Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل دوم:

معادلات مرتبهٔ دوم: ← خطی ← معادلات خطی با ضرایب ثابت (قابل تعمیم تا مرتبهٔ n) ۸۰٪
← معادلات خطی با ضرایب متغیر
← غیر خطی ۲۰٪

معادلات خطی با ضرایب ثابت = کلی‌ترین فرم این معادلات بصورت زیر است =

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = R(x)$$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0$

درجه نسبت به y و مشتقاتش

$R(x)=0$ ← معادله همگن

$R(x)\neq 0$ ← معادله غیرهمگن

وقتی میگه همگن باید بدونیم همگن نسبت به چی؟ نسبت به y و مشتقاتش = $x^2y''+4xyy'=0 \rightarrow$

درجه نسبت به y و مشتقاتش = $1 \quad 2$

محاسبهٔ جواب عمومی معادلهٔ خطی با ضرایب ثابت همگن =

$a_n, a_{n-1}, \ldots$

فرم کلی این نوع معادلات مطابق زیر است =

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

برای محاسبهٔ جواب عمومی معادلهٔ همگن مطابق زیر عمل می کنیم =

① معادله مفسر آن را تشکیل می دهیم: هرجا که مشتق مرتبه n داری ، به جاش s^n بذار

$y^{(n)} \longrightarrow s^n$

$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$

$D^n y = y^{(n)}$ $\Rightarrow (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)\, y = 0$ = فرم اپراتوری

اپراتور مشتق

۴) ریشه‌های معادلهٔ مشخصه را بدست می‌آوریم:

که دو حالت دارد=

۱. α ریشهٔ حقیقی مرتبهٔ k ام معادله مشخصه است=

$y_h = ($ چند جمله ای از درجهٔ $k-1$ $)\, e^{\alpha x}$

۲. $\alpha \mp j\beta$ ریشهٔ مختلط مرتبهٔ k ام معادله مشخصه است=

$y_h = e^{\alpha x}\Big[($ چند جمله ای از درجهٔ $k-1$ $)\cos\beta x + ($ چند جمله‌ای از درجهٔ $k-1$ $)\sin\beta x\Big]$

۲ بار تکرار شده

مثال= جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید؟

$D^2(D-1)^3(D^2+2D+2)^2(D^2+9)^3(D^2+6D+12)\,y = 0$

وقتی به فرم اپراتوری است دیگه نیاز به نوشتن معادله مشخصه نیست فقط کافیه و اش را در نظر بگیریم=

$S=0$ ۲ $\rightarrow y_{h1} = (c_1 x + c_2)\,e^{0x}$

$S=1$ ۳ $\rightarrow y_{h2} = (c_3 x^2 + c_4 x + c_5)\,e^{x}$

$S=-1\pm j$ ۲ $\rightarrow y_{h3} = e^{-x}\big[(c_6 x + c_7)\cos x + (c_8 x + c_9)\sin x\big]$

$S=\mp 3j$ ۳ $\rightarrow y_{h4} = e^{0x}\big[(c_{10} x^2 + c_{11} x + c_{12})\cos 3x + (c_{13} x^2 + c_{14} x + c_{15})\sin 3x\big]$

$S=-3\pm 2j$ ۱ $\rightarrow y_{h5} = e^{-3x}\big[c_{16}\cos 2x + c_{17}\sin 2x\big]$

$y_h = y_{h1} + y_{h2} + y_{h3} + y_{h4} + y_{h5}$

۱۷ تا پارامتر داریم => پس مرتبش میشه ۱۷ بالاترین توانهای مشتق: $2+3+4+6+2=17$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یادآوری:

* در معادله‌ی $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ توجه به مطالب زیر مفید است:

① این معادله دقیقاً n ریشه دارد.

② اگر a_i ها (ضرایب) حقیقی باشند درصورتیکه $\alpha + j\beta$ ریشه باشد حتماً $\alpha - j\beta$ هم ریشه است.

(یعنی: تعداد ریشه های مختلط همواره زوج است.)

