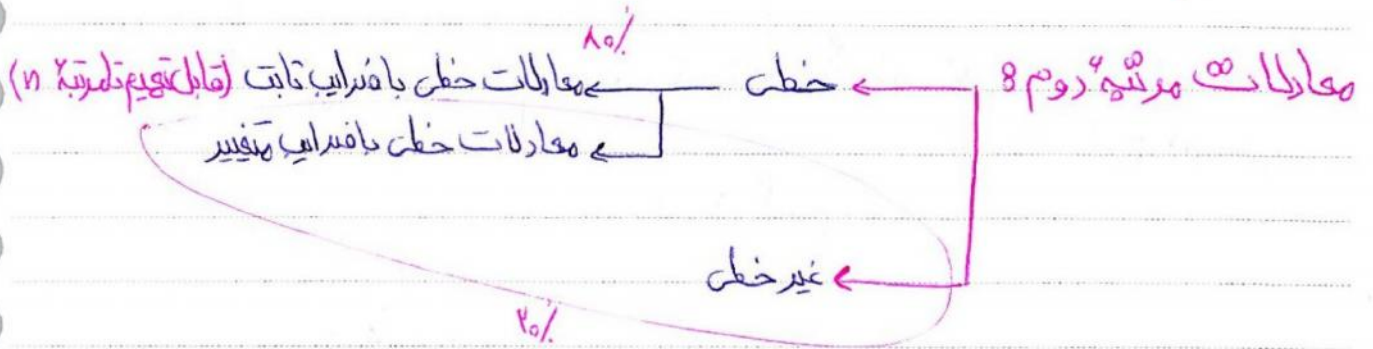


Subject :

Year . Month . Date . ()

مفصل دوم 8



معادلات خطی با ضرایب ثابت = کمترین مزه این معادلات دوبرت زیر است =

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = R(x)$$

↓
درجه نسبت به y و مشتقاتش

$R(x) = 0$ ← معادله هگن
 $R(x) \neq 0$ ← معادله غیر هگن

$$x^2 y'' + 4xy' = 0 \rightarrow$$

وقتی میگویند هگن یا نه؟ باید بدویم هگن نسبت به چی؟ نسبت به y و مشتقاتش =
درجه نسبت به y و مشتقاتش = 2

مخاطبه جواب عموم معادله خطی با ضرایب ثابت هگن =
 a_n, a_{n-1}, \dots

فرم کلی این نوع معادلات مطابق زیر است =

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

برای محاسبه جواب عموم معادله هگن مطابق زیر عمل می کنیم =

① معادله معسر آن را تسکین می دهیم: هر جا که مشتق مرتبه n داری ، به جاش x^n بنویس

$$y^{(n)} \rightarrow x^n$$

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$D^n y = y^{(n)} \Rightarrow (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) y = 0 \quad \text{فرم ایترتوری} =$$

ایترتور مشتق

⑤ رقیبه‌های معادله معسر را بدست می‌آوریم.

که دو حالت دارد =

۱. α رقیبه مرتبه k ام معسر است =

$$y_h = (\text{چند جمله ای از درجه } k-1) e^{\alpha x}$$

۲. $\alpha = \pm j\beta$ رقیبه مختلط مرتبه k ام معسر است =

$$y_h = e^{\alpha x} [(\text{چند جمله ای از درجه } k-1) \cos \beta x + (\text{چند جمله ای از درجه } k-1) \sin \beta x]$$

۳ بار تکرار شده

مثال = جواب عمومی معادله تفاضلی زیر را بدست آورید

$$D^2(D-1)^3(D^2+2D+2)^2(D^2+9)^3(D^2+6D+12)y=0$$

وقت به فرم ایترتوری است رنگه نیاز به نوشتن معادله معسر نیست فقط کافیست y و 1 را در نظر بگیریم =

$$s=0 \quad 4 \rightarrow y_{h1} = (c_1 x + c_2) e^{0x}$$

$$s=1 \quad 3 \rightarrow y_{h2} = (c_3 x^2 + c_4 x + c_5) e^x$$

$$s=-1 \pm j \quad 2 \rightarrow y_{h3} = e^{-x} [(c_6 x + c_7) \cos x + (c_8 x + c_9) \sin x]$$

$$s=\pm 3j \quad 3 \rightarrow y_{h4} = e^{0x} [(c_{10} x^2 + c_{11} x + c_{12}) \cos 3x + (c_{13} x^2 + c_{14} x + c_{15}) \sin 3x]$$

$$s=-3 \pm 2j \quad 1 \rightarrow y_{h5} = e^{-3x} [c_{16} \cos 2x + c_{17} \sin 2x]$$

$$y_h = y_{h1} + y_{h2} + y_{h3} + y_{h4} + y_{h5}$$

۲+۳+۴+۶+۲=۱۷
بالاترین توانهای مشتق

۱۷ پارامتر داریم = پس مرتبتش هجده ۱۷

Subject :

Year . Month . Date . ()

یادآوری =

* در معادله $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ توجه به مطالب زیر مفید است:

① این معادله دقیقاً n ریشه دارد.

② اگر a_i ها (ضرایب) حقیقی باشند در صورتیکه $\alpha + j\beta$ ریشه باشد حتماً $\alpha - j\beta$ هم ریشه است.

(نکته: تعداد ریشه های مختلط همواره زوج است.)

③ $a_n x^2 + b x + c = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha \beta = \frac{c}{a} \end{cases}$ مجموع ریشه ها = $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$

مجموع حاصلضرب ۲ به ۲ ریشه ها = $\frac{a_{n-2}}{a_n}$ $a_n x^3 + b x^2 + c x + d = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$

مجموع حاصلضرب ۳ به ۳ ریشه ها = $-\frac{a_{n-3}}{a_n}$

حاصلضرب کل ریشه ها = $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

④ برای محاسبه ریشه های $a_n s^n + a_0 = 0$ (فقط بالاترین و کمترین توان مخالف صفر باشند) از مقنیه

معاور استفاده می کنیم.

$z = x + jy \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ \pi + \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases} \end{cases}$
 $\cos\theta + j\sin\theta$
 $z = r \text{cis } \theta$

اگر نقطه در ربع اول یا چهارم باشد
اگر نقطه در ربع دوم یا سوم باشد

$p = z = -2 : \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \pi \end{cases}$

$m = z = 1 + j : \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

مؤثر $z = x + iy \Rightarrow z = r \text{ cis } \theta \Rightarrow (z)^{\frac{1}{n}} = (r)^{\frac{1}{n}} \text{ cis } \left(\frac{2k\pi + \theta}{n} \right)$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

مثال: جواب عمومی معادله $y^{(6)} + y = 0$ را بدست آورید.
 اول تشکیل معادله مشخص:

$S^6 + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مؤثر}} S = (-1)^{\frac{1}{6}} = (\text{cis } \pi)^{\frac{1}{6}} = \text{cis } \frac{2k\pi + \pi}{6} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$k=0 \rightarrow S = \text{cis } \frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ گفتیم تعدادش همیشه زوج

$k=1 \rightarrow S = \text{cis } \left(\frac{3\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = +i$

$k=2 \rightarrow S = \text{cis } \left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

بگه که تا ریشه در سمت اومد: نیاز به محاسبه 3 و 4 و 5 نیست:

$y_{h0} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} \left[c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2} \right]$

$y_{h1} = e^{0x} \left[c_3 \cos x + c_4 \sin x \right]$

$y_{h2} = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x} \left[c_5 \cos \frac{x}{2} + c_6 \sin \frac{x}{2} \right]$

$y_h = y_{h0} + y_{h1} + y_{h2}$

تکاملون مرتبه 4 ریشه =

فرض کنیم α_0 ریشه 4 باشد پس ... اولین مشتق مخالف مرتبه n است.

$f(\alpha_0) = 0$
 $f'(\alpha_0) = 0$
 $f''(\alpha_0) = 0$
 \vdots
 $f^{(n-1)}(\alpha_0) = 0$
 $f^{(n)}(\alpha_0) \neq 0$

$\Leftrightarrow \alpha_0$ ریشه مرتبه n ام $f(x)$ است

Subject:

Year. Month. Date. ()

مثال = $\alpha = i\pi$ ریشه مرتبه چندم تابع $f(x) = 1 + \operatorname{ch} x$ است؟

$$f(i\pi) = 1 + \operatorname{ch} i\pi = 1 + \cos \pi = 0$$

$$f'(x) = \operatorname{sh} x \rightarrow f'(i\pi) = 0 \Rightarrow \alpha = i\pi \text{ ریشه مرتبه ۲ دوم است.}$$

$$f''(x) = \operatorname{ch} x \rightarrow f''(i\pi) \neq 0$$

مثال = $\alpha = 0$ ریشه مرتبه چندم تابع $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$ است؟

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x \rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x \rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x \rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x \rightarrow f^{(4)}(0) \neq 0$$

$\alpha = 0$ ریشه چهارم است.

$$f_1(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_0)^n f_1(x)$$

مثال = $\alpha = -1$ ریشه مرتبه چندم معادله زیر است؟ $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$

$$f(-1) = 0$$

$$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 4x - 3 \rightarrow f'(-1) = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 + 36x^2 + 12x - 4 \rightarrow f''(-1) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 72x + 12 \rightarrow f'''(-1) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 120x + 72 \rightarrow f^{(4)}(-1) \neq 0$$

$\alpha = -1$ ریشه مرتبه چهارم است

$$\Rightarrow (x+1)^4 (x - \cancel{-1}) = 0 \rightarrow (x - (-1))^4 (x - \alpha) = 0 \rightarrow -\alpha = -1 \rightarrow \alpha = 1$$

$(ax^2+bx+c)e^{4x}$: ۴ رتبه مرتبه ۳
 ممکنه b و $c = 0$ باشن ولی هیچوقت $a = 0$ نمیشه

اگر دو جواب معادله غیر همگن را به ما دادند = اختلاف این دو جواب همیشه جواب معادله همگن متناظر با اینهاست.

$$\frac{d^4(y_1)}{dx^4} + 4y_1 = f(x)$$

$$\rightarrow \frac{d^4(y_2 - y_1)}{dx^4} + 4(y_2 - y_1) = 0$$

$$\frac{d^4 y_2}{dx^4} + 4y_2 = f(x)$$

مفیده =

اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله غیر همگن $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = R(x)$ باشند آنگاه $y_1 - y_2$

جواب عمومی معادله همگن متناظر با معادله فوق است.

$$\sqrt{S^4 + 4} = 0 \rightarrow$$

① غلط: میگه ریشه مرتبه ۴ معادله معکوس نیست پس غلط

② غلط: $\sqrt{2} \pm j$ اندازه اش میشه $\sqrt{3}$ ولی ما میخوایم اندازه اش بشه $\sqrt{2}$ پس غلط

$$\rightarrow S^4 = -4 \rightarrow S = (-4)^{\frac{1}{4}} \rightarrow |S| = \sqrt{2}$$

③ ریشه اش بوده $j \pm 1$ اندازه اش $\sqrt{2}$ ← میخونه درست باشه

④ میگه $j \pm \sqrt{2}$ اندازه اش میشه $\sqrt{2}$ پس هون گزینه ③ مطمئناً درسته.

$$y^{(4)} + y = 0 \rightarrow S^4 + 1 = 0 \rightarrow |S| = 1$$

$$T = 3 \times 28 = 84$$

① ← اندازه اش ۱ ضعیفه = پس میخونه گزینه ② و ③

T = ۹۰ = اگر ae^{2x} یک جواب معادله زیر باشد جواب دیگر کراسه؟

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} - 5y'' + a(y' - y) = 0$$

۲ رتبه مرتبه ۴ معادله معکوس نیست $\rightarrow ae^{2x}$

$$S^4 - 4S^3 - 5S^2 + a(S - 1) = 0 \rightarrow 16 - 32 - 20 + a = 0 \rightarrow a = 36$$

⑤ حذف

③ حتی غلط میگه ۲ رتبه مرتبه ۳ است.

