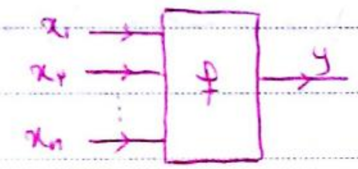
معادلات دیفرانسیل ← معادلات مرتبه‌ی اول — بیشتر از لحاظ تشخیص و محاسبات
← معادلات مرتبه‌ی دوم
← حل معادلات با استفاده از سری‌های توانی
← تبدیل لاپلاس — ساده‌ترین

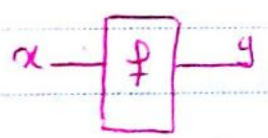
تعریف معادله دیفرانسیل = اگر تابعی مانند f با یک سری ورودی (متغیر مستقل) و یک خروجی (متغیر تابع) در نظر بگیریم: هر رابطه بین متغیر تابع و مشتقات آن نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل می‌نامند.



معادله‌ی دیفرانسیل ← معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی ← وقتی متغیر مستقل بیش از یک باشد *

معادله‌ی دیفرانسیل ← معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات معمولی: اگر تابع ما فقط یک متغیر ورودی و یک متغیر خروجی داشته باشد **

**:



$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

مثلاً: * $x^2 u_{xx} + x^2 yz\, u_{xz} + u_{zy} = x^2 y^2$

تعریف مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل = بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در یک معادله را مرتبه‌ی معادله می‌نامند.

$P = x^2 y'^4 + x \cos(y)\, y''' + 4x^2 y'^5 = 1 \longrightarrow$ مرتبه = ۳

کاری به توان‌ها نداریم و فقط به مرتبه‌ی مشتق کار داریم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معرفی انواع جوابهای معادله =

۱- جواب عمومی (کامل) = کلی ترین جواب یک معادله‌ی دیفرانسیل که شامل پارامترهای ثابت است را جواب عمومی مینامند.

هر متغیری به جز ورودی و خروجی را پارامتر گوییم

* عدد مرتبه معادله = تعداد پارامترها در جواب عمومی

فرم کلی جواب عمومی یک معادله‌ی مرتبه‌ی n بصورت $g(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ است.

وقتی میگیم پارامتر ثابت؛ یعنی نسبت به ورودی و خروجی ثابتند

۲- جواب خصوصی = با مقدار دهی به پارامترها در جواب عمومی یک جواب خصوصی بدست می‌آید.

* هر معادله بیشمار جواب خصوصی دارد.

$y(0) = 0$ یا (x_0, y_0) یا $C = 2$

$P = y = Ce^{-x} + x^2 \longrightarrow$

این مقداردهی می‌تواند بشرایط اولیه باشد $y(0) = 2$

یا عبور از یک نقطه $(1, 3)$

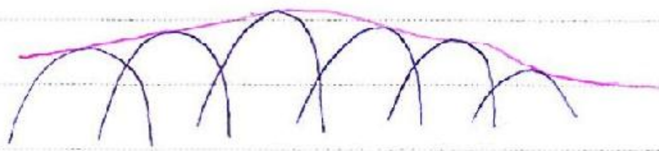
یا باید مقدار ثابت باشد $C = 3$

۳- جواب غیرعادی (استثنایی) = فقط معادلات غیرخطی هستند که گاهی به جواب غیرعادی میرسند.

(این جواب مخصوص معادلات غیرخطی است)

هر جوابی که در معادله دیفرانسیل صدق کند اما با مقداردهی به پارامترها از جواب عمومی حاصل نشود به آن جواب یک جواب غیرعادی می‌گویند.

فرض کنیم این دسته منحنی جواب عمومی یک معادله باشد اگر بیایم راس این منحنی‌ها را بهم وصل کنیم، این نقاط هم جزء جوابند: اگر بیایم رابطه‌ی این قرمزه را بصورت $y=g(x)$ دربیاریم: این هم جزء جواب است (در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند).



$y=g(x)$

مثال= فرض کنیم یه تابع داریم=

$y = xy' + y'^2 \longrightarrow$ جواب عمومی $\Rightarrow y = cx + c^2$

جواب غیرعادی $\Rightarrow y = -\frac{x^2}{4}$

جواب غیرعادی در معادله صدق می‌کند: $-\frac{x^2}{4} = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4}$ - به این جواب که ① با مقداردهی به این c بدست نمی‌آید ② اما در معادله صدق می‌کند را جواب غیرعادی گوییم

هر معادله‌ای که میخواهیم حل کنیم باید تشخیص دهیم خطی است یا غیرخطی

تشخیص خطی و غیرخطی بودن = فرم کلی یک معادله‌ی خطی مطابق زیر است =

$$f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x).y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = R(x)$$

و هر معادله‌ای که به فرم فوق نباشد غیرخطی است.

عملگر خطی =

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \iff$ عملگر f خطی است.

$p = |\alpha x + \beta y| \neq \alpha|x| + \beta|y| \Rightarrow$ عملگر قدر مطلق غیرخطی است

$\sin(\alpha x + \beta y) \neq \alpha \sin x + \beta \sin y \Rightarrow$ عملگر سینوس غیرخطی است

Subject :
Year . Month . Date . ( )

$d(\alpha x+\beta y) = \alpha\, dx + \beta\, dy$ ⟸ عملگر دیفرانسیل خطی است

① اگر در یک معادلهٔ دیفرانسیل یک عملگر غیرخطی روی متغیر تابع اعمال شده باشد، آن معادله غیرخطی است.

معروف عملگرهای غیرخطی مهم =

۱ـ توابع مثلثاتی، هایپربولیک و معکوس مثلثاتی و معکوس هایپربولیک

۲ـ توابع نمایی و لگاریتم

۳ـ عملگر توان به غیراز صفر و یک (رادیکال = عملگر توان است مثلاً)

۴ـ قدر مطلق و جزء صحیح

عملگرهای خطی = ← انتگرال
↙ مشتق (دیفرانسیل)
↙ لاپلاس

اگر مورد یک برقرار بود میریم سراغ مورد دو ←

② اگر درجهٔ تمام جملات نسبت به متغیر تابع و مشتقات آن صفر یا یک باشد، معادله خطی و در غیر این

صورت معادله غیرخطی است.

نسبت به x = ۲
نسبت به x و y = ۵

م $= 8x^2y^3z^5 + 4x^3y^2 + 8z^3$

م $= x^2y'^2 + x^3yy''^4 + 4x^2y'y^3 = 2$

درجه به y = ۱ ۵ درجه نسبت به y و مشتقاتش = ۴ ← توان y و مشتقاتش را باهم جمع کنیم

PAPCO

هرکدوم از ① و ② که برقرار نبود ← غیرخطی میشه

نسی کن فقط بتونی متغیر تابع رو ببینی ← y = متغیر تابع است.

Subject: ۳
Year. Month. Date. ( )

مثال= خطی و غیرخطی بودن معادلات داده شده را بررسی کنید؟ (y را تابع بگیر و x را مستقل بگیر)

قدم اول اولیه

۱) $x^3y''' + 4x^2\cos y'' + 3x^4y' = x^2\tan x$ ← خطی

۱ ۱ ۱ ۰

۲) $x^4y'' + 4xy' = x\cdot\sin y$ → عملگر sin روی متغیر y عمل کرده   غیرخطی

۳) $x^3y'' + 4xyy' = x^2 + 1$ غیرخطی ← yy' = درجه اش = ۲

۴) $xy'' + 2xy' + |y| = 0$ غیرخطی ← به دلیل $|y|$

۵) $xy' + 2\int_0^x y\,dx = \sin x$ خطی ← عملگر غیرخطی عمل نکرده و درجه‌ها هم ۱ و ۰

۶) $(x-y)dx + (y+x)dy = 0$ غیرخطی   x چون y ندارد درجه‌اش = ۰ است

مورد ① برقراره ← / با xها کاری نداشته باش و $ydy \to yy'$ = درجه = ۲

۷) $(x-y)dx + (\sin x - 1)dy = 0$ خطی

درجه= ۰ ۱ ۱

۸) $y' = \dfrac{x-y+1}{x-y}$ → $yy' = 2$: طرفین وسطین کن   غیرخطی

۹) $\sqrt{y'} = 2x + 1$ غیر خطی (اگه به توان ۲ برسونیمش اما میتونه به خطی تبدیل بشود)

۱۰) $x^2y'' + 4xe^{x-y} = 1$ غیرخطی (e^{-y})

خطی است یا غیرخطی $\sin y'$ ؟

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلات دیفرانسیل ← حل یک معادله دیفرانسیل
← تشکیل یک معادله دیفرانسیل

تشکیل معادله دیفرانسیل = اگر جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل داشته باشیم به روش زیر می‌توان معادله دیفرانسیل متناظر با این جواب را بدست آورد:

فرض کنید $g(x,y,C_1,C_2,\dots,C_n)=0$ جواب عمومی یک معادله مرتبهٔ nام باشد. برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل کافی است از دستگاه زیر C_1 و C_2 و ... و C_n را حذف کنیم:
چون n تا C داریم ← n بار مشتق بگیر + Cها را حذف کن

$$\begin{cases} g(x,y,C_1,\dots,C_n)=0 \\ g'(x,y,C_1,\dots,C_n)=0 \\ g''(x,y,C_1,\dots,C_n)=0 \\ \vdots \\ g^{(n)}(x,y,C_1,\dots,C_n)=0 \end{cases}$$

مثال = معادلهٔ دیفرانسیل متناظر با جواب $y=ae^{bx}$ را بدست آورید؟
میام دستگاه تشکیل میدیم = (به تعداد پارامترها: a و b مشتق میگیریم)

$$\begin{cases} y=ae^{bx} \\ y'=abe^{bx} \\ y''=ab^2e^{bx} \end{cases}$$

$$\Big\} \Rightarrow b=\frac{y'}{y}$$

$$\Rightarrow y''=\left(\frac{y'}{y}\right)^2\left(\frac{ae^{bx}}{y}\right) \Rightarrow y''=\frac{(y')^2}{y}$$

مثال = معادلهٔ دیفرانسیل متناظر با جواب $y=ax^2+bx+c$ را بدست آورید؟
باید ۳ بار مشتق بگیریم =
هیچ نظمی برای حل این معادله به کار نمیره، فقط در روند حلت از معادلهٔ آخری استفاده کن (به آخری حتماً نیاز داری ولی از بالایی‌ها گاهی لازم هست که استفاده کنی و گاهی نه)

PAPCO

$$\begin{cases} y = ax^2+bx+c \\ y' = 2ax+b \\ y'' = 2a \\ y''' = 0 \end{cases} \longrightarrow y''' = 0$$

مثال = معادله دیفرانسیل متناظر با $y=\dfrac{\sec x}{a+b\tan x}$ را بدست آورید؟

اگه دیدی مشتق گرفتن سخته، اول سعی کن که ساده‌اش کنی ؛ $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$$y = \frac{1}{a\cos x + b\sin x} \Rightarrow \frac{1}{y} = a\cos x + b\sin x$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} = a\cos x + b\sin x \\[2mm] \dfrac{-y'}{y^2} = -a\sin x + b\cos x \\[2mm] \dfrac{-y''y^2+2yy'^2}{y^4} = -a\cos x - b\sin x = -\dfrac{1}{y} \Rightarrow \dfrac{-y''y^2+2yy'^2}{y^4} = -\dfrac{1}{y} \end{cases}$$

حالت خاص = اگر فرم جواب عمومی به صورت $y=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\dots+c_nf_n(x)+g(x)$ باشد، از حل

فرم جامع معادله دیفرانسیل خطی — هر معادله‌ای به صورت ترکیب خطی n جواب عمومی باشد

دترمینان زیر معادله دیفرانسیل بدست می‌آید =

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) & y-g(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) & y'-g'(x) \\ \vdots & & & & \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \dots & f_n^{(n)}(x) & y^{(n)}-g^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