③ $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$

مجموع ریشه ها $= -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$

مجموع حاصلضرب ۲ به ۲ ریشه ها $= \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$

مجموع حاصلضرب ۳ به ۳ ریشه ها $= -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$

$\vdots$

حاصلضرب کل ریشه ها $= (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

④ برای محاسبه ریشه های $a_n s^n + a_0 = 0$ (فقط بالاترین وکمترین توان مخالف صفر باشند) از قضیه‌ی موآور استفاده می کنیم.

$$z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{y}{x} & \text{اگر نقطه در ربع اول یا چهارم باشد} \\ \pi + \tan^{-1}\frac{y}{x} & \text{اگر نقطه در ربع دوم یا سوم باشد} \end{cases} \end{cases}$$

$\cos\theta + i\sin\theta$

$z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$

م: $z = -2 \quad : \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \pi \end{cases}$

م: $z = 1 + i \quad : \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

انداره فاز

قضیه‌ی موآور: $Z = x + iy \Rightarrow Z = r\,\text{cis}\,\theta \Rightarrow (z)^{\frac{1}{n}} = (r)^{\frac{1}{n}}\,\text{cis}\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

مثال: جواب عمومی معادله‌ی $y^{(6)} + y = 0$ را بدست آورید؟

اول تشکیل معادله مفسر: $S^6 + 1 = 0 \xrightarrow{\text{موآور}} S = (-1)^{\frac{1}{6}} = (\text{cis}\,\pi)^{\frac{1}{6}} =$

$= \text{cis}\,\frac{2k\pi+\pi}{6} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

گفتیم تعدادش همیشه زوجه

$k=0 \rightarrow S = \text{cis}\,\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \mp \frac{i}{2}$

$k=1 \rightarrow S = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mp i$

$k=2 \rightarrow S = \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \mp \frac{i}{2}$

دیگه ۶ تا ریشه بدست اومد. نیاز به محاسبه‌ی 3 و 4 و 5 نیست:

$y_{h_0} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left[c_1\cos\frac{x}{2} + c_2\sin\frac{x}{2}\right]$

$y_{h_1} = e^{0x}\left[c_3\cos x + c_4\sin x\right] \qquad y_h = y_{h_0} + y_{h_1} + y_{h_2}$

$y_{h_2} = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left[c_5\cos\frac{x}{2} + c_6\sin\frac{x}{2}\right]$

تشخیص مرتبه‌ی ریشه =

فرض کنیم x_0 ، ریشه‌ی f باشد پس ... اولین مشتقی که مخالف صفر میشه مرتبه‌ی n را:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

x_0 ریشه‌ی مرتبه‌ی n ام $f(x)$ است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: $x=i\pi$ ریشه مرتبه چندم تابع $f(x)=1+\operatorname{ch}x$ است؟

$f(i\pi)=1+\operatorname{ch}i\pi=1+\cos\pi=0$

$f'(x)=\operatorname{sh}x \rightarrow f'(i\pi)=0$ ⟹ $x=i\pi$ ریشه مرتبه دوم است.

$f''(x)=\operatorname{ch}x \rightarrow f''(i\pi)\neq 0$

مثال: $x=0$ ریشه مرتبه چندم تابع $f(x)=\operatorname{ch}x+\cos x-2$ است؟

$f(0)=0$

$$\left.\begin{aligned} &f'(x)=\operatorname{sh}x-\sin x \rightarrow f'(0)=0\\ &f''(x)=\operatorname{ch}x-\cos x \rightarrow f''(0)=0\\ &f'''(x)=\operatorname{sh}x+\sin x \rightarrow f'''(0)=0\\ &f^{(4)}(x)=\operatorname{ch}x+\cos x \rightarrow f^{(4)}(x)\neq 0 \end{aligned}\right\}$$

$x=0$: ریشه چهارم است.