④ میام ۲ روحانگیزی میکنم: $16 + 32 - 20 - 36 \times 3 \neq 0$

Subject :

Year . Month . Date . ()

پہلوئے (B) و (P) ہیں 3- حتماً رشتہ است، صدیوں مرتبش: ہیں مستحق بگیر =

$$4S^3 - 12S^2 - 10S + 36 = 0 \rightarrow -4 \times 27 - 12 \times 9 + 30 + 36 \neq 0 \rightarrow (1)$$

پہلو حذف کریں (4) و (3) مجموعہ رشتہ ہا = $-\frac{b}{a}$

$$4 + 4 + (-3) + x = 4 \rightarrow x = 3$$

3- بار 1 بار یا 2 بار: x رو حساب معلوم نہیں ہیں، چونکہ دوبارہ 3- نہیں 2 بار لکھا ہے

روشن سف = ہیں 3- نباید 2 بار لکھیں \rightarrow حتماً رو عدد رنگہ باید مختلف علامہ $\rightarrow -36 =$ حاصل ضرب رشتہ ہا باشد
پہلو ضرب رشتہ ہا باید (-) ہونے

روشن چہام = $S=2$ دو بار رشتہ است، $a=36$ رو پیرا اگر $=4$

$$S^4 - 4S^3 - 5S^2 + 36S - 36 \quad | \quad S^2 - 4S + 4$$

عبارت = 91 اگر y_1 و y_2 رو جواب معادله $y'' - 2y' + y = R(x)$ پورہ و $y_1(0) = y_2(0)$ و $y_1'(0) = y_2'(0) + 1$

$y_1 - y_2$ جواب معادله ہنگ منسہ $\leftarrow (3)$ و حذف: چون میگہ 1 رشتہ مرتبہ 2 \leftarrow مجموعہ رشتہ ہا = 2 \leftarrow حذف

$$y_1 = y_2 + x e^{-x} \quad (1)$$

$$y_1 = y_2 + x^2 e^{-x} \quad (3)$$

1 رشتہ مرتبہ 3 معادله معسر است x

محاسبہ جواب عمومی معادله غیر ہنگ خطہ جابضی ثابت =

فرم کلی این معادلات مطابق زیر است =

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = R(x) \quad (*)$$

برای محاسبه جواب عمومی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم =

۱) جواب عمومی معادله هگن متناظر با معادله (*) جست می‌آوریم (y_h)

۲) یک جواب خصوصی معادله (*) را بدست می‌آوریم (y_p)

۳) جواب عمومی معادله (*) بصورت زیر است =

$$y_{\text{عموم}} = y_h + y_p$$

روشهای مناسبه جواب خصوصی =

۱- روش فدرام نامشخص (نامعین)

۲- روش ابراتور معکوس

۳- روش تغییر چارامترها

$\tan^{-1} \frac{B}{A}$ بزرگتر از ۹۰ درجه

$$R(x) = e^{\alpha x} \left(\text{چند جمله ای از درجه } n \right)$$

$$\cos Bx$$

$$\sin Bx$$

$$A \cos Bx + B \sin Bx$$

روش فدرامپ نامشخص
اگر $R(x)$ به فرم زیر باشد =

$$y_p = x^m e^{\alpha x} \left[(\text{چند جمله ای از درجه } n) \cos Bx + (\text{چند جمله ای از درجه } n) \sin Bx \right]$$

تعداد ریشه های $\alpha \neq \pm jB$ معادله معین

$$x^m e^{\alpha x} (\text{چند جمله ای از درجه } n) (A \cos Bx + B \sin Bx)$$

$$\cos(Bx + \theta_0)$$

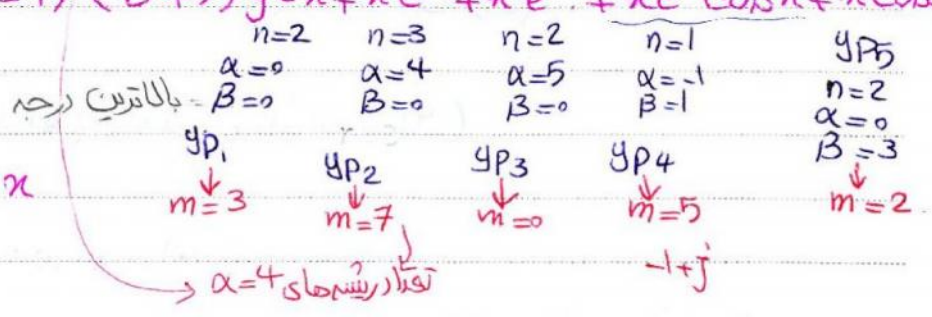
$$\sin(Bx + \theta_0)$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

مفهوم کلیت جواب خصوصاً معادلهٔ داره سطره رابست آورده؟

$$D^3(D^2+2D+D)^5(D-4)^7(D^2+9)^2 y = x^2 + x^3 e^{4x} + x^2 e^{5x} + x e^{-x} \cos x + x^2 \cos 3x$$



$+ x e^{2x} \cos 5x + x \sin 6x$

y_{P6}
 $n=1$
 $\alpha=2$
 $\beta=5$
 $m=0$

y_{P7}
 $n=1$
 $\alpha=0$
 $\beta=6$
 $m=0$

از اینجا به بعد به سمت چپ برگردیم تا متوقف بشویم در $y=0$

$$y_{P1} = x^3 e^{0x} (a_1 x^2 + a_2 x + a_3)$$

$$y_{P2} = x^7 e^{4x} (a_4 x^3 + a_5 x^2 + a_6 x + a_7)$$

$$y_{P4} = x^5 e^{-x} [(a_8 x + a_9) \cos x + (a_{10} x + a_{11}) \sin x]$$

$$y_{P6} = x^0 e^{2x} [(a_{12} x + a_{13}) \cos 5x + (a_{14} x + a_{15}) \sin 5x]$$

$x \cos x \rightarrow n=1$ ④ $\underline{13} = \underline{295} = T$

$\alpha=0$ $\rightarrow \pm j$ مورد نظره $\rightarrow m=2$

$\beta=1$

$$S^4 + 2S^2 + 1 = 0 \rightarrow (S^2 + 1)^2 = 0$$

از ریشه‌ها برای تشخیص توان کمترین توان فرد به m است

$\cos x \rightarrow n=0$

$\alpha=0$ $\rightarrow m=1$

$\beta=1$

تعداد ریشه‌های $\pm j$

① $\underline{57} = \underline{303} = T$

$B \text{ و } A \rightarrow S^2(S^2 + 1) = 0$

$\rightarrow m=1$

$$y^{(4)} - y'' = \alpha + e^{\alpha x}$$

$$S^2(S^2 - 1) = 0$$

$$\textcircled{K} = 104 = 3120$$

$$\alpha = 0$$

$$B = 0$$

$$m = 2$$

رودر نظر بگیر $\rightarrow \alpha_3 e^{\alpha x}$ در گذشته ما اون تابه ای که مربوط به خودش رو حذف کن

$$1 = \textcircled{D} / \textcircled{E} = \textcircled{D} / \textcircled{E} = \textcircled{D} / \textcircled{E} \leftarrow \text{میتوان} = m$$

$$y e^{\alpha x} \rightarrow n = 0, \alpha = 1, B = 0 \rightarrow m = 1$$

$$B = 0 \times$$

$$\textcircled{D} = 63 = 4620 = T$$

مغسل

$$\textcircled{D} / \textcircled{E} = \textcircled{D} / \textcircled{E}$$

$$S(S^2 - 1) = 0$$

در \textcircled{D} و \textcircled{E} توان $= 1 = B$ پس میتونه درست باشه

$$V \rightarrow n = 0$$

$$\alpha = 0 \rightarrow m = 1$$

$$B = 0$$

\textcircled{K}

$$\sin \alpha \rightarrow n = 0, \alpha = 0, B = 1 \rightarrow m = 2$$

$$\textcircled{D} = 28 = 2970$$

$$S^4 + 2S^2 + 1 = 0 \rightarrow (S^2 + 1)^2 = 0$$

$$\begin{matrix} 2 & \textcircled{D} \\ 1 & \textcircled{E} \\ 1 & \textcircled{E} \\ 0 & \textcircled{K} \end{matrix} \checkmark$$

$$n = 1, \alpha = 1, B = 2 \rightarrow m = 1 \rightarrow \textcircled{K}$$

$$= 69 = 4620$$

$$S^2(S^2 - 2S + 5) = 0 \rightarrow 1 \pm 2j$$

$$x e^{\alpha x} [A \cos 2x + B \sin 2x] \quad \textcircled{D}$$

نمای متفاوت باره پس غلط

$$m = 0 = \textcircled{D} / \textcircled{E} \text{ چون } \cos \text{ نازند غلط}$$

$$n = 2, \alpha = 4, B = 0 \rightarrow m = 3$$

$$\begin{matrix} 0 & \textcircled{D} \\ 0 & \textcircled{E} \\ 4 & \textcircled{E} \\ \textcircled{D} & \textcircled{K} \end{matrix} \checkmark$$

$$\textcircled{K} = 4620 = 4620 = T$$

Subject :

Year . Month . Date . ()

عبارت چند جمله ای بر حسب D

$$f(D)y = R(x) \Rightarrow y_p = \frac{R(x)}{f(D)}$$

اگر α و β معکوس است

1) $D^n f(x) = f^{(n)}(x)$

$D = 0$ و α و β معکوس است

2) $\frac{f(x)}{D} = \int f(x) dx$

معکوس مشتق = انتگرال

3) $\frac{e^{\alpha x}}{f(D)} = \frac{e^{\alpha x}}{f(\alpha)}$

$f(\alpha) \neq 0$

به جای D ها α بنویس

تذکره: اگر α ریشه مرتبه k ام $f(D)$ باشد $\alpha =$ ریشه مرتبه k ام معادله معسر است:

اگر α ریشه مرتبه k باشد، حتماً در مخرج α^k باید قدر بشود

$$\frac{e^{\alpha x}}{f(D)} = x^k \cdot \frac{e^{\alpha x}}{f^{(k)}(D)} \Big|_{D=\alpha}$$

در $f(D)$ و k با مشتق بگیر و به جای D بنویس

4) $\frac{\cos \beta x \text{ یا } \sin \beta x}{f(D^2)} = \frac{\cos \beta x \text{ یا } \sin \beta x}{f(-\beta^2)}$ و $f(-\beta^2) \neq 0$

تذکره: $\beta \neq 0$ ریشه مرتبه k ام معادله معسر است $\beta^2 =$ ریشه مرتبه k ام

$$\frac{\cos \beta x \text{ یا } \sin \beta x}{f(D^2)} = x^k \cdot \frac{\cos \beta x \text{ یا } \sin \beta x}{f^{(k)}(D^2)} \Big|_{D^2=-\beta^2}$$

5) $\frac{e^{\alpha x} g(x)}{f(D)} = e^{\alpha x} \frac{g(x)}{f(D+\alpha)}$

ریشه مشتق تقریباً که x را می بیند بیرون
نجات خالص x به عبارت ...

$$4) \frac{x g(x)}{f(x)} = x \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{f'(x)}{f^2(x)} (g(x)) \quad \text{این به عبارتی}$$

مثال = یک جواب خصوصی $y = e^x + \sin 2x$ برای $(D^5 + D^4 + 2D^3 + 3D^2 + 4D + 3)y = e^x + \sin 2x$ داریم. جواب خصوصی متفاوت در برابر e^x و $\sin 2x$ و $\cos 2x$ متفاوت دارند. جواب خصوصی متفاوت در برابر e^x و $\sin 2x$ و $\cos 2x$ متفاوت دارند.

$$y_{p1} = \frac{e^x}{D^5 + D^4 + 2D^3 + 3D^2 + 4D + 3} = \frac{e^x}{14} \rightarrow \text{طبق نکته 3 به جای 0 ها 1 قرار}$$

$$y_{p2} = \frac{\sin 2x}{D^5 + D^4 + 2D^3 + 3D^2 + 4D + 3} \quad \text{طبق 4: Sin و Cos رو باید بر حسب } D^2 \text{ مرتب کن: } D^2 = -B^2 = -4 \Rightarrow 2 = B$$

$$\begin{array}{cccc} D^5 & D^4 & 2D^3 & 3D^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0(D^2)^2 & (D^2)^2 & 2D(D^2) & 3(-4) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 16D & 16 & -8D & 40 \end{array}$$

خواب = 40

$$= \frac{\sin 2x}{12D+7} \times \frac{12D-7}{12D-7} = \frac{24 \cos 2x - 7 \sin 2x}{144D^2 - 49}$$

برای تولید D^2 در صورت و مرتب کن

$$y_p = \frac{e^x}{14} - \frac{24 \cos 2x - 7 \sin 2x}{144 \times 4 + 49}$$

مثال = جواب عمومی معادله $y'' + 6y' + 13y = x \cdot e^{-3x} \cdot \cos 2x$ را بدست آورید.

$$S^2 + 6S + 13 = 0 \quad \text{جواب عمومی خواسته اول معادله همنساز:}$$

$$S = -3 \pm 2j \rightarrow y_h = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

$$y_p = \frac{x \cdot e^{-3x} \cdot \cos 2x}{D^2 + 6D + 13}$$

هر وقت $e^{\alpha x}$ داشته باشیم بهتره از خواص 5 استفاده کنیم و جای x بیرون:

$$\textcircled{5} \frac{e^{-3x} \cdot x \cos 2x}{(D-3)^2 + 6(D-3) + 13} = e^{-3x} \cdot \frac{x \cos 2x}{D^2 + 4} \quad \textcircled{6}$$

Subject :

Year . Month . Date . ()

$$\textcircled{A} \quad e^{-3x} \left\{ x \cdot \frac{\cos 2x}{D^2+4} - \frac{2D}{(D^2+4)^2} \{ \cos 2x \} \right\} = *$$