مثال= معادله دیفرانسیل متناظر با $y=c_1x+c_2\sin x+x^2$ را بدست آورید؟

سطر اول رو بنویس و بعد = اقدر مشتق بگیر تا مربعی بشه با اینکه به تعداد پارامترها مشتق بگیر

$$\begin{vmatrix} x & \sin x & y-x^2 \\ 1 & \cos x & y'-2x \\ 0 & -\sin x & y''-2 \end{vmatrix}=0$$

نسبت به ستون آخر دترمینان بگیری راحت‌تره =

$$(y''-2)(x\cos x-\sin x)-(y'-2x)(-x\sin x)+(y-x^2)(-\sin x)=0$$

تست کنکور (۷۷) = معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت A در معادله $y=A\cos 2x+\sin^2 2x$ کدام است؟

1) $(2\sin 2x)y'+(\cos 2x)y=2$ 2) $(2\sin 2x)y'+(\sin 2x)y=2$

3) $(\cos 2x)y'+(2\sin 2x)y=2$ ✓ 4) $(\sin 2x)y'+(2\cos 2x)y=2$

$$\begin{vmatrix} \cos 2x & y-\sin^2 2x \\ -2\sin 2x & y'-2\cos 2x \end{vmatrix}=0 \to y'\cos 2x-2\cos^2 2x+2y\sin 2x-2\sin^2 2x=0$$

$$y'\cos 2x+2y\sin 2x=2$$

ص ۱۳ کتاب - تست ۲۰۲ - کدام گزینه معادله دیفرانسیل منحنی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ است؟

چون y^2 داره ← از روش دوم نمی‌تونیم استفاده کنیم (روش دوم باید به صورت $(y=\dots)$ باشد) =

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0 \quad \to \frac{2}{a^2}=-\frac{2yy'}{xb^2} \\ \frac{2}{a^2}+\frac{2y'^2+2yy''}{b^2}=0 \quad \to \frac{-2yy'}{xb^2}+2\frac{y'^2+yy''}{b^2}=0 \xrightarrow{\times xb^2} \end{cases}$$

$$yy'=x(y'^2+yy'') \quad ✓$$

با توجه به گزینه‌ها ساده‌اش کن:

(برق ۹۱)(ریاضی محض ۹۰)(معدن ۹۱) = x و $\frac{1}{x}$ دو جواب مستقل خطی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن هستند، با فرض آنکه ضریب "y''" برابر یک باشد، ضریب مشتق مرتبه اول در این معادله کدام است؟

گفتیم میشه ترکیب خطی جوابهای مستقلمون، پس میشه =

۱) x ۲) $\frac{1}{x}$ ۳) x^2 ۴) $\frac{1}{x^2}$

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x}$$

۲:

گفتیم نسبت به ستون آخر بگیر

$$\begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} & y \\ 1 & -\frac{1}{x^2} & y' \\ 0 & \frac{2}{x^3} & y'' \end{vmatrix} = 0 \qquad -\frac{2}{x}y'' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = 0$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

- اگر $y_1, y_2, \cdots, y_n$، n جواب مستقل خطی یک معادله همگن باشند ← جواب عمومیش میشه ترکیب خطیشون

حل معادله دیفرانسیل = ← معادلات مرتبه اول ← خطی ، ← غیرخطی

← معادلات مرتبه دوم

معادلات خطی مرتبه اول = فرم استاندارد معادله خطی مرتبه اول بصورت زیر است =

$$y' + P(x).y = q(x)$$

و جواب عمومی آن مطابق زیر بدست می‌آید =

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int q(x).e^{+\int P(x)dx}dx + c\right]$$

فرم دیگر و بهترش =

$$\mu(x) = e^{-\int P(x)dx} \implies y = \mu(x)\left[\int \frac{q(x)}{\mu(x)}dx + c\right]$$

۱- تشخیص
۲- روش | روش مطالعه
۳- محاسبه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(درس ۷۲) = ص ۹۹ = تست ۹ = جواب مسئلهٔ $y(1)=2$ و $x>0$ و $x^2y'+xy=1$ در $x=e$ برابر است با ؟

۱) $\frac{3}{e}$ ۲) $\frac{2}{e}$ ۳) ۳ ۴) ۲

$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2}$ ضریبش رو بکن ۱ =

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{d}{x}}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}\Rightarrow y=\frac{1}{x}\left[\int\frac{1}{x}dx+C\right]\Rightarrow y=\frac{1}{x}(\ln x+C)$$

تنها جایی که نیاز نیست معادله را حل کنی: وقتی سؤال راجب تغییرات است.
جاییکه میگه مقدار را در این x یا در نقطهٔ فلان و یا در بازهٔ فلان یا اگر از این نقطه عبور کند و ... => باید معادله را حل کنیم

$$y(1)=2\Rightarrow 2=C \qquad \to y(e)=\frac{1}{e}(\ln e+2)=\frac{3}{e}$$

$$\boxed{e^{a\ln(f(x))}=(f(x))^a}$$

هنرا مفنا (۸۳) = ص ۱۰۴ = تست ۵۹ = اول باید جواب عمومی رو پیدا کنیم ← نوع معادله را پیدا کن: ... خط مرتبهٔ اول

یکی از منحنی های معادله دیفرانسیل $y'+y\cos x=\cos 2x$ محور xها را در نقطه ای به طول $\frac{\pi}{2}$ قطع ($y=0$)
می کند. این منحنی خط $x=\frac{\pi}{4}$ را با کدام عرض قطع می کند؟

درجهٔ اول هم هست: ضریب $y'=1$ است.

$$y=\frac{1}{\sin x}\left[\int\sin x\cdot\cos 2x\,dx+C\right]\overset{\text{تبدیل به حاصلجمع}}{=}\frac{1}{\sin x}\left[-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+C\right]$$

$$\left(\frac{\pi}{2},0\right)\to 0=C$$

$$x=\frac{\pi}{4}\to y=2\times\frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\ln\sin x=\frac{1}{\sin x}$$

PAPCO

صفحه ۱۰۰ - سوال ۱۸ = جواب مسئله مقدار اولیه زیر برابر است با =

$$dy + (y\cot x - e^{\cos x})dx = 0 \quad , \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$$

معادله = خطی است ← استاندارد روش کن:

$$e^{-\cot x} = e^{-\ln \cdots}$$

$$y' + y\cot x = e^{\cos x} \longrightarrow y = \frac{1}{\sin x}\left[-e^{\cos x} + c\right] \rightarrow y \cdot \sin x + e^{\cos x} = 2 \quad : ①$$

$$e^{-\int \cot x \, dx} = \frac{1}{\sin x}$$

صفحه ۱۳۰ - سوال ۴۴۱ = جواب معادله با شرایط اولیه زیر کدام است؟

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x+y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ممکنه نسبت به y غیرخطی و نسبت به x خطی باشد: برای راحت‌ترشدن
در هر دو مدل x و y دسته بندی زیر را داریم =

* در فرم دیفرانسیلی هیچ تفاوتی برای بررسی x و y نداریم *

$$* \quad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0 \qquad \text{نسبت به } x \text{ و } y \text{ خطی}$$

$$(x-y)dx + (e^x - 1)dy = 0 \qquad \text{نسبت به } y \leftarrow \text{خطی}$$

$$(x - e^y)dx + (1-y)dy = 0 \qquad \text{نسبت به } x \text{ و } y \text{ غیرخطی}$$

$$** \quad f(x,y,y') = 0 \quad \text{—} \quad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\searrow \quad \underset{\text{چون}}{f(x,y,\frac{1}{x'})} = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'}$$

پس اگه دیفرانسیلی بود که هیچ تغییری درش نمیدیم. ولی اگر حالت دوم بود ← یا باید بجای y' ، $\frac{1}{x'}$ بذار
و یا اینکه به فرم دیفرانسیلی تبدیلش کن.

نیس نگاه می کنیم نسبت به y خطی هست یا نه ← اگه نبود میریم سراغ اینکه نسبت به x خطی هست یا نه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل تست = $\frac{1}{x'}=\frac{1}{x+y} \Rightarrow x'=x+y \rightarrow$ نسبت به x خطی است

یا $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y} \rightarrow (x+y)dy - dx = 0 \rightarrow$ نسبت به x خطی است

درجه اش = ۱ ۰ ۱

x تابع است و y مستقل ← اگه قاطی میکنن میتونن جای x و y یعنی اسمشون رو تغییر بده .. ولی استاندارد نمیکنه:

گزینه ی (۴) $x'-x=y \rightarrow x=e^{y}(-ye^{-y}-e^{-y}+C) \rightarrow x=-y-1+Ce^{y}$

اگه گزینه ی (۳) هم به فرم درست ٤ بود = باید شرط $y(0)=0$ را اعمال می کردیم و C را بدست می آوردیم:

مکانیک (۹۵) = جواب معادله ی دیفرانسیل $4y^3y'+y=2xy'$ شرط اولیه ی $y(1)=-1$ کدام است؟

۱) $x^2=\frac{y}{5-4x}$ ۲) $y^2=\frac{x}{5-4y}$ ۳) $x^2=\frac{y}{5+4x}$ ۴) $y^2=\frac{x}{5+4y}$

نسبت به y خطی هست یا نه ← نیست ← حالا نسبت به x خطی است یا نه ← حالا گفتیم x را داره = بجای $y'=\frac{1}{x'}$ و یا بجای $y'=\frac{dy}{dx}$ بذار

$y'=\frac{1}{x'} \rightarrow x' \times$ طرفین $\rightarrow 4y^3+yx'=2x$ نسبت به x خطی ✓

به خاطر y^3 = عملگر توان به جزء ولد

استاندارد $x'-\frac{2}{y}x=-4y^2$

$x=y^2(-4y+C)$

مکانیک (۹۲) = حد جواب معادله ی $ty'+(t+1)y=2+e^{-t}$ با شرط کمکی $y(1)=a$ در نقطه ی $t=0$ برابر با صفر است. هرگاه a برابر باشد با:

۱) $-e$ ۲) $-\frac{1}{e}$ ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) e

به y خطی هست: عملگر غیرخطی نداره + درجه ی جملات یا صفره یا ۱ =

(۳)

$y'+\left(\frac{t+1}{t}\right)y=2e^{-t}$

$y=\frac{1}{t}e^{-t}(t^2+C)$ $y(0)=0 \rightarrow C=0$

اگه C≠0 باشد ← y=∞ میشه ← باید C=0 بشه که t ها ثابت بشوند و...

$y=te^{-t} \rightarrow y(1)=a=e^{-1}$

PAPCO

عمران ۹۳= در معادله دیفرانسیل زیر مقدار $y(1)$ کدامست؟

$$(x+1)y' - y = e^{x}(x+1)^2 \quad , \quad y(0)=1$$

c رو بدست بیار

معادله = خطی ✓ ← استاندارش کن =

$$y' - \frac{1}{x+1}y = e^{x}(x+1)$$

$$y=(x+1)(e^{x}+C) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow C=0$$

$$y(1)=2e$$

معادلات مرتبه‌ی اول غیر خطی
- ← معادله‌ی تفکیک پذیر
- ← معادله‌ی همگن
- ← معادله‌ی کامل
- ← فاکتور انتگرال (تبدیل به معادله‌ی کامل)
- ← تغییر متغیر
- ← معادله‌ی برنولی
- ← معادله‌ی درجه‌ی ۲
- ← معادلات خاص (کلرو - لاگرانژ - ریکاتی)
- ← فاقد متغیر مستقل و تابع

معادله تفکیک پذیر = اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان به فرم $f(x)dx + g(y)dy = 0$ مرتب کرد، میگوییم تفکیک پذیر است و با انتگرال گیری از طرفین معادله جواب عمومی آن بدست می‌آید.

اگر ضرایب dx و dy ...