x_0 ریشه مرتبه n ام $f(x)$ است $\equiv (x-x_0)^n f_1(x) \quad f_1(x_0)\neq 0$

مثال: $x=-1$ ریشه مرتبه چندم معادله زیر است؟ ⟸ $x^5+3x^4+2x^3-2x^2-3x-1=0$

$f(-1)=0$

$$\left.\begin{aligned} &f'(x)=5x^4+12x^3+6x^2-4x-3 \rightarrow f'(-1)=0\\ &f''(x)=20x^3+36x^2+12x-4 \rightarrow f''(-1)=0\\ &f'''(x)=60x^2+72x+12 \rightarrow f'''(-1)=0\\ &f^{(4)}(x)=120x+72 \rightarrow f^{(4)}(-1)\neq 0 \end{aligned}\right\}$$

$x=-1$ ریشه مرتبه چهارم است

$\Rightarrow (x+1)^4(x-\underset{1}{\cancel{\alpha}})=0 \rightarrow (x-(-1))^4(x-\alpha)=0 \rightarrow -\alpha=-1 \rightarrow \alpha=1$

PAPCO

Subject: ۲۸
Year.   Month.   Date.   ( )

$(ax^2+bx+c)e^{4x}$: ۴ ریشه‌ی مرتبه‌ی 3
ممکنه b و c = ۰ بشه ولی هیچوقت a = ۰ نمیشه

T: صنعت 30۴ = 60 = اگر دو جواب معادله‌ی غیرهمگن را به ما دادند => اختلاف این دو جواب، همیشه جواب معادله‌ی همگن متناظر با اینهاست.

$$\frac{d^4(y_1)}{dx^4}+4y_1=f(x)$$
$$\frac{d^4y_2}{dx^4}+4y_2=f(x)$$
$$\xrightarrow{-}\frac{d^4(y_2-y_1)}{dx^4}+4(y_2-y_1)=0$$

قضیه =
اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله غیرهمگن $a_ny^{(n)}+\dots+a_1y'+a_0y=R(x)$ باشند. آنگاه y_1-y_2

جواب عمومی معادله همگن متناظر با معادله فوق است.

$\checkmark\ S^4+4=0\rightarrow$

① غلط: میگه ۱ ریشه مرتبه‌ی ۲ معادله مشخصه است پس غلط
② غلط: $\pm j\ \sqrt{2}$ ← اندازه‌اش میشه $\sqrt{3}$ ولی ما میخوایم اندازه اش بشه $\sqrt{2}$ پس غلط

$\rightarrow S^4=-4\rightarrow S=(-4)^{\frac{1}{4}}\rightarrow |S|=\sqrt{2}$

③ ریشه‌اش بوده $1\pm j$ ← اندازه‌اش = $\sqrt{2}$ ← میتونه درست باشه
④ میگه $\sqrt{2}\pm\sqrt{2}j$ ← اندازه‌اش میشه 2 پس همون گزینه ③ مطمئناً درسته.

$y^{(4)}+y=0\rightarrow S^4+1=0\rightarrow |S|=1$ T: مخابرات ۹۰ = 86 =

① ← اندازه‌اش ۱ نمیشه
③ و ④ => پس میمونه گزینه ②

T: عمران ۹۰ = اگر xe^{2x} یک جواب معادله زیر باشد، جواب دیگر کدام است؟
$y^{(4)}-4y^{(3)}-5y''+a(y'-y)=0$

$xe^{2x}\rightarrow$ 2 ریشه‌ی مرتبه‌ی ۲ معادله مشخصه است.

$S^4-4S^3-5S^2+a(S-1)=0\rightarrow 16-32-20+a=0\rightarrow a=36$ + ① حذف
-2 ریشه‌اش نیست
③ حتماً غلط میگه ۲ ریشه‌ی مرتبه‌ی ۳ است.
④ میام ۲- رو جایگذاری میکنم: $16+32-20-36\times3\neq0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مجموعه Ⓑ و ② بین 3- حتماً ریشه است، مجموعه مرتبش: پس مشتق بگیر =

$4s^3-12s^2-10s+36=0 \longrightarrow -4\times27-12\times9+30+36\neq0 \rightarrow$ ①

