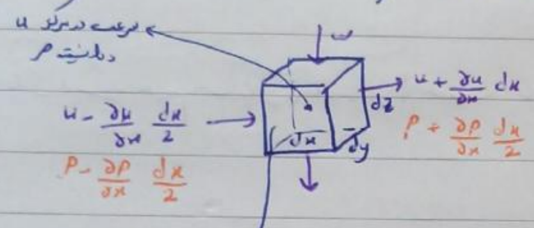
کنش بعد : روش های دیفرانسیلی

- فرمول دیفرانسیلی معادله پیوستگی
- 〃 〃 〃 مومنتوم (خطی) } در سطح ما است
- 〃 〃 〃 انرژی ⟵ ما نمی خوانیم.



حجم کنترل با شکل ثابت

(با بسط تیلور همه پارامترها را به وسط ارتباط بده)

این حجم کنترل ما با گذر جرم همراه است.

(در تمام ۶ وجه مکعب مستطیل گذر جرم داریم)

$$dm = \rho\, dx\, dy\, dz$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(m)_{c.v.} + \sum \dot m_{out} - \sum \dot m_{in}$$

$\rho(dx\,dy\,dz)$

این فرم دیفرانسیلی است چون حجم کنترل را بسیار کوچک گرفتیم

فرم ∫ ⟵ حجم کنترل را بسیار بزرگ می گیریم.

کارتزین :
$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

معادله پیوستگی (فرم دیفرانسیلی)

اگر دائم ⟵ 0

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec V)$$

سیال قابل تراکم باشد : $\nabla(\rho\vec V)$

اگر جریان دائم باشد این ترم صفر می شود

⟸ کلی (هم تراکم پذیر، هم تراکم ناپذیر)

سیال غیر قابل تراکم باشد ρ مستقل از فشار $\rho\nabla(\vec V)$

غیر قابل تراکم ⟵ سیال غیر قابل تراکم $\nabla\cdot\vec V = 0$

مثال : در یک جریان دو بعدی مؤلفه های بردار سرعت به صورت روابط زیر داده شده اند

$$\begin{cases} u = 2x \\ v = 2y \end{cases}$$

داده شده. کدام یک از گزینه های زیر درباره تابع $\rho(t)$ (چگونگی تغییرات دانسیته با زمان) درست است؟ (فرض کنید در هر لحظه از زمان تمامی ذرات سیال دانسیته یکسان داشته باشند) ⟵ مستقل از مکان

میدان سرعت برای جریان غیر دائم است.

کامل تراکم

ذرات سیال دانسیته یکی داشته هستند ⟵ ρ تابع مکان نیست. $\frac{\partial \rho}{\partial t} \to \frac{d\rho}{dt}$

$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial x}}$

جریان تراکم پذیر است چون گفته غیر قابل تراکم

$$0 = \frac{d\rho}{dt} + u\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial y}} + w\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial z}} + \rho\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{2} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}\right)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + 4\rho = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -4\,dt$$

$\ln \rho = -at + c$, $c = \ln \rho_0$

$at\ t=0:\ \rho=\rho_0$

$\boxed{\rho(t) = \rho_0 e^{-at}}$

باید دانسیته در هر نقطه با زمان تغییر کند تا میدان سرعت قانون بقای جرم را نقض نکند و قابل قبول باشد.

بجای اینکه بفهمیم سیال قابل تراکم است یا نه باید ∇V را حساب کنیم؛

$\nabla \cdot V = 4 \neq 0 \leftarrow \begin{cases} u = 2x \\ v = 2y \end{cases}$

پس قابل تراکم است

مثال: در یک جریان دو بعدی میدان سرعت به صورت روابط زیر داده شده است تابع $f(x)$ را طوری تعیین کنید به طوری که میدان سرعت از نظر فیزیکی قابل قبول باشد. (سیال غیرقابل تراکم است)

جریان از نوع دائم

پروفیل سرعت فیزیکی یعنی معادله پیوستگی را ارضا کند

$\begin{cases} u = 2x + f(x) \\ v = 2y \end{cases}$

جریان دائم است.
(u و v در آن به زمان بستگی ندارند و هم علناً گفته باشیم)

$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2 + f'(x) + 2 = 0$

ثابت c روی جواب اثری نگذارد ولی هر چه باشد معادله پیوستگی همچنان ارضا می‌شود.

$f'(x) = -4 \longrightarrow f(x) = -4x + c$

دلخواه

یکی از خواص سیال، جریان، چیزی با زمان تغییر کند ← غیر دائمی می‌شود.

در مسئله قبل هر تابع زمان در آمد ← جریان از نوع غیر دائم بود

ولی

مثال: مؤلفه x بردار سرعت به صورت رابطه زیر داده شده مؤلفه y بردار سرعت (v) را طوری در یک جریان دو بعدی تعیین کنید به طوری که میدان سرعت از نظر فیزیکی قابل قبول باشد.

که معادله پیوستگی را ارضا کند

(سیال از نوع غیرقابل تراکم و جریان دائم است)

$$\begin{cases} u = -2x \\ v = ? \end{cases}$$

الف) $v = 2y$

ب) $= 2xy$

ج) $= 2y^2$

د) $= 2x^2y^2$

$$0 = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2 + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = +2 \longrightarrow v = 2y + \cancel{K} \longrightarrow \text{دلخواه}$$

(د از پیوستگی سؤال زیاد آمده)

معادله دیفرانسیلی مومنتوم (خطی):

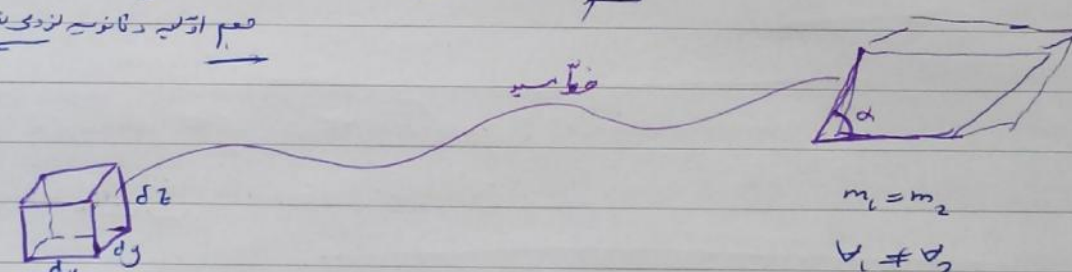
ذره از سیال بگیرید حجم کنترل نیست اینجا ذره است. در پیوستگی حجم کنترل بود.

اینجا ذره از سیال است که روی خط مسیرش حرکت می‌کند جلو که می‌رود شکل آن می‌تواند عوض شود طول

که در زاویه‌ها شد دیوارها عوض شود ولی جرم آن عوض نمی‌شود.

کش بیاید

حجم اولیه در قانون نیوتن لزومی ندارد ثابت باشد



$m_1 = m_2$

$\forall_1 \neq \forall_2$

$$\sum \vec{F} = \delta m \cdot \vec{a}_{\text{ذره}} = \rho \frac{\delta \forall}{\delta \forall} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\sum \vec{F}}{\delta \forall}$$

در جایی که استاد مشتق مادی را گفته a را به خوبی معرفی کرده.

مشتق مادی: $\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\underbrace{\vec{V} \cdot \vec{\nabla}}_{\text{میزان [illegible]}})\vec{V}$: یادآوری

کارتزین: $a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$

معادلات دیفرانسیل مومنتم

طی آیا همان معادلات حرکت کوشی است ؟!

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\sum \vec{F}}{\delta V}$$

→ Body Force → ثقل → $-\rho\hat{g}$

→ Surface Forces → فشاری → $-\vec{\nabla} p$

→ تنشی → $\nabla \cdot \vec{\vec{\tau}}$

$$\left(\frac{\delta m \, g}{\delta V} = \rho g\right)$$

تنسور تنش ماتریس است و با دوتا $\vec{\tau}$ تنش‌ها / دو بعدی $\nabla \cdot \vec{\vec{\tau}}$

اگر $\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}$

شتاب ۰ → $\Sigma F_x = 0$

شتاب ≠ ۰ → $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ ظاهر می‌شود

$\vec{\tau}$

$\frac{\partial p}{\partial x} \xrightarrow{\text{بدون شتاب}} \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x \delta y \delta z\right) = 0$

با شتاب → $-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x \delta y \delta z = \rho a$

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \nabla \cdot \vec{\vec{\tau}} - \rho\hat{g}}$$

معادلات حرکت کوشی Cauchy

هر سیالی - هر جریانی

(نیوتنی، غیرنیوتنی، تراکم‌پذیر، تراکم‌ناپذیر، دو بعدی، ۳ بعدی ...)

تنسور تنش ← تغییر شکل (نرخ زمانی تغییر شکل) ارتباط دارد درست مثل جامدات که τ به تغییر شکل ارتباط دارد

$$\text{تنسور تنش } \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & = \tau_{xy} & = \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

$i, j = 1, 2, 3$

معادلات حرکت کوشی ← نرمال ؟

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\underbrace{\tau_{ij}}_{\text{استوکس}} \longrightarrow \Big(\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}_{\delta_{ij}} \Big)$$

$\tau_{ij} \xleftarrow{\text{خطی}} \delta_{ij}$

تنسور نرخ تغییر شکل

↓

تغییر شکل زاویه‌ای + تغییر طولی

معادله اساسی constitutiv eq.

نیوتنی

$$\boxed{\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}$$

رابطه خطی

سیال نیوتنی

سیال استوکسی ←

فرم سه بعدی قانون لزجت نیوتن

3 سال پیش ← سؤال امتحان بوده

سال 89 : در یک جریان دو بعدی مؤلفه‌های بردار سرعت به صورت روابط زیر داده شده‌اند. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد تنش نرمال صحیح درست است؟ (سیال از نوع نیوتنی است)

اگر نگه سیال از چه نوعی است باید بگیم نمی‌توان تعریف کرد.

$$\begin{cases} u = 2xy \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$$

حل: چون سیال نیوتنی است.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$u_1 \to u$ $\quad x_1 \to x$

$u_2 \to v$ $\quad x_2 \to y$

$u_3 \to w$ $\quad x_3 \to z$

کارتزین داده ←

اگر استوانه‌ای بود $\begin{cases} x_1 \to r \\ \theta \to z \end{cases}$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

⇓

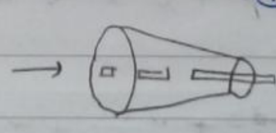
تنش های ویسکوز نرمال (عمودی)

↓

چرا به نرمال داده

↓

تغییر شکل طولی



چون سرعت تغییر کند.

المان داده شده کش آمده ← بخاطر تنش‌های نرمال دارد

زوایا تغییر نمی‌کند)

اگر غیر قابل تراکم بود یک سمت کش می‌آید و از سمت دیگر کم می‌شد.

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

→ مثل جریان کوئت
صفحه بالایی حرکت دارد
پروفیل سرعت هم $u(y)=\frac{U}{H}y$ است
الان در نظر بگیرید هر جزء در حال تغییر شکل چون
لایه بالا سرعت بیشتری دارد. مثلا ... می‌شود.

سیال نیوتنی
⇓
تنش های برشی ویسکوز
⇓
تغییر شکل زاویه‌ای

خصوصیت سیال نیوتنی ← تنش های τ دو به دو باهم مساوی اند
و لذا ۹ تا ترم تنش، 6 تا مستقل داریم و 3 تاش 2 به 2 باهم مساویند

حل این مثال

$$\begin{cases} u=2xy \\ v=x^2-y^2 \end{cases}$$

الف) $2\mu y$
ب) $4\mu x$ ✓
ج) $2\mu(y-x)$
د) $2\mu(x-y)$

$$\tau_{xy}=\mu\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{2x}+\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{2x}\right)\longrightarrow \tau_{xy}=4\mu x$$

اگر τ ها از فرمول ☆☆ در ☆ قرار دهیم به معادله زیر می‌رسیم.
☆ خیلی کلی است ولی معادله زیر یک سری قید دارد

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^2\vec{V}-\rho\hat{g}}$$

معادلات N - S
N → Navier
S → stokes

← اساس کار سیالات پیشرفته است

این جمله شتاب ثقل خطی را هم نیست

این برای ما مهم است / دیده و ایرادی ندهد

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\nabla\vec{p}+\mu\nabla^2\vec{V}-\rho\hat{g}$$

x-momentum:
$$\rho\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{شتاب زمانی}}+\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{شتاب جا به جایی}}\right)=-\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{ترم فشار}}+\underbrace{\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}_{\text{ترم های لزجت}}-\underbrace{\rho\hat{g}}_{\text{ترم ثقل}}$$

y - " " " ———
z - " " " ———

سؤال هایی که از نویر - استوکس دارند بیشتر کیفی است چون محاسبات سخت است.