روش تشخیص = اگر ضریب dx و dy بصورت حاصلضرب توابعی از x و y باشند، معادله تفکیک پذیر است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ص ۱۱۱ سوال ۲۹ = جواب معادله دیفرانسیل عمومی $2xy\,dx+(x^2-1)dy=0$ کدام است؟

به صورت ضرایبی از x و y هستند ← تفکیک پذیر است =

$$\frac{2x\,dx}{x^2-1}+\frac{dy}{y}=0 \to \ln(x^2-1)+\ln y=\ln C$$

$$(x^2-1)y=C \to y=\frac{-\overset{\text{جدید}}{C}}{1-x^2}=\frac{C}{1-x^2}$$

ص ۱۲۰ سوال ۱۵۳ =

$$x(y^2-1)dx-y(x^2-1)dy=0$$

نسبت به y ← غیر خطی

نسبت به x ← غیر خطی

تفکیک پذیر ✓ ← حاصلضرب x در یه تابعی برحسب y

جواب ص ۱۲۷ ← ۲۰۱

$$y'=-2+3y-y^2$$

نسبت به y ← غیر خطی (y^2)

نسبت به x ← خطی

تفکیک پذیر ← ✓ $y'=\frac{dy}{dx} \to dy$ ضریب $=1$

ص ۱۴۰ ← ۲۸۳

نسبت به y ← غیر خطی

نسبت به x ← غیر خطی

تفکیک پذیر ✓ ← از y فاکتور بگیر

x ،

معادله دیفرانسیل ... مفروض است. جوابی که از نقطه $(x_0,y_0)=(0,\frac{\pi}{4})$ عبور می‌کند به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ دارای کدام مقدار است

مکانیک (۹۰) =

$$y'\left(\sin y+\frac{y}{\cos y}\right)=-4\sin x.\cos x.\cos y$$

نسبت به y ← غیر خطی ($\cos y$)

— به x ← غیر خطی ($\sin x$)

تفکیک پذیر = ✓ ← $y'=\frac{dy}{dx}$

$\xrightarrow{\div \cos y} \left(\tan y + \frac{y}{\cos^2 y}\right) dy = -2\sin x.\cos x\, dx$

$-\cancel{\ln\cos y} + y\tan y + \cancel{\ln(\cos y)} = \frac{\pi}{4}\cos 2x + C$

$(0, \frac{\pi}{4}) \to \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + C \to C = 0$

$y\tan y = 0 \longrightarrow y = 0$

(مکانیک ۹۱)- جواب؟

$\frac{\sqrt{1+x^2}\, dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$

حذف نسبت (y^2)

نسبت به x ← حذف نسبت

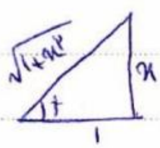
تفکیک پذیر ✓

$x = \tan t \to dx = 1 + \tan^2 t$

$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow \tan^{-1} y = \sin t + C$, $\sin t \to \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C = \arctan y$ = ④

مفهوم $\tan t = x$ ←



$\longrightarrow \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

روش دیگه =

$\sin(\tan^{-1} x)$

$\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$\sin^2(\tan^{-1} x) = \frac{x^2}{1+x^2} \longrightarrow \sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

مواد (۹۲)-

$y' = \frac{y - x^2 y}{x - x y^2}$

حذف نسبت به y x

— به x x (x^2)

تفکیک پذیر ✓

اگه صورت x^2y^2 بود ← تفکیک پذیر x

حاصلضرب تابع خالص از x x تابع خالص از y

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(برق ۹۳) = معادله دیفرانسیل $x\frac{dy}{dx}+y^2=0$ با شرط اولیه $y(1)=1$ مفروض است. بزرگترین بازه x که در آن

مسأله مقدار اولیه دارای جواب باشد کدام است؟

نسبت به y ← خطی x نسبت به x هست تفکیک پذیر ✓

$$xdy+y^2dx=0 \rightarrow \frac{dy}{y^2}+\frac{dx}{x}=0$$

$$-\frac{1}{y}+\ln x=\ln c \Rightarrow \ln x-\ln c=\frac{1}{y} \rightarrow \ln\frac{x}{c}=\frac{1}{y} \rightarrow y=\frac{1}{\ln(\frac{x}{c})}$$

$$(1,1) \rightarrow y(1)=1 \rightarrow c=e^{-1} \rightarrow y=\frac{1}{\ln(ex)} \rightarrow (\frac{1}{e},+\infty)$$

$$\ln(\frac{x}{c})\neq 0 \rightarrow \frac{x}{c}\neq 1$$

x منفی نمیتونه باشه ← $(-\infty,\frac{1}{e})$ و $(-\infty,\frac{1}{e}]$ حذف میشه

معادله همگن =

تابع همگن = تابع $f(x,y)$ را نسبت به x و y همگن مینامند اگر و فقط اگر $f(\lambda x+\lambda y)=\lambda^\alpha f(x,y)$

اگر ورودی $\sin$ و $\cos$ همگن از مرتبه ۰ باشد ← $\sin$ و $\cos$ دیگر اثر $\sin$ و $\cos$، تانژانت و کتانژانت را در نظر نمیگیریم

و α را مرتبه همگن مینامند.

$f(x,y)=\sin(x+y)$: $\sin$ همگن نیست : $\sin(\lambda(x+y))\neq\lambda^\alpha\sin(x+y)$

$$f(x,y)=\sin\left(\frac{x}{y}\right) \rightarrow \sin\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)=\sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

← برای تشخیص کافی است درجه تمام جملات را باهم مقایسه کنیم، در صورتیکه یکسان باشند ⇐ تابع همگن است.

پس ضرب و تقسیم ها جمله اند

PAPCO

Subject: 9
Year. Month. Date. ( )

$\frac{\lambda^2}{\lambda^5} = \lambda^{-3}$ ✓ ، $۲-۵=-۳$

مثال = همگن وناهمگن توابع داده شده را بررسی کنید

1) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^5+y^5}$ ← همگن است. ۵= همگن = مخرج و ۲= همگن = صورت
از مرتبه‌ی ۳- است

2) $f(x,y) = x+y-1$ ($1 \quad 1 \quad 0$) همگن نیست

3) $f(x,y) = \frac{x^2y}{y^3+x^3}$ ($\to 2+1=3$, $\to 3$) = جمله است $\to 3-3=0$ همگن از مرتبه‌ی ۰ است

4) $f(x,y) = x^4 \cos y + y^4 . \sin x$ همگن نیست

5) $f(x,y) = x^2 \cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + y^2 \sin\left(\frac{y}{x+y}\right)$ همگن است از مرتبه‌ی ۲

همگن از مرتبه‌ی صفر مثل یک عدد ثابت است

معادله‌ی همگن = معادله‌ی دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ همگن است اگر تابع f نسبت به x و y همگن از مرتبه‌ی صفر باشد و یا معادله‌ی $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ همگن است اگر M و N همگن از مرتبه‌ی یکسان باشند.

برای محاسبه‌ی جواب عمومی کافیست $z = \frac{y}{x}$ درنظر بگیریم. با این تغییر متغیر، معادله به معادله‌ی تفکیک پذیر تبدیل می‌شود که قابل حل است.

$\frac{100}{\ } = ۱۷$

T = برق 68 = تابع

هروقت راجب y از ما سوال نخواد باید جواب عمومی را بدست آوریم

$\tan y$ ← خطی نیست
تفکیک پذیر نیست
$\tan x$ ← خطی نیست

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y' = \tan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$ همگن است از مرتبه‌ی ع

$z = \frac{y}{x}$ اولین کار باید y' را محاسبه کنیم $\rightarrow y' = z + xz'$

هرجی z هست بیاری کنار dz و هرجی x است بیار کنار dx باقیمونده‌ش : $\cancel{z} + xz' = \tan(z) + \cancel{z}$

$x\frac{dz}{dx} = \tan z$

$\frac{dz}{\tan z} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln(\sin z) = \ln(x) + \ln c$

$\sin z = cx \rightarrow \sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx$

۴

$\Rightarrow x = ۴\sin\left(\frac{y}{x}\right)$

هم اتفاقا (۸۴)

ت = ص۱۰۹ = س۷۷ = نسبت به y خطی نیست: yy' / نسبت به x: خطی نیست / تفکیک پذیر نیست $(x-y)$ / همگن هست: درجه‌ی جملات صورت و مخرج یکسانه (درجه‌ی صورت = ۱ و درجه‌ی مخرج = ۱ ← تابعش از مرتبه‌ی صفر میشه ✓

$y' = \frac{x-y}{x+y}$: جواب عمومی = ?

$z = \frac{y}{x} \rightarrow \cdots$

تشخیص

* معادله‌ی کامل = معادله‌ی دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را کامل مینامند اگر $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ همیشه ضریب dx است

روش حل

باشد و برای محاسبه‌ی جواب عمومی کافیست از طرفین معادله انتگرال گرفته و یکی از جملات دیفرانسیلی را به دلخواه

خالص کنیم.

$\int M(x,y)dx + \int N^{*}(x,y)dy = c$

یکی رو خالص میکنیم مثلاً $N(x,y)dy$ باید همه‌ی جملات N برحسب y باشند (*)

$$\cos y + e^{x} \sin y + y^{2}\cos x + 4y^{4} + 2$$

$p = N(x,y) = x^{2} \cancel{\sin y + x^{2}\cos y}$

هر جمله‌ای رو که x داره رو کلشو حذف میکنیم

$N(x,y) = \cancel{x^{2}\sin y} + \cancel{y^{2}\cos x} \to N^{*} = 0$

وقتی معادله‌ای نسبت به x خالص کنی هر جمله‌ای که y داشت را حذف می‌کنی و برعکس.
بهتره که دومی رو خالص کنی ⊛

T= ص ۱۵۴ = س ۵۳ = جواب معادله $\int (3x^{2} - 2xy + 2)\,dx + \int (6y^{2} - \cancel{x^{2}} + 3)\,dy = C$

حفظ نسبت (y^{2}) / x^{2} → به x حفظ نسبت / تفکیک پذیر نیست ~~(درجه اش (۰، ۲، ۲))~~

همگن نیست (۰، ۲، ۲) / کامل بودن = $3x^{2} - 2xy + 2$ رو نمیتونی بصورت حاصلضرب x خالص و y خالص بنویسی

$-2x = -2x$ ✓ کامل هست

از طرفین انتگرال بگیر $x^{3} - x^{2}y + 2x + 2y^{3} + 3y = C$

③ ← پشتشون انتگرال بزار + در دومی اونایی که x داشت را حذف کن و بعد انتگرال بگیر و برابر مقدار ثابت C بزار.