هنگامی که ضرایب در طرفین مخالف و خارج
عبارت در حقیقت 0 نباشد

①
↓
}

$$\frac{\cos 2x}{0}$$

در این مورد ضریب کسری نوار
مخرج مشتق بگیرد

$$x \cdot \frac{\cos 2x}{2D} \xrightarrow{\textcircled{A}} \frac{1}{4} x \sin 2x$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \frac{-4 \sin 2x}{(D^2+4)^2} \xrightarrow{\textcircled{B}} \frac{-4 \sin 2x}{0} \xrightarrow{\textcircled{C} \text{ تذکر}} x \frac{-4 \sin 2x}{4D(D^2+4)} \xrightarrow{\textcircled{D}} x \frac{-4 \sin 2x}{0} \xrightarrow{\textcircled{E} \text{ تذکر}}$$

$$x^2 \frac{-4 \sin 2x}{12D^2+16} \xrightarrow{\textcircled{F}} x^2 \frac{-4 \sin 2x}{-32} = \frac{1}{8} x^2 \sin 2x$$

$$* \quad e^{-3x} \left(\frac{1}{4} x^2 \sin 2x - \frac{1}{8} x^2 \sin 2x \right) = \frac{1}{8} x^2 e^{-3x} \sin 2x$$

$$\cos 2x \& y = y_h + y_p = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{8} x^2 e^{-3x} \sin 2x$$

راه اول =

$$n=1$$

$$a=-3 \rightarrow m=1$$

$$B=2$$

$$\rightarrow y_p = x e^{-3x} \{ (ax+b) \cos 2x + (cx+d) \sin 2x \}$$

که خطی طولانی ...

$$y'' + 4y = 3 \cos 2t$$

$$= 74 = 307 = T$$

(1) معادله غیر همگن است - معادله را باید در جواب عمومی به عبارت فاکتور اعداد را بنویسد

(2) 2 و -2 ریشه های معادله هستند

(3) ااره میگوید $2t +$ ریشه سازه است - پس معادله را باید $\cos 2t$ بنویسد

Ⓛ طریقی $\textcircled{A} B \pm$ ریشه بود معادله را باید در یک x^k ضرب کرد تا اینجاست معادله را باید بنویسد *

(F✓)

$$y_p = \frac{3 \cos 2t}{D^2+4} \xrightarrow{\text{مخرج معادله}} \frac{3 \cos 2t}{2D} \xrightarrow{\text{در این مورد ضریب کسری نوار مخرج مشتق بگیرد}} \frac{3 \cos 2t}{2D} = \frac{3}{4} t \sin 2t$$

$y_p = (\text{از جنس } y_h \text{ است}) + (\text{از جنس } y_h \text{ نیست})$

منفرد جبر است

مثلاً در ④: عبارت دوم قسمت منحصر بفرد است ...

$T = 3e^{2x} = 8e^{2x} = y_h = y_p + \text{پارامتر است}$ = پارامتر نیست = مسئله از ویژگی‌ها مشخص داریم:

بسی باید درجه x^2 مرتبه باشد با آنکه شده چون مرتبه 2 هست

(۱) $x^3 e^{2x}$: درجه مرتبه 4 مفسر است = مرتبه جز y_h باشد

(۲) $y_p: x^2 e^{2x}$: / حتی باید $x^3 e^{2x}$ رو داشته باشد و خدایه پس غلط: اگر مرتبه مرتبه 2 است پس حتی باید در x^2 مرتبه باشد

(۳) باید $x^3 e^{2x}$ رو بینم

(۴) مجموع مرتبه ها شده 2 / اول در این گزینه میگه او - مرتبه مفسر است

y_p

$x e^{2x} + 4$ در سؤال

حالا راه حل تشریحی =

$y'' - 2y' + y = x e^{2x} + 4$

$y_{p1} = \frac{x e^{2x}}{(D-1)^2} \stackrel{⑤}{=} e^{2x} \frac{x}{D^2} = \frac{1}{6} x^3 e^{2x}$

$y_{p2} = \frac{4 e^{0x}}{(D-1)} \stackrel{D=0}{=} 4$

①

$(S-1)^2 = 0 \rightarrow S=1 \Rightarrow y_h = (C_1 x + C_2) e^{2x}$

$T = 3e^{3x} = 5e^{3x}$

(۱) -1 مرتبه مرتبه 3 مفسر است x - درش صدق نیکنه $\rightarrow 3S^2 + 1$ (مستقل)

(۲) جمله ثابت زاده (مقاله) عیبی که حتی باید به y_p اس - داشته باشد

گزینه ۳ و ۴ هم مثل هند و فقط بدون حساب کردن وقت x دارم باید حتی به 3 تو خارج داشته باشم

پس ⑤

راه تشریحی =

$y_p = \frac{e^{-x}}{D^3 + 1} = x \frac{e^{-x}}{3D^2} = \frac{1}{3} x e^{-x}$

(۲) $A x e^{-x}$ حتی باید $+ B e^{-x}$ هم داشته باشد وگرنه این جواب هیچ معادله ای نمیتونه باشه ...

Subject :

Year . Month . Date . ()

23 = 297 = T

الف معادله مرتبه 4 است و در 1 و 2 روتا با امتزازه

1/3 رينه مرتبه 4 معادله مفرد است (3 و 4 ميگه)

$$(D+1)^4 y = e^{-x} \rightarrow y_p = \frac{e^{-x}}{(D+1)^4} = \frac{x^4 e^{-x}}{4!} \rightarrow \text{پس 4}$$

پس مکتوم =

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 = 0 \rightarrow (s+1)^4 = 0$$

روشن ديگر =

29 = 298 = T

$$(s^4 - 1)' = 4s^3 \rightarrow \text{نکته}$$

الف دره ميگه ارينيه مرتبه 4 مفرد است 1 x 1 معادله

ديگر نياز نيست 4h هارو حساب كنيم چون 2 و 3 مشترك

در 2 مفرد است 1 x 1 پس ميگه 1

$$y_p = \frac{\cos x + \sin x}{D^4 - 1} = x \frac{\cos x + \sin x}{4D^3} = \frac{1}{4} x (-\sin x + \cos x)$$

در اين نسقاً فقط از خواص 3 و 4 و 5 استفاده ميكنيم.

25 = 297 = T چون عددها 25 و 297 با هم مشتركند

$$s^2 + 4 = 0 \rightarrow s = \pm 2j \rightarrow y_h = A \cos 2x + B \sin 2x$$

$$y_p = \frac{4 \cos 2x}{D^2 + 4} = x \frac{4 \cos 2x}{2D} = x \sin 2x$$

$$\cos x \& y = y_h + y_p = A \cos 2x + B \sin 2x + x \sin 2x *$$

$$y(0) = 1 \rightarrow A = 1 \quad \text{و} \quad y'(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$y = \cos 2x + x \sin 2x \rightarrow y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{پس 4}$$

66 = 305 = T

$$\text{پس } 3 \cdot \left(3 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$y_p = \frac{(x+2)e^{-x}}{2D^2+3D+1} \stackrel{\textcircled{5}}{=} e^{-x} \frac{x+2}{2(D-1)^2+3(D-1)+1} = e^{-x} \frac{x+2}{2D^2-5}$$

میایم مخرج کسر رو تجزیه می‌کنیم و از بسط قاعده هندسی استفاده می‌کنیم =

$$= e^{-x} \frac{x+2}{2D^2-5} = e^{-x} \left(\frac{1}{-5} \cdot \frac{x+2}{1-2D} \right) = e^{-x} \left(-\frac{1}{5} \right) (1+2D+4D^2+\dots)(x+2) =$$

$$= e^{-x} \left(-\frac{1}{5} \right) (x+2+2) \quad \left. \begin{array}{l} 1 \times (x+2) = x+2 \\ 2D \times (x+2) \stackrel{\text{مشتق}}{=} 2 \end{array} \right\}$$

$$y_p = e^{-x} \left(-\frac{1}{5} x^2 - 4x \right)$$

$$\frac{1}{1+\alpha D} = 1 - \alpha D + (\alpha D)^2 - (\alpha D)^3 + \dots$$

نقاعده هندسی 8

برای اینکه از D فاکتور گرفته چون می‌خواهم عدد ثابت 1 رو بگیرم بیرون و به فرم $\frac{1}{1+\alpha D}$ درش می‌ارم

$$= \frac{241}{246} = \frac{336}{246} = 1$$

$$y = \frac{3e^x}{(D-1)^2} \rightarrow y_p = x^2 \cdot \frac{3e^x}{2}$$

$$\frac{247}{246} = \frac{246}{246} = \frac{337}{246}$$

$$y''' - 2y'' + 3y' - 2y = 2e^x \quad \text{مکانیک 9 = جواب حقه صحت}$$

$$y_p = x \frac{2e^x}{3D^2-4D+3} = xe^x$$

دره 6 گزینه‌ها می‌بینیم که همه در آن عدد 3 سه پس از حل می‌یابیم
دره 9 عدد 3 می‌کنیم و از مخرج مشتق می‌گیریم:

روش تغییر پارامترها =

اگر جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی همگن $f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$

بصورت $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ باشد آنگاه جواب خصوصی معادله

دیفرانسیل $f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = R(x)$ بصورت زیر است =

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n$$

که در آن u_i ها از رابطه زیر بدست می آید =

$$u_i = \int \frac{W_i}{W} dx$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$W =$ روشین

سطر اول رو y_1 تا y_n میذاریم و اندازش مشتق میگیریم تا به جایی بشیم :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ R(x) \end{bmatrix}$$

بدست می آید

W_i از حذف سطر i ام W و جایگزینی آن با

ویرگ های مثبت روش تغییر پارامتر =

① $R(x)$ هر تابعی می تواند باشد. (مثالی...)

② برای معادلات با ضرایب متغیر نیز کاربرد دارد

ویرگ صفت روش تغییر جا را مده = محاسبات طولانی

مراحل روش تغییر جا را مده =

(۱) معادله را به فرم ساده رابست می آوریم $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$

(۲) در جای C_i ها u_i قرار می دهیم $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n$

(۳) ابتدا W را محاسبه کنیم و سپس از رابطه $u_i = \int \frac{W_i}{W} dx$ و u_i ها را بدست می آوریم

مثال = جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + y' = c \sec x$ را بدست آورید.
اول معادله معین رو تشکیل بده:

$S^3 + S = 0 \rightarrow S = 0$ و $S = \pm j \rightarrow y_h = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

انقدر صاف میگوریم تا مربعی بشه

$\rightarrow y_p = u_1 + u_2 \cos x + u_3 \sin x \rightarrow W = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1$

$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \frac{1}{\sin x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin x} \rightarrow u_1 = \int \frac{W_1}{W} dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right)$

$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \frac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\cot x \rightarrow u_2 = \int \frac{W_2}{W} dx = \int -\cot x dx = -\ln(\sin x)$

$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = -1 \rightarrow u_3 = \int \frac{W_3}{W} dx = \int -dx = -x$

$y_p = \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) - \cos x \cdot \ln(\sin x) - x \sin x$

$T = 326 = 178$ چون $\tan \alpha$ است ← به روش ابراقه میسب بین میسب تغییر پارامتر:

$$S^2 + 1 = 0 \rightarrow S = \pm j \rightarrow y_h = C_1 \cos \alpha + C_2 \sin \alpha$$

$$y_p = u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha \quad W = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin \alpha \\ \tan \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow u_1 = \int \frac{W_1}{W} d\alpha = \int \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha} d\alpha = \sin \alpha - \ln(\sec \alpha + \tan \alpha)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \tan \alpha \end{vmatrix} = \sin \alpha \rightarrow u_2 = \int \frac{W_2}{W} d\alpha = \int \sin \alpha d\alpha = -\cos \alpha$$

$$y_p = \cancel{\sin \alpha \cos \alpha} - \cos \alpha \cdot \ln\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) - \cancel{\sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha \cdot \ln\left(\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}\right) \quad (1)$$

اگر این تست شرایط میبار: بازم گرفته $\textcircled{1}$ درست میسب

$$y = C_1 \cos \alpha + C_2 \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \ln\left(\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}\right)$$

چون گفتیم این جز اون تخته که محض برده ← حالتی آوردیم

گرفته $\textcircled{1}$ (تستی که از جیبی) + (از جیبی y_h است) y_p

این جوابمون حتی باید گرفته مورد نظرون باشه ← قابل حذف در گرفته ها

$T = 334 = 229$ در $\alpha = \frac{\pi}{4}$: طرح این سوال غلط: چون شرط اولیه نماند: در حالت کلی ∞ جواب دارد

$T^* = 327 = 184$

$$y_h = C_1 + C_2 e^t$$

پایه است.