$-\frac{b}{a}=$ مجموع ریشه ها

و از حذف گزینه ③ و ④

روش دوم =

$2+2+(-3)+x=4 \longrightarrow x=3$

3- یا 1 بار یا 2 بار: x رو حساب میکنیم ببینیم میشه چند اگه دوباره شد 3- بین 2 بار تکرار شده

روش سوم = پس 3- نباید 2 بار تکرار شه ← حتماً دو عدد دیگه باید مختلف العلامه باشد ← $-36=$ حاصلضرب ریشه ها

پس ضرب ریشه ها باید (-) بشه

روش چهارم = $s=2$ دوبار ریشه است، $a=36$ و پیدا کردم =

$s^4-4s^3-5s^2+36s-36 \quad \big|\ \underline{s^2-4s+4}$

تمرین 91 = اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $y''-2y'+y=R(x)$ بوده و $y_1(0)=y_2(0)$ و $y_1'(0)=y_2'(0)+1$ باشند روابط بین y_1 و y_2؟

y_1-y_2 جواب معادله همگن میشه ← ③ و ④ حذف: چون میگه 1 ریشه مرتبه 2

مجموع ریشه ها = 2 ← ② حذف

$y_1=y_2+xe^{x}$ (1 ✓ $\qquad$ $y_1=y_2+xe^{-x}$ (2

$y_1=y_2+x^2e^{x}$ (4 $\qquad$ $y_1=y_2+x^2e^{-x}$ (3

1 ریشه مرتبه 3 معادله مفسر است ×

محاسبه جواب عمومی معادله غیر همگن خطی با ضرایب ثابت =

فرم کلی این معادلات مطابق زیر است =

$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=R(x) \qquad (*)$

برای محاسبهٔ جواب عمومی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(۱) جواب عمومی معادله همگن متناظر با معادله (*) جرست می‌آوریم (y_h)

(۲) یک جواب خصوصی معادله (*) را بدست می‌آوریم (y_p)

(۳) جواب عمومی معادله (*) بصورت زیر است:

$$y_{عمومی} = y_h + y_p$$

روشهای محاسبهٔ جواب خصوصی:

۱ـ روش ضرایب نامشخص (نامعین)
۲ـ روش اپراتور معکوس
۳ـ روش تغییر پارامترها

مثلاً tan بود دیگه نمیشه

روش ضرایب نامشخص:
اگر $R(x)$ به فرم زیر باشد:

$$R(x) = e^{\alpha x}(\text{چند جمله ای از درجهٔ } n)\begin{cases}\cos\beta x\\ \sin\beta x\\ A\cos\beta x + B\sin\beta x\end{cases}$$

$$y_p = x^{m} \cdot e^{\alpha x}\left[(\text{چند جمله ای از درجهٔ } n)\cos\beta x + (\text{چند جمله ای از درجهٔ } n)\sin\beta x\right]$$

m : تکرار ریشه های $\alpha \mp j\beta$ معادلهٔ مفسر

$$x^m e^{\alpha x}(\text{چند جمله ای از درجهٔ } n)(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

$$\cos(\beta x + \theta_0)$$

$$\sin(\beta x + \theta_0)$$

فرم های دیگر این روش

Subject:
Year. Month. Date. ( )

م=فرم کلی جواب خصوصی معادله‌ی داده شده را بدست آورید؟

$$D^3(D^2+2D+D)^5(D-4)^7(D^2+9)^2y=x^2+x^3e^{4x}+x^2e^{5x}+xe^{-x}\cos x+x^2\cos 3x$$

$$+xe^{2x}\cos 5x+x\sin 6x$$

	yp_1	yp_2	yp_3	yp_4	yp_5	yp_6	yp_7
	$n=2$	$n=3$	$n=2$	$n=1$	$n=2$	$n=1$	$n=1$
	$\alpha=0$	$\alpha=4$	$\alpha=5$	$\alpha=-1$	$\alpha=0$	$\alpha=2$	$\alpha=0$
	$\beta=0$	$\beta=0$	$\beta=0$	$\beta=1$	$\beta=3$	$\beta=5$	$\beta=6$
	$m=3$	$m=7$	$m=0$	$m=5$	$m=2$	$m=0$	$m=0$