محدودیات معادلات N-S :

* ① فقط برای سیالات نیوتنی قابل استفاده هستند

② در این معادلات μ و ρ می‌توانند متغیر باشند. (خواص سیال) — در بعضی مسائل مثل شناورها دریایی کشش سطحی هم ممکن است ظاهر شود ولی از اینجا صرف نظر می‌کنیم

معادله حالت — قابل تراکم — چرا که تغییر کرد معمولاً باید ما هم تغییر دهیم

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla \vec{P} + \mu \nabla^2 \vec{V} - \rho \vec{g}$$

در این شکل فرض شده است که μ ثابت است. (ویسکوزیته دینامیکی)

④ اگر متغیر بود

فرم دیفرانسیلی معادله انرژی
+
معادله حالت
+
پیوستگی جرم.

اگر μ ثابت نبود

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \cdots\right)$$

می‌آید داخل

قبلاً گفتیم μ مختص جریان آرام است ولی به حدود 3 دقت کنید (نگو تناقض هم دارد)

③ این معادلات هم برای جریان آرام و هم درهم صادق است!

$u \rightarrow \bar{u} + u'(t)$

$v \rightarrow \bar{v} + v'$

$w \rightarrow \bar{w} + w'$

$P \rightarrow \bar{P} + P'$

رینولدز معادلات را برحسب مقدار میانگین نوشت. یک سری تنش هایی ظاهر می‌شود (تنش های رینولدز، ظاهری، درهمی)

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right) - \rho g_x$$

$$-\rho u'v' - \rho u'w' - \rho u'^2$$

تنش های رینولدز
ظاهری
درهمی

Exact solutions (سؤال کنکور بوده) ④ این معادلات در حالت کلی به صورت تحلیلی قابل حل نیستند

⑤ این معادلات دارای حل های چندگانه است (حل منحصر به فرد ندارند) (هر معادله دیفرانسیل

معادلات N-S در حالت کلی قابل حل نیستند و تعداد حل ها خیلی کم است

غیر خطی بیش از یک حل دارد) ولی طبیعت فقط یکی را تأیید می کند!

مثلاً آقای ... رسید، تا یک Re یک حل ... دیگر!!

فرم های خاص معادلات N-S :

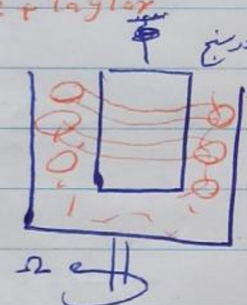
تقریبات معادلات N-S : ← بیشتر در مهندسی شیمی

Unique

① تقریب استوکس (تقریب جریان خزشی) ← معادلات استوکس ← خطی ←

• از کلیه ترم های اینرسی جابه جایی (مکانی) در مقابل ترم های لزجت صرف نظر می شود.

Couette + Taylor



v_θ
v_z
v_r

استوانه داخلی ساکن است و گشتاورسنج وصل است.

استوانه بیرونی را می چرخد.

گشتاور را اندازه می گیرد ← قطر داخلی / قطر خارجی ✓ μ

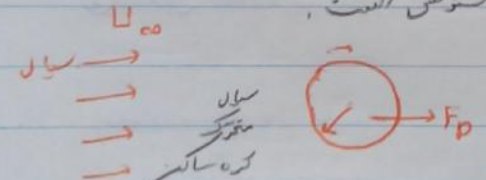
جریان ثانویه ایجاد می شود (vortex) $Re \geq (Re)_{cr}$

در حالی که قبلاً فقط مؤلفه های سرعت الان حالت r و z هم پیدا کند.

$\bar{v}_0$ $\bar{v}_z$ $\bar{v}_r$

بعد vortex ها شروع پیدا کنند هر چی Re را بیشتر کنیم به جایی می رسیم که درهم می شود

★ همه این اتفاقات به دلیل ترم اینرسی است. اگر ترم اینرسی را برداریم معادلات N-S خطی می شود قابل حل است. معادلاتی که به دست می آید به آن معادلات استوکس است.



$Re << 1$

جریان خزشی در اطراف کره:

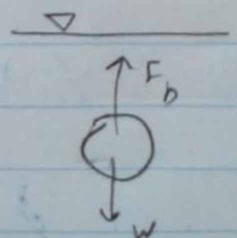
$$(F_D)_{کل} = 3\pi \mu U_\infty d$$

تا زمانی که $Re \leq 0.5$ ←
با آزمایش هم اثبات

$E = mc^2$

اگر $Re > 0.5$ ترم های اینرسی خود را ظاهر می کنند.

یک روش برای اندازه گیری μ :



$\mu = ?$

سیال ساکن، کره متحرک (شناور سنگ)

(از اثر شناوری صرف نظر می کنیم)

$$(F_D)_{کل} = 3\pi \mu U_\infty d = W \longrightarrow \mu ✓$$

viscometer

Falling Ball viscometer

تقریب استوکس ⟸ تقریب در رینولدزهای کم $\quad Re = \dfrac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی لزجت}} \ll 1$

بیشتر مهندسی شیمی

• تقریبات مورد استفاده در رشته مهندسی مکانیک ⟸ تقریب در رینولدزهای بسیار بالا

1) تقریب اولر

2) تقریب پرانتل (لایه مرزی)

در رشته مکانیک: $Re \to 10^6$ تا 10^9 است

(عدد رینولدز خیلی بزرگه

یا به دلیل زیاد بودن V (موشک)

یا زیاد بودن l (کشتی نفتکش)

یا ν خیلی کم است (سیال ما هوا یا آب)

$Re = \frac{Vl}{\nu} = 10^9$

Re ها در ناحیه ای اند که ما نمی توانیم از ترم اینرسی چشم پوشی کنیم ولی از ترم لزجت صرف نظر کنیم.

تقریب اولر: + فرض ایده آل بودن سیال (غیرقابل تراکم است ، Re هم که گفتیم ∞)

از کلیه ترم های لزجت در مقابل ترم های اینرسی صرف نظر می شود. یعنی معادله‌ای که داریم ما

به طور default فرض ما بر این است که نیروی drag را می خواهیم صرف نظر کنیم آیا درسته؟!

⟸ جریان ایده آل (جریان غیرلزج و غیرقابل تراکم)

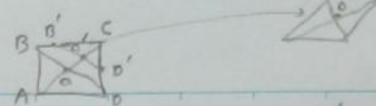
• تقریب پرانتل (لایه مرزی) ← جلسه آینده

از برخی از ترم های لزجت در مقابل ترم های اینرسی صرف نظر کنیم.

معادله اولر هم برای سیال تراکم پذیر هم غیرقابل تراکم بود.

تئوری جریان ایده آل ≡ تئوری جریان پتانسیل ≡ تئوری جریان غیرچرخشی

• جریان غیرچرخشی
• معادله سرکولاسیون ۳
• تعریف نیروی لیفت و درگ
• جریان ایده آل در اطراف استوانه (جریان پتانسیل)
• شاهکار جریان پتانسیل
• پارادوکس دالامبر



جریان غیرچرخشی؟

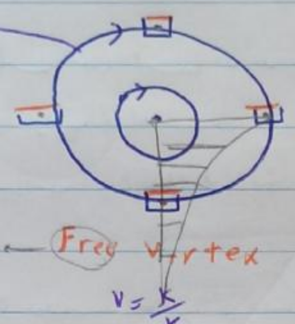
$\boxed{\nabla \times \vec{V} = 0}$

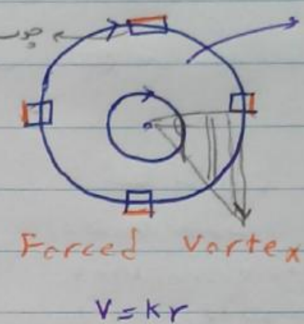
- جریان غیرچرخشی به جریانی گفته می‌شود که در آن ذرات سیال حول مرکز ثقل خود نچرخند.

Vortex

فقط مرکز در راستا خود حرکت کند.

مرکز المان جابجا شده ولی زاویه‌اش تغییر نکند





ما در چرخیدن سیال دخیل نیستیم ← Free Vortex

$V = \frac{K}{r}$

دلیل شتاب کوریولیس یا عدم تقارن شکل هندسی

هرچه به مرکز نزدیک سرعت ↑

دور که شویم سرعت → 0

Forced Vortex

$V = Kr$

تشخیص چرخشی یا غیرچرخشی بودن: راه visual ← چوب پنبه

در مسائل

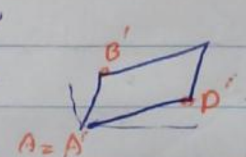
$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\xi}$$

بردار ورتیسیته Vorticity

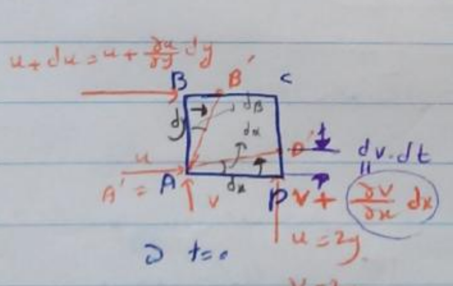
$$\boxed{\frac{1}{2}\vec{\xi} = \vec{\omega}}$$

بردار سرعت زاویه‌ای

المان سیال [illegible] در نظر بگیریم:



@ $t = t_0$



@ $t = 0$

$u = 2y$

$v = 2x$

ما سرعت زاویه‌ای دو ضلع عمود بر هم را می‌توانیم حساب کنیم.

$$tg\, d\alpha \simeq d\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx \cdot dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad AD$$

$$\dot{\beta} = - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad AB$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{V})$$

AB در جهت عکس ... است پس $\frac{\partial u}{\partial y}$ را در ⊖ ضرب می‌کنیم تا ⊕ شود

سرعت زاویه‌ای المان ABCD در جهت مثلثاتی به طور متوسط:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

به دلیل متوسط بودن

این چرخش حول z بود یعنی ... است
حول y و x هم خواهند بود...

مثال- کدام گزینه برای جریان غیر چرخشی درست است؟ (با مفاهیم آشنا باشیم)

الف) $\nabla \times \vec{V} = 0$ ✓

ب) $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ پیوستگی

ج) $\nabla^2 \vec{V} = 0$ N-S

د) $\vec{\nabla} \vec{V} = 0$ تنسور که اصلاً به کار ما نمی‌آید

به سرعت‌های زاویه‌ای که المان حول محور ... بالای سرش دارد. ممکنه هم تغییر زاویه هم تغییر طول داشته باشد ... آید. اگر اینجا u هم داشتیم ... $\frac{\partial v}{\partial u}$

مثال: در یک جریان دوبعدی مؤلفه‌های بردار سرعت به صورت روابط زیر داده شده‌اند.
کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد ورتیسیته این جریان درست است؟

$$\begin{cases} u = 2xy^2 \\ v = 2(x^2 - y^2) \end{cases}$$

طراح سؤال از ما ζ_z را خواسته

الف) $2x(1-y)$

ب) $4x(1-y)$ ✓

ج) $2y(y-1)$

د) $4y(y-1)$

$$\underbrace{\vec{\zeta}}_{\text{curve}} = \nabla \times \vec{V}$$

کرل بردار سرعت است

حل: $\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$

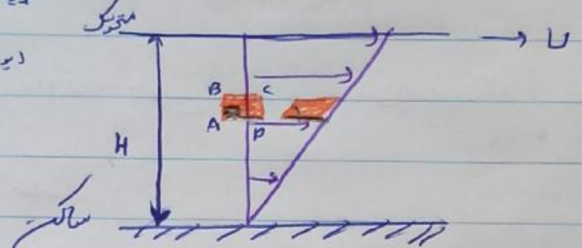
$$= \begin{cases} \zeta_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \zeta_y = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = ? \end{cases}$$

$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 4x - 4xy = 4x(1-y)$$

مثال ۳

جریان کوئت

(پروفیل سرعت خطی است)



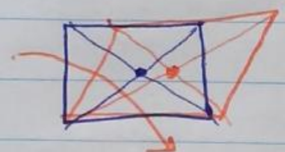
جریان کوئت جریان چرخشی است.

لایه بالا سرعت بیشتر از لایه پایین دارد

و از لایه پایین جلو می زند و دیگر زاویه ها

ثابت و مرکز المان عوض شده مرکز به وضوح

چرخیده



این که با چه سرعت زاویه ای چرخ حال محاسبه می خواهد.