$R(\alpha) = e^t$ است ← از ابراقه معلوم میسب بریم

$$y_p = u_1 + u_2 e^t \rightarrow W = \begin{vmatrix} 1 & e^t \\ 0 & e^t \end{vmatrix} = e^t$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^t \\ e^t & e^t \end{vmatrix} = -e^{2t} \rightarrow u_1 = \int \frac{W_1}{W} dt = \int -e^t dt = -e^t$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{vmatrix} = e^t \rightarrow u_2 = \int \frac{W_2}{W} dt = \int dt = t$$

$$y_p = -e^t + te^t$$

از جیبی y_h است: چون در گرفته ها میسب نیارن و فرقی باید از جیبی y_h باشه

وات این قسمت محض برده است و حتی باید در گرفته ها تکرار داشته. یعنی گرفته درست باید حتی شامل $+te^t$ باشه. ←

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^t - e^t + te^t = c_1 + \underbrace{(c_2 + 1)}_{c_2} e^t + te^t$$

معادلات خطی مرتبه دوم ضرایب متغیر ۸ ← ۱- گشت اولی ← قابل توپیم تا مرتبه n
 ۲- معادله کامل
 ۳- حرس جواب (گاهش مرتبه)

معادله گشت اولی ۸ فرم کلی این معادله مطابق زیر است =
 *

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = R(x)$$

کارهر y مرتبه n (y⁽ⁿ⁾) به xⁿ هست (برای تشخیص)
 این معادله با تغییر متغیر $\alpha = e^z$ ($z = \ln \alpha$) به معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل می شود که

قبل حل است. $Dy = \frac{dy}{dz}$ و $D(D-1)(D-2)\dots(D-(n-1))y$ $x^n y^{(n)}$ خط باشد ۸

و فقط باید حواس است باشد که در آخر به جای z هات بناری $\ln \alpha$

$$x y' = Dy$$

$$x^2 y'' = D(D-1)y$$

$$x^3 y''' = D(D-1)(D-2)y$$

مثال - جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید؟

$$x^3 y''' + x^2 y'' + x y' = \sin(2 \ln x) + x^3$$

$$(D(D-1)(D-2) + D(D-1) + D)y = \sin 2z + e^{3z}$$

$$D(D^2 - 2D + 2)y = \sin 2z + e^{3z}$$

$$D=0, D=1 \pm j \rightarrow y_h = c_1 + e^z (c_2 \cos z + c_3 \sin z)$$

خط ضرایب ثابت

$$y_p = \frac{e^{3z}}{D(D^2 - 2D + 2)} = \frac{e^{3z}}{15}$$

$$y_p = \frac{\sin 2z}{D^3 - 2D^2 + 2D} = \frac{\sin 2z}{-4D + 8 + 2D} = \frac{\sin 2z}{-2D + 8} \times \frac{2D + 8}{2D + 8} = \frac{4\cos 2z + 8\sin 2z}{64 - 4D^2 - 4}$$

$$y_p = \frac{\cos 2z + 2\sin 2z}{20}$$

$$\rightarrow y_p = \frac{e^{3z}}{15} + \frac{1}{20} (\cos 2z + 2\sin 2z)$$

$$\text{حاصل } y = y_h + y_p = c_1 + e^z (c_2 \cos z + c_3 \sin z) + \frac{e^{3z}}{15} + \frac{1}{20} (\cos 2z + 2\sin 2z)$$

$$z = \ln x \rightarrow y = c_1 + x (c_2 \cos(\ln x) + c_3 \sin(\ln x)) + \frac{x^3}{15} + \frac{1}{20} (\cos(2\ln x) + 2\sin(2\ln x))$$

اول این روش رو حذف کنیم و به فرم مشتقش کنیم: $T = 300 = 41$

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^3 - x^2 \rightarrow (D^2 - 4D + 3)y = 2e^{3z} - e^{2z}$$

از اینجا به بعد به گزینیه ها رجوع کن

(1) دو ریشه؟ معادله مشخصه: اما مجموع ریشه همنسب باید باشه $x \leftarrow 4$

(2) معادله درجه 2 و سه تا پارامتر لازم + گزینیه 4 $x \leftarrow 3$

(3) $c_3 x^4 \ln x$ باید حتی $c_4 x^4$ هم باشه بالذاتیم که نیست $x \leftarrow 3$

$$(a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_1 x + a_0) e^{\alpha x} \equiv \alpha \text{ ریشه } k \text{ معادله مشخصه}$$

$$(a_{k-1} (\ln x)^{k-1} + a_{k-2} (\ln x)^{k-2} + \dots + a_1 \ln x + a_0) x^\alpha \equiv \dots$$

$T = 313 = 106$

$$(ax+b)^n y^{(n)} + (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + (ax+b) y' + y_0 = R(x)$$

* نکته *

با تغییر متغیر $t = ax + b$ به معادله کشیم - اول تبدیل معادله

he^a
x

معادلات کسری به این 3 فرمند و e^x در فرم جوابهای اون نیست

x^{ax}
 $\alpha \ln x + \dots$ (تابع بر حسب \ln)
 $\sin(\ln x) + B \cos(\ln x)$

Subject ۳۴
 Date

$t = x + 2$ $T = 313 = 166$

گزینه ۲: $x \leftarrow$ بر حسب t نیست / e^x به فرم معادلات کسری نیست / e^{x+2} به فرم کسری نیست
 حل تشریحی =

$(D^2 - 2D + 1)y = 0$ $D = 1, 2$

$y = (Az + B)e^z$

$y = (A \ln t + B)t$ $t = x + 2 \rightarrow$ ①

$T = 323 = 165$

چون $B \ln x$ دارد \leftarrow حتماً باید $(+C)$ هم داشته باشد \leftarrow ③ و ④ غلط
 ① و ② = نیاز به محاسبه y نیست
 ① اریبه مرتبه ۲ مستقیم است.

$(D^2 - 2D + 1)y = 4e^{-z} \rightarrow y_p = \frac{4e^{-z}}{(D-1)^2} = e^{-z}$

$(D^2 - 4D + 5)y = 0$ $T = 304 = 62$

① میله $z \pm 2$ ریشه مستقیم که ریشه $\sqrt{\dots}$

$(D^2 + 2D + 5)y = 0$ $T = 309 = 76$

① میله $z \pm 2$ باید ریشه مستقیم \leftarrow غلط $\alpha^2 \cos(2 \ln x)$

$x^2 y'' + xy' = x^2 \rightarrow D^2 y = e^{2z} \rightarrow y_p = \frac{e^{2z}}{D^2} = \frac{1}{4} e^{2z}$

$T = 297 = 26$

او ۳ و ۴ y_p بدون میله:

$D = 0, 2 : (Az + B)e^z = A \ln x + B$

④ میله ریشه هفت مستقیم $x = -1$

موفق که قدر $y' = 0$ است \leftarrow معینیم با قدر x به فرم کسری در این باریم.

$$(D^2 - 3D + 2)y = z^2 - 2z$$

$$= 177 = 345 = T$$

④ به روش ۰ و ۲ ← اما باید چویش بسنه ۳ x ← ③ هم به همین دلیل x

① $C_1 = C_1 + \frac{1}{4}C_2$ ← اما معادله درجه ۲ با ۲ تا پارامتر داشته باشه پس این گزینه غلطه.

هر وقت $R(x) =$ چند جمله ای دور و به جای اعداد معکوس از ضرایب نامشخص استفاده

کن بهتره ←

$$(D^2 - 3D + 2)y = z^2 - 2z \rightarrow \begin{matrix} n=2 \\ \alpha=0 \\ B=0 \end{matrix} \rightarrow m=0$$

↑
mmmm

$$y_p = Az^2 + Bz + C$$

$$2A - 6Az - 3B + 2Az^2 + 2Bz + 2C = z^2 - 2z$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2} \\ -6A + 2B = -2 \rightarrow B = \frac{1}{2} \\ 2A - 3B + 2C = 0 \rightarrow C = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$$

$$(D^2 - D - 2)y = 0 \rightarrow (D-2)(D+1) = 0 \rightarrow \begin{matrix} D=2 \\ D=-1 \end{matrix}$$

$$= 30 = 310 = T$$

به جای x یا $\ln z$

$$y = Ae^{2z} + Be^{-z} \rightarrow y = Ax^2 + Bx^{-1}$$

میخواهم در x کراندار باشه ← $B=0$ چون $\frac{1}{x}$ در صفر به سمت ∞ میره

کراندار: $x \rightarrow 0^+ \rightarrow B=0$

$$y = Ax^2 \rightarrow y(1) = 1 \rightarrow A = 1 \Rightarrow y = x^2 \rightarrow 2 = 8$$

$$(D^2 - 3D + 2)y = -2z \rightarrow \begin{matrix} n=1 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \end{matrix} \rightarrow m=0$$

۱۸۲ = ۳۲۷ = ۱

$$y_p = Az + B$$

جاهایی که چند جمله این نوع از روش فدرایب نامشخص "بریم"

$$\rightarrow -3A + 2Az + 2B = -2z \rightarrow 2A = -2 \rightarrow A = -1$$

$$\Rightarrow y_p = -z - \frac{3}{2}$$

$$-3A + 2B = 0 \rightarrow B = -\frac{3}{2}$$

۱- مکانیک ۹۰ = معادله $t^2 y'' + aty' + by = 0$ (ارائه شده که a و b ثابتهای حقیقی هستند به ازای کدام ثابت a و b معادله دارای جوابهای نوسانی است؟)

برای نوسانات خوردن باید حتماً "sin و cos" ای باشد \leftarrow $B \neq 0$ باشد $\leftarrow B < 0$
 وقتی $\Delta < 0$ نبیند چون جواب مثلثات میشه انوسانی میشه

$$(D^2 + (a-1)D + b)y = 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow (a-1)^2 - 4b < 0 \rightarrow (a-1)^2 < 4b$$

(W)

۲- معادله $y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0$ جواب

(۱) e^{-x} فرم معادله فدرایب ثابت $\leftarrow x$

(۲) e^{3x} فرم معادله فدرایب ثابت $\leftarrow x$

(۳) e^{3x} فرم معادله فدرایب ثابت $\leftarrow x$

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$$

۳- مکانیک ۹۱ = جواب عمومی

$$x^2 y'' - 3x^2 y' + 3xy = 0$$

ریشه \rightarrow $D=0$: \rightarrow مجموع ریشه مساوی ۰

$$(D(D-1)(D-2) - 3D(D-1) + 3D)y = 0 \rightarrow D(D^2 - 6D + 8)y = 0 \rightarrow$$

مجموع ریشه های \rightarrow $\frac{-b}{a} = 6 = 0 \rightarrow$ مجموع ریشه ها

$$+ 2y = 2x^4$$

۴- مکانیک ۹۲ = کدامیک جواب خصوصی $y_p(x)$ معادله ریناردینال زیر نیست \leftarrow $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx}$

y_h + قسمت مختصر فدر = جواب خصوصی

$$(0(0-1)(0-2) + 0(0-1) - 2(0+2))y = 2e^{4z}$$

تقریباً محضیر نفیر نفیر از x^4 است.

$$y_p = \frac{1}{15} x^4 = \text{محضیر نفیر نفیر جزء جواب محضیر نفیر نفیر}$$

① ریشه معادله محضیر نفیر نفیر جواب نیست

$$-24 + 6 + 4 + 2 \neq 0$$

② ریشه معادله محضیر نفیر نفیر است

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \frac{1}{15} x^4$$

فقط اینها باید ثابت باشند؛ چون تقریباً محضیر نفیر نفیر است.

معادلات خطی با ضرایب متغیر

۱- معادله کامل = اگر در معادله نفیر نفیر $f_0(x)y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = R(x)$ داشته باشیم

$$f_0(x) - f_1'(x) + f_2''(x) = 0$$

مگویم معادله کامل است و میتوان آنرا به فرم زیر مرتب کرد:

ضریب خوش‌منتهای مشتقای قبلیش

$$\frac{d}{dx} [f_2(x)y' + (f_1(x) - f_2'(x))y] = R(x)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین معادله به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل میشود که قابل حل است.

معادله $f_0(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = R(x)$ کامل است اگر

$$f_0(x) - f_1'(x) + f_2''(x) - f_3'''(x) + \dots + (-1)^n f_n^{(n)}(x) = 0$$

از ضریب کمترین مرتبه شروع کن و برو به چپ و مشتق بگیر + به درمیان مثبت و منفی کن.

$$f_n(x) y^{(n-1)} + (f_{n-1}(x) - f_n'(x)) y^{(n-2)} + (f_{n-2}(x) - f_{n-1}'(x) - f_n''(x)) y^{(n-3)} + \dots$$

مثال = جواب عمومی معادله دیفرانسیل
اول یک میکنیم کامل هست یا نه؟

$$1 - 1 + 0 = 0 \rightarrow \text{کامل است.}$$

مشتق دوم ضرب "و" + مشتق ضرب "و" - ضرب "و"

$$\frac{d}{dx} [2xy' + (x+2-2)y] = x \rightarrow 2xy' + xy = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}x + \frac{C_1}{2x} \rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}x} \left[\frac{1}{4}x \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \right) - \frac{1}{16} e^{\frac{1}{2}x} + \int \frac{e^{\frac{1}{2}x} C_1}{x} dx + C_2 \right]$$

$$\cos x - \cos x + 0 = 0 \rightarrow \text{کامل است} \quad = 11 = \frac{294}{1} = 1$$

$$\frac{d}{dx} [y' + \sin x y] = n x^{n-1} \rightarrow y' + \sin x y = n x^{n-1} + C_1$$

$$y(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow y'(x) = x^n$$

(۷)

$$0 - 2 + 2 = 0 \rightarrow \text{کامل است} \quad = ۴۷ = \frac{299}{1} = 1$$

$$\frac{d}{dx} [(1+x^2)y' + (2x-2x)y] = x^4 \rightarrow (1+x^2)y' = \frac{1}{4}x^4 + C_1$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{4} \frac{x^4}{1+x^2} + \frac{C_1}{1+x^2} \rightarrow y = \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x \right) + C_1 \tan^{-1} x + C_2$$

$$1 - 1 + 0 = 0 \rightarrow \text{کامل است}$$

$$= ۲۲۷ = \frac{334}{1} = 1$$

$$\frac{d}{dx} [xy' + (1+x-1)y] = 0 \rightarrow xy' + xy = C_1$$

$$\rightarrow \begin{cases} y(1) = -1 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow y' + y = 0 \rightarrow y = C_2 e^{-x}$$

(۸)

استقلال خط و وابستگی خط توابع

توابع y_1, y_2, \dots, y_n را مستقل خط می نامند اگر فقط اگر

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0 \implies C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$$

در غیر این صورت توابع وابسته خط اند.