T= ص ۹۸ س ۳ = $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^{2} + y\cos x}{4y^{3} - \sin x}$

y^{3} ← حفظ نسبت / نسبت به x ✗ / تفکیک پذیر ✗ / همگن: $\cos x$ و $\sin x$ نیست /

کامل بودن = اول M و N را تشخیص بده پس مرتبش کن

$\int (3x^{2} + y\cos x)\,dx + \int (\cancel{\sin x} - 4y^{3})\,dy = C$

$\cos x = \cos x$ ✓ کامل هست

از طرفین انتگرال بگیر = C بزار بس $x^{3} + y\sin x - y^{4} = C$

T= ص ۱۱۵ س ۸۳ = جواب عمومی؟ $\int (3x^{2}y + 2xy)\,dx + \int (\cancel{x^{3}} + \cancel{x^{2}} + 2y)\,dy = C$ ↲

ydy ← حفظ نسبت / xdx ← حفظ نسبت به x ✗ / تفکیک پذیر $x^{3} + x^{2} + 2y$ ✗ / همگن: درجه ۲ و ۳ داریم

کامل بودن =

$3x^{2} + 2x = 3x^{2} + 2x$ ✓ کامل هست

بعد ↲

$x^{3}y + x^{2}y + y^{2} = C$

④

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\int (x^2 + xy\sin 2x + y\sin^2 x)\,dx + \int x\sin^2 x\,dy = \cancel{x}\, C$ T = ۱۱۴ ص = ۱۱۳ س

خطی هست ✓ درجه ها = ۱ و ۱ و ۰ و ۰ / نسبت به x $\sin^2 x \times x$ / تفکیک پذیر x

همگن $\sin^2 x \times$

کامل بودن = $x.\sin 2x + \sin^2 x = \sin^2 x + x\sin 2x$ ✓

چون انتگرال اول سخته ← پس اول را خالص کن بهتره

پس حالا اینجا برای خالص سازی جملات شامل y را حذف کن: $\frac{1}{3}x^3 + yx\sin^2 x = C$

$(e^x - 3x^2y^2)y' + ye^x = 2xy^3$ T = ۴۹ صفحه

خطی نسبت y^3 و y^2 / نسبت به x $e^x \times$ / تفکیک پذیر x $e^x - 3x^2y^2$ / همگن نیست e^x

کامل بودن = M و N را تفکیک کن =

$\int (ye^x - 2xy^3)\,dx + \int (\cancel{e^x} - \cancel{3x^2y^2})\,dy = \cancel{x}\, C$

$e^x - 6xy^2 = e^x - 6xy^2$ ✓ کامل هست

حالا که کامله از طرفین انتگرال = C

$\to ye^x - x^2y^3 = C$

$\int (2xy^2 + 2y)\overset{dx}{+}(2x^2y + 2x)\,\overset{dy}{\cancel{y'}} = 0$ T = ۱۰۶ ص = ۵۴ س

خطی نیست y^2 / نیست به x $x^2 \times$ / تفکیک پذیر x عبارت دوم / همگن: درجه ۲ و ۳ و ۱

کامل بودن = $4xy + 2 = 4xy + 2$

عبارتهای کنار dx و dy را بتوانیم بصورت حاصلضرب عبارتهایی خالص از x و y بنویسیم مثلاً

$(1-\cos x)y^2dx + (x^2+4)(1+\sin y)dy = 0$

$x^2y^2 + 2yx = C$

$\int \left(\frac{Ln(Lny)}{x} + \frac{2}{3}xy^3\right)dx + \int \left(\frac{Lnx}{yLny} + x^2y^2\right)dy = 0$? جواب عمومی T = (ریاضی مخفی ۹۰)

خطی نیست y^3 / نسبت به x $Lnx \times$ / تفکیک پذیر x عبارت دوم / همگن $Lny \times$

PAPCO

$\frac{1}{xy\ln y}+2xy^2=\frac{1}{xy\ln y}+2xy^2$ ✓ کامل بودن

$\ln x \times \ln(\ln(y)) + \frac{1}{3}x^2y^3 = C$ ✓ ①

T نساجی ۹۰ و ۹۱ =

$y' = \frac{e^{-x}\sin y}{e^{-x}\cos y + 2y}$

خطی x / نسبت به x خطی x / تفکیک پذیر x / $\sin y$ ← همگن نیست

$\int e^{-x}\sin y\,dx + \int(-e^{-x}\cancel{\cos y} - 2y)\,dy = 0$

$e^{-x}\cos y = e^{-x}\cos y \to$ ✓ کامل

از طرفین انتگرال و = C بذار

$-e^{-x}\sin y - y^2 = C$

T مکانیک ۹۲ = $\int(\cancel{ye^{xy}\cos 2x} - \cancel{2e^{xy}\sin 2x} + 2x)\,dx + \int(xe^{xy}\cos 2x - 3)\,dy = C$

e^{xy} ← خطی نیست / تفکیک پذیر x / همگن نیست x / کامل بودن =

$e^{xy}\cos 2x + xye^{xy}\cos 2x - 2x e^{xy}\sin 2x = e^{xy}\cos 2x + xye^{xy}\cos 2x - 2x e^{xy}\sin 2x$

کامل هست

$x^2 + e^{xy}\cos 2x - 3y = C$

$(0,0) \to C = 1$

$\frac{\pi^2}{16} + 0 - 3y - 1 \to y = \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{3}$

معادلهٔ بالا مفروض است. با شرایط اولیهٔ اینکه نمودار آن از مبدأ می‌گذرد. اگر نمودار مذکور از نقطهٔ $(\frac{\pi}{4}, y_0)$ بگذرد، مقدار y_0 کدام است؟

ت= جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول $y' = -\frac{y(e^{xy}+y)}{x(e^{xy}+2y)}$ عبارتست از؟

e^{xy} خطی نیست / تفکیک پذیر x e^{xy} / همگن x e^{xy} / کامل بودن =

$$\int (ye^{xy}+y^2)\,dx + \int (\cancel{xe^{xy}} + \cancel{2xy})\,dy = \cancel{x}C$$

$$e^{xy} + xye^{xy} + 2y = e^{xy} + xye^{xy} + 2y \quad \checkmark \quad \text{کامل}$$

$$e^{xy} + y^2x = C$$

mmm

توابع نمایی و لگاریتمی و sin و cos ای هرجا دیدیم همگن نیست، بجز اینکه ورودیشون از مرتبهٔ صفر باشد.

فاکتور انتگرال = اگر معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد یعنی $\left(\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\right)$

گاهی اوقات می‌توان تابعی مانند $F(x,y)$ را بدست آورد بطوریکه اگر طرفین معادله در $F(x,y)$ ضرب کنیم معادله کامل شود، به این عبارت فاکتور انتگرال یا عامل انتگرال ساز می‌نامند.

روش محاسبهٔ فاکتور انتگرال =

$$F(x,y).M(x,y)\,dx + F(x,y).N(x,y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial (FM)}{\partial y} = \frac{\partial (FN)}{\partial x} \Rightarrow M.\frac{\partial F}{\partial y} + F\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial F}{\partial x} + F\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial F}{\partial x} - M\frac{\partial F}{\partial y}$$

F تابعی برحسب z است: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$

$$F\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}}_{\frac{dF}{dz}}\left(N\frac{\partial z}{\partial x}-M\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{dF}{F}=\underbrace{\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x}-M\frac{\partial z}{\partial y}}}_{g(z)}\,dz \implies F=e^{\int g(z)\,dz}$$

اگر این عبارت تابعی برحسب z شود فرض درنظر گرفته شده درست.

برای محاسبهٔ فاکتور انتگرال به نظم زیر عمل می کنیم:

۱- در $g(z)=\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x}-M\frac{\partial z}{\partial y}}$ صورت را محاسبه و تا حد امکان ساده می کنیم.

۲- با توجه به گزینه ها z های مناسب را تشخیص می دهیم.

۳- برای ساده ترین z، مخرج $g(z)$ $\left(N\frac{\partial z}{\partial x}-M\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ را محاسبه و ساده می کنیم. اگر تابع g برحسب z شد ← فرض درنظرگرفته شده برای z درست است و از رابطهٔ $F=e^{\int g(z)dz}$ فاکتور انتگرال بدست می آید.

درغیراین صورت بند ۳ را برای z های بعدی بررسی می کنیم.

ت- ص ۱۰۴ ت ۴۲ عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟

$$(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$$

۱) y^3 ۲) x^3 ۳) e^{3x} ۴) e^{3y}

$$g(z)=\frac{3x^2+2x+3y^2-2x}{\quad}=3(x^2+y^2)$$

z = ساده ترین عبارتی که میتونیم تابع رو برحسبش نوشت. مثلاً $z=y^2$ یا $z=y$ ✓ این ساده تره پس z میشه y یا

مثلاً $f=\dfrac{x^2y^2}{1+x^4y^4}\sin^2(xy)$ ← $z=xy$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\boxed{\text{پس توابعی که خالص برحسب } x \text{ اند} \leftarrow z \text{ اش میشه } = x}$

پس در این تست z مون یا x است یا y (با توجه به گزینه ها)

در حل تست به طور روندوم اول x رو حساب کن و بعد اگه نشد y

$$z = x \to g(z) = \frac{3(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dx = 3\,dx \to F = e^{3x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \;,\; \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \to N = g(z) \text{ مخرج}$$

ت: برق (7) = م ۹۹ = س ۱۱ = معادله $dx + 2xy\,dy = y e^{-y^2} dy$ مفروض است. فاکتور انتگرال؟

۱) e^{y^2} ۲) e^{x^2} ۳) e^{-x^2} ۴) e^{-y^2}

① $g(z) = \frac{0 - 2y}{} = \frac{-2y}{}$

با توجه به گزینه ها: $z = x$ یا y : (تابعی خالص برحسب x اند یا y اند)

$$z = x \to g(z) = \frac{-2y}{2xy - y e^{-y^2}}\, dx \quad \times \to$$ که نمیشه

$$z = y \to g(z) = \frac{-2y}{-1}\, dy \to F = e^{\int g(z)dz} = e^{y^2} \quad \checkmark$$ این میشه: تابعی خالص برحسب y است.

ت: م ۱۰۳ = س ۹۰ = فاکتور انتگرال $(2y\sin x + 3y^4 \sin x.\cos x)dx - (4y^3\cos^2 x + \cos x)dy = 0$

۱) $\sin y$ ۲) $\cos x$ ۳) $\sec x$ ۴) $\cos y$

$$g(z) = \frac{2\sin x + 12y^3 \sin x.\cos x - 8y^3 \sin x \cos x - \sin x}{} = \frac{\sin x(1+4y^3\cos x)}{}$$

با توجه به گزینه ها $z = x$ یا y

$$z = x \to g(z) = \frac{\sin x(1+4y^3\cos x)}{-\cos x(1+4y^3\cos x)}\, dx = -\tan x\, dx \checkmark \to F = \cos x$$ فرض درسته

PAPCO

T= ص ۱۲۹ = سوال ۲ تحت چه شرایطی معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ دارای عامل انتگرال‌سازی برحسب x^2-y^2 است؟

$z = x^2 - y^2 \rightarrow g(z) = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{2xN + 2yM}$ که باید طبق شرط تابعی برحسب z باشد $\rightarrow$ ②

T= ص ۱۴۵ = ۱۸۸ = عامل انتگرال‌ساز معادله $y\,dx + [x + yx^2(1+\ln y)]\,dy = 0$ داده شده. کدام گزینه صحیح است؟

کامل نیست x

$g(z) = \dfrac{1-1-3yx^2(1+\ln y)}{} = \dfrac{-3yx^2(1+\ln y)}{}$

به ترتیب از ساده‌ها شروع کن و به z مقدار بده:

$z = x$ ✗

$z = y$ ✗ $\rightarrow$ چون فقط برحسب y نیست

$z=xy$: $g(z) = \dfrac{-3yx^2(1+\ln y)}{yN - xM} = \dfrac{-3yx^2(1+\ln y)}{\cancel{xy} + y^2x^3(1+\ln y) - \cancel{xy}} = \dfrac{-3yx^2(1+\ln y)}{y^2x^3(1+\ln y)}$

$\rightarrow g(z) = \dfrac{-3}{yx} = -\dfrac{3}{z} \Rightarrow F = e^{-\int \frac{3}{z}dz} = \dfrac{1}{z^3} \Rightarrow F = \dfrac{1}{(xy)^3}$

T= ص ۱۴۱ = ۲۸۷ = فاکتور انتگرال؟ $y\,dx - (x^2+y^2+x)dy = 0$

1) x^2+y^2 2) $(x^2+y^2)^2$ 3) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 4) $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$

$g(z) = \dfrac{1+2x+1}{} = 2(x+1)$

$z = x^2+y^2 \rightarrow g(z) = \dfrac{2(x+1)}{-2x(x^2+y^2) - 2x^2 - 2y^2} = \dfrac{\cancel{2(x+1)}}{-2(x^2+y^2)\cancel{(x+1)}} = -\dfrac{1}{z} \rightarrow$

پس چون در نهایت قراره برحسب z بشه پس عباراتی که برحسب z است را زیاد توضیح نده

$\rightarrow F = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ ③

Subject:
Year. Month. Date. ( )

T=(نفت ۹۰) اگر $\mu(x,y)$ عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل $(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ باشد. حاصل

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \mu(x,y)$ کدامست؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{1}{21}$

این سؤال غلط میشه x

- اگر $F = x^{\alpha} y^{\beta}$ فاکتور انتگرال معادله $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ باشد. به روش زیر میتوان α و β

رابدست آورد =

$$g(z) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{\alpha N x^{\alpha-1} y^{\beta} - \beta M x^{\alpha} y^{\beta-1}} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{x^{\alpha} y^{\beta}\left(\alpha \frac{N}{x} - \beta \frac{M}{y}\right)}$$

اگه بخوام تابعم برحسب z بشه پس باید این دوتا رو باهم برابر قرار دهیم =

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \alpha \frac{N}{x} - \beta \frac{M}{y}}$$

از متحد قرار دادن طرفین : α و β بدست می‌آید.