حتی بدون محاسبه این است که در جهت عقربه های ساعت می چرخد

تمام ذرات سیال سرعت زاویه ای یکسان دارند

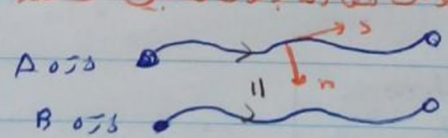
و حول مرکز خودشان می چرخند.

$$u(y) = \frac{U}{H} y$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{U}{2H}$$

اگر جریان غیرچرخشی باشد می توان نشان داد که ثابت برنولی برای تمام ذرات یکی است.

می توان معادله برنولی را بین دو نقطه دلخواه نوشت

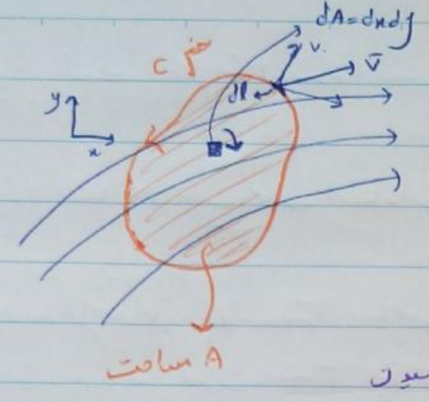


جمع ... ثابت A

ثابت B

اثبات کردیم جمع ... ثابت A و جمع ... ثابت B

معادله برنولی را در راستای n این بار می نویسیم تا از یک خط به خط دیگر برود



☆ معمولاً سؤال می آید مهم

مفهوم سرکولاسیون (گردش، چرخش ...)

همهٔ ذرات دارای ها در حالت کلی چرخشند

$$\boxed{\underset{\text{سرکولاسیون}}{\Gamma} = \int_A \vec{\xi}\cdot d\vec{A} = \int_A (\nabla\times\vec{V})\cdot d\vec{A}}$$

قضیهٔ استوکس $\int$ روی سطح بسته را به $\oint$ روی خط تبدیل می کند.
ساحت

V : روی خم :

با مؤلفهٔ عمودی از خط می گذرد ← دبی می دهد

← مماسی است که می چرخاند

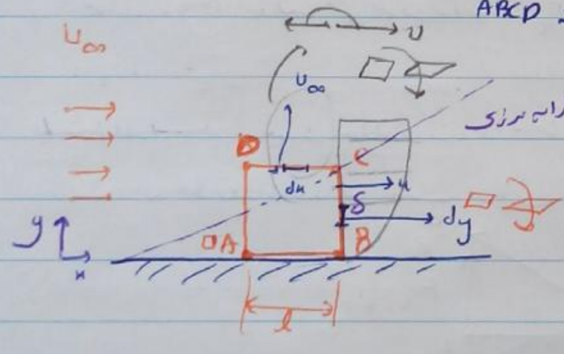
$$\Gamma = \oint V\cdot dl$$

همواره جهت مثبت

$V\cdot dL$ (dL ضرب در مؤلفهٔ سرعت مماس با مسیر)

مثال : با توجه به شکل مقابل ~~سرکولاسیون~~ حول مسیر بسته ABCD سرکولاسیون چقدر است ؟

$\Gamma_{ABCD} = ?$



زاویه برشی

البته δ در واقع همان ضخامت لایه مرزی است.

حل :

$$\Gamma = \int_{ABCD}\vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_{AB}\overset{0}{\vec{V}}\cdot d\vec{l} + \int_{BC}\cancel{\vec{V}\cdot d\vec{l}} + \underbrace{\int_{CD}\overset{U_0}{\vec{V}}\cdot dl}_{-U_\infty L} + \int_{DA}\cancel{\vec{V}\cdot d\vec{l}}$$

AB ← شرط عدم لغزش ؛ سرعت روی دیواره = 0

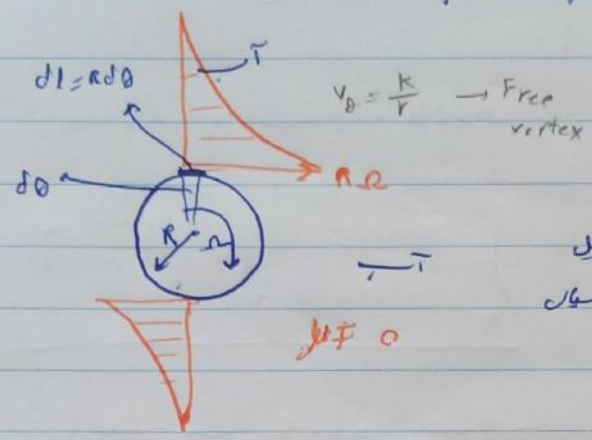
BC : $\cos 90 = 0$ ؛ $dl \to dx$ ؛ DA : $\cos 90 = 0$

$$\boxed{\Gamma_{ABCD} = -U_\infty L}$$

عوامل ایجاد چرخش ؟ ← ح ← در جریان سیالات غیرقابل تراکم ؟

اگر سیال قابل تراکم بود فشار هم و ... طوری که هم جهت عمودی باشد که فشار از مرکز ثقل رد نشود (ازکت با خارج)

مثال: با توجه به شکل مقابل سیرکولاسیون استوانه چقدر است؟



$v_\theta = \frac{k}{r} \rightarrow$ Free vortex

اینجا منحنی بسته c همان جداره استوانه است.

سیرکولاسیون به Ω مرتبط است، برای سیالات لزج به دلیل تنش برشی و شرط عدم لغزش Γ ایجاد کرد چون سیال چسبیده به ◯ شروع به حرکت می‌کند.

سیرکولاسیون جزو پدیده‌های لزج است.

$\Gamma_{c_{\text{استوانه}}} = ?$

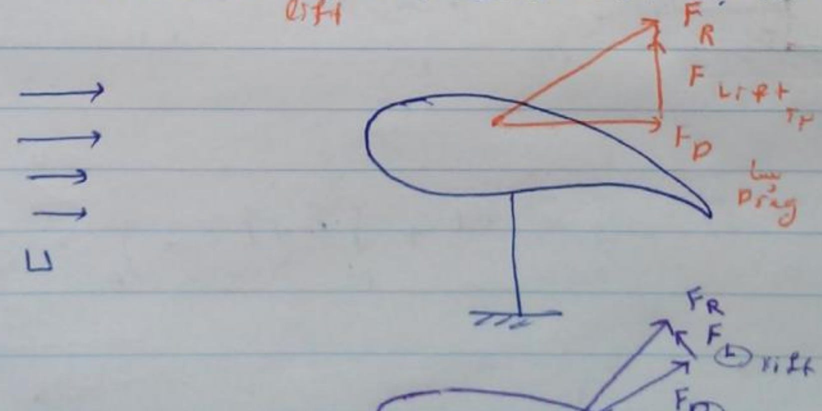
$$\Gamma_c = \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} R\Omega \cdot R\,d\theta = 2\pi R^2 \Omega$$

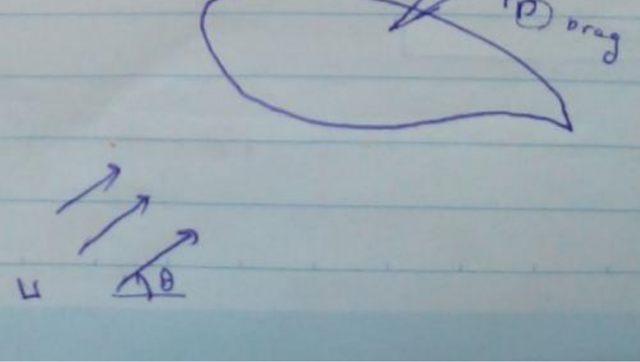
جریان پتانسیل:

نیروی drag مؤلفه افقی نیروی برآیند و F_R مؤلفه عمودی است ← این شکل به جهت جریان بستگی دارد.

تعریف درست

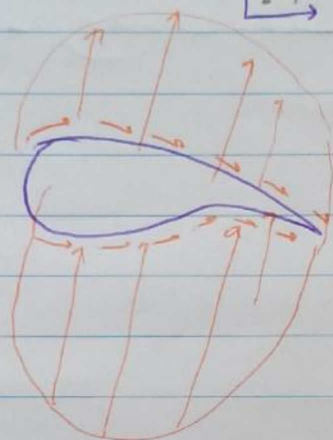
~~مؤلفه افقی~~ نیروی پسا (درگ) (Drag)، به مؤلفه‌ای از نیروی برآیند گفته می‌شود که در راستای جریان باشد و به مؤلفه عمود بر جهت جریان نیروی برا (لیفت) (lift) گفته می‌شود.





بخش جریان خارجی ← هدف محاسبه F_D و F_L (ناشی از تنش برشی و فشار)

در به وجود آمدن F_L, F_D

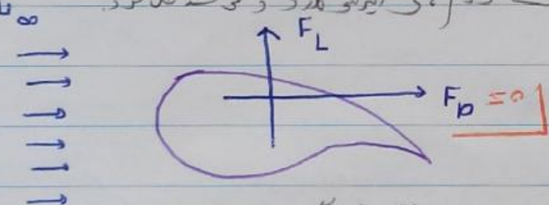


هم توزیع فشار و هم توزیع تنش دخیل هستند

★ محاسبه‌ی F_D و F_L برای یک ایرفویل :

نمی‌توانستند معادلات N-S را حل کنند چون Re بالا است و ترم‌های اینرسی دارد و نمی‌شد حل کرد.

برای این، هوا را داریم و $\mu \simeq 0$ است.



→ چون $\mu \simeq 0$ پس $F_D = 0$ است

حال آیا F_L را می‌توان حساب کرد؟

تنش برشی دیگر درنظر نمی‌گیریم

هوا $\mu \simeq 0$ → 1) جریان غیرچرخشی

$M << 0.3$ → 2) جریان غیرقابل تراکم

→ سیال ایده‌آل

F_L در هواپیما خیلی مهم بود

با استفاده از تئوری جریان ایده‌آل F_L / بود با F_D کنترل می‌شد که ۱۰٪ تا ۲۰٪

غیرچرخشی $\nabla \times \vec{V} = 0$ & $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$ (اتحاد ریاضی) $\xrightarrow[\text{(curl گرادیان اسکالر = 0)}]{\text{با توجه به اینکه}}$ $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$

غیرقابل تراکم $\nabla \cdot \vec{V} = 0$

در جریان غیرچرخشی می‌توان بردار سرعت را به یک تابع اسکالر به صورت رابطه زیر نسبت داد :

$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$ ← تابع پتانسیل سرعت

$\nabla \cdot \vec{\nabla}\phi = 0$

$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$ معادله‌ی حاکم بر جریان ایده‌آل

$\phi \to \vec{V} \xrightarrow{\text{برنولی}}$ میدان فشار $\to (F_L)_p$

جریان (مشتق) پتانسیل

در ایرفویل F_L ناشی از نیروی فشاری است و تنش برشی ~0 است.

سؤال از پتانسیل زیاد:

مثال: در یک جریان ۲ بعدی مؤلفه‌های بردار سرعت به صورت روابط زیر داده شده‌اند. تابع پتانسیل این جریان کدام چه معادله‌ای است؟

$$\begin{cases} u = 2x \\ v = 2y \end{cases} \qquad \varphi(x,y) = ?$$

الف) $2xy$

ب) x^2+y^2 ✓

ج) x^2y^2

د) این جریان φ ندارد

★ شرط وجود φ غیرچرخشی بودن جریان است.