بالاترین درجه

تعداد ریشه‌های $\alpha=4$

$-1+j$

از اینجا به بعد رو با توجه به گزینه‌ها میتونی تشخیص بدی =

$$yp_1=x^3e^{0x}(a_1x^2+a_2x+a_3)$$
$$yp_2=x^7e^{4x}(a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7)$$
$$yp_4=x^5e^{-x}\left[(a_8x+a_9)\cos x+(a_{10}x+a_{11})\sin x\right]$$
$$yp_6=x^0e^{2x}\left[(a_{12}x+a_{13})\cos 5x+(a_{14}x+a_{15})\sin 5x\right]$$

T= ص 295 = س 13 : (۲)

$x\cos x \longrightarrow n=1$

$\alpha=0$, $\beta=1$ $\longrightarrow \pm j$ مورد نظر $\longrightarrow m=2$

$$S^4+2S^2+1=0 \longrightarrow (S^2+1)^2=0$$

در گزینه‌ها برای تشخیص
توان کمترین توان ضریبها = m است

T= ص 303 = س 57 (۱)

$\cos x \longrightarrow n=0$

$\alpha=0$: بخش حقیقی

$\beta=1$: ضریب x $\longrightarrow m=1$

تعداد ریشه‌ها $\pm j$

$$B\,,A \longrightarrow S^2(S^2+1)=0$$

مرتبش = 1

PAPCO

Subject: ۳۰
Year. Month. Date. ( )

$y^{(4)} - y'' = x + e^x$ $\qquad S^2(S^2-1)=0$ $\qquad$ ④ = 104 س = 312 ص

$\alpha = 0$
$\beta = 0$
$m = 2$

رو در نظر نگیر c_3e^x ← در گزینه ها اون تیکه ای که مربوط به خودشه رو حذف کن

$\boxed{m = \text{کمترین توان}}$ ← مثلاً در ③ = ۱ میشه / در ① = ۰ میشه / در ② = ۱

$3e^x \to n=0,\ \alpha=1,\ \beta=0 \to m =$ تعداد ریشه های ۱ مفسر $= 1 \to$ ① و ② $\beta=0$ ✗ غلط $\qquad$ = 63 س = 364 ص T

$S(S^2-1)=0$

در ③ و ④ توان B = ① = پس میتونه درست باشه

$V \to n=0,\ \alpha=0,\ \beta=0 \to m=1$

④

$\sin x \to n=0,\ \alpha=0,\ \beta=1 \to m=2$ $\qquad$ ① = 28 س = 297 ص

$s^4+2s^2+1=0 \to (s^2+1)^2=0$

2 ① ✓
1 ②
1 ③
0 ④

$n=1,\ \alpha=1,\ \beta=2 \to m=1 \to$ ④ $\qquad$ = 69 س = 350 ص

$s^2(s^2-2s+5)=0 \to 1\pm 2j$

$xe^x[A\cos 2x + B\sin 2x]$ $\qquad$ ⑤

n های متفاوت داره پس غلط

① و ② چون cos ندارند غلطند / ③ = $m=0$

۲۳۴

$n=2,\ \alpha=4,\ \beta=0 \to m=3$ $\qquad$ ④ ۲۴۷ س = ۳۳۷ ص T

0 ①
0 ②
2 ③
③ ④ ✓

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اپراتور معکوس:

عبارت چندجمله‌ای برحسب D

$$f(D)\, y = R(x) \Rightarrow y_p = \frac{R(x)}{f(D)}$$

D = عملگر مشتق است:

1) $D^n f(x) = f^{(n)}(x)$

معکوس مشتق = انتگرال

۲) $\frac{f(x)}{D} = \int f(x)\,dx$

به جای D ها α بذار:

۳) مهم $\frac{e^{\alpha x}}{f(D)} = \frac{e^{\alpha x}}{f(\alpha)}$ ، $f(\alpha) \neq 0$