برای تشخیص استقلال ترکیب خطی درست بیار و مساوی صفر بیار. اگر به این نتیجه رسیدی که تمام ضرایب صفرند \leftarrow متبسته استقلال دارند.

۱- هر تابع مخالف صفر، مستقل خط است.

$$C_1 f_1(x) = 0 \implies C_1 = 0$$

$f_1(x) \neq 0$

(یعنی اگر صفر بود وابسته متبسته)

۲- توابع در صورتیکه نسبت آنهاواره یک عدد باشند، وابسته خط اند. در غیر این صورت مستقل

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = 0 \rightarrow C_1 \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + C_2 = 0$$

$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \neq \text{عدد}$

باید عدد باشند تا C_1 و C_2 صفر بشوند

یعنی هر وقت 2 تابع باشند باید مساوی نسبت شوند دریم.

۱) x و x^2

مستقل

۲) $\sin x$ و $\cos x$

مستقل

۳) x و $\frac{1}{x}$

مستقل

۴) e^x و e^{-x}

\neq

۵) 1 و x

مستقل

۶) x و $|x|$

\neq متبسته

2 عدد در متبسته \leftarrow مستقل

$$C_1 x + C_2 |x| = 0 \begin{cases} x > 0 \rightarrow C_1 + C_2 = 0 \\ x < 0 \rightarrow C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

V) x^2 و $3x^2$ وابسته

۳- برای سه تابع یا بیشتر ابتدا روش کین توابع را درست می آوریم

$W \neq 0 \implies$ توابع مستقل خط اند

$W = 0 \implies$ ممکن است مستقل یا وابسته خط باشند؟

مثال = نشان دهید توابع x و $\sin x$ مستقل خط اند؟
 $W = \begin{vmatrix} 1 & x & \sin x \\ 0 & 1 & \cos x \\ 0 & 0 & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin x \neq 0 \rightarrow$ مستقل خط اند
 بالا مستقل است \leftarrow حاصل ترمینان = حاصل ضرب قطر اصلی

$A = ۲۷$ و $B = ۸۶$ = توابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2|x|$ در بازه $[-۱, ۱]$ را در نظر بگیرید.
 کدام گزینه غلط است؟

۱) روش کین f و g در بازه $[-۱, ۱]$ برابر است با صفر

۲) f و g روی بازه $[-۱, ۱]$ وابسته خط هستند

۳) f و g روی بازه $[-۱, ۱]$ مستقل خط هستند

۴) گزینه های ۱ و ۳ هر دو صحیح است

۷) $x > 0 \rightarrow W = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$ $x < 0 \rightarrow W = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0$

چون نسبتشون به عدد ثابت همیشه \rightarrow مستقل خط اند

چند جمله ای و عباراتی از روش کین صفر می تونیم وابستگی خط هم نتیجه بگیریم

اگر تابع مستقل پذیر باشند $+ W = 0 \leftarrow$ وابستگی خط
 m m m m \rightarrow

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + \dots = 0$$

مقیاسه آیل 8

الف) $w = k e^{-\int P(x) dx}$

وختی از ما کلی، روشی رو بخوار

ب) $w(x) = w(x_0) e^{-\int_{x_0}^x P(x) dx}$

وختی به نقطه رو به ما بدن و به نقطه دیگر رو از ما بخوار

فرمهای مختلف نداشتن روشی =

$$w = w(x) = w(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = w_{y_1, y_2, \dots, y_n}(x)$$

آ = فتنه براری 91 = اگر y_1 و y_2 جواب مستقل خطی معادله $x^2 y'' - 2y' + (3+x)y = 0$ باشند

و بدانیم $w(y_1, y_2)(2) = 3$ آنگاه $w(y_1, y_2)(4)$ که است

$$w(x) = w(x_0) e^{-\int_{x_0}^x P(x) dx}$$

$$w(4) = w(2) e^{-\int_2^4 \left(-\frac{2}{x^2}\right) dx} = 3 e^{-\frac{2}{x} \Big|_2^4} = 3 \left(e^{1 - \frac{1}{2}} \right) = 3\sqrt{e} \quad \text{①}$$

آ = (موار 91) = اگر y_1 و y_2 جواب مستقل خطی معادله $y'' - \frac{2}{x}y' + e^x y = 0$ باشند و روشی

آنها را فقط $x=5$ برابر y باشند، در این صورت روشی در $x=5$

$$w(5) = 2e^{-\int_1^5 \left(-\frac{2}{x}\right) dx} = 2e^{2 \ln x \Big|_1^5} = 2e^{2 \ln 5} = 5_0$$

$$x^2 y'' - (1+x)y' + \sin x \cdot y = 0 \quad \text{روئسکین و جواب از معادله}$$

$$w = c e^{-\int -\frac{1+x}{x} dx} = c x e^x \quad (4)$$

به مقیاس مربوط به استقلال خطی =

* اگر y_1, y_2, \dots, y_n و n جواب مستقل خطی معادله همگن خطی زیر باشند =

$$f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

آنگاه جواب عمومی معادله ترکیب خطی این جوابها است.

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

* اگر y_1 یک جواب معادله همگن باشد $C y_1$ هم حتماً جواب است.

کاهش مرتبه (جواب) =

اگر y_1 یک جواب معادله دیفرانسیل همگن $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد، آنگاه جواب مستقل

$$y_2 = y_1 u \quad u = \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx$$

خطی دوم آن مطابق زیر درست می آید:

در نتیجه جواب عمومی آن مطابق زیر است =

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

یا جواب عمومی و از ما میخواهد یا جواب روش = در این مدل سوالها $T = 300 = 38$

$$y_2 = xu \quad u = \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}}{x^2} = \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{1-x^2}$$

$$u = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \rightarrow y_2 = -1 + \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (1)$$

$$y_2 = xu \quad , \quad u = \int \frac{e^{\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} dx}}{x^2} dx = \int \frac{x^2-1}{x^3} dx = \ln|x| + \frac{1}{2x^2}$$

$$\rightarrow y_2 = x \ln|x| + \frac{1}{2x}$$

همه u : در عبارات مرتبه ۱ یا فریب متغیر = اولین روش حل همیشه

$T = 312 = 101$ از برگزیده ها اونکه از همه ساده تر بود و انتخاب کن مثلاً در اینجا x دیرتوی

معادله: اگر صدق کرد پس نیک از جوابهاست

هرگز نسیه ای که x داشت غلط

مرحله بعدی e^x صدق بده: اگر شد نیک از جوابهاست و هرگز نسیه ای که e^x داشت و حذف کن

اگر e^x صدق نکرد برو سراغ e^{-x}

و جواب عمومی میخواهد

$T = 304 = 56$ به جواب به ما داده پس همیشه

چون جایگزینی در معادله سخته از راه حل کلی بود

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sin x u \quad u = \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{x^{-1} \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

$$y_2 = -x^{-\frac{1}{2}} \cos x$$

$T = 335 = 233$ پس پس y_1 و y_2 که ما ساده تر و برگزیده ها انتخاب کن در معادله صدق بده

ساده ترین x است \leftarrow معرفتس بده در معادله \leftarrow صدق میکنه \leftarrow جواب (۱) (چون بقیه x ندارند)

$T = 311 = 92 = 3$ و 4 جمله چون هیچکدام از y_1 و y_2 شامل n نیست
حالا بین 1 و 2 یا $n^2 + 1$ و در معادله صدق دره:

$$2n^2 - 2 - 4n^2 + 1n^2 + 2 = 0 \rightarrow \textcircled{2}$$

n^3 مانعش فریب ندارند. $61 = 304 =$

$T = 337 = 245 = 337 = 245$ و $\textcircled{2}$ قطعا غلط: معادله هرگونه n همیشه وقت ضعیفتره جمله فاقد باره امتدادش باشه
بین $\textcircled{1}$ و $\textcircled{3}$: جاگذاری =

$$y = ne^n \rightarrow y = e^n + ne^n \rightarrow y'' = 2e^n + ne^n$$

$$2n^2 + n^3 - \frac{(n^2 + 2n)(1+n)}{n^2 + 2n} + \frac{(n+2)n}{n^2 + 2n} = 0 \rightarrow \textcircled{3} \checkmark$$

$T = 338 = 254 =$

از گزینه ها نگاه کن: شماره در نشون n ← صدق نمیکند / $x \leftarrow e^n$ / $x \leftarrow \sin n$ / $x \leftarrow$

(انتقال گاز ۹۱)

$$\rightarrow (1+n^2)y'' - 2ny' + 2y = 0$$

$T =$ جواب عمومی

۴- همه گزینه ها n باره بین هیچ / چون در گزینه ها Arctan باره بین رسیک باره ← حل کن بپوشه

$$y_2 = xu \quad u = \int \frac{e^{\int \frac{2n}{1+n^2} dn}}{n^2} dn = \int \frac{n^2+1}{n^2} dn = n \frac{1}{n}$$

$$y_2 = x^2 \quad \textcircled{1}$$

$T =$ مکتب ۹۲ = جواب کلی معادله $ny'' + (1-2n)y' + (n-1)y = 0$

در گزینه ها e^n هست صدق دره \checkmark $\textcircled{1}$ و $\textcircled{3}$ غلط

$$y = e^n u \quad u = \int \frac{e^{\int \frac{2n-1}{n} dn}}{e^{2n}} = \int \frac{dn}{n} = \ln n$$

$$y_2 = e^n \ln n$$

$\textcircled{4}$

برق 93- اگر $w(f, g)$ مربوط به توابع f و g باشد و تعریف کنیم $u = 2f - g$ و $v = f + 2g$ ، آنگاه

$$w(u, v) = \begin{vmatrix} 2f - g & f + 2g \\ 2f' - g' & f' + 2g' \end{vmatrix} = \cancel{2ff'} + \cancel{4fg'} - g f' - 2gg' - \cancel{2ff'} - \cancel{4fg'} + g' f + 2gg' =$$

$$= 5fg' - 5f'g = 5 \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = 5w(f, g) \quad \text{①}$$

کتاب =

$$\begin{aligned} u &= af + bg \\ v &= cf + dg \end{aligned} \quad w(u, v) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} w(f, g)$$

تغییر متغیر مستقل (z = g(x)) ← 8

تغییر متغیر تابع (u = f(y, w)) ← u = f(y) ← 4

کاهش مرتبه (y' = P) ← 3

تغییر متغیر مستقل (z = g(x)) ← 8

$$y'' + P(x)y' + Q(x) = R(x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dz} g'(x)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(g'(x) \frac{dy}{dz}\right)}{dx} = g''(x) \frac{dy}{dz} + g'(x) \frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dx} \Rightarrow y'' = g''(x) \frac{dy}{dz} + (g'(x))^2 \frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dz^2} \cdot g'(x)$$

$$y'' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(g'(x) \frac{dy}{dz} + (g'(x))^2 \frac{d^2y}{dz^2} \right)$$

$$y''' = g''(x) \frac{dy}{dz} + g'(x) \frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dx} + 2g'(x)g'(x) \frac{d^2y}{dz^2} + (g'(x))^2 \frac{d\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)}{dx}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$g'(x) \frac{d^2y}{dz^2} \qquad \qquad \qquad g'(x) \frac{d^3y}{dz^3}$$

$$\Rightarrow y''' = g''(x) \frac{dy}{dz} + 3g'(x)g'(x) \frac{d^2y}{dz^2} + (g'(x))^3 \frac{d^3y}{dz^3}$$

به حورای حفظ بسن (8)

$$y' = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} \rightarrow y'' = \frac{dy}{dz} + x^2 \frac{d^2y}{dz^2} \qquad = 243 = 337 = T$$

$$x \frac{dy}{dz} + x^3 \frac{d^2y}{dz^2} + (x^2 - 1) x \frac{dy}{dz} + x^3 y = 0 \rightarrow x^3 \left(\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + y \right) = 0 \quad (1)$$

$z = g(x)$ فرم

$$= 186 = 327 = T =$$

$$t = \tan^{-1} x$$

$$y' = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{1+x^2} \rightarrow y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{(1+x^2)^2} \frac{d^2y}{dz^2}$$

$$-2x \frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2} + 2x \frac{dy}{dz} + y = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + y = 0 \rightarrow y = C_1 \cos z + C_2 \sin z$$

$$y = C_1 \cos(\tan^{-1} x) + C_2 \sin(\tan^{-1} x) \quad (15)$$

خورگزینه هامم به مانگه با تغییر متغیر $\tan^{-1} x$

هر سه مرحله مرتبه دوم که میخواهیم حلش کنیم (چه خط و چه غیر خط)

1- تبدیل کنیم به ضرایب ثابت و حلش کنیم، 2- تبدیل کنیم به مرتبه اول

و سپس حل کنیم.