حل $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}\right) = 0 \longrightarrow$ غیرچرخشی $\longrightarrow$ φ دارد

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi \Rightarrow \begin{cases} u = \partial\varphi/\partial x \\ v = \partial\varphi/\partial y \end{cases} \quad ★$$

راه ۱: ~~[illegible]~~ چک کردن گزینه‌ها در رابطه ★

راه ۲:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x \longrightarrow \varphi(x,y) = x^2 + \underbrace{f(y)}_{\text{ثابت انتگرال}}$$

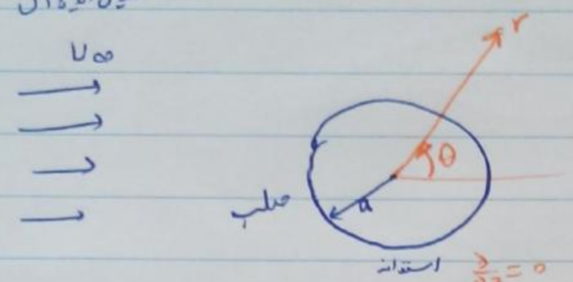
$$\rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y} = f'(y) = v = 2y \longrightarrow f(y) = y^2 + c$$

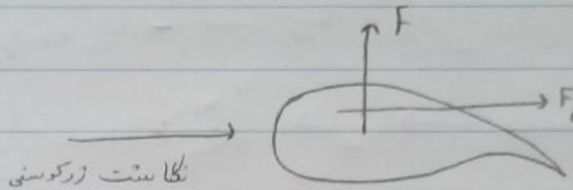
$$\Longrightarrow \varphi(x,y) = x^2+y^2+\cancel{c}$$ دلبخواه

! هیچوقت تو مدل پتانسیل دیگه Drag نداریم = پارادوکس دالامبر

مثال: جریان ایده‌آل در اطراف یک استوانه صلب به شعاع a و طول نامتناهی. هدف ۱) به دست آوردن توزیع فشار روی سطح استوانه $P_c(\theta) = 0$ هدف ۲) به دست آوردن F_L و F_D

سیال ایده آل : ویسکوزیته = ۰ و دانسیته ثابت





استوانه $(r, \theta, \cancel{z})$ ⟵ قطبی ⟵ جریان دو بعدی

دایره را با نگاشت هندسی به نام نگاشت ژوکوسکی به ایرفویل تبدیل کرد و از روی نیروهای وارد بر استوانه

بشان F_L ، ایرفویل را بخوانید. این ایرفویل الان استفاده نمی شود چون F_D زیادی دارد

ایرفویل خوب ایرفویلی است که $F_{L\,max}$ و $F_{D\,min}$ داشته باشد.

$$\frac{(F_L)_{max}}{(F_D)_{min}}$$

نقطه شروع : معادله دیفرانسیل حاکم : معادله لاپلاس $\nabla^2\varphi = 0$

دستگاه مختصات مناسب : استوانه ای

استوانه تابعی است در جهت z طوری چیزی عوض نمی شود z جهت خنثی است پس دستگاه مختصات ما

قطبی است و دو بعدی

قطبی

جریان 2 بعدی ⟵
$$\boxed{\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \end{aligned}}$$

معادله لاپلاس در دستگاه مختصات قطبی

$$\nabla^2\varphi = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0 \;*$$

(اگر بعد $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ می داشتیم! ~~استوانه ای~~)

فرض کنید :

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\, F(\theta) \quad \text{جدایی متغیرها}$$

از شرایط مرزی

معادله دیفرانسیل برای حل کردن نیاز به شرایط مرزی دارد :

(استوانه صلب)

شرط نفوذ ناپذیری دیواره @ $r = a$ و $v_r = 0 \longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \Longrightarrow$ دیواره نمی تواند سوراخ کند بعد هوا!

نکته : شرط عدم لغزش در مورد سیال غیر لزج بی معنا است. پس ما اینجا نمی توانیم بگیریم $v_r = 0$ $v_\theta = 0$

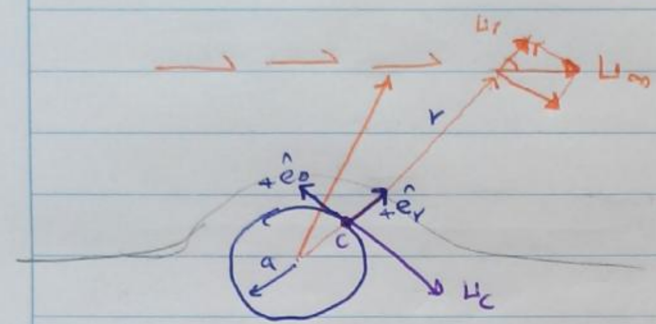
در هر سیالی که حرکت می کند تا جایی است اثر لزجت را ندارد باید استوانه ای است ! در جریان دوبعدی حفظ کنند.

در نزدیکی

(درواقع ساختار استوانه الا باشد !!)

$@\ r \to \infty \quad , \quad V_r \longrightarrow U_\infty \cos\theta$

$V_\theta \longrightarrow -U_\infty \sin\theta$



حالتیکه این نقطه‌ها در

$$\boxed{\varphi(r,\theta) = U_\infty r\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta}$$

میدان سرعت در اطراف استوانه

$$\begin{cases} V_r = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = U_\infty\left(1-\dfrac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \\[2ex] V_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -U_\infty\left(1+\dfrac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta \end{cases}$$

روی سطح استوانه $r=a$

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = -2U_\infty\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\underset{U_c(\theta)}{U_c} = \sqrt{V_r^2+V_\theta^2} = 2U_\infty\sin\theta}$$

معادلهٔ برنولی را بین ۲ نقطه‌ی ۱ و ۲ می‌توان نوشت :

ترم z در معادله با سایر ترم‌ها قابل صرف‌نظر است.

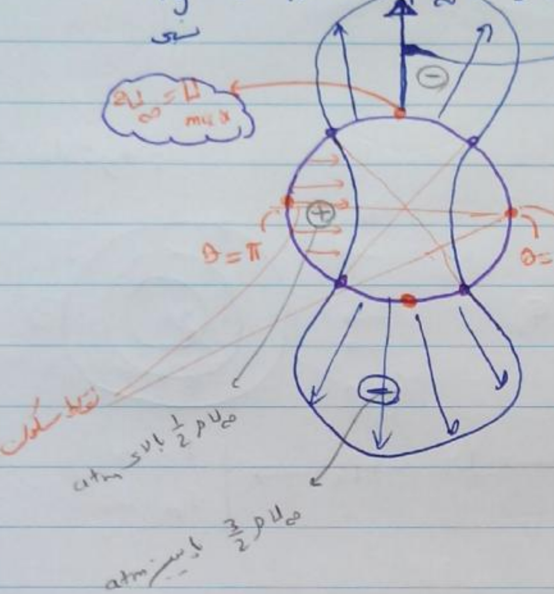
$$P_c + \frac{1}{2}\rho U_c^2 + \cancel{\gamma z_c} = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + \cancel{\gamma z_\infty}$$

$$\boxed{P_c(\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left(1-4\sin^2\theta\right)}$$ توزیع فشار در اطراف استوانه

رسم توزیع فشار (توزیع فشار نسبی P_g):

$$P_g = P_c(\theta) - P_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 (1 - 4\sin^2\theta)$$

نسبی



$P_c = P_\infty - \frac{3}{2}\rho U_\infty^2$

نقاط سکون

روی سطح $U_c = 0 \rightarrow \sin\theta = 0 \rightarrow \theta = 0,\ \theta = \pi$

P_g max

$P_{max} = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$

$U = 0$

4 نقطه روی سطح استوانه که P_∞ دارند

فشار در نقاط سکون از P_∞ بیشتر

است به اندازه $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$

atm بالای $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$

atm پایین $\frac{3}{2}\rho U_\infty^2$

جایی که سرعت min ← فشار max

سرعت max ← فشار min

شکل peanut بادام زمینی دکاملا متقارن

در جریان پتانسیل

$$F_D = \int_0^{2\pi} (p_c \cdot dA)_x = 0$$

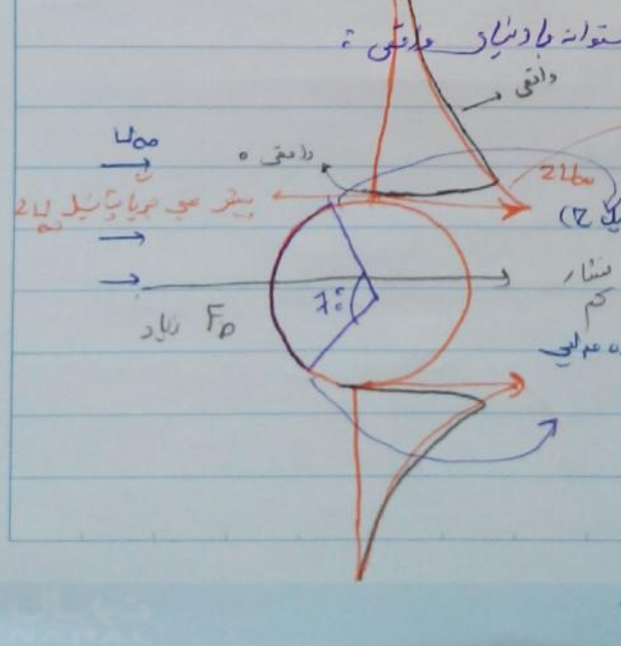
$$F_L = \int_0^{2\pi} (p_c \cdot dA)_y = 0$$

چون متقارن و منحنی است

$F_D = 0$

$F_L = 0$

مقایسه پیش بینی جریان ایده آل در اطراف استوانه با دنیای واقعی:



توزیع سرعت:

در نزدیکی دیواره ← فرق می‌کنند

اختلاف در لایه نازک نزدیک دیواره (لایه مرزی) به دلیل ?

توزیع فشار:

تا زاویه $60-70°$ خوب ولی بعد به دلیل جدایش جریان

با دنیای واقعی فاصله می‌گیرد!

سیال لزج

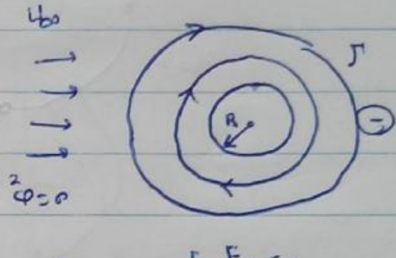
$$\tau_w = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)$$

کوچک — بزرگ

جلسه ۸:

جریان ایده‌آل در اطراف استوانه همراه با گردابه آزاد

$$\nabla^2 \varphi_c = 0, \quad \nabla^2 \varphi_v = 0 \longleftrightarrow \varphi_3 = \varphi_c + \varphi_v$$



$$\varphi_c = U_\infty r \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos\theta \longrightarrow V_r, V_\theta \longrightarrow U_c \longrightarrow P_c \longrightarrow \begin{cases} F_L = 0 \\ F_D = 0 \end{cases}$$

حل با روش جدایی متغیر

معادله لاپلاس معادله خطی است.

$$\varphi_{کل} = U_\infty r\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

تابع پتانسیل جریان دسیکه زینه ندارد Drag

پارادوکس دالامبر $F_D = 0$

$$V_r, V_\theta \longrightarrow U_c(\theta) \xrightarrow{\text{برنولی}} P_c(\theta) \xrightarrow{\text{انتگرال}} \begin{cases} F_D = 0 \\ F_L = \rho_\infty U_\infty \Gamma L \neq 0 \end{cases}$$

طول

بلازیوس

خلأ — لاپلاس — پتانسیل — سرعت روی سیلندر — فشار روی سیلندر

(سرکولاسیون به خاطر لزجت سیال به وجود آمده)

★ جریان پتانسیل به درستی نیروی لیفت به سرکولاسیون (Γ) ارتباط می‌دهد.

غیر چرخشی

حالا امروز: در اطراف استوانه vortex از نوع چرخشی داشته باشیم

خود پدیده‌ای لزج است و در اثر شرط عدم لغزش سیال با استوانه می‌چرخد.

تابع پتانسیل کل جمع تابع پتانسیل vortex و استوانه

اینجا $\nabla^2 \varphi_{کل} = 0$ برای اینکه $\varphi_{کل}$ قابل استفاده است

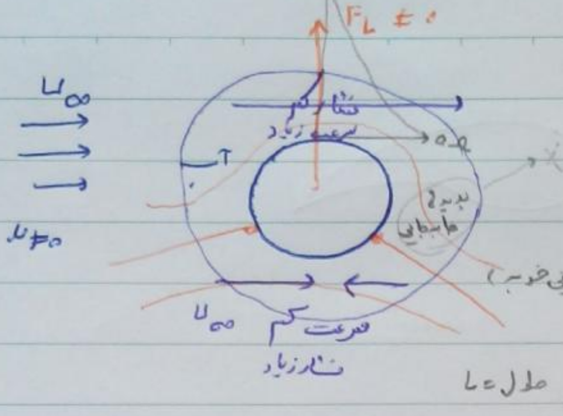
$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} a\Omega \cdot a\,d\theta = 2\pi a^2 \Omega$$

$F_L \neq 0$ $\quad V_\theta = \frac{K}{r}$

سرعت بالا زیاد ← فشار کم

سرعت پایین کم ← فشار زیاد.