T= ص۱۲۴ = سوال ۱۹ = به ازای کدام مقدار m و n تابع $\mu(x,y) = x^m . y^n$ میتواند یک عامل انتگرال ساز برای معادله زیر باشد؟

$$(x^2 + xy^2)\,\cancel{y'}^{\,dy} - 3xy + 2y^3 \overset{dx}{=} 0$$

$$(-3xy + 2y^3)\,dx + (x^2 + xy^2)\,dy = 0$$

$$(-3x + 6y^2 - 2x - y^2) = \alpha(x + y^2) - \beta(-3x + 2y^2)$$

ضریب x دوطرف را باهم برابر میذاریم و ضریب y^2 دوطرف راهم باهم قرار میدهیم

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = -5 \\ \alpha - 2\beta = 5 \end{cases} \longrightarrow 5\beta = -10 \rightarrow \beta = -2 \rightarrow \alpha = 1 \implies m = 1 ,\ n = -2$$

PAPCO

ت= ص۱۰۴ = س۴ فاکتور انتگرال؟ $y^2(1-x^2)\,dx+(x^3y+2x^2+xy)\,dy=0$

وقتی همه گزینه ها فرمشون بصورت $x^\alpha y^\beta$ است. پس باید از همون فرمول اخیر استفاده کنیم.

$2y-2yx^2-3x^2y-4x-y=\alpha(x^3y+2x+y)-\beta(y-yx^2)$

ضریب y در دو طرف باید باهم برابر باشد و همچنین برابر $-yx^2$ و همچنین x

$\alpha-\beta=1$

$\alpha+\beta=-5$

$2\alpha=-4 \to \alpha=-2 \to \beta=-3$: (۳)

ت= ص۱۱۰ = س۸۷ فاکتور انتگرال = ؟ $(3x^2y-xy)\,dx+(2x^3y^2+x^3y^4)\,dy=0$

گزینه ها به فرم $x^\alpha y^\beta$ هستند:

۱) $\frac{1}{xy}$ ۲) xy^2 ۳) x^2y ۴) $\frac{1}{x^2y}$

$3x^2-x-6x^2y^2-3x^2y^4=\alpha(2x^2y^2+x^2y^4)-\beta(3x^2-x)$

$3=-3\beta \longrightarrow \beta=-1$

$-6=2\alpha \longrightarrow \alpha=-3$

(۴)

ت= هوافضا ۹۳ = عامل انتگرال ساز؟ $(4xy+3y^4)\,dx+(2x^2+5xy^3)\,dy=0$

۱) x^3 ۲) xy^2 ۳) y^3 ۴) x^2y

گزینه ها برحسب $x^\alpha y^\beta$ است پس طبق آن فرمول میریم:

$(4x+12y^3-4x-5y^3)=\alpha(2x+5y^3)-\beta(4x+3y^3)$

$2\alpha-4\beta=0 \longrightarrow \alpha=2\beta \longrightarrow$: (۴)

$5\alpha-3\beta=7 \Rightarrow \beta=1,\ \alpha=2$

(۴)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

کاربرد فاکتور انتگرال در حل معادلات دیفرانسیل = ۳ تیپ سؤال دارد:

① اگر معادله‌ی دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ دارای فاکتور انتگرال .... باشد، جواب عمومی را بدست آورید.

ابتدا فاکتور انتگرال را محاسبه و سپس در طرفین معادله ضرب می‌کنیم تا کامل شود و سپس مانند معادله‌ی کامل جواب عمومی آنرا بدست می‌آوریم.

T = ص ۳۸ = (لساجی ۸۸) اگر $M=\frac{1}{x^2+y^2}$ فاکتور انتگرال معادله همگن زیر باشد. جواب آن کدام است؟

$(x-y)dy-(x+y)dx=0$

$$\int \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dy - \int \frac{\cancel{x+y}}{\cancel{x^2+y^2}}\,dx = \cancel{x}C \rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = C \quad :①$$

dx است پس جملات شامل y را حذف کن

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} = C$$

② اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ دارای فاکتور انتگرال برحسب .... باشد. جواب عمومی را بدست آورید.

T = ص ۱۱۳ = ۱۰۳

$$2\sin y^2\,dx + xy\cos y^2\,dy = 0$$

$$z=x \rightarrow g(z) = \frac{4y\cos(y^2) - y\cos y^2}{xy\cos y^2}\,dx = \frac{3}{x} \rightarrow F = x^3$$

پس طرفین را در x^3 ضرب کن:

$$\int 2x^3\sin y^2\,dx + \int x^4 y\,\cancel{\cos y^2}\,dy = \cancel{x}C$$

$$\frac{x^4}{2}\sin y^2 = C \quad ④$$

$y^3 dy = d\left(\frac{1}{4}y^4\right)$

↑ با دسته بندی تبدیل به معادله دیفرانسیل کن

③* جواب عمومی معادله را بدست آورید. ← دسته بندی*

← محاسبهٔ فاکتور انتگرال و تبدیل به معادلهٔ کامل *بیشتر سعی و خطا است.

↓ آخرین روش باشه که استفاده می کنی + فاکتور انتگرال فقط وفقط برحسب x تنها یا y تنها داشته باشد.

$d(xy) = x\,dy + y\,dx \qquad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$ = دسته بندی *

$$\boxed{x\,dy + y\,dx = d(xy)}$$

$$\boxed{x\,dy - y\,dx = x^2\, d\left(\frac{y}{x}\right) = -y^2\, d\left(\frac{x}{y}\right)}$$

T = ص۱۴ = ر۴۴

خط x ydy / خطی به x x ← x^3 / تفکیک پذیر x $x^3 - y$ / همگن x x^3-y / کامل x

حالا میبینیم برحسب داریم یانه = $-y\,dx + x\,dx$ ۷ داریم:

$$x^3dx \underbrace{-\,y\,dx + x\,dy}_{x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)} + x^2y\,dy = 0$$

$$x^3dx + x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) + x^2y\,dy = 0 \longrightarrow x\,dx + d\left(\frac{y}{x}\right) + y\,dy = 0$$

اول میریم سراغ اونایی که دیفرانسیلشون یه متغیره است یعنی dx و dy . در dx که برحسب x است پس کاریش نداریم در dy باید ضریبش برحسب y باشه. پس طرفین را تقسیم بر x^2 می کنیم. کاملاً

$\xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال میگیریم}} \frac{1}{2}x^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{2}y^2 = C$

$$(1,1) \longrightarrow \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = C \longrightarrow C = 2$$

$$x=2 \rightarrow 2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^2 = 2 \rightarrow \frac{1}{2}y(y+1) = 0 \longrightarrow y = 0,\; y=-1 \rightarrow ③$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

T = ۱۳۵ص = ۲۱۴س = جواب معادله زیر کدام است؟ $x\,dy - y\,dx = (4x^2+y^2)\,dy$

هگن نیست / حذف x / تفکیک پذیر x / x^2+y^2 /
۲ و ۱

سعی کنیم برحسب y و z مرتبش کنیم

پرچم که واضحه

از راه حل دیگه میریم

$$x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = (4x^2+y^2)\,dy \to \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{4+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = dy \xrightarrow{*\ z=\frac{y}{x}} \frac{dz}{4+z^2}=dy$$

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) = y+C \to \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{y}{2x}\right) = y+C$$

T = ۱۴۲ص = ۲۹۲س

$$\left(x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right)dx + x\,dy = 0$$

حذف نیست $\sin^2 y$ / نسبت به xx / تفکیک پذیر x / هگن ✓ / کامل x / دسته بندی ✓ $-ydx+xdy$

$$\underset{*}{\underline{x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)}}\,dx \underbrace{- y\,dx + x\,dy}_{x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)} = 0$$

مثلاً اگه ۳ جمله بود جملات رو ÷ $x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$ میکردیم ولی اینجا چون ۲ جمله است وسلام

در دسته بندی ترتیب خیلی مهمه: اول * رو خلاص میکنیم: جملات که برحسب x اند کنار dx و جملات که برحسب $\frac{y}{x}$ اند: کنار $d\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)} = 0 \to \ln x - \cot\left(\frac{y}{x}\right) = C$$

$$\int \frac{dz}{\sin^2 z} \to -\cot z$$

T = ۱۵۴ص = ۵۸س =

$$x\,dy - y\,dx = (x^2+y^2)\,dx$$

مشخصه

(ریاضی عمومی ۹۰)

$$x(y\,dx + x\,dy) = (1+x^2y^2)\ln x\,dx$$

حذف نیست y^2 / نسبت به x x / تفکیک پذیر $x\ 1+x^2y^2$ / هگن $x\ \ln x$ / کامل x

پرچم ✓ دسته بندی ✓ $y\,dx + x\,dy$

$$= x\,d(xy) = (1+x^2y^2)\ln x\,dx \xrightarrow{xy=z} x\,dz = (1+z^2)\ln x\,dx$$

z ها کنار dz و x ها کنار dx بیار:

۱۰۲۸ ۷۵۱۴ ۵۹۷۵ ۵۳۷۹

$\frac{dz}{1+z^2} = \frac{\ln x}{x} dx \longrightarrow \tan^{-1} z = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C = \tan^{-1}(x^2y^2) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$: ۴

$\begin{cases}(e^{x+y}+ye^y)dx+(xe^y-1)dy=0\\ y(0)=-1\end{cases}$ T= موارد= جواب مسئله= ؟

خطی نیست e^y / نسبت به x x / تفکیک پذیر x / همگن x e^y / دسته بندی ✓ از e^y فاکتور

$e^{x+y}dx + e^y(\underbrace{ydx+xdy}_{dxy}) - dy = 0$

الان 3 تا دیفرانسیل داریم. اول اونایی که تک متغیره هستند را خالص کن یعنی dy و dx : dy که خالصه میمونه dx ← ÷ بر e^y کن :

$e^x dx + d(xy) - e^{-y}dy = 0$

$e^x + xy + e^{-y} = C$ ⟶ بین گزینه ۱ و ۳ حالا شرط $y(0)=-1$ رو صدق بده

← ① : ✓

مهم :

تغییر متغیر 8

① هرگاه معادله دیفرانسیل شامل $ax+by+c$ باشد، این عبارت را به عنوان تغییر متغیر در نظر میگیریم.

روش تشخیص= sin ، tan ، e^{x+y+c} ، توان 2 ...

۱- عبارت $ax+by+c$ ورودی یک عملگر غیرخطی باشد.

۲- عبارت $ax+by+c$ بیش از یک بار در معادله تکرار شده باشد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

T= ص 91 = س 1 = برق 83 = جواب عمومی = ؟ $y' = 2(6x+3y)^2 - 2$

$z = 6x+3y \rightarrow z' = 6+3y' \rightarrow y' = \frac{z'-6}{3} \rightarrow$

$\frac{z'}{3} - \cancel{2} = 2z^2 - \cancel{2} \rightarrow z' = 6z^2 \rightarrow \frac{dz}{z^2} = 6\,dx \rightarrow -\frac{1}{z} = (6x+c)$

$\rightarrow (6x+3y)(6x+c) = -1$: ④

T= ص 98 = س 2 = جواب معادله = ؟ $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{\sin(x-y+1)}$

$x-y+1 = z \xrightarrow[\text{y' روتولیدکن}]{} 1-y' = z' \rightarrow 1-z' = 1+\frac{1}{\sin z} \rightarrow -\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sin z} \rightarrow$

$-\sin z\,dz = dx \rightarrow \cos z = x+c \rightarrow \cos(x-y+1) = x+c \rightarrow$ ③ و ④ غلط

چون گزینه ها بر حسب وارونه پس وارونشو بگیر...