حقت آنکه درگزینیهما: 1- مورد دیگری (فرم ضرایب ثابت بگننه که به جای $\tan^{-1} x$ و \cos گذاشته باشن) حتی با این روش قابل حل (با تغییر متغیر)

= 233 = 31 = 3
بسی طبق آخر صفر پیش

$$z = P \cdot \cos^{-1} n \rightarrow y' = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{-P}{\sqrt{1-n^2}} \Rightarrow y'' = +2n \left(-\frac{P}{2}\right) (1-n^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dy}{dz} + \frac{P^2}{1-n^2} \frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\frac{-nP}{\sqrt{1-n^2}} \frac{dy}{dz} + \frac{P^2}{1-n^2} \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{nP}{\sqrt{1-n^2}} \frac{dy}{dz} + P^2 y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + y = 0 \rightarrow y = C_1 \cos z + C_2 \sin z \quad \text{: ①}$$

① و ②: فرم جواب فدراب ثابت نسبت X

$$n^4 y'' + 2n^3 y' + y = \frac{1+n}{n}$$

304 = 61
T = 93 = جواب عمومی

$$y' = \frac{dy}{dz} \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right)$$

چون خورش گفته با تغییر متغیر $\frac{1}{n}$ میفهمیم مسئله ②
تغییر متغیر $\frac{1}{n}$ فدراب ثابت و به فرم $\frac{1}{n}$ میشود
اما حلش =

$$y'' = \frac{2}{n^3} \cdot \frac{dy}{dz} + \frac{1}{n^4} \frac{d^2y}{dz^2}$$

$$2n \frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2} - 2n \frac{dy}{dz} + y = z + 1$$

$y = C_1 \cos z + C_2 \sin z + y_p$: y_p هرگز اینها مشابه نیست پس نیاز به معادله نیست

$$y = C_1 \cos\left(\frac{1}{n}\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + 1 \quad \text{: ②}$$

32 = 298 = 31 = 3
مکان

$y = g(n)u$ با تغییر متغیر u : $y = g(n)u$ فدراب شده : $32 = 298 = 31 = 3$
به فرم فدراب ثابت رویار :

معادله غیر همگن \leftarrow ① و ② غلط : به فرم همگن X (معادله همگن) \leftarrow ③ و ④ باید

③ : جواب معادله فدراب ثابت \leftarrow هیچوقت نتواند به فرم فدراب متغیر شبیه X

امکان ندارد که معادله فدراب متغیری و شبیه فرم معادله فدراب ثابت شبیه

اگر گفته باشد به این فرم بود = $y = \alpha [e^{\alpha} + C_1 \cos \alpha + C_2 \sin \alpha]$ تغییر متغیر بدید:

$y = g(\alpha) \cdot u \rightarrow y = \alpha u \rightarrow y' = u + \alpha u' \rightarrow y'' = u' + u' + \alpha u''$
 $\alpha u' + \alpha u'' - \frac{2}{\alpha} (u + \alpha u') + (1 + \frac{2}{\alpha^2}) \alpha u = \alpha e^{\alpha}$

$\alpha u'' + \alpha u = \alpha e^{\alpha} \rightarrow u'' + u = e^{\alpha} \Rightarrow u = C_1 \cos \alpha + C_2 \sin \alpha + \frac{e^{\alpha}}{2}$

جواب به فرم: $y = \alpha(u)$ پس $y = \alpha(C_1 \cos \alpha + C_2 \sin \alpha + \frac{1}{2} e^{\alpha})$

تغییر متغیر $y^2 = u$ معادله $(\alpha y' - y)^2 = -\alpha^2 y y''$ به کدام معادله کسب اولی تبدیل می شود؟

$u' = 2yy' \rightarrow u'' = 2y'y'' + 2yy''$

$\alpha^2 y^2 + y^2 - 2\alpha y y' = -\alpha^2 y y'' \rightarrow \alpha^2 (\frac{u'}{2y})^2 + u - 2\alpha \frac{u'}{2} = -\alpha^2 (\frac{u''}{2} - \frac{u'^2}{4y^2})$

$u - \alpha u' = -\alpha^2 \frac{u''}{2} \rightarrow \alpha^2 u'' - 2\alpha u' + 2u = 0$: ①

معادلات مرتبه دوم غیر خطی
 ۱- فاقد متغیر مستقل
 ۲- فاقد متغیر تابع
 ۳- معادله همگن

فاقد متغیر مستقل = نرم کسب معادلاتش = $f(y, y', y'') = 0$

روش حلش =

$y' = P \rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P \cdot \frac{dP}{dy}$

$y'' = P \frac{dP}{dy}$

$$f(y, y', y'') = 0 \xrightarrow{y' = P} f(y, P, P \frac{dP}{dy}) = 0$$

پس از جایگذاری به یک معادله مرتبه اول تبدیل می شود که قابل حل است.

$$\frac{dv}{dt} = 10 \frac{\frac{dv}{dt}}{2\sqrt{x}} \quad v = 10\sqrt{x} \quad = 50$$

$$T = 295 = 16 \text{ متر خط} \quad P = v = 10\sqrt{x}$$

چون در معادله + را ضمیمه کنیم فاکتور متغیر مستقل است.

$$y' = P \rightarrow P \frac{dP}{dy} + \sin y = 0 \quad \text{تفکیک بزیر} \quad P dP = -\sin y dy \quad \int \rightarrow \frac{1}{2} P^2 = \cos y + C$$

$$P^2 = 2 \cos y + C \rightarrow P = \sqrt{2 \cos y + C}$$

$$P = y' = v = \sqrt{2 \cos y + C}$$

$$y'(0) = \sqrt{2 \cos(y(0)) + C} \rightarrow 0 = \sqrt{2 \times \frac{1}{2} + C} \rightarrow C = -1$$

حواسه باشه
به جای y و x نذاری:

①

$$y'' + y'^3 e^{2y} = 0$$

$$T = 298 = 30 \text{ متر}$$

پس از جایگذاری حداً تبدیل می شود به مرتبه اول

$$y' = P \rightarrow P \frac{dP}{dy} + P^3 e^{2y} = 0 \rightarrow \frac{-dP}{P^2} = e^{2y} dy \rightarrow \frac{1}{P} = \frac{1}{2} e^{2y} + C_1 \rightarrow$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{1}{2} e^{2y} + C_1 \quad \text{تفکیک بزیر} \quad d\alpha = (\frac{1}{2} e^{2y} + C_1) dy \rightarrow \alpha = \frac{1}{4} e^{2y} + C_1 y + C_2 \quad \text{①}$$

$$T = 323 = 164 \text{ متر}$$

$$y' = P \rightarrow 2P \frac{dP}{dy} + 2P^2 e^{2y} = 0 \rightarrow \text{مرتبه اول: تفکیک متغیر}$$

$$\rightarrow z = P^2 \rightarrow \frac{dz}{dy} = 2P \frac{dP}{dy} \rightarrow \frac{dz}{dy} - 2z = e^{2y} \quad \text{حفظ مرتبه اول}$$

$$z = e^{2y} (y + C_1) \rightarrow P^2 = e^{2y} (y + C_1) \rightarrow P = e^y (y + C_1)^{\frac{1}{2}} \rightarrow e^{-y} (y + C_1)^{-\frac{1}{2}} dy = d\alpha$$

$$\rightarrow \alpha = \int e^{-y} (y + C_1)^{-\frac{1}{2}} dy + C_2$$

②

$11^x = 2 \cdot 9^x = T$

رو معادله دیفرانسیل زیر مقدار $y(3)$ که است؟

$yy'' - (y')^2 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$

$2e^3$ (۴) $\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}$ (۳) $4e^{-\frac{3}{2}}$ (۲) $\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ (۱)

$y' = P \Rightarrow yP \left(\frac{dP}{dy} \right) - P^2 = 0 \rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dy}{y} \rightarrow \ln P = \ln y + \ln C \rightarrow P = Cy$

$\frac{dy}{dx} = Cy \rightarrow \frac{dy}{y} = C dx \rightarrow \ln y = Cx + C_2 \rightarrow \ln y = \frac{3}{2}x + C_2 \rightarrow$

$\ln 2 = \frac{3}{2} + C_2 \rightarrow C_2 = \ln 2 - \frac{3}{2} \rightarrow \ln y = \frac{3}{2}x + \ln 2 - \frac{3}{2} \rightarrow$

$\ln(y(3)) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} + \ln 2 = 3 + \ln 2 \rightarrow y(3) = 2e^3$: (۴)

چون مقدار y در یک نقطه خاص خواسته به مقدار C رو برداشت داریم

$d\left(\frac{y'}{y}\right) = 0 \rightarrow \int \frac{y'}{y} = C_1 \rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \rightarrow \ln y = C_1 x + C_2$ نوشتن رنگ

$y'^2 + yy'' = 0$

$= 2 = 293 = T$

$d(yy') = 0 \rightarrow \int yy' = C_1 \rightarrow y dy = C_1 dx \rightarrow \frac{1}{2}y^2 = C_1 x + C_2$

$y^2 = C_1 x + C_2$

mmmm

همه موقع به معادله غیر خطی روی بیست و هفت حقیقی کاهش مرتبه خط اول (با تغییر متغیر)

بافتدایب متغیر افتدایب ثابت

هم معادله مرتبه ۲ افتدایب ثابت

مرتبه اول

انتخابیگه و نزاره

$$f(x, y', y'') = 0$$

فانده متغیر تابع =

معادله مرتبه اول و قابل حل است $\rightarrow f(x, P, P') = 0 \rightarrow y' = P \rightarrow y'' = P' =$ روش حل

$T = 311 = 95$ وقت فاند متغیر مستقل و هم تابع دور ← بهتره باراه متغیر تابع حل کنه در روش کتده

$$y' = P \rightarrow PP' = 2 \rightarrow P dP = 2 dx \rightarrow \frac{1}{2} P^2 = 2x + C \rightarrow P^2 = 4x + C \rightarrow$$

$$y'(0) = 2 \rightarrow 4 = C \rightarrow P^2 = 4x + 4 \rightarrow P = 2(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+1)^{\frac{1}{2}} \rightarrow y = 2 \times \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

$$y(0) = 1 \rightarrow 1 = \frac{4}{3} + C_2 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}$$

$$y(3) = \frac{4}{3} \times 8 - \frac{1}{3} = \frac{31}{3} \quad (7)$$

نکته: * این شیوه برای معادلات خطی هم قابل استفاده است.