← اختلاف فشار بالا و پایین $\xrightarrow{\text{ایجاد}}$ F_L



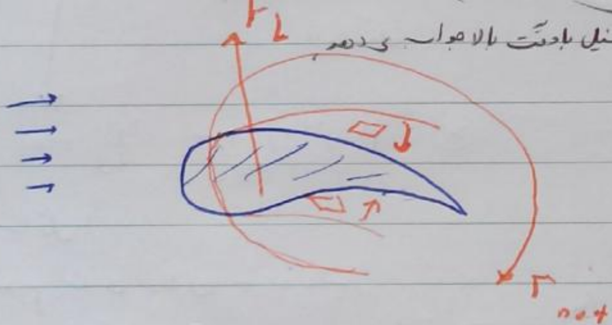
$$F_L = \lambda \, \rho U_\infty (2\pi a^2 \Omega) L$$

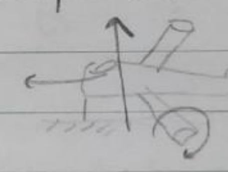
ضریب

مقدار نیروی F_L کمتر از مقدار واقعی است ولی با پارامتر λ ضریب تشخیص می‌دهد. (بیشتر بحث از نظر کیفی خوب)

طول $= L$

در هواپیما ما نمی‌توانیم استوانه دوار بگذاریم (در دنیای واقعی از ایرفویل استفاده می‌شود) و F_L می‌دهد با min drag
ولی در استوانه دوار drag بالا بود
سیرکولاسیون در ایرفویل به دلیل عدم تقارن جریان ایجاد می‌شود (سیرکولاسیون بالا و پایین یکی نیست سیرکولاسیون net به ما نیروی lift را می‌دهد)
ویسکوزیته هوا کم است و تئوری پتانسیل با دقت بالا جواب می‌دهد





درگ کم باعث می‌شود هواپیما آسمان بماند
چرخش باعث بلند شدن هواپیما می‌شود

بخش بعد؛

تئوری لایه‌های مرزی (تقریب پرانتل)

هدف: محاسبه نیروی F_D

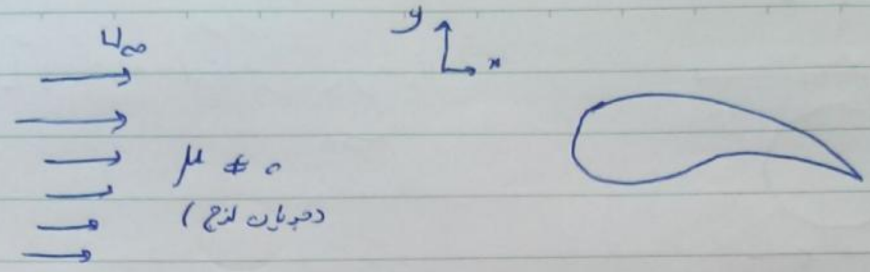
فرضیات: اینها فرضیات اساسی نیست و هر کدام را برداریم باز مسئله قابل حل است.

1. جریان لزج و سیال نیوتنی
2. سیال غیر قابل تراکم
3. جریان ایزوترم
4. جریان آرام
5. جریان دو بعدی
6. جریان دائم
7. از نیروی ثقل صرف نظر کنیم (در محاسبه با سایر نیروها قاطی نشود...)

ویسکوزیته کم هوا منجر نمی‌شود لزوماً τ کم شود چون ممکنه $\frac{du}{dy}$ زیاد باشد!

در هواپیما طول بال زیاد شد ← جریان 2 بعدی می‌گیریم

هواپیما با سرعت ثابت حرکت کند ← جریان دائم



$\boxed{\tau_w} = \mu \frac{du}{dy}$ → بزرگ $(F_D)_v \neq 0$

هوا $\mu \simeq 0$ — بزرگ

دستگاه معادلات حاکم (معادلات N-S با فرضیات قبل)

Ⓘ

معادلات حاکم

سه معادله سه مجهول

$\begin{cases} u(x,y) \to \tau_w \\ v(x,y) \\ p(x,y) \end{cases}$

$$x: \quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$y: \quad u\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

پیوستگی

$\frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{U}{L}$ ، $\frac{\partial v}{\partial y} \to \frac{?}{\delta}$

هم order

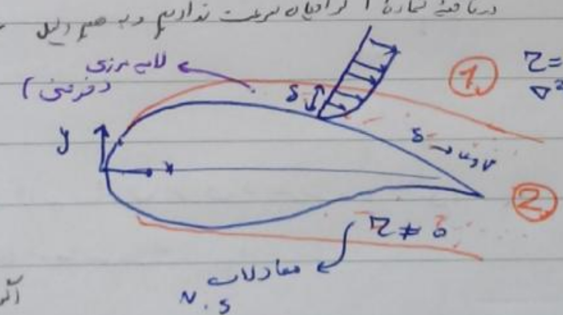
هم زور

هیچ کدام ثابت نیست سه هم order

$$\frac{\partial p}{\partial y} \simeq 0 \to p = p(y) : ⊛$$

ایدهٔ پرانتل:

تقسیم بندی جریان به دو ناحیه.



① $\tau = 0$, $\nabla^2\phi = 0$

در ناحیهٔ شمارهٔ ۱ گرادیان سرعت نداریم و به همین دلیل $\tau = 0$ و جریان غیر چرخشی است غیر قابل تراکم هم است ← جریان ایده‌آل ← حل معادلهٔ لاپلاس

اگر سیال تراکم پذیر باشد در ناحیهٔ ۱ معادلهٔ اویلر حل می‌شود که بهتر از معادلات N-S است.

+ فرض اساسی:

ناحیهٔ شمارهٔ ② بسیار نازک است. ← از نوع δ

نسبت اینکه کدام بزرگ کدام کوچک است

نازک بودن نسبی است نسبت به وتر ایرفویل

در 2 به دلیل شرط عدم لغزش $\tau \neq 0$ و باید معادلات N-S حل شود.

روش پرانتل برای ساده سازی معادلات N-S:

↓

روش مرتبهٔ بزرگی

⊛ در ناحیهٔ 1 از حل اویلر یا لاپلاس سه فشار به دست بیاریم فشار مرز به دست بیاید بعد دیگر این فشار در طول لایه مرزی تغییر نمی‌کند و معادل همان فشار روی سطح است.

$u = O(U_\infty)$

$x = O(L)$

$y = O(\delta)$

$v = O(U_\infty \frac{\delta}{L})$

فرض اساسی $\boxed{\frac{\delta}{L} \ll 1} \longrightarrow \boxed{v \ll u}$ ★

ترم های لزجت	ترم های اینرسی
$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \longrightarrow \frac{U_\infty}{L^2}$	$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U_\infty^2}{L}$
$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \longrightarrow \frac{U_\infty}{\delta^2}$	$v \frac{\partial u}{\partial y} \sim$
$\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} \longrightarrow \frac{U_\infty \frac{\delta}{L}}{L^2} = \frac{U_\infty \delta}{L^3}$	$u \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} \sim \frac{U_\infty^2}{L} \cdot \frac{\delta}{L}$
$\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} \longrightarrow \frac{U_\infty \frac{\delta}{L}}{\delta^2} = \frac{U_\infty}{\delta L}$	$v \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} \sim \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\delta}{L}$

برنولی

$$\text{I} \Longrightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

دو معادله
چند مجهول؟
2 تا
u و v

و چون P جزو مجهولات نیست؟

★ فرض بر این است که P قبل از حل معادله $\nabla^2 \phi = 0$ در ناحیه 1 به دست آمده است،
در ناحیه خارج مرزی فشار ناشی از آن.

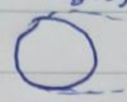
مثال: جریان بلازیوس ≡ (لایه مرزی آرام، دائم، غیرقابل تراکم، ایزوترم) دو بعدی، بدون
ثقل، یک سیال نیوتنی بر بالای یک صفحه تخت ساکن با لبه های تیز از نوع نیمه متناهی یا
معلق / نامتناهی

که در معادلات استفاده می شود و بعد آن می خواهیم
چک کنیم با نتایج آزمایش لازم است.

$p(r,\theta)$

$P_c(\theta)$

$\tau_\theta(\theta)$



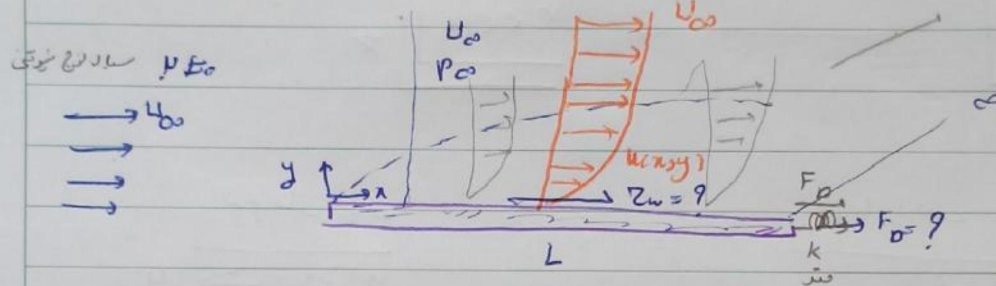
تنش برشی درگ دارد

با محاسبات Drag را → به دست می‌آورد.

آنو  (جدایی داشت)

دیگه از روش

تشابهی نمیشه رفت



طول صفحه L

ولی عرض (z) بی‌نهایت است پس

صفحه نیمه متناهی شده $\frac{\partial}{\partial z}=0$

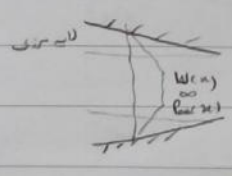
استوانه، ایرفویل، کانال همگرا، کانال واگرا گرادیان فشار داریم ولی در صفحه تخت بلازیوس گرادیان فشار نداریم

↓ خارج لایه مرزی همه جا P_∞ است و ثابت

↓ اینجا درون گرادیان فشار داریم.

↓ خارج لایه مرزی $P(x)$ است

حتی پروفیل سرعت عوض می‌شود و تشابه نداریم.



★ برای جریان 2 بعدی

تغییر متغیر

2 معادله 2 مجهول

$$\left\{\begin{array}{l} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{array}\right\}$$

$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$ پیوستگی →

یک مجهول (ψ)

یک معادله می‌شود ولی درجه معادله یکی بالا می‌رود.

$\rightarrow u(x,y)\rightarrow\tau_w$ ✓

$v(x,y)$

→ یک معادله دیفرانسیل برحسب ψ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $\psi(x,y)$

$\tau_w \leftarrow u$

v

$$\frac{u(x,y)}{U_\infty}=f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

پروفیل‌های متشابه

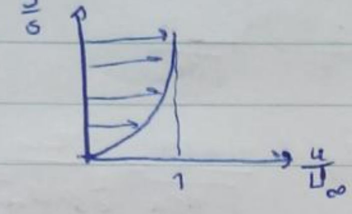
روش حل تشابهی

پروفیل سرعت در سرتاسر صفحه یکی ~~است~~

نیست ولی اگر بی‌بعد کنیم روی هم می‌افتند

ولی شبیه هم‌اند.

هرچه در سمت جلو شیب کمتر می‌شود اول صفحه تنش بزرگتر است.



$$\tau_w(x) = 0.332\,\rho\,U_\infty^2 \Big/ \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}$$

ضریب اصطکاک پوسته‌ای

$$\boxed{C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}}} \quad ①$$

$\sqrt{Re_x}$ رینولدز موضعی

$$\boxed{\tau_w(x) = 0.332\,\rho\,U_\infty^2 \Big/ \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}}$$

$$\boxed{F_D = \int_0^L \tau \cdot dA = 0.664\,\rho\,U_\infty^2 A \Big/ \sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}}}$$

$$\boxed{C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A} = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}}}} \quad ②$$

Re_L رینولدز کل

آزمایش - تئوری $\pm 7\%$

$Re \gg 1$

@ $y = \delta$

$u = 0.99\,U_\infty$

$$\delta(x) = \frac{5x}{\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}} \longrightarrow \boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}}$$

4.99

$\frac{\delta}{x} \ll 1 \equiv Re_x \gg 1$

ترتیب در رینولدزهای این محدوده

فرض اساسی رینولد $\frac{\delta}{x}$ با فرض $Re_x \gg 1$ هم ارز قرار می‌گیرد.