$x-y+1 = \cos^{-1}(x+c)$: ①

T= ص 101 = س 23 = جواب مسئله = ؟ $\begin{cases} (2x+y)\frac{dy}{dx} = 3+2x+y \\ y(0)=0 \end{cases}$

2 بار تکرار شده پس $(2x+y)$: تغییر متغیر

خطی نیست yy' / نسبت به x، x / تفکیک پذیر $2x+y$ x / کامل (x) / همگن $3+2x+y$ x / دسته بندی x

T= ص 103 = س 38 = $\frac{dy}{dx} = (y-4x)^2$

$z = y-4x$: ورودی عملگر غیرخطی

T= ص 100 = س 16 = جواب معادله؟ $y' = \frac{y-x}{y-x-1}$

$z = y-x \rightarrow$ 2 بار تکرار شده

PAPCO

Subject: ۱۷
Year. Month. Date. ( )

$\int \frac{dx}{x} = \ln x \quad x>0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

مورد
T = مص ۱۰۲ = س ۳۰ =
$\cos(x+y)\,dx = x\sin(x+y)\,dx + x\sin(x+y)\,dy$

$z = x+y$

T = مص ۱۴۰ = س 281 =
$y' = \frac{x-y}{2x-2y+1} \rightarrow z = x-y$

T = محفق ۹۰ = ؟ جواب عمومی = ؟
$y' = (x-y)(y-x+1)+1$

۴ : $z = x-y \longrightarrow$ به هر دو دلیل

T = عمران ۹۱ = جواب معادله دیفرانسیل ؟
$y' = 81x^2 + 18xy + y^2$

$y' = (9x+y)^2$

خطی نیست y^2 / نسبت به x x / تفکیک پذیر x / همگن x معادله همگن نیست چون از درجه ۰ نیست / کامل x
دسته‌بندی x / تغییر متغیر: ورودی عملگر غیرخطی ✓

$z = 9x+y \rightarrow z' = 9+y' \rightarrow z'-9 = z^2 \xrightarrow{\text{تفکیک پذیر}} \frac{dz}{dx} = 9+z^2 \rightarrow \frac{dz}{9+z^2} = dx \rightarrow$

$\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{z}{3}\right) = x + C$ ۱ :

برای تغییر متغیر (تشخیصش) به گزینه‌ها توجه کن، جهت ایده میده.

T = عمران ۹۲ = جواب معادله دیفرانسیل ؟
$(\sqrt{x+y})\,dx = dy \rightarrow \sqrt{x+y} = y' = z$

$x+y = z^2 \rightarrow 1 + \underbrace{y'}_{=z} = 2zz' \rightarrow \overset{y'}{z} = 2zz' - 1 \rightarrow z+1 = 2z\frac{dz}{dx} \rightarrow \frac{2z}{z+1}dz = dx$

صورت رو 2+ و 2- میکنیم

$\rightarrow 2z - 2\ln(z+1) = x + C \Rightarrow \sqrt{x+y} - \ln(\sqrt{x+y}+1) = \frac{x}{2} + C$ ۲

تغییر متغییر نوع دوم

④ هرگاه مشتق عبارتی برحسب متغییر تابع در معادله‌ی دیفرانسیل وجود داشته باشد یا جبران ایجاد کرد

آن عبارت را بعنوان تغییر متغییر در نظر میگیریم.

تذکر* = این عبارت میتواند شامل متغییر مستقل هم باشد.

$2x e^{2y}\frac{dy}{dx} = 3x^4 + e^{2y}$ T= ص 104 = س 43 =

خطی نیست / نسبت به x x / تفکیک پذیر x / همگن e^{2y}x / کامل x / دسته بندی x /

تغییر متغییر نوع اولش که نیست: میره نوع ②:

mmm $\boxed{\text{مشتق عبارتی برحسب متغییر تابعشو توی معادله دیدی؛ اونو به عنوان تغییر متغییر در نظر بگیر}}$

$z = e^{2y} \rightarrow z' = 2y' e^{2y} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} xz' = 3x^4 + z \xrightarrow{\text{خطی مرتبه‌ی اول}}$

$z' - \frac{1}{x} z = 3x^3 \rightarrow z = x(x^3 + c)$

$\rightarrow e^{2y} = x^4 + cx \rightarrow 2y = \ln(x^4 + cx)$: ④

فاکتورانتگرال آخرین انتخابه.

$y'\cos y + \sin y = e^{-x}$ T= ص 108 = س 75 =

اون عبارتهایی که کنار y' است رو جایگذاری کن:

$z = \sin y \rightarrow z' = y'.\cos y \Rightarrow z' + z = e^{-x}$

$z = e^{-x}(x + c)$: ①

$y' + (1+y^2)(\tan^{-1}y - x) = 0$ و $y(0) = 0$ جواب معادله کدام است؟ T= ص 126 = س 189 =

خطی x / نسبت به x x / تفکیک پذیر x / همگن $\tan^{-1}y$ x / کامل x / دسته بندی x / تغییر متغییر نوع ۱ x /

$\frac{y'}{1+y^2} + \tan^{-1}y - x = 0$

$z = \tan^{-1}y \rightarrow z' = \frac{y'}{1+y^2} \rightarrow z' + z = x \xrightarrow{\text{خطی مرتبه‌ی اول}} z = e^{-x}(xe^{+x} - e^{x} + c)$: ④

$\tan^{-1}y = x - 1 + ce^{-x}$

روشهای محاسبهٔ انتگرالهای نامعین -

Subject: ۱۸

Year. Month. Date. ( )

ت = ص 132 = ت 233 =

$$\frac{xy'-y}{x^2}+\frac{y}{x}=e^{-x}$$

حفظ ✓

$$z=\frac{y}{x}\rightarrow z'=\frac{y'x-y}{x^2}\rightarrow z'+z=e^{-x}\rightarrow z=e^{-x}(x+c)$$

ت* = ص ۱۴۲ = ت 297 = ×

برق ۹۰ - ریاضی محض ۹۱ = مکانیک 93 = جواب عمومی کدام است؟

$$y'-x\underbrace{\sin 2y}_{2\sin y.\cos y}=x.e^{-x^2}\cos^2 y$$

تو گزینه ها tan داریم؛ پس یه کاری کنیم که مشتق tan تولید بشه:

$$\frac{y'}{\cos^2 y}-2x\tan y=x.e^{-x^2}$$

$$z=\tan y\Rightarrow z'=\frac{y'}{\cos^2 y}\Rightarrow z'-2xz=xe^{-x^2}\xrightarrow{\text{حفظ مرتبهٔ اول}}$$

$$z=e^{x^2}\left(-\frac{1}{4}e^{-2x^2}+c\right)\xrightarrow{\times 4}4\tan y=-e^{-x^2}+ce^{x^2}\quad :①$$

مرحله2

حفظ x / نسبت به x: xe^{-x^2} / تفکیک پذیر x / همگن $\sin x y$ x / کامل x / دسته بندی x / تغییر متغیر نوع 1 x / نوع 2: باوجوداینکه هیچ جا که وجود نداشت ببین میتونی تولیدش کنی یانه

ت = عمران ۹۰ = جواب معادله زیر؟

$$xy'=e^{-xy}-y$$

حفظ x / تفکیک پذیر / همگن x e^{-xy} / کامل x / دسته بندی $xdy+ydx$ / تغییر متغیر نوع 1 x / میمونه نوع 2 =

$$z=xy\rightarrow z'=y+xy'\rightarrow z'=e^{-z}\xrightarrow{\text{تفکیک پذیر}}e^{z}dz=dx\rightarrow e^{z}=x+c$$

:③

ت = نفت ۹۰ - معادلهٔ دیفرانسیل $yy'=2x^3\cos x^2+\frac{y^2}{x}$ با شرط $y(\sqrt{\pi})=0$ کدام است؟

$$y^2=z\rightarrow z'=2yy'\rightarrow\frac{z'}{2}=2x^3\cos x^2+\frac{z}{x}$$

$$\rightarrow z'-\frac{2}{x}z=4x^3\cos x^2\Rightarrow z=x^2(2\sin x^2+c)$$

④

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$y\left(\ln(xy)-1\right)=0$

T= مکانیک ۹۱ = جواب عمومی معادله $xy' - y\left(\ln(xy)-1\right)=0$ برابر کدام گزینه است؟

خطی $\ln xy$ x / نسبت به x x / تفکیک پذیر $\ln xy - 1$ x / همگن $\ln xy$ x / کامل x / دسته بندی $x\,dy + y\,dx$ ✓
تغییر متغیر ✓

$Z = xy \rightarrow z' = y + xy'$

$z' - y\ln(xy) = 0 \longrightarrow z' - y\ln z = 0 \xrightarrow{y=\frac{z}{x}} z' - \frac{z}{x}\ln z = 0 \rightarrow$

z ها کنار z و dx هم کنار خودش:

$\frac{dz}{z\ln z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(z\ln z) = \ln x + \ln c \rightarrow \ln z = cx \rightarrow z = e^{cx}$

T= عمران ۹۱ = پاسخ معادله زیر؟ $\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{1+x} = (1+x)e^{x}\sec y$

۱) $\frac{\cos y}{1+x} - e^{x} = c$ ۲) $\frac{\sin x}{1+x} - e^{x} = c$

۳) $\frac{\sin y}{1+x} + e^{x} = c$ ۴) $\frac{\cos y}{1+x} + e^{x} = c$

$\cos y\,\frac{dy}{dx} - \frac{\sin y}{1+x} = (1+x)e^{x}$

$z = \sin y \Rightarrow z' = y'\cos y \Rightarrow z' - \frac{z}{1+x} = (1+x)e^{x}$

$z = (1+x)(e^{x}+c)$:②

خطی نسبت $\sec y$ x / نسبت به x ؛ e^{x} x / تفکیک پذیر $\frac{\tan y}{1+x}$ x / همگن $\tan y$ x / کامل x / دسته بندی x

تغییر متغیر نوع ۱ x

T= جواب عمومی؟ $^{**}\ \sin y\,\frac{dy}{dx} = \cos y(1 - x\cos y)$

چون همه گزینه ها شامل $\frac{1}{\cos y}$ هست پس:

$z = \frac{1}{\cos y} \rightarrow z' = \sec y \cdot \tan y \cdot y' = \frac{\sin y}{\cos^2 y}\cdot y'$

$$* \;\cos^2 y \Longrightarrow \frac{\sin y}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} - x \longrightarrow z' - z = -x$$

$$z = e^{x}(+xe^{-x} + e^{-x} + C)$$

$$\frac{1}{\cos y} = x + 1 + Ce^{x} \qquad ,④$$

T= جواب معادله دیفرانسیل $y' = \sqrt{y+\sin x} - \cos x$ باشرط $y(0)=0$ در $x=\pi$ کدام است؟

$$y + \sin x = z^2 \longrightarrow y' + \cos x = 2zz'$$

$$y' + \cos x = \sqrt{y+\sin x} \longrightarrow 2zz' = z \longrightarrow 2z' = 1$$

$$2dz = dx \Rightarrow 2z = x + C \Rightarrow 2\sqrt{y+\sin x} = x + C$$

$$(0,0) \Rightarrow C = 0$$

$$2\sqrt{y(\pi)} = \pi \longrightarrow y(\pi) = \frac{\pi^2}{4}$$

معادله برنولی 8 فرم استاندارد معادله برنولی بصورت زیر است =

هر معادله‌ای که شامل 3 تا جمله y، y'، y^{α} است میشه برنولی

α میتونه کسری یا منفی یا مثبت باشه...

$$\begin{cases} y' + P(x)y = y^{\alpha} q(x) \\ y'y^{-\alpha} + P(x)\cdot y^{1-\alpha} = q(x) \end{cases}$$

روش حل

$$z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha} \Rightarrow \frac{z'}{1-\alpha} + P(x)\cdot z = q(x)$$

یک معادله خطی است که قابل حل است.