$T = 336 = 240$ این معادله خطیه و چون در روش تغییر متغیر، متغیر از این روش استفاده کنه و $y' = P$ بگیر

mmmm ↓

هر وقت به معادله فاند متغیر تابع دور، حالا مرتبه اول هر چی دور (اه 2 یا 3 یا ...) از این روش استفاده کنه و $y' = P$ بگیر...

$$y'' + \tan x y' = \cos^2 x$$

$$y' = P \rightarrow P' + \tan x P = \cos^2 x \rightarrow P = \cos x (\sin x + C_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \cos x \rightarrow y = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 \sin x + C_2$$

$$xy'' + xy'^2 - y' = 0 \quad \text{= 338 = 262 = خبری از ی در معادله نیست = فاعله متغیر تابع =}$$

$$y' = P \rightarrow xP' + xP^2 - P = 0 \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} \div P^2 \rightarrow xP'P^{-2} - P^{-1} = -x$$

$$z = P^{-1} \rightarrow z' = -P'P^{-2} \rightarrow -xz' - z = -x \rightarrow z' + \frac{1}{x}z = 1 \rightarrow z = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1 \right) \xrightarrow{y(2)=1} 1 = \frac{1}{2}(2 + C_1) \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

رایجور جا فاعله متغیره که C1 رو پیدا کنه که معادله ساده تر بشه.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}x \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}dy \rightarrow \frac{1}{2}y = \ln x + C_2 \Rightarrow y = 2 \ln x + C_2$$

$$\text{= 92 = معادله ریفرانسبل} \quad xy'' + 2y' = e^{-x^2} \quad \text{اگر } y(1) = 2 \text{ باشد. } y(-1) \text{ که امست؟}$$

$$2 \quad (1) \quad 1 \quad (3) \quad 0 \quad (4) \quad -2 \quad (1)$$

(F)

$$\text{معادله خطی + فاعله متغیر تابع} \rightarrow y' = P \rightarrow xP' + 2P = e^{-x^2} \rightarrow P' + \frac{2}{x}P = \frac{1}{x}e^{-x^2} \rightarrow P = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C_1 \right)$$

$$\text{اگر } e^{-x^2} \text{ زوج = طرف دیگر تساوی هم زوج = } y' \text{ و } xy'' \text{ هم زوج پس } y(-1) = y(1) = 2$$

معادله هگن = معادله ای هگن است که نسبت به متغیر تابع و مشتقاتش هگن باشد.

$$x^2 y' y''' + 4x^4 y^4 = 0 \quad \text{هگن}$$

$$x \cos^2 x y^2 y' + 3x y''^2 + x^2 y^3 = 0 \quad \text{غیر هگن}$$

معادله هگن = اگر یک معادله ریفرانسبل هگن باشد، با تغییر متغیر $y = e^{\int z dx}$ مرتبه آن یک واحد

کاهش می یابد. (اگر مرتبه ۱ باشد به معادله مرتبه اول تبدیل می شود که قابل حل است.)

$$y = e^{\int z dx} \rightarrow y' = z e^{\int z dx} \Rightarrow y'' = z' e^{\int z dx} + z^2 e^{\int z dx}$$

پس نتیجه = هر وقت ویدیو به جاش برار

و ...

$$\text{پس } \begin{cases} y = e^{\int z dx} \\ y' = z e^{\int z dx} \\ y'' = (z^2 + z') e^{\int z dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \rightarrow 1 \\ y' \rightarrow z \\ y'' \rightarrow z^2 + z' \end{cases}$$

متیونیم $e^{\int z dx}$ و از کل جلات فاکتور بگیریم و بجز طرفین رو برش تقسیم کنیم و حذفش کنیم

8 پس $f(x, y, y', y'') = 0 \rightarrow f(x, z, z^2 + z') = f(x, z, z') = 0$
 بقه کل معادله مرتبه اول و قابل حل است

$$yy'' + 2y'^2 = 0$$

$$T = 297 = 27 \text{ فاکتور متغیر مستقیم هست}$$

به جای 1 بذارو ...

$$z^2 + z' + 2z^2 = 0 \rightarrow z' = -3z^2 \rightarrow \frac{dz}{z^2} = -3dx \rightarrow \frac{1}{z} = 3x + C_1 \rightarrow z = \frac{1}{3x + C_1}$$

$$y = e^{\int z dx} = e^{\int \frac{dx}{3x + C_1}} = e^{\frac{1}{3} \ln(3x + C_1) + \ln C_2}$$

$$\rightarrow y = C_2 (3x + C_1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow y^3 = C_2 x + C_1$$

$$T = 293 = 4 \text{ جواب عوض معادله } n^2 y y'' = (y - n y')^2 \text{ ایدست آورید}$$

معادله گننه پس به جای 1 بذارو ...

$$n^2(z^2 + z') = (1 - n z)^2 \rightarrow n^2 z^2 + n^2 z' = 1 + n^2 z^2 - 2n z$$

$$z' + \frac{2}{n} z = \frac{1}{n^2} \text{ خط مرتبه اول } \rightarrow z = \frac{1}{n^2} (x + C_1) \rightarrow z = \left(\frac{1}{n} + \frac{C_1}{n^2}\right)$$

$$y = e^{\int z dx} \rightarrow y = e^{\int \left(\frac{1}{n} + \frac{C_1}{n^2}\right) dx} = e^{\ln n - \frac{C_1}{n} + C_2} \rightarrow y = n e^{\frac{C_1}{n} + C_2}$$

محل اول زمانار نهانه + حالت 20٪ نسبت صرفی رازن

فصل سوم - حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری های توانی

تعریف تابع تحلیلی = تابع $f(x)$ را در $x=0$ تحلیل می نامند اگر تمام مشتقات مرتب بالاتر f در $x=0$

موجود باشند. به عبارت دیگر بسط تیلور f حول $x=0$ موجود باشد.

* ممکن است تابعی در $x=0$ مشتق پذیر باشد اما در $x=0$ تحلیل نباشد.

مثال = تابع $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ در $x=0$ مشتق دارد اما در $x=0$ تحلیل نیست (چون مشتق دومش ∞ میشه و تعریف منفی میشه و در $x=0$ میشه).
مثلاً \sin و \cos و هایپر بولیک و ... همه تحلیل اند.

تعریف نقطه تکین (ویژه - غیرعاری - منفرد) = اگر تابع $f(x)$ در $x=0$ تحلیل نباشد اما ریشه باشد

$x=0$ حداقل از یک سمت مشتق پذیر باشد، $x=0$ نقطه تکین نامند.

$x=0$ تکین است (برای $x=0$ تعریف شده تابع و مشتق پذیره) $f(x) = \sqrt{x}$
 $x=1$ تکین نیست

$$f(x) = \ln(x-1)$$

$x=1$ تکین است

$x=2$ و $x=0$ نیست (تحلیلی)

$x=0$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

$x = \pm 1$ نقاط تکین اند
(جیب و راستش مشتق داره)

* در معادله دیفرانسیل $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ اگر x_0 حداقل نقطه تکیه یکی از توابع

P, Q, R باشد و در سایر توابع نیز تعریف شده باشد، x_0 نقطه تکیه معادله است.

* در معادله دیفرانسیل $P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = R(x)$ اگر توابع P_0, P_1, P_2 و R تحلیلی

باشند آنگاه ریشه های معادله $P_2(x) = 0$ نقاط تکیه معادله هستند.

چون معادله باید به فرم استاندارد باشد یعنی ضریب بالاترین مرتبه = 1 باشد، پس در اینجا ضریب را باید تقسیم بر $P_2(x)$ کنیم، ریشه هایش همیشه نقاط تکیه

مثال = نقاط تکیه معادله دیفرانسیل $\sin x(x^2-1)y'' + x\sqrt{x+1}y' + \ln xy = 0$ را بدست آورید.

$$\sin x(x^2-1) = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

اولین کار =

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

منتهی را بدلیل * دقت نکنیم

ریشه زیر را یکبار همیشه نقطه تکیه $x = -1$ تکیه در $\sqrt{x+1}$ ، $x = 0$ در $\ln xy$ تکیه اند

چون جایی \ln (اصف) $x = -1$ \rightarrow \ln صفر \rightarrow $x = -1$ \times

$x = 0$ \checkmark

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0, \pi, 2\pi, \dots \\ x = 1 \end{cases}$$

تعریف نقطه تکین منظم و نامنظم =

نقطه تکین α_0 و نقطه تکین منظم معادل است اگر حد های زیر موجود و تحلیل باشند. در غیر این صورت نقطه تکین نامنظم است.
گفتیم همیشه به فرم استاندارد باشد: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$

$$\left\{ \begin{aligned} P_0 &= \lim_{x \rightarrow \alpha_0} (x - \alpha_0) P(x) \\ Q_0 &= \lim_{x \rightarrow \alpha_0} (x - \alpha_0)^2 Q(x) \end{aligned} \right.$$

هر موقع $\ln|x|$ یا \sqrt{x} بود: در نقاط مرزی \leftarrow تکین نامنظم اند.

مثال = نقاط تکین منظم و نامنظم معادلات زیر را درست آورید.

$$P = y'' + 2x^{\frac{5}{3}}y' + xy = 0$$

$x=0$ تکین نامنظم است \rightarrow تحلیل نیست \rightarrow تحلیل باشد \rightarrow $x^{\frac{5}{3}}$ \rightarrow حد \rightarrow $x=0$ تکین است

هر موقع توان کسری دیدی \leftarrow حتماً نامنظم است.

$$P = \sin^2 x y'' + x^{\frac{1}{x-k\pi}} y' + (x-k\pi)y = 0$$

$\sin^2 x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow$ نقاط تکین

$$x=0 \rightarrow P_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{x^2}{1-k\pi} \frac{1}{\sin^2 x} = 0$$

$\Rightarrow x=0$ تکین منظم است

$$Q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{x-k\pi}{\sin^2 x} = -k\pi$$

$$n = k\pi \rightarrow P_0 = \lim_{n \rightarrow k\pi} \frac{(n - k\pi) \cdot n^2}{(n - k\pi)} \times \frac{1}{\sin^2 n} = \frac{(k\pi)^2}{0} = \infty \rightarrow \text{تکین نامنظم}$$

$n = k\pi$
 $k \neq 0$

روشن دیگر =

اول ریشه های فردی n و زوجی k ← مرتبه این ریشه ها $k =$ ^{مرتبه} مرتبه ریشه \leftarrow مرتبه ریشه y باید باشد $k-1$ و برای y : حداقل مرتبه k ریشه $k-2$...

اگر n ریشه k ام فردی y باشد، ریشه k ام حداقل ریشه $(k-1)$ ام فردی

y و حداقل ریشه $(k-2)$ ام فردی y باشد، n تکین منظم است و در غیر این صورت

تکین نامنظم است.

$$\sin^2 n = 0 \rightarrow n = 0 \rightarrow \text{ریشه مرتبه } 1 \rightarrow n^2 = \text{ریشه مرتبه } 2$$

که آنجا حداقل باید 1 بود

$$n = k\pi : \text{ریشه مرتبه } 1 \rightarrow x$$

$T = 424 = 2 =$ تکین دارد:

منظم \rightarrow حداقل باید $\sqrt{}$ باشد \rightarrow حداقل باید $\sqrt{}$ باشد \rightarrow مرتبه 2 $\rightarrow n = 0$

نامنظم \rightarrow $x \cdot \sqrt{}$ \rightarrow $\sqrt{}$ \rightarrow $\sqrt{}$ \rightarrow $\sqrt{}$ $\rightarrow n = 1$

(F)

ریشه مرتبه 1

$T = 424 = 4 =$

(W) : \rightarrow باید $\sqrt{}$ باشد \rightarrow حداقل باید $\sqrt{}$ باشد \rightarrow حداقل باید $\sqrt{}$ باشد \rightarrow مرتبه 2 $\rightarrow n = 0$

$T = 427 = 21 =$

منظم \rightarrow باید حداقل باشد \rightarrow باید حداقل $\sqrt{}$ باشد \rightarrow مرتبه 2 $\rightarrow n = 0$