* کاربرد فرمول‌های سه‌گانه بلازیوس : (بحث اصلی)

1) $$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

2) $$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

3) $$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}$$

F_D با A رابطهٔ مستقیم دارد.

$$F_D = 0.664\,\rho\,U_\infty^2 A \Big/ \sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}}$$

مساحت کل صفحه

بحث حاشیه‌ای :

1) نحوهٔ به دست آوردن ψ

مثال = در یک جریان دوبعدی میدان سرعت به صورت روابط زیر است تابع جریان ψ دارای چه معادله‌ای است ؟

$$\begin{cases} u = 2x \\ v = -2y \end{cases} \rightarrow \psi(x,y) = ?$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \rightarrow v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

رسم مناسب ψ ؟

اسم مناسب ← تابع جریان

اگر $\psi(x,y)$ را به دست آوردی به آن مقدار بده $c_1, c_2, \ldots$ ← خطوط جریان به دست می‌آید. مثلاً اگر ψ ← $x^2+y^2=c$ ⟸ خطوط جریان دوایر هم مرکز اند.

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = u\,dx - v\,dy$$

شرط φ : جریان غیرچرخشی

شرط وجود ψ :

$$0 = u\,dx - v\,dy$$

$$\rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi\ \text{ثابت}} = \frac{v}{u} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{خط جریان}}$$

$y(x)$

شرط وجود ψ :

۱) جریان باید دو بعدی باشد

۲) جریان باید غیر قابل تراکم باشد. برای ψ که جریان داشته باشد

حل مسئله :

$$u = 2x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow \psi(x, y) = 2xy + f(x)$$

$$v = -2y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2y - f'(x)$$

$$-2y = -2y - f'(x) \rightarrow f'(x) = 0$$

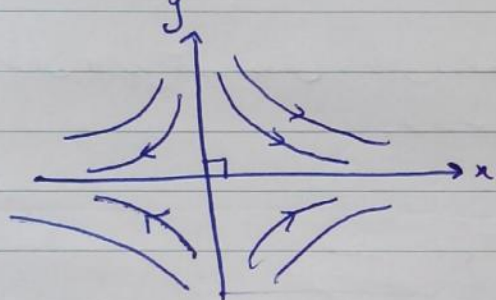
$$f(x) = c$$

$$\Rightarrow \psi(x, y) = 2xy + c$$

دلبخواه

$\underbrace{\quad}_{\text{معمولاً}} = 0$

شیب خطوط



شبیه جریان در خطوط گوشه دار

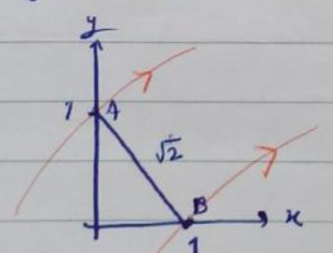
یا جریان وقتی دو جت به هم بخورند

(در نقاط سکون α)

89 =

در یک جریان دو بعدی غیر قابل تراکم تابع ψ به صورت زیر داده شده است. $\psi(x, y) = 3x^2y - y^2$

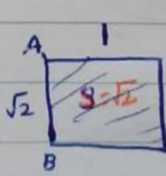
سرعت متوسط سیال روی خط AB چقدر است؟



عرض صفحه = واحد طول

سرعت را که روی خط نمی توان تعیین کرد روی صفحه است ولی

اینجا کمیتا = ۱



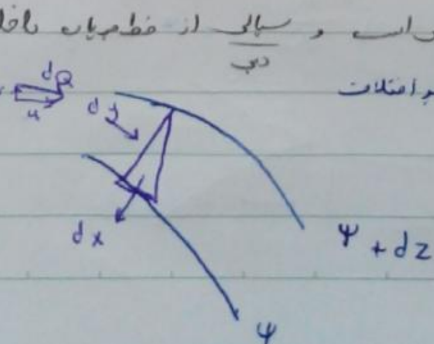
نیت حاشیه :

* سرعت همیشه به خط جریان مماس است و سیالی از خط جریان داخل یا خارج نمی شود.

دبی

ب) $\dot{Q}$ بین دو خط جریان (با فاصله زیاد) برابر اختلاف

ψ های این دو خط جریان است



$$dQ = \overset{\frac{\partial\psi}{\partial y}}{u}\,dy - \overset{-\frac{\partial\psi}{\partial x}}{v}\,dx$$

$$dQ = d\psi$$

$$Q_{1,2} = |\psi_2 - \psi_1|$$

حل مسئله : $\psi_A = -1$

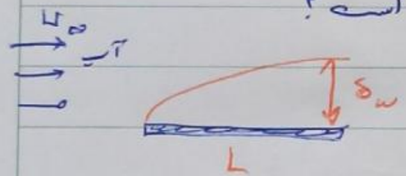
$\psi_B = 0$

☆ خاصیت مهم $\quad Q_{AB} = |\psi_B - \psi_A| = 1 \frac{m^3/s}{m}$

$$\frac{Q_{AB}}{S_{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{m}{s}$$

مثال: جریان بلازیوس آب و روغن در بالای دو صفحه به طول L با مطابق شکل در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد $\frac{\delta_o}{\delta_w} = ?$ درست است؟

آب و روغن هر دو نیوتنی
دانسیته تقریباً هم
ویسکوزیته فرق دارد.
سرعت یکسانی هم دارند

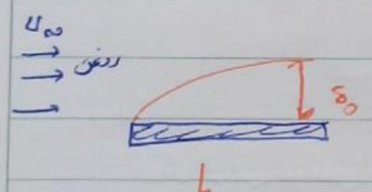


الف) <1

ب) >1

ج) $=1$

د) نمی‌توان نظر داد.



همه را گفته در انتهای صفحه است که یکسان‌اند و $(x = L)$
مثلا همه یکسان‌اند $\frac{5x}{\sqrt{u_\infty x}}$ یکسان دارند

$$\delta(x) = \frac{5x}{\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}}}$$

$$\rightarrow \delta(L) = \frac{5L}{\underbrace{\sqrt{\frac{u_\infty L}{\nu}}}_{\text{یکسان}}}$$

$$\left.\frac{\delta_o}{\delta_w}\right|_{x=L} = \frac{\sqrt{\nu_o}}{\sqrt{\nu_w}} = \sqrt{\frac{\nu_o}{\nu_w}} > 1$$

لایه مرزی ~~روغن~~ روغن ضخیم‌تر از آب است

$$\left.\begin{aligned} \rho_o &= \rho_w \\ \mu_o &\gg \mu_w \end{aligned}\right\} \longrightarrow \nu_o \gg \nu_w$$

مثال: به سؤال مسئله قبل با این فرض که به جای روغن هوا داده شده باشد پاسخ دهید. گزینه ب باز درسته

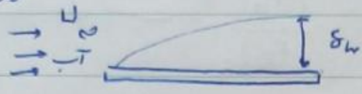
لایه مرزی هوا ضخیم‌تر از لایه مرزی آب است

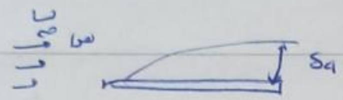
$\mu_w > \mu_a$ (آب)

(آب لزج‌تر است از هوا)

$\rho_w = 1000$

$\rho_a = 1.23$





اثرات لزجت هوا قوی‌تر از اثرات لزجت آب است

$$\frac{\delta_a}{\delta_w} = \sqrt{\frac{\nu_a}{\nu_w}} > 1$$

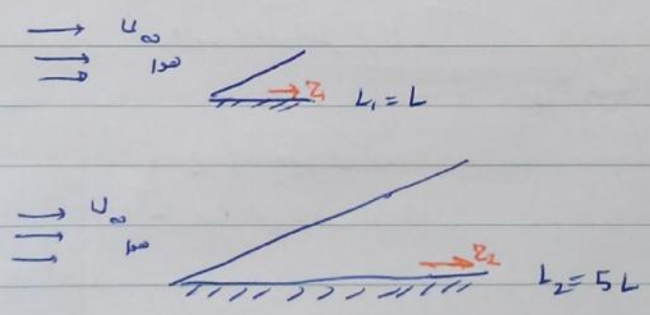
$$\frac{\mu_w}{\rho_w} \quad \frac{> \mu_a}{> \rho_a} \longrightarrow \nu_w < \nu_a$$

$$(\nu_a \simeq \nu_w)$$

★ ویسکوزیته سینماتیکی در شتابدار مهم است.

اگر شتاب مهم نباشد ← ویسکوزیته دینامیکی مهم باشد

مثال: جریان بلازیوس در بالای ۲ صفحه به طول L و $5L$ را مطابق شکل در نظر بگیرید. در هر دو سیال یکی و سرعت یکی باشد، نسبت $\frac{\tau_1}{\tau_2}\Big|$ در انتهای دو صفحه چقدر است؟



الف) $\sqrt{5}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

ج) 5

د) $\frac{1}{5}$

ج =

$\frac{\tau_1}{\tau_2}\Big|$ در انتهای دو صفحه $\longrightarrow$ $x = L$ یکی، $x = 5L$ در یکی

یکسان

$$\tau_w(x) = 0.332 \rho U_\infty^2 \Big/ \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \sqrt{5}$$

$x^{-\frac{1}{2}}$ ج ← تنش از افزایش طول در راستای طول ، کاهش می‌یابد ← ~~می‌شود~~

مثال : در مسئلهٔ قبل نسبت $\frac{F_1}{F_2}$ $\frac{(F_D)_1}{(F_D)_2}$ چقدر است ؟ (عرض هر دو صفحه 1m است)

الف) $\sqrt{5}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

ج) 5

د) $\frac{1}{5}$

ه) هیچکدام

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{(F_D)_1}{(F_D)_2}$$

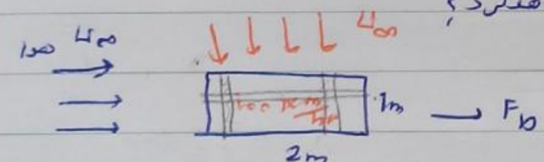
$$F = F_D = 0.664 \rho U_\infty^2 A \Big/ \sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{1}{5}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} < 1$$

سیال یکی است و سرعت یکی است .

از اول هم می‌توانستیم بگوییم باید کمتر از 1 شود ← $F_{D_1} < F_{D_2}$ ، تنش‌ها در 1 کوچک است ولی

مثال : جریان بلازیوس در بالای ورق به شکل مستطیل 1 مطابق شکل زیر در نظر بگیرید . فرض کنید در این حالت نیروی وارده بر صفحه برابر F_D باشد ، اگر جریان هوا از بالا به پایین باشد (با همان سرعت) ، نیروی درگ وارده بر صفحه چه تغییری خواهد کرد ؟



الف) افزایش می‌یابد

ب) کاهش می‌یابد

ج) تغییر نمی‌کند

د) نمی‌توان تعیین کرد

در دو صفحه نیرو یکسان وسط نازک است

$L = 2m$ از چپ به راست

$L = 1m$ از بالا به پایین

از چپ به راست که می‌آید تنش بزرگ در المان‌های کوچک ضرب می‌شوند

به آخر صفحه که می‌رسیم تنش خیلی کوچک می‌شود .

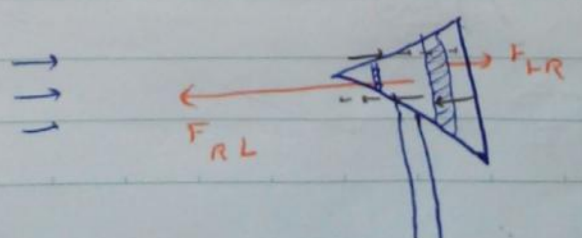
L در مخرج است ← F_D افزایش می‌یابد

از راست به چپ تنش برشی در المان بزرگ است از چپ به راست تنش کوچک در المان بزرگ است .

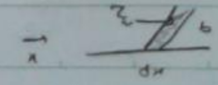
← نیروی بیشتر می‌شود . (نقش تنش بزرگ‌تر است چون روی المان بزرگ اثر می‌کند ← که این برتری می‌شود)

$$F_D = \int_0^L \tau_w (dx \times b)$$

$\tau_w = 0.332 \rho U_\infty^2 / \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}$



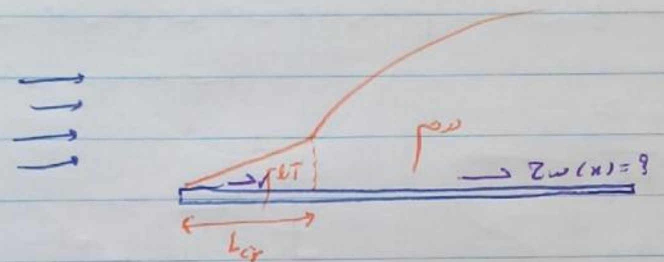
← L ظاهر می‌شود .



لایه مرزی درهم در بالای یک صفحهٔ تخت ساکن

↓ حل

روش انتگرال مومنتوم فون کارمن.