تذکر= اگر α ریشهٔ مرتبهٔ K ام f(D) باشد ≡ α ریشهٔ مرتبهٔ K ام معادله مفسر است:

اگر α ریشهٔ مرتبهٔ K باشه، حتماً در x^k باید ضرب بشه

$$\frac{e^{\alpha x}}{f(D)} = x^K \cdot \frac{e^{\alpha x}}{f^{(K)}(D)\big|_{D=\alpha}}$$

از f(D)، K بار مشتق بگیر و به جای D بذار α

۴) مهم $\frac{\cos\beta x \text{ یا } \sin\beta x}{f(D^2)} = \frac{\cos\beta x \text{ یا } \sin\beta x}{f(-\beta^2)}$ ، $f(-\beta^2) \neq 0$

تذکر= $\pm j\beta$ ریشهٔ مرتبهٔ K اُم معادله مفسر است ≡ $-\beta^2$ ریشهٔ مرتبهٔ K ام

$$\frac{\cos\beta x \text{ یا } \sin\beta x}{f(D^2)} = x^K \frac{\cos\beta x \text{ یا } \sin\beta x}{f^{(K)}(D^2)\big|_{D^2=-\beta^2}}$$

۵) مهم $\frac{e^{\alpha x} g(x)}{f(D)} = e^{\alpha x} \frac{g(x)}{f(D+\alpha)}$

همیشه منطقی‌ترینه که نمایی رو بکشی بیرون ...
نمایی خالص x یه عبارتی ...

4) $\frac{x\, g(x)}{f(D)} = x\frac{g(x)}{f(D)} - \frac{f'(D)}{f^2(D)}\big(g(x)\big)$ x x به عبارتی

مثال= یک جواب خصوصی $(D^5+D^4+2D^3+3D^2+4D+3)y = e^x + \sin 2x$

برای اونایی که α و β متفاوت دارند: جواب خصوصی متفاوتی دربیار= y_{p_1} , y_{p_2}

$y_{p_1} = \frac{e^x}{D^5+D^4+2D^3+3D^2+4D+3} = \frac{e^x}{14} \longrightarrow$ طبق نکته 3 به جای Dها =1 بذار

$y_{p_2} = \frac{\sin 2x}{D^5+D^4+2D^3+3D^2+4D+3}$ طبق 4: sin و cos رو باید بر حسب D^2 مرتب کن: $D^2=-\beta^2=-4 \leftarrow 2=\beta$

$D(D^2)^2 \to 16D \qquad (D^2)^2 \to 16 \qquad 2D(D^2) \to -8D \qquad 3(-4) \qquad 4D$ =گرایش

$D=$ عملگر مشتق

$$= \frac{\sin 2x}{12D+7} \times \frac{12D-7}{12D-7} = \frac{24\cos 2x - 7\sin 2x}{144\underset{-4}{D^2}-49}$$

برای تولید D^2 در صورت و مخرجش ضرب کن

$$y_p = \frac{e^x}{14} - \frac{24\cos 2x - 7\sin 2x}{144\times 4 + 49}$$

مثال= جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل « $y''+6y'+13y = x.e^{-3x}.\cos 2x$ » را بدست آورید؟

جواب عمومی خواسته‌ی اول معادله‌ی مشخصه:

$s^2+6s+13=0$

$s = -3 \pm 2j \longrightarrow y_h = e^{-3x}(c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x)$

$$y_p = \frac{x.e^{-3x}.\cos 2x}{D^2+6D+13}$$

هروقت $e^{\alpha x}$ را داشتیم بهتره از خواصیت 5 استفاده کنیم و بیاریمش بیرون:

$$\overset{5}{=} e^{-3x}\cdot\frac{x\cos 2x}{(D-3)^2+6(D-3)+13} = e^{-3x}\cdot\frac{x\cos 2x}{D^2+4} \overset{6}{=}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\overset{④}{=} e^{-3x}\left\{x.\frac{\cos 2x}{D^2+4}-\frac{2D}{(D^2+4)^2}\{\cos 2x\}\right\} \overset{*}{=}$$