مرتبه ۲ برای معادله $x^2(1-\cos x)^3(x-\sin x)^4$ \rightarrow $\frac{1}{2}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{6}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{12}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{24}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{48}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{96}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{192}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{384}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{768}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1536}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3072}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{6144}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{12288}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{24576}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{49152}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{98304}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{196608}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{393216}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{786432}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1572864}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3145728}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{6291456}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{12582912}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{25165824}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{50331648}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{100663296}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{201326592}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{402653184}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{805306368}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1610612736}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3221225472}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{6442450944}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{12884901888}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{25769803776}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{51539607552}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{103079215104}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{206158430208}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{412316860416}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{824633720832}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1649267441664}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3298534883328}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{6597069766656}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{13194139533312}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{26388279066624}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{52776558133248}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{105553116266496}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{211106232532992}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{422212465065984}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{844424930131968}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1688849860263936}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3377699720527872}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{6755399441055744}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{13510798882111488}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{27021597764222976}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{54043195528445952}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{108086391056891904}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{216172782113783808}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{432345564227567616}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{864691128455135232}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1729382256910270464}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3458764513820540928}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{6917529027641081856}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{13835058055282163712}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{27670116110564327424}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{55340232221128654848}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{110680464442257309696}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{221360928884514619392}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{442721857769029238784}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{885443715538058477568}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1770887431076116955136}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3541774862152233910272}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{7083549724304467820544}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{14167099448608935641088}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{28334198897217871282176}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{56668397794435742564352}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{113336795588871485128704}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{226673591177742970257408}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{453347182355485940514816}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{906694364710971881029632}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1813388729421943762059264}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3626777458843887524118528}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{7253554917687775048237056}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{14507109835375550096474112}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{29014219670751100192948224}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{58028439341502200385896448}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{116056878683004400771792896}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{232113757366008801543585792}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{464227514732017603087171584}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{928455029464035206174343168}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1856910058928070412348686336}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3713820117856140824697372672}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{7427640235712281649394745344}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{14855280471424563298789490688}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{29710560942849126597578981376}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{59421121885698253195157962752}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{118842243771396506390315925504}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{237684487542793012780631851008}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{475368975085586025561263702016}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{950737950171172051122527404032}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1901475900342344102245054808064}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3802951800684688204490109616128}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{7605903601369376408980219232256}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{15211807202738752817960438464512}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{30423614405477505635920876929024}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{60847228810955011271841753858048}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{121694457621910022543683507716096}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{243388915243820045087367015432192}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{486777830487640090174734030864384}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{973555660975280180349468061728768}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1947111321950560360698936123457536}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3894222643901120721397872246915072}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{7788445287802241442795744493830144}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{15576890575604482885591488987660288}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{31153781151208965771182977975320576}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{62307562302417931542365955950641152}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{124615124604835863084731911901282304}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{249230249209671726169463823802564608}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{498460498419343452338927647605129216}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{996920996838686904677855295210258432}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1993841993677373809355710590420516864}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{3987683987354747618711421180841033728}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{7975367974709495237422842361682067456}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{15950735949418990474845684723364134912}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{31901471898837980949691369446728269824}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{63802943797675961899382738893456539648}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{127605887595351923798765477786913079296}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{255211775190703847597530955573826158592}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{510423550381407695195061911147652317184}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1020847100762815390390123822295304634368}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{2041694201525630780780247644590609268736}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{4083388403051261561560495289181218537472}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{8166776806102523123120990578362437074944}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{16333553612205046246241981156724874149888}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{32667107224410092492483962313449748299776}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{65334214448820184984967924626899496599552}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{130668428897640369969935849253798993199104}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{261336857795280739939871698507597986398208}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{522673715590561479879743397015195972796416}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1045347431181122959759486794030391945592832}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{2090694862362245919518973588060783891185664}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{4181389724724491839037947176121567782371328}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{8362779449448983678075894352243135564742656}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{16725558898897967356151788704486271129485312}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{33451117797795934712303577408972542258970624}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{66902235595591869424607154817945084517941248}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{133804471191183738849214309635890169035882496}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{267608942382367477698428619271780338071764992}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{535217884764734955396857238543560676143529984}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1070435769529469910793714477087121352287059968}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{2140871539058939821587428954174242704574119936}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{4281743078117879643174857908348485409148239872}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{8563486156235759286349715816696970818296479744}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{17126972312471518572699431633393941636592959488}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{34253944624943037145398863266787883273185918976}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{68507889249886074290797726533575766546371837952}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{137015778499772148581595453067151533092743675904}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{274031556999544297163190906134303066185487351808}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{548063113999088594326381812268606132370974703616}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1096126227998177188652763624537212264741949407232}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{2192252455996354377305527249074424529483898814464}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{4384504911992708754611054498148849058967797628928}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{8769009823985417509222108996297698117935595257856}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{17538019647970835018444217992595396235871190515712}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{35076039295941670036888435985190792471742381031424}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{70152078591883340073776871970381584943484762062848}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{140304157183766680147553743940763169886969524125696}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{280608314367533360295107487881526339773939048251392}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{561216628735066720590214975763052679547878096502784}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1122433257470133441180429951526105359095756193005568}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{2244866514940266882360859903052210718191512386011136}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{4489733029880533764721719806104421436383024772022272}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{8979466059761067529443439612208842872766049444044544}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{17958932119522135058886879224417685745532098888089088}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{35917864239044270117773758448835371491064197776178176}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{71835728478088540235547516897670742982128395552356352}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{143671456956177080471095033795341485964256791104712704}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{287342913912354160942190067590682971928513582209425408}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{574685827824708321884380135181365943857027164418850816}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1149371655649416643768760270362731887714054328837701632}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{2298743311298833287537520540725463775428108657675403264}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{4597486622597666575075041081450927550856217315350806528}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{9194973245195333150150082162901855101712434630701613056}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{18389946490390666300300164325803710203424869261403226112}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{36779892980781332600600328651607420406849738522806452224}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{73559785961562665201200657303214840813699477045612904448}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{147119571923125330402401314606429681627398954091225808896}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{294239143846250660804802629212859363254797908182451617792}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{588478287692501321609605258425718726509595816364903235584}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1176956575385002643219210516851437453019191632729806471168}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{2353913150770005286438421033702874906038383265459612942336}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{4707826301540010572876842067405749812076766530919225884672}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{9415652603080021145753684134811499624153533061838451769344}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{18831305206160042291507368269622999248307066123676903538688}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{37662610412320084583014736539245998496614132247353807077376}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{75325220824640169166029473078491996993228264494707614154752}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{150650441649280338332058946156983993986456528989415228309504}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{301300883298560676664117892313967987972913057978830456619008}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{602601766597121353328235784627935975945826115957660913238016}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1205203533194242706656471569255871951891652231915321826476032}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{2410407066388485413312943138511743903783304463830643652952064}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{4820814132776970826625886277023487807566608927661287305904128}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{9641628265553941653251772554046975615133217855322574611808256}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{19283256531107883306503545108093951230266435710645149223616512}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{38566513062215766613007090216187902460532871421290298447233024}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{77133026124431533226014180432375804921065742842580596894466048}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{154266052248863066452028360864751609842131485685161193788932096}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{308532104497726132904056721729503219684262971370322387577864192}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{617064208995452265808113443459006439368525942740644775155728384}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1234128417990904531616226886918012878737051885481289550311456768}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{2468256835981809063232453773836025757474103770962579100622913536}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{4936513671963618126464907547672051514948207541925158201245827072}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{9873027343927236252929815095344103029896415083850316402491654144}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{19746054687854472505859630190688206059792830167700632804983308288}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{39492109375708945011719260381376412119585660335401265609966616576}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{78984218751417890023438520762752824239171320670802531219933233152}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{157968437502835780046877041525505648478342641341605062439866466304}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{315936875005671560093754083051011296956685282683210124879732932608}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{631873750011343120187508166102022593913370565366420249759465865216}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{1263747500022686240375016332204045187826741130732840499518931730432}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{2527495000045372480750032664408090375653482261465680999037863460864}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{5054990000090744961500065328816180751306964522931361998075726921728}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{10109980000181489923000130657632361502613929045862723996151453843456}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{20219960000362979846000261315264723005227858091725447992302907686912}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{40439920000725959692000522630529446010455716183450895984605815373824}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{80879840001451919384001045261058892020911432366901791969211630747648}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{161759680002903838768002090522117784041822864733803583938423261495296}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{323519360005807677536004181044235568083645729467607167876846522990592}$ مرتبه \rightarrow $\frac{1}{647038720$

$$58 = 435 = T$$

$$4x^2 y'' + x(3x - 2x^2) y' - x^2(x+1)y = 0$$

$$y'' \text{ کترین توان} = x^2$$

$$\frac{\text{ضرب } x^2 \text{ عبارت دوم}}{\text{ضرب } x^2 \text{ در } y''} = \frac{3}{2} = P_0 \quad \Rightarrow r^2 + \frac{1}{r} - \frac{1}{2} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\text{ضرب } x^2 \text{ عبارت سوم}}{\text{ضرب } x^2 \text{ در } y''} = Q_0 = -\frac{1}{2}$$

$T = 91$ ریشه های معادله ساختن معادله 2

$$4x^2 y'' + x(2x^4 - 5x) y' + x^2(3x^2 + 2)y = 0$$

$$\text{ضرب} = x^2$$

$$P_0 = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow r^2 - \frac{9}{4}r + \frac{1}{2} = 0 \quad (12) \rightarrow P_0 \frac{1}{4}$$

$$Q_0 = \frac{1}{2}$$

$T =$ اگر معادله زیر به روش سری با حول $x=0$ حل شود، ریشه های معادله مشخصه آن؟

$$6x^2 y'' + 7x y' - x^2(1+x^2)y = 0$$

$$P_0 = \frac{7}{6}$$

$$\rightarrow r^2 + \frac{1}{6}r - \frac{1}{6} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

$$Q_0 = -\frac{1}{6}$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \text{حاصل جمع ریشه ها} &= -\frac{b}{a} = \frac{1}{6} \\ \rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه ها} &= \frac{c}{a} = -\frac{1}{6} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \text{حاصل جمع ریشه ها} &= -\frac{b}{a} = \frac{1}{6} \\ \rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه ها} &= \frac{c}{a} = -\frac{1}{6} \end{aligned} \right\}$$

تسخیر فرم کلی جواب معادله 4 (دیفرانسیل بصورت سری) توان حول $x=0$

تسخیر فرم کلی جواب معادلهٔ تفاضلی به صورت سری توانی حول $x_0 =$

نقطه عاری است ← هر نقطه ای که تکین نباشد؛ عاری است ←

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

سری توانی برای تقاطع x_0

نقطه تکین است ← تکین نامنظم است ← معادله جوابی به فرم سری توانی حول x_0 ندارد.

تکین منظم است ← برای تسخیر فرم کلی مطابق زیر عمل می‌کنیم.

* ابتدا معادلهٔ شایستگی حول x_0 تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های معادله شایستگی را بدست می‌آوریم

(r_1 و r_2)، حالتی زیر را خواهیم داشت =

r_1 ریشه معادله شایستگی

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

جواب به فرم فروبنیوس

اعداد صحیح

$$r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{cases} y_1 = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\ y_2 = (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \end{cases} \rightarrow y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

ب) $r_1 - r_2 = r \rightarrow$ ریشه‌های متفاوت

$$\begin{cases} y_1 = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\ y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \end{cases} \rightarrow y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

ج) $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y_1 = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\ y_2 = k y_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \end{cases} \rightarrow y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$y'' + x \frac{3x-1}{x^2-x} y' + x^2 \frac{1}{x^2-x} y = 0$$

$$T = 425 = 5$$

کمترین توان $y'' = x$

$P_0 = 1$ → $r^2 + (1-1)r = 0 = 0 \rightarrow r^2 = 0 \rightarrow r = 0$: ریشه مضاعف → ψ

$Q_0 = 0$

$$\frac{\text{قدر } -x \text{ (مقام اول)}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

اوتابیکه در صورت جذر متساوی توان y''

$T = 429 = 29$ گزینۀ مناسب با صیقل حول e ← معادله ساختن بر حول e بیفوس

$$2xy'' + xy' + x^2 y = 0$$

$P_0 = \frac{1}{2}$ → $r^2 - \frac{1}{2}r = 0 \rightarrow r = \frac{1}{2}, 0$

$Q_0 = 0$

پس $n = x$ حول صفر میبند

$$(x - x_0)^n$$

①

$T = 429 = 30$ حول صفر پس در n و x^2 قدر یک کن

$$4xy'' + 3xy' + 2x^2 y = 0$$

گزینۀ مناسب

$P_0 = \frac{3}{4}$

$r^2 - \frac{1}{4}r = 0 \rightarrow r = 0, \frac{1}{4}$ → ③

$Q_0 = 0$

زیرا در حالت متساوی در x^2 و x قدر یک کن

اگر حول e نبود ← باید حد بگیرد

$$2x^2 y'' + xy' - x^2(x+1)y = 0$$

$T = 427 = 18$ حول صفر ←

$P_0 = \frac{1}{2}$ → $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 2r^2 - r - 1 = 0 \rightarrow (2r+1)(r-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ r = 1 \end{cases}$

$Q_0 = -\frac{1}{2}$

مثال 8 = دو جواب مستقل معادله زیر

از گزینۀ مناسب حول صفر پس در x^2 و x قدر یک کن $x > 0$ و $x^2 y'' + 3xy' + x^2(1+x)y = 0$

$P_0 = 3$

→ $r^2 + 2r + 1 = 0 \rightarrow r = -1$ → ریشه مضاعف →

$Q_0 = 1$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \frac{1}{x} \sum a_n x^n \\ y_2(x) = y_1(x) \ln(x) + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{cases}$$

$3x(2+3x)y'' - 4xy' + x^2 4y = 0$ x^2 و x حول صفر نیستند $= 31 = 43 = T$
فرد - ک:

$P_0 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$
 $Q_0 = 0 \rightarrow r^2 - \frac{5}{3}r = 0 \rightarrow r = 0 \rightarrow \textcircled{1}$
 $\searrow r = \frac{5}{3}$

معادله فروبنیوس $r =$ ریشه معادله مشخصه

$(x^2 - x)y'' - xy' + xy = 0$

$P_0 = 0 \rightarrow r^2 - r = 0 \rightarrow r = 0$
 $Q_0 = 0 \rightarrow r = 1$

ریشه $P_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x^2 - x} = 0$

$P_0 = \frac{2}{3} \rightarrow r^2 - \frac{1}{3}r = 0 \rightarrow r = 0$ $3x^2 y' + \dots = 32 = 43 = T$
 $Q_0 = 0 \rightarrow r = \frac{1}{3}$

$x^2 y'' + 3xy' + x^2(1+x)y = 0$ یک جواب معادله ریفالسیبل زیرکدامست؟ $57 = 43 = T$

$P_0 = 3 \rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \rightarrow r = -1$ ریشه مضاعف: $Q_0 = 1$

معادله $x^3 y'' + 2x^2 y' + x^2(e^x - 1)y = 0$ معادله λ مقادیر λ را امتحان کن $92 = 83 = T$
به فرم فروبنیوس حول $x = 0$ است؟

شرط رانسن جواب به فرم فروبنیوس he^i

$\begin{cases} r_1 \neq 0 \\ \Delta \neq 0 \\ r_1 - r_2 = \sqrt{\Delta} \end{cases}$

$P_0 = 2 \Rightarrow r^2 + r + \lambda = 0 \rightarrow r_1 \neq 0 \rightarrow \lambda \neq 0 \rightarrow \lambda \neq 0, \frac{1}{4} \textcircled{1}$
 $Q_0 = 1 \rightarrow \Delta = 1 - 4\lambda \neq 0 \rightarrow \lambda \neq \frac{1}{4}$

سطح مکعب $\lambda \neq 0$ و فروبنیوس
فرد $\lambda \neq \frac{1}{4}$