جریان در بالای یک صفحهٔ تخت تا لبه آرام می‌ماند از جایی به بعد درهم می‌شود.

$$(Re)_{cr} = \frac{U_\infty L}{\nu} \simeq 5 \times 10^5$$

تبدیل آرام به درهم $\longrightarrow L_{cr}$ ✓

ما تنش برشی را در آرام می‌دانیم چه شکلی است حال سؤال اینه که در درهم تنش برشی چه شکلی است؟ با استفاده از فون کارمن

$$\int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \nu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^\delta$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0$$

$$= \nu \left[\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\delta}}^{\,0} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} \right] = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — یکنواخت شده در آنجا — $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\tau_w}{\mu}$?

ادغام قضیهٔ leibnitz — مشتق جزئی را به ODE تبدیل می‌کند.

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} \underbrace{\frac{u(x,y)}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy}_{\theta} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} \Rightarrow \tau_w(x)$$ ✓

θ

$\delta = 0 ,\ x = 0$ — فرض می‌کنیم با این فرض که از اول صفحه جریان درهم بوده

3 مجهول θ، u و δ قابل تبدیل به هم

$\Rightarrow$ معادلهٔ MI momentum Integral — هم آرام، هم درهم

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}$$

مشکل پروفیل سرعت حدس زده می‌شود (انتخاب می‌شود)

در جریان آرام $\longleftarrow$ پروفیل سهموی حدس قبلاً

در درهم $\longleftarrow$ توانی (شبیه کار در لوله‌ها)

معادلهٔ MI تبدیل به معادله‌ای برحسب δ می‌گردد. (3 مجهول می‌شود یک مجهول)

$\Leftarrow \delta$ ✓ $\leftarrow \tau_w$ ✓

$$\frac{u}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \cdots$$

$$\frac{u}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad n = 7$$

با فرض $n=7$ فرمول ها بدست می آید.

فرمول های فون کارمن برای جریان درهم در بالای یک صفحه تخت ساکن :
(فرمول های نیمه تجربی)

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

$n=7$

$$\frac{\delta}{x} \doteq \frac{0.37}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

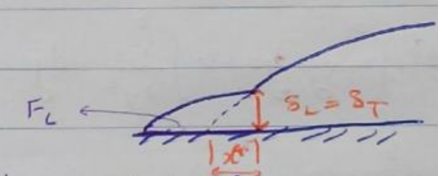
$$c_f = \frac{0.058}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

$$C_D = \frac{0.073}{\sqrt[5]{Re_L}}$$

صفحه صاف
(هیدرولیکی)
اگر صفحه زبر شد فرمول های تجربی لازم است

$5\times10^5 < Re_L < 10^7$

- این فرمولها با این فرض که لایه مرزی درهم از $x=0$ شروع می شود، نوشته شده است.



شروع مجازی فرمول های فون کارمن

پیدا کردن نقطه شروع : (x^*)

ابتدا از جریان آرام δ_L را حساب می کنیم و $\delta_T = \delta_L$ می گذاریم $\rightarrow x^*$ ✓

در مثال ۴ (حل):

برای جریان درهم:
(با فرض اینکه از اول تا آخر درهم است)

$$\frac{\delta_a}{\delta_w} = \sqrt[5]{5}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\sqrt[5]{5}}{5}$$

مثال: جریان سیال روی یک صفحه از ابتدا تا انتها یکبار از نوع آرام و بار دیگر از نوع درهم است. هنگامی که طول صفحه برابر با 1^m است نسبت نیروی Drag حالت آرام به حالت درهم برابر با 0.5 است. این نسبت برای صفحه‌ای به طول 32^m چقدر است؟

$$\left.\frac{F_L}{F_T}\right|_{L=1m} = 0.5 \longrightarrow \left.\frac{F_L}{F_T}\right|_{L=32m} = ?$$

حل:

$$F_L = 0.664\,\rho U_\infty^2 A \Big/ \sqrt{\frac{U_\infty L}{\nu}} \quad \text{آرام}$$

$$\text{درهم} \quad F_T = \frac{1}{2} \times 0.073 \times \rho U_\infty^2 A \Big/ \sqrt[5]{\frac{U_\infty L}{\nu}}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{1}} \frac{F_L}{F_T} = \underbrace{\lambda}_{\text{ضریب}} \frac{\sqrt[5]{L}}{\sqrt{L}} = k \frac{\sqrt[5]{L}}{\sqrt{L}} \longrightarrow ?$$

سیال را یکی بگیریم

اگر هم سیال فرق کند ν در دل k می‌رفت!

وقتی $L=1$ ، $k = \left.\frac{F_L}{F_T}\right|_{L=1} = 0.5 \longrightarrow k = 0.5$

$$\longrightarrow \left.\frac{F_L}{F_T}\right|_{L=32} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt[5]{L}}{\sqrt{L}} = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{32}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{32}}}$$

* محدودیت‌های تئوری لایه‌های مرزی:

پرانتل ← پدر مکانیک سیالات مدرن

- δ باید به اندازه کافی نازک باشد ← $\frac{\delta}{x} \le 0.1$ ✓

↳ اگر رعایت نشود تنش‌ها دقت‌شان را از دست می‌دهند

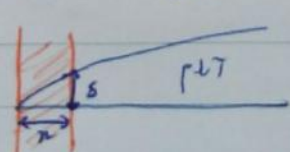
(بلازیوس با x مقایسه می‌کنیم $\frac{\delta}{x} \le 0.1$ در ایرفویل‌ها با شعاع انحنا در مقطع خاص مقایسه می‌شود)

اوایل صفحه x و δ هم‌مرتبه هستند و اوایل صفحه تنش‌ها دقت خوبی نداریم و در طول جواب شبیه خیلی

اگر طول صفحه به اندازه کافی بزرگ باشد آن ناحیه اول بی‌اهمیت می‌شود. اینجا هم لایه نازک باشد

که در مقایسه $\frac{\delta}{x}$

- پس از شروع پدیده جدایی نمی‌توان از این تئوری استفاده کرد.

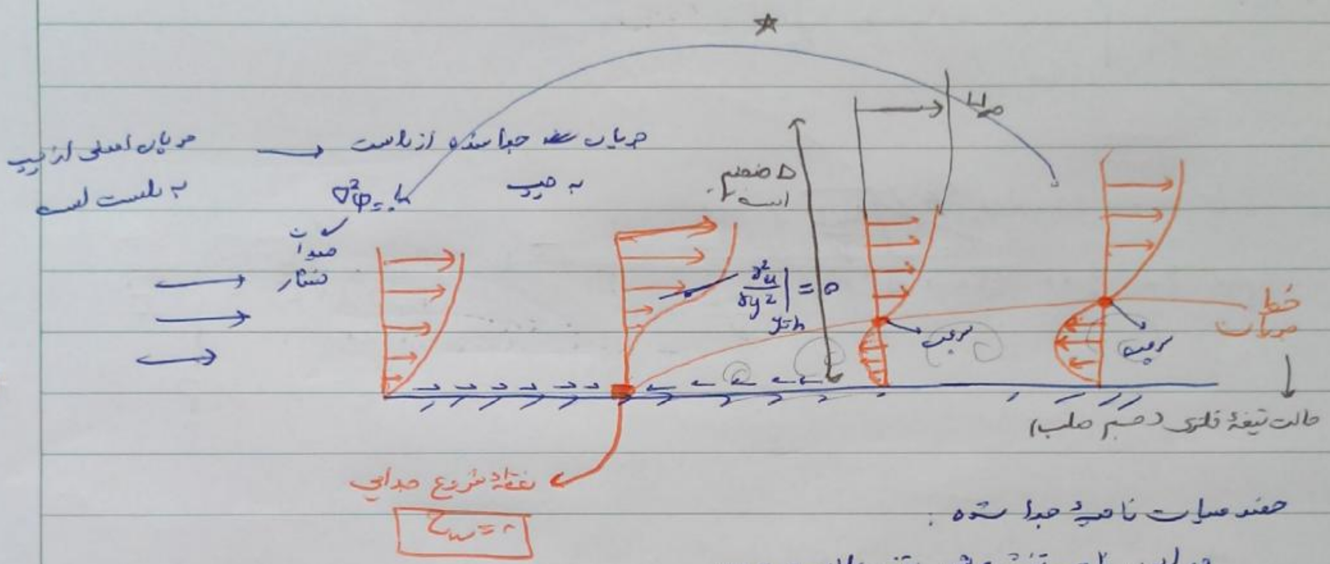


$$\tau_w(x) = 0.332\,\rho U_\infty^2 \Big/ \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}$$

$$\tau_w|_{x=0} = \infty$$

۱) پدیده شناسی جدایی چیست؟

طبق تعریف ناحیه جدا شده به ناحیه‌ای در مجاورت یک سطح گفته می‌شود که در آن ذرات سیال در خلاف جهت جریان اصلی حرکت نماید.



خصوصیات ناحیه جدا شده:

در این ناحیه تنش برشی تغییر علامت می‌دهد.

☆ نقطه شروع جدایی جایی است که تنش برشی صفر.

سؤال مهم

تنش از راست به چپ می‌آید تا صفر می‌رسد بعد از آن تنش تغییر علامت می‌دهد.

• در این ناحیه شرط عدم لغزش همچنان برقرار است

دقت کنید در ناحیه جدایی سیال جدا شده با سیال همچنان چسبیده به همین دلیل در بعضی کتاب‌ها به جای Seperation می‌گویند جریان معکوس Reverse Flow

یا جریان برگشتی ~~Black~~ Back Flow

• در نقاط خاصی بالای سطح سرعت ذرات سیال صفر است.

دانیالی که ۰ است به هم وصل کنیم می‌شود خط جریان (خط جریانی که در ادامه آن مانند دیواره جسم صلب رفتار کند و جریان داخل با بیرون تبادلی ندارد)

• پروفیل‌های سرعت همگی دارای نقطه عطف هستند (جایی که $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=h} = 0$)

پدیده‌شناسی ۲)

۲) از نقطه شروع جدایی به بعد نمی‌توان از تئوری تقریب لایه‌ی مرزی استفاده نمود. چون ناحیه‌ای که تحت تأثیر این پدیده قرار می‌گیرد نازک نیست. تئوری لایه مرزی با فرض نازک بودن (δ ضخیم است) معادله سطح معادلات کامل.

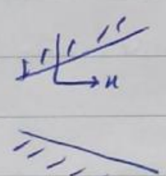
۳) برای نقاط قبل از نقطه شروع جدایی می‌توان همچنان از تئوری لایه مرزی استفاده نمود. اما مشروط بر این که میدان فشار جدید داده شود.

☆ پدیده جدایی ← $\nabla^2\Phi = 0$ ← میدان فشار را عوض می‌کند. این میدان فشار جدید جزء معادلات نیست. سیال بالادست را هم تحت تأثیر قرار می‌دهد.

۴) این پدیده در هندسه‌هایی که در آن‌ها گرادیان فشار مثبت است دیده می‌شود. با این وصف لازم است گرادیان فشار به اندازه کافی خود نیز باشد. یعنی مادر هر دیفیوزر، دیفیوزر ایده‌آل.

$\frac{dp}{dx} > 0$

دیفیوزر: گرادیان فشار + است هندسه‌ای که



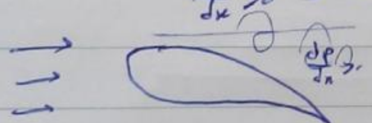
$dA/dx > 0$

$dU_\infty/dx < 0$

$\frac{dp}{dx} > 0$

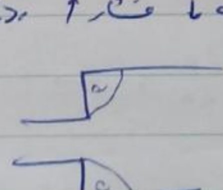
اسپرید تی سیستم

سیال از بالای ایرفویل که رد می‌شود مثل دیفیوزر است و $\frac{dp}{dx} > 0$



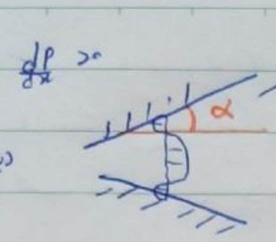
$\frac{dp}{dx} > 0$

انبساط ناگهانی در ورودی کانال بزرگ سرعت ↓ فشار ↑ $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ (که vortex هم دارد) ← مثال بارز



$\frac{dp}{dx} > 0$

در $\alpha = 0$ ← $\frac{dp}{dx}$ + می‌شود ولی به ازای زاویه حمله مثبت، $\frac{dp}{dx}$ قوی‌تر است. $\alpha \simeq 6^\circ$ سیال نزدیک دیواره تحمل فشار زیاد را ندارد و برمی‌گردد به عقب.