ضریب $P(x)$ را z بگیر

T= 98 ـ س 6 =

$$x\frac{dy}{dx} + y = xy^3 \longrightarrow \text{برنولی :}$$

حتماً باید از هر کدوم یه جمله داشته باشی، البته گاهی میتونی فاکتور بگیری =

تقسیم بر y^3، ضریب $q(x)=1$ است $\longrightarrow xy'y^{-3} + y^{-2} = x$

$$z = y^{-2} \longrightarrow z' = -2y'y^{-3} \Rightarrow -\frac{1}{2}xz' + z = x$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$Z' - \frac{2}{x} Z = -2 \rightarrow Z = x^2\left(\frac{2}{x} + C\right) \rightarrow \frac{1}{y^2} = 2x + Cx^2$ ۴

$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3 \cos x^2}{y} \\ y(\sqrt{\pi}) = 0 \end{cases} \rightarrow y' \text{ و } y \text{ و } y^{-1} \rightarrow$ برنولی ↲ آ = ۹۹ = ۸ =

↰ ضریب $q(x)$ = ۱ بگیر + ضریب $P(x)$ را تغییر متغیر بگیر؛

$yy' = \frac{y^2}{x} + 2x^3 \cdot \cos x^2$

$Z = y^2 \Rightarrow Z' = 2yy' \rightarrow \frac{Z'}{2} - \frac{Z}{x} = 2x^3 \cdot \cos x^2 \Rightarrow Z' - \frac{2}{x} Z = 4x^3 \cdot \cos x^2$

$Z = x^2 (2 \sin x^2 + C)$ — چون گفته مقدار تابع در یه نقطه پس C رو حتماً حساب کن.

$(\sqrt{\pi}, 0) \Rightarrow C = 0$

$y^2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \times 2 \times 1 \rightarrow y = \sqrt{\pi}$ ۳

$y' + y = y^2 \ldots$ — آ = ۱۰۳ = ۳۶ =

آ = ۱۰۰ = ۱۹ =

$y\,dx + x(x^2y - 1)\,dy = 0$

خطی $x\ y\ dy$ / نسبت به $x\ x$ / تفکیک پذیر x x^2y-1 / همگن x x^2y-1 / کامل x / دسته بندی ✓

علامت dy

$y\,dx - x\,dy + x^3y\,dy = 0 \Rightarrow -x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) + x^3 y\,dy = 0$

همیشه اول یه متغیره رو خالص کن ← پس کنار dy فقط باید y باشه ← ÷ بر x^3 کن ←

$-\frac{1}{x} d\left(\frac{y}{x}\right) + y\,dy = 0 \xrightarrow{\text{حالا } d\left(\frac{y}{x}\right) \text{ رو خالص کن ← حتماً باید}} -\frac{y}{x} d\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 dy = 0$

ضریبش برحسب y/x باشه ← در y ضربش کن

$-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{3} y^3 = C$

تقسیم بر dy کن

نوع اول x / نوع دوم x : مشتق اول کنار dy نمی‌بینیم / برنولی ← نسبت به y ~~x~~ / نسبت به x ✓

اگر نسبت به y برنولی نبود ← نسبت به x بررسیش کن ؛ روش حل مثل قبلیست

PAPCO

در برنولی نباید yy' ببینیم : باید مجزا باشند.

$y\cancel{x}' + x^3y - x = 0 \longrightarrow$ نسبت به x برنولی هست

برحسب x' مرتبش کن:

$y\,dx + (x + x^3y^2)\,dy = 0$ = ص ۱۲۹ = س 213 = T

خطی x / نسبت به x x / تفکیک پذیر x / همگن x $x + x^3y^2$ / کامل x / دسته بندی ✓

$y\,dx + x\,dy + x^3y^2\,dy = 0 \longrightarrow d(xy) + x^3y^2\,dy = 0 \longrightarrow \frac{d(xy)}{x^3} + y^2\,dy = 0$

$\xrightarrow{\div y^3} \frac{d(xy)}{(xy)^3} + \frac{dy}{y} = 0$

$\xrightarrow{z=xy} \frac{dz}{z^3} + \frac{dy}{y} = 0 \longrightarrow -\frac{1}{2z^2} + \ln y = C$ ④

نوع اول x / مشتق هیچ عبارتی کناری y' نمیبینیم ← مرتبه ۲ x) / برنولی به y x y^2dy

برنولی نسبت به x ← $yx' + x + x^3y^2 = 0$ ✓

$\int (2xy - \sin y)\,dy + \int \cancel{y^2}\,dx = \cancel{2}C$ = ص ۱۲۷ = س ۲۰۰ = T

به y x $\sin y$ / نسبت به x خطی ✓ / تفکیک پذیر x / همگن x $\sin y$ / کامل ✓ / (دسته بندی بررسی نکن)
برنولی x

$xy^2 + \cos y = C$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$ = ص ۹۸ = س 4 = T

اول حد رو حل کن: شاید نیاز به حل معادله نباشه : $\frac{0}{0} \xrightarrow{H} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\frac{2x}{2yy'}} = \frac{2x}{2y\,\frac{x}{y(x^2+y^2)}} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{x^2+y^2} = 0$; ①

جایی که حد میدن / معکوس برنولی / یا مشتق برحسب ... گاهی نیاز به حل معادله نیست

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یا

خطی x / تفکیک پذیر x /

همگن از مرتبه‌ی صفر x / کامل x / دسته بندی x / تغییر متغیر نوع ۱ x / نوع ۲ باید چک کنیم /

نسبت به y برنولی نیست y^3y' / نسبت به x ✓

$x' = xy + \frac{y^3}{x} \rightarrow$ برنولی نسبت به x ✓

$\xrightarrow[\times x]{\times y} \frac{y\,dy}{x\,dx} = \frac{1}{x^2+y^2}$ مشتق y^2 کنار ydy است و مشتق x^2 کنار xdx است

$u = x^2, v = y^2$ پس دو تا تغییر متغیر بده

$y' = \frac{xy^2 - \sin x \cdot \cos x}{y(1-x^2)}$ T= 102ص = 31س =

خطی x / همگن x $\sin x$ / تفکیک پذیر x /

$(xy^2 - \sin x . \cos x)dx + (x^2y - y)dy = 0 \rightarrow$ کامل ✓

پس حالا که کامله، دسته بندیو بررسی نکن

نوع ۱ x /

روش②: $y'y(1-x^2) = xy^2 - \sin x . \cos x \rightarrow z = y^2$

روش③: $y' = \frac{x}{1-x^2} y - \frac{\sin x . \cos x}{1-x^2} y^{-1} \rightarrow$ برنولی

T= 90 = معادله‌ی دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x + x^2y^2}$ با شرط اولیه $y(1)=1$ از کدام نقطه میگذرد؟

خطی x / نسبت به x x / تفکیک پذیر x / همگن x ۴ و ۱ / کامل x / دسته بندی x: 3 راه / تغییر متغیر نوع ۱ x / مشتق عبارتی کنار y' نیست پس باید چک کنیم بمونه واسه مرحله‌ی آخر:

برنولی به y x / به x ✓

$x' = \frac{3x}{y} + x^2y \rightarrow$ برنولی به x ✓ ⇐ میتونی اسم x و y رو عوض کنی ⇐

$\xrightarrow{\div x^2} x'x^{-2} - \frac{3}{y}x^{-1} = y$

PAPCO

$z=x^{-1} \Rightarrow z'=-x'x^{-2} \Rightarrow -z'-\frac{3}{y}z=y \Rightarrow z'+\frac{3}{y}z=-y \rightarrow z=\frac{1}{y^3}\left(\frac{-1}{5}y^5+c\right)$

$(1,1) \rightarrow 1=-\frac{1}{5}+C \rightarrow C=\frac{6}{5}$

درهمهٔ گزینه‌ها: $y=2$ است => در اون معادله $y=2$ بذار تا x بدست بیاد:

$\frac{1}{x}=\frac{1}{8}\left(-\frac{32}{5}+\frac{6}{5}\right)=-\frac{13}{20} \rightarrow x=-\frac{20}{13}$

T= جواب عمومی معادله دیفرانسیل؟ $y^2dx=(x^3-xy)dy$

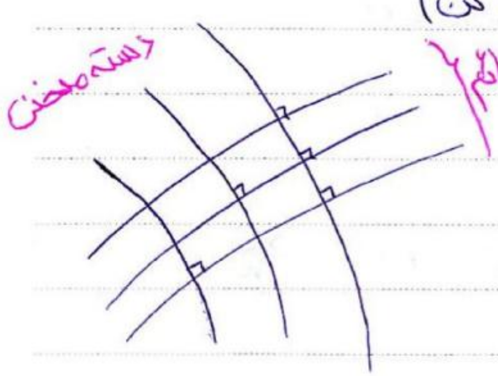
حذف $y^2 x$ / نسبت به x / تفکیک x / همگن x^3-xy x / کامل x / دسته‌بندی ✓

$y(ydx+xdy)=x^3dy$

$y\,d(xy)=x^3dy \xrightarrow{\div x^3} \frac{y\,d(xy)}{x^3}=dy \xrightarrow{\div y^4} \frac{d(xy)}{x^3y^3}=\frac{dy}{y^4} \rightarrow$

$\frac{dz}{z^3}=\frac{dy}{y^4} \rightarrow \frac{1}{-2z^2}=-\frac{1}{3y^3}+C$:④

تغییر متغیر / برنولی به y x / نسبت به x برنولی ✓ (÷ بر dy کن)



مسیرهای قائم 8

برای محاسبهٔ مسیرهای قائم یک دسته منحنی مطابق زیر عمل می‌کنیم =

۱- معادله دیفرانسیل دسته منحنی مورد نظر را بدست می‌آوریم.
$$\begin{cases} g(x,y,c)=0 \\ g'(x,y,c)=0 \end{cases}$$

۲- درمعادلهٔ بدست آمده درقسمت 1 به جای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار می‌دهیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* اگر معادله در مختصات قطبی باشد، بجای r' ، $-\frac{r^2}{r'}$ قرار میدهیم،

« در این مرحله معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم بدست می‌آید.»

۳- جواب عمومی معادله بدست آمده در قسمت ۲ همان « مسیرهای قائم » است.

$y = cx^2$ T= ص ۱۰۱ = س ۲۶ =

① $\begin{cases} y = cx^2 \xrightarrow{\text{از یکی } c \text{ رو پیدا کن}} c = \frac{y}{x^2} \\ y' = 2cx \longrightarrow y' = 2x\frac{y}{x^2} \longrightarrow \boxed{y' = \frac{2y}{x}} \end{cases}$ بذار توی دومی

② $y' \to -\frac{1}{y'} \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}}$

تفکیک پذیر:

③ $-x\,dx = 2y\,dy \longrightarrow -\frac{1}{2}x^2 = y^2 + c \longrightarrow 2y^2 + x^2 = c$

:③

T= ص ۱۰۶ = س ۵۵ =

① $\begin{cases} y^2 = cx^3 \longrightarrow c = \frac{y^2}{x^3} \\ 2yy' = 3cx^2 \longrightarrow 2yy' = 3x^2\frac{y^2}{x^3} \longrightarrow \boxed{2y' = \frac{3y}{x}} \end{cases}$

② $-\frac{2}{y'} = \frac{3y}{x}$

③ $-2x\,dx = 3y\,dy \Rightarrow -x^2 = \frac{3}{2}y^2 + c \Rightarrow 3y^2 + 2x^2 = c$:②

T= ص ۱۰۴ = س ۴۵ =

① $\begin{cases} r = c(1+\sin\theta) \to c = \frac{r}{1+\sin\theta} \\ r' = c\cos\theta \Rightarrow \boxed{r' = \cos\theta\frac{r}{1+\sin\theta}} \end{cases}$

PAPCO

④ $r' \to -\frac{r^2}{r'} \Rightarrow -\frac{r^2}{r'} = r\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \Rightarrow -\frac{r}{r'} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

③ $\frac{dr}{r} = -\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\, d\theta \Rightarrow \ln r = \ln(1-\sin\theta) + \ln c$

$\boxed{r = c(1-\sin\theta)} \to$ گزینه‌ی ① و ④ :

ت = ص ۱۴۱ = س 288

ت = معادله دیفرانسیل برای مسیرهای متعامد بر دسته خم های $r^2 = 2c\cos\theta$ کدامست ؟

① $\begin{cases} r^2 = 2c\cos\theta \to c = \frac{r^2}{2\cos\theta} \\ 2rr' = -2c\sin\theta \longrightarrow rr' = -\sin\theta \frac{r^2}{2\cos\theta} \to r' = -r\frac{\sin\theta}{2\cos\theta} \end{cases}$

④ $r' \to -\frac{r^2}{r'} \to -\frac{r^2}{r'} = -\frac{r}{2}\tan\theta \to r'\tan\theta = 2r$

$\boxed{r' = 2r\cot\theta}$

یه سری روش‌ها هم هست : در کتاب : برای درق ✓

معادله‌ی درجه ۲ :

$f_1(x,y)y'^2 + f_2(x,y)y' + f_3(x,y) = 0$

در صورتیکه بتوانیم معادله‌ی فوق را بصورت حاصلضرب دو معادله درجه‌ی یک تبدیل کنیم ، مانند قبل

می توان جواب عمومی این معادلات را بدست آورد.

