)^2$$

نظر استاد

$$\dot W = F_x \cdot U = \overbrace{\overset{\text{ضریب ثابت}}{\bigcirc}\,\rho A_j (V_j - U)^2 \cdot U}^{\text{توان عوض نشده}}$$

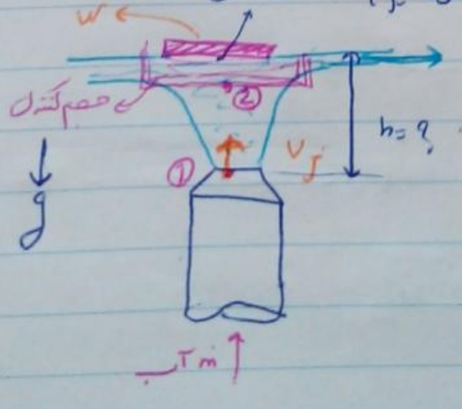
$$\frac{dW}{dU} = 0 \rightarrow U = \frac{V_j}{3}$$

ولی MAXش عوض نمی شه.

ولی چک شود

(سؤال خوب است)

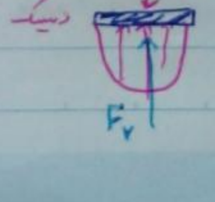
مثال: جت آب مطابق شکل به یک دیسک با وزن W برخورد نموده و سیستم در حالت تعادل قرار دارد. ارتفاع h چقدر است؟ (از وزن سیال داخل c.v. صرف نظر کنیم)



در محل برخورد سرعت کمتر از سرعت خروجی از شیپوره است.

طبق مرزبندی روی c.v ، [illegible] است.

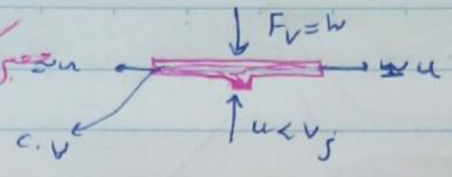
ابتدا در گام اول ... را پیدا کنیم.



$$\Sigma F_z = 0$$

$$F_v = \int p \cdot dA = W$$

حجم کنترل



u: سرعت ورود به حجم کنترل

مومنتوم

$$-W = \sum F_z = (\sum \cancel{\dot m}^{0}_{out}) - \left(\boxed{\sum \dot m_{in}}\right) = \dot m u$$

$$u = \frac{W}{\dot m}$$

برنولی

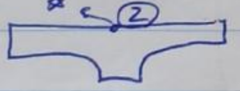
$$\overset{P_{atm}}{\cancel{P_1}} + \frac{1}{2}\rho \underset{V_j}{V_1}^2 + \gamma \cancel{Z_1}^{0} = \overset{P_{atm}}{\cancel{P_2}} + \frac{1}{2}\rho \underset{u}{V_2}^2 + \rho g \underset{h}{Z_2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{V_j^2}{2g} - \frac{u^2}{2g}$$

پس نقطه سکون فشارش max است وقتی که به دیواره برخورد کرد توزیع فشار را بدهد و $\int p \cdot dA$ بگیریم.

سیال ما آب است. ⟵ ولی ما چون سیال وارد هوا شده در قبل گفتیم که $P=0$ بگیریم $(P \neq 0)$
و می‌توان برنولی رفت

بعضی کتاب‌ها اشتباه حل کردند.



حجم کنترل

ما نمی‌توانیم ② را نقطه ★ بگیریم و برنولی بین 1 و 2 بنویسیم چون ما فشار ★ را نداریم. نمی‌توان گفت $P_★ = \frac{W}{A}$ ، $\frac{W}{A}$ فشار متوسط است ولی ما در ★، $P_{max}$ داریم. (در توزیع فشار خطی نیست)

ولی در اصل به اینجا h ارتفاع لایه c.v را هم اضافه کرد که با داشتن u و b ضخامت لایه نازک به دست می‌آید.

مومنتوم زاویه‌ای احتمال است سؤال آید

معادله مومنتوم زاویه‌ای: تا حالا سؤال امتحانی در مکانیک نیامده در رشته‌های دیگر آمده

$$\sum \vec T = \frac{\partial}{\partial t}\cancelto{\text{دائم } =0}{(\vec H)_{c.v.}} + \sum \dot{\vec H}_{out} - \sum \dot{\vec H}_{in}$$