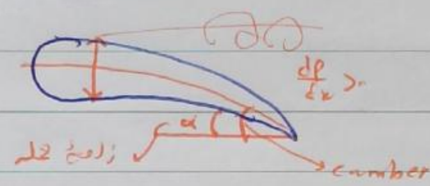


علاوه بر اینکه $\frac{dp}{dx}$ + باشد

به اندازه کافی قوی نیز می باشد

← بستگی به پارامترهای هندسی

در ایرفویل α (زاویه حمله مهم است) $\alpha > 8^{\circ}$ به بالا vortex ها ایجاد می شود در ایرفویل علاوه بر α به قوس هم مهم است.

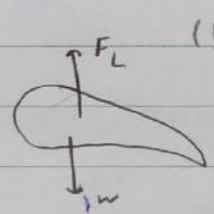


5) پدیده جدایی پدیده مزاحم و معضل است.

دیفیوزر قرار است فشار را بالا ببرد اگر جدایی اتفاق بیفتد کمتر فشار را بالا می برد.

در ایرفویل ها در اثر این پدیده F_L به شدت کاهش می یابد (حالت سقوط آزاد)

در ضمن F_D هم به شدت افزایش می یابد



$F_L = W \rightarrow$ هواپیما در تعادل است.

وقتی هواپیما می خواهد به زمین برسد F_D را در نظر داریم

تا هواپیما سریع به سکون برسد.

F_D زیاد F_L کم ← پدیده stall ← سقوط نزدیک به نشستن هواپیما!

$\frac{dp}{dx} > 0 \rightarrow$ گرادیان فشار نامساعد

Adverse

گرادیان فشار معکوس نداریم که!!

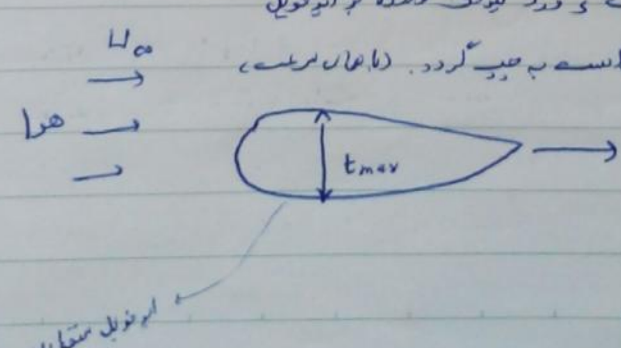
ما جریان معکوس داریم که همان جریان جدایی است.

$\frac{dp}{dx} < 0 \rightarrow$ گرادیان فشار مساعد

Favourable

کنکور 5-6 سال پیش (کتاب ولیت):

با توجه به شکل مقابل هنگامی که باد از چپ به راست می وزد نیروی وارده بر ایرفویل برابر با F است. اگر جهت وزش باد از راست به چپ گردد. (با همان سرعت) نیروی F چه تغییری خواهد کرد؟ (جواب 2)

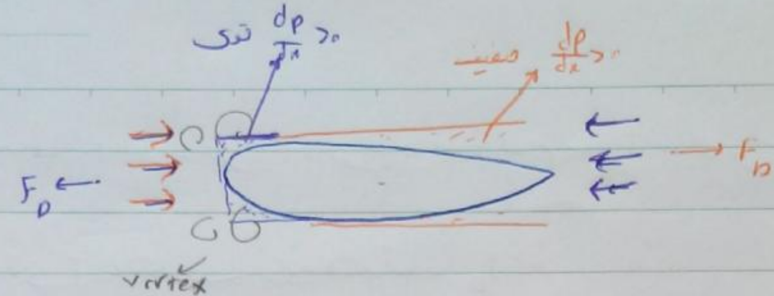


1) کاهش می یابد

2) افزایش می یابد

3) تغییر نمی کند

4) نمی توان نظر داد

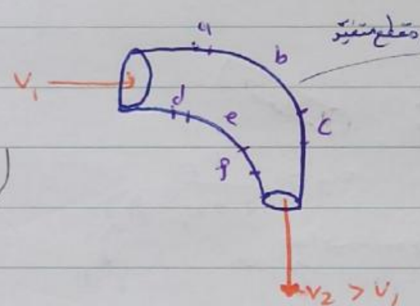


از بالسه به جب شیب شکل $\frac{dp}{dx} > 0$ و قوی است چون در ناحیه کم است و احتمال vortex (طول) است که Drag خیلی زیادی دارد.

از چپ به راست شکل شیب شکل $\frac{dp}{dx} > 0$ و ضعیف است چون در طول بزرگ پخش شده.

ایرفویل شکلی است که طوری ساخته شده که کمترین Drag را داشته باشد و جدایی برایش اتفاق نیفتد

93 : در مورد جریان سیال ایده آل (غیرلزج ، غیرقابل تراکم و غیرچرخشی) درون نازل خمیده مقابل کدام صحیح است؟



سیال ایده آل ($\nu = 0$)

گرادیان فشار نامساعد و پدیده جدایی در سیال ایده آل اصلاً معنا ندارد.

الف) سیال در ناحیه d و c با گرادیان فشار معکوس مواجه است

ب) سیال در ناحیه e و b به به

ج) به a و f ، ،

د) در این جریان کانال گرادیان فشار معکوس وجود ندارد.

اصلاً همچین چیزی نداریم ما جریان معکوس نداریم

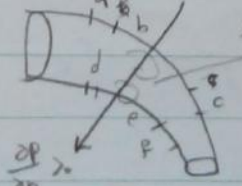
منظور طراح : گرادیان فشار نامساعد Reverse flow

پدیده ی جدایی مختص سیالات لزج است

از طرفی هم سطح مقطع کم و سرعت زیاد می شود که مثل نازل است فشار دارد کم می شود گرادیان فشار ⊖ است

پس در نازل ما اصلاً پدیده جدایی را نمی بینیم (نازلها ⊖)

ولی در سیال لزج در داخل قوس داخل پدیده جدایی اتفاق می افتد در قوس خارج فشار بیشتر از قوس داخل است.



($\frac{dp}{dn} > 0$) اینجا گرادیان فشار ⊕ داریم vortex داریم اینجا

ما مثلاً در سیال واقعی : برای زانویی که سیال لزج است

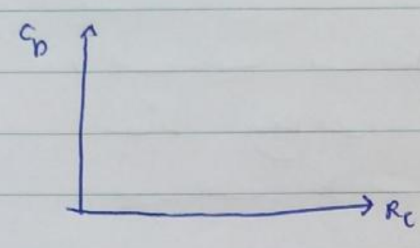
داریم جدایی

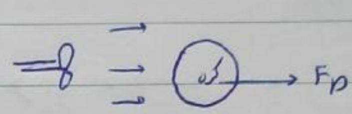
در b, e گزینه 2

پدیده جدایی رخ می‌دهد تئوری لایه مرزی صادق نیست عدم سطح آزمایشگاهی

روش‌های آزمایشگاهی برای اندازه‌گیری F_D

- استوانه
- کره

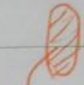




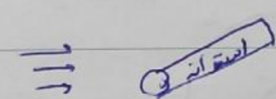
$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}$$

$\frac{\pi d^2}{4}$

از مساحت تصویر کره در راستای جریان استفاده می‌شه نه از مساحت خود کره



$A = \frac{\pi d^2}{4}$

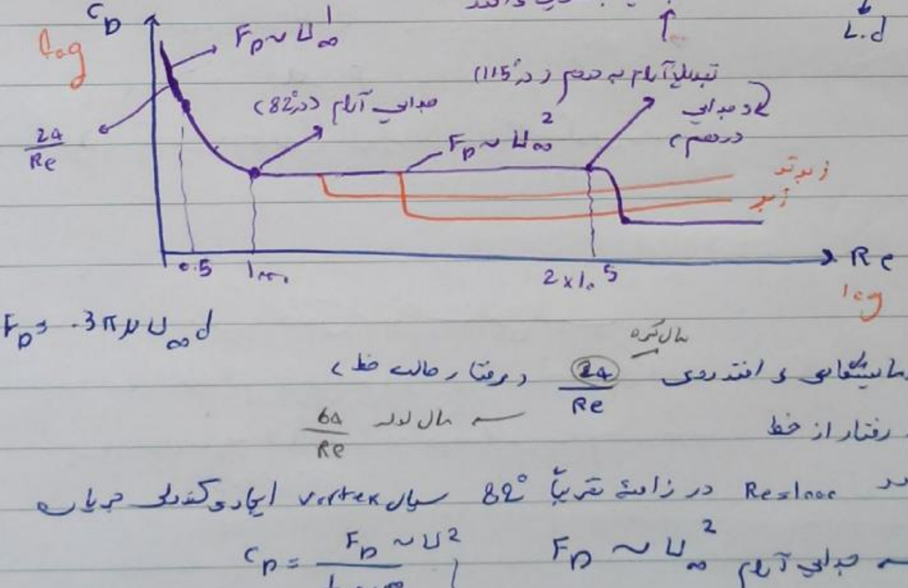


$A = L.d$

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}$$

$L.d$

جدایی به تعویق می‌افتد



کره ؟

در این کره صاف هیدرولیکی

$F_D = 3\pi\mu U_\infty d$

a تا $Re=0.5$ نتایج آزمایشگاهی و تئوری $\frac{24}{Re}$ (مال کره) در رفتار حالت خطی

از $Re=0.5$ به بعد رفتار از خط ← مال لوله $\frac{64}{Re}$

خارج می‌شود. حدود $Re=1000$ در زاویه تقریباً 82° سیال vortex ایجاد کند و جریان

هنوز آرام است ← جدایی آرام $F_D \sim U_\infty^2$

$$C_D = \frac{F_D \sim U^2}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

C_D ثابت است.

b در $Re = 2\times10^5$ (در بعضی کتاب‌ها 3×10^5) : تبدیل آرام به درهم

دیده می‌شود درهم شدن آرام در دیواره بیشتر است و

درهم و لایه جنبش در دیواره ← جدایی به تعویق

می‌افتد و به جای 82° در 115° می‌شود و ناحیه

wake پشت جسم کم می‌شه بعد از آن drag و C_D

ثابت می‌ماند

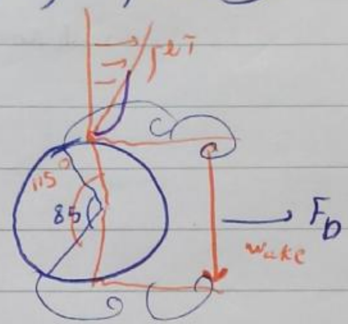
Sadeghy @ut.ac.ir
شماره دفتر تلفن : 6111-4011

در کره و استوانه 2 نوع جدایی داریم در دو زاویه متفاوت

← جدایی آرام

جدایی آرام به درهم (جدایی درهم)

با زبر کردن سطح کره : در رینولد کمتری جریان آرام به درهم تبدیل می‌شود (نتایج آزمایشگاهی)



جیتا

فرمول های فون کارمن (صفحه)

صفحه های هیدرولیکی

صفحات زبر → فرمول های تجربی

→ دیاگرام شبیه دیاگرام مودی

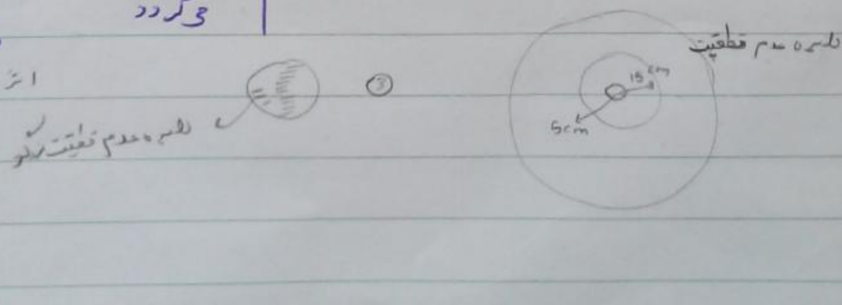
$\epsilon \leq \delta_v$

← در صفحات زبر با زبری ثابت اثر است.

و یا این که موجب افزایش τ (?) می‌گردد

منفی

اثر منفی دارد.



جریان در اطراف یک کره را در نظر بگیرید. زبری سطح چه اثری بر نیروی Drag این کره دارد.

الف) موجب کاهش آن می‌گردد

ب) موجب افزایش آن می‌گردد

ج) تأثیری بر نیروی درگ ندارد.

د) بستگی دارد (بستگی به Re دارد)