ت = ص ۱۶۷ = س ۴۲ = وقتی گزینه ها بصورت حاصلضرب دو معادله درجه ۱ بود : میتونیم اینو تشخیص بدیم :

$y'^2 + (y-1)y' - y = 0$

ضرب بشون . جمع بشون

$\to (y'+y)(y'-1) = 0 \to \begin{matrix} y'+y=0 \to y = ce^{-x} \\ y'-1 = 0 \to y = x+c \end{matrix} \to (y-ce^{-x})(y-x-c) = 0$: ③

میگیم جواب یا اونه یا اینه ولی بصورت ضرب (مرسوم) نشونش میدیم.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

T= ص ۱۱۴ = س ۱۱۴ = چون جواب بصورت حاصلضرب خیالمون رو بابت تبدیل به دو معادله راحت میکنه:

$$y'^2 + 2xy' = y^2 - x^2$$

$$y'^2 + 2xy' + x^2 - y^2 = 0 \rightarrow (y' + x - y)(y' + x + y) = 0$$

$$\begin{cases} y' - y = -x \rightarrow y = e^{x}(xe^{-x} + e^{-x} + c) \\ y' + y = -x \rightarrow y = e^{-x}(-xe^{x} + e^{x} + c) \end{cases}$$

$$\rightarrow (y - x - 1 - ce^{x})(y + x - 1 - ce^{-x}) = 0$$

:④

T= ص ۱۰۱ = س ۲۰ = حاصلضرب = ۱- و حاصلجمع = $\frac{2x}{y}$ ← پس سخته تشخیصش برای تفکیک به دو معادله؛ پس میایم بصورت یه معادله درجه ۲ حلش میکنیم

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - \underset{\text{همگن}}{y} = 0$$

$$y' = \frac{-x \mp \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \Rightarrow y'y + x = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$$

تغییر متغیر

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2zz' = 2x + 2yy' \Rightarrow zz' = \mp z \rightarrow z' = \mp 1$$

$$z = \pm x + c \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \mp x + c \rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + c^2 \mp 2cx$$

$$y^2 = c^2 \mp 2cx$$

:①

بیضی: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

هذلولی: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

سهمی: $(y - y_0)^2 = 4P(x - x_0)$

معادلات ← خطی

معادلات ← غیرخطی

غیرخطی ← در y' عملگر غیرخطی هست

غیرخطی ← در y' عملگر غیرخطی نیست

خوبی این روش اینه که دیگه نیازی به تشخیص معادله نیست و بصورت کلی حلش میکنیم

نکته‌ی مهم = اگر در یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول، عملگر غیرخطی روی y' اعمال شده باشد، برای محاسبه‌ی

جواب عمومی مطابق زیر عمل می کنیم:

اولین کار y' رو بگیر $= P$

$$y' = P \longrightarrow y = f(x,P) \quad (1) \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \underbrace{y'}_{P} = P' \cdot f'(x,P) \Rightarrow h(x,P,C) = 0 \quad (2)$$

با حذف P بین (1) و (2) جواب عمومی بدست می‌آید.

$$x = g(y,P) \quad (1) \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} \underbrace{\frac{dx}{dy}}_{\frac{1}{P}} = \frac{dP}{dy} \cdot g'(y,P) \Rightarrow h(y,P,C) = 0 \quad (2)$$

با حذف P بین (1) و (2) جواب عمومی بدست می‌آید.

P هایی که بعد از مشتق گیری بدست می‌آیند و به پارامتر بستگی ندارند، با جایگذاری در رابطه‌ی (1) جواب غیرعادی می دهند.

مثال = جواب عمومی معادله‌ی زیر را بدست آورید؟

$$y = xy'^3 + y'^3$$

چون عملگر غیرخطی روی y' عمل کرده پس y' را بگیر P :

$$y' = P \rightarrow y = xP^3 + P^3 \quad (1)$$

$$P = y' = P^3 + 3xP^2P' + 3P^2P' \Rightarrow (P - P^3) = \frac{dP}{dx}(3xP^2 + 3P^2)$$

$$(P - P^3)\frac{dx}{dP} - 3xP^2 = 3P^2$$

خطی مرتبه‌ی اول است با این شرط که $P - P^3 \neq 0$:

$$P - P^3 \neq 0 \rightarrow \frac{dx}{dP} - \frac{3P}{1-P^2}x = \frac{3P}{1-P^2} \Rightarrow x = (1-P^2)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}(1-P^2)^{\frac{3}{2}} + c\right) \quad (2)$$

با حذف P بین (1) و (2) جواب عمومی بدست می‌آید:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$P=\left(\frac{y}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}} \longrightarrow$ در ② جایگذاری

$P(1-P^2)=0 \longrightarrow \begin{cases} P=0 \to y=0 \\ P=1 \to y=x+1 \\ P=-1 \to y=-x-1 \end{cases}$ اینا میشن جوابای غیرعادی

اگه صفر بود

معادله کلرو 8 $y=xy'+f(y') \longrightarrow$ f عملگر غیر خطی است.

برای از بین بردن y باید نسبت به x مشتق بگیریم $y'=P \longrightarrow y=xP+f(P)$

$P\ \cancel{y'} = P + xP' + P'.f'(P) \Rightarrow P'(x+f'(P))=0$

$P'=0 \Rightarrow P=C \Rightarrow y=xC+f(C)$ جواب عمومی:

$x+f'(P)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=xP+f(P) \\ x+f'(P)=0 \end{cases}$

با حذف P جواب غیرعادی بدست می آید: هر جوابی که به C ربطی نداره میشه جواب غیرعادی

* در معادله کلرو پوش جواب عمومی ، جواب غیرعادی است.
* اگر معادله کلرو را داشتیم و به جای y' ، c بذاری => جواب عمومی بدست می آید.

* برای محاسبه پوش دسته منحنی $g(x,y,c)=0$ کافی است از دستگاه زیر c را حذف کنیم:

$$\begin{cases} g(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial g(x,y,c)}{\partial c}=0 \end{cases}$$

Subject: ۲۴

Year. Month. Date. ( )

۲ تا جواب بدست میاد:

اونیکه یه c تولید میکنه: میشه جواب عمومی

اونیکه که c نداره و وابسته به c نیست: میشه جواب غیرعادی

$\rightarrow$ مهم

$y - xy' - 2y'^2 = 0$

T = ص ۱۰۷ = س 63 = روی y' عملگر غیرخطی عمل کرده ← میگیریش P:

$y' = P \rightarrow y = xP + 2P^2 \rightarrow y' = P + xP' + 4PP'$

اینجا مشتقه اگه انتگرال بگیری: یه c تولید میشه پس برای محاسبهٔ جواب غیرعادی از یا بین میری

$$P'(x+4P) = 0 \rightarrow \begin{cases} P' = 0 \rightarrow \\ x + 4P = 0 \rightarrow P = -\frac{x}{4} \overset{①}{\Rightarrow} y = x\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{x^2}{8} = -\frac{x^2}{8} \end{cases}$$

①:

روش دوم = تشخیص میدیم که کلرو است:

کلرو: $y = xy' + 2y'^2 \rightarrow \begin{cases} y = xc + 2c^2 \; ① \\ 0 = x + 4c \rightarrow c = -\frac{x}{4} \end{cases}$

جواب عمومی:

برای محاسبهٔ این روش کافیست که از بالایی مشتق بگیری

$$\overset{①}{\Rightarrow} y = x\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{x^2}{8} = -\frac{x^2}{8}$$

$y = xy' + \cos y'$

T = ص ۱۰۹ = س 82 =

با روش اول کار میکنیم: کاری نداریم که چه معادله ای است:

$y' = P \rightarrow y = xP + \cos P \; ① \rightarrow \overset{P}{\cancel{y'}} = P + xP' - P'.\sin P \rightarrow P'(x - \sin P) = 0$

$x - \sin P = 0 \rightarrow x = \sin P \rightarrow y = x.\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

$x = 2y' + \sin y'$

T = ص ۱۱۹ = س ۱۴۴ =

کاری نداریم چه معادله است میگیم چون عملگر غیرخطی روی y' کار کرده =

$y' = P \rightarrow x = 2P + \sin P \; ① \rightarrow \frac{\cancel{dx}}{\frac{1}{P}\,dy} = 2\frac{dP}{dy} + \cos P.\frac{dP}{dy}$

$dy = 2P.\,dP + P.\cos P.\,dP \Rightarrow \underline{y = P^2 + P\sin P + \cos P + C} \; ②$

②:

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ت= ریاضی محض ۹۵ = جواب عمومی معادله؟

$y^2y'^2+3xy'-y=0$

عملگر غیرخطی روی y' عمل کرده ←

$$y'=P \rightarrow y^2P^2+3xP-y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3P}y-\frac{1}{3}y^2P \quad (1)$$

$$\frac{3\,dx}{dy}=\frac{P-y\frac{dP}{dy}}{P^2}-2yP-y^2\frac{dP}{dy} \xrightarrow{\times P^2}$$

$$3P=P-y\frac{dP}{dy}-2yP^3-y^2P^2\frac{dP}{dy}$$

$$2P(1+yP^2)+y\frac{dP}{dy}(1+yP^2)=0$$

$$(1+yP^2)\left(2P+y\frac{dP}{dy}\right)=0 \rightarrow 1+yP^2=0 \rightarrow$$ جواب غیرعادی *

$$2P+y\frac{dP}{dy}=0 \rightarrow \frac{dP}{P}=-\frac{2dy}{y}$$

$$\rightarrow \ln P=-2\ln y+\ln c \Rightarrow \boxed{Py^2=c} \quad (2)$$ در معادله ① به جای P، $\frac{c}{y^2}$ میذاریم

$$x=\frac{1}{3}y\times\frac{y^2}{c}-\frac{1}{3}c \Rightarrow \boxed{3cx=y^3-c^2}$$

* اونیکه مشتق داره، انتگرال داره ← c رو تولید میکنه ← جواب عمومی میده
واونیکی که c تولید نمیکنه میشه جواب غیرعادی

P4PCO

Subject: ۲۵
Year. Month. Date. ( )

مرتبهٔ اول ← خطی
← غیرخطی ← روی متغیر تابع عملگر غیرخطی اعمال شده است.
شده است.

اینو که گفتیم = $y' = P$

پس دسته بندی برای 2 مورد بالا:
یا سوال به فرم دیفرانسیل است و یا به فرم مشتق:

مدل دیفرانسیلی ↓

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

↓
تفکیک پذیر بودن
↓
کامل
↓
همگن
↓
دسته بندی
↓
تغییر متغیر
↓
برنولی نسبت به x و y
↓
خطی نسبت به x و y

مدل مشتق ↑

$f(x, y, y') = 0$

← بالترتیب اولویت عکس میشه