④ صورت سینوسی‌خالص و مخرج عبارت برحسب D بشه ④

①

$$\frac{\cos 2x}{0}$$

تذکر ④: در یه x ضرب کن و از مخرج مشتق بگیر

$$x.\frac{\cos 2x}{2D} \overset{④}{\rightarrow} \frac{1}{4}x\sin 2x$$

$$① \rightsquigarrow \frac{-4\sin 2x}{(D^2+4)^2} \xrightarrow{④} \frac{-4\sin 2x}{0} \xrightarrow{④\ \text{تذکر}} x\,\frac{-4\sin 2x}{4D(D^2+4)} \xrightarrow{④} x.\frac{-4\sin 2x}{0} \xrightarrow[④]{\text{تذکر}}$$

$$x^2.\frac{-4\sin 2x}{12D^2+16} \xrightarrow{④} x^2\,\frac{-4\sin 2x}{-32} = \frac{1}{8}x^2\sin 2x$$

$$\overset{*}{=} e^{-3x}\left(\frac{1}{4}x^2\sin 2x-\frac{1}{8}x^2.\sin 2x\right)=\frac{1}{8}x^2e^{-3x}.\sin 2x$$

$$\text{Cor}: y=y_h+y_p=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{8}x^2e^{-3x}\sin 2x$$

راه اول:

$n=1$
$\alpha=-3 \rightarrow m=1 \quad \rightarrow y_p=xe^{-3x}\{(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x\}$
$\beta=2$

که خیلی طولانیه..

$$y''+4y=3\cos 2t$$

T: ۵۰ ۳ = ر ۷۴ =

۱) معادله غیرهمگنه ← حتماً باید در جواب عمومیش به عبارت فاقد پارامتر داشته باشه x

۲) 2 و 2- ریشه های معادله نیستند x

۳) داره میگه $\pm 2j$ ریشه ساده است ← پس حتماً باید $t\cos 2t$ بیاد...

طبق ④ $\pm j\beta$ ریشه بود حتماً باید در یک x^k ضرب بشه؛ اینجا ساده هست پس باید بشه*

(۴ ✓

$$y_p=\frac{3\cos 2t}{D^2+4} \xrightarrow[\substack{\text{در یه } t \text{ ضرب کن و از}\\ \text{مخرج مشتق بگیر}}]{\text{مخرج صفر میشه پس}} t\,\frac{3\cos 2t}{2D}=\frac{3}{4}t\sin 2t$$

Subject: ۳۲
Year. Month. Date. ( )

$y_p = ($ قسمتی که از جنس y_h نیست $) + ($ از جنس y_h است $)$

منحصر بفرد است

مثلاً در ④: عبارت دوم قسمت منحصر بفرد نشده ...

ت = ۳۰۸ = ۸۰ = y_h ← پارامتر داشت + y_p = پارامتر نداشت ← میشه از رو گزینه‌ها تشخیصش بدیم:
پس باید در یه x^2 ضرب شده باشه که شده ← چون مرتبه‌ی 2 هست.

۱) x^3e^x: داره میگه 1 ریشه مرتبه‌ی ۳ مضاعف است ← هیچ‌چیز جز y_h باشه

۲) $y_p: x^2e^x$ / حتماً باید x^3e^x رو داشته باشه و نداره پس غلطه: 1 ریشه‌ی مرتبه‌ی 2 است پس حتماً باید در x^2 ضرب شه

۳) باید x^3e^x رو ببینیم

۴) مجموع ریشه‌ها شده 2 / ولی در این گزینه میگه او 1 ریشه‌ی مضاعف است.

در سؤاله $= xe^x + 4$
حالا راه حل تشریحیش =

$$y'' - 2y' + y = \overbrace{xe^x}^{y_{p_1}} + 4$$

$$y_{p_1} = \frac{xe^x}{(D-1)^2} \xrightarrow{⑤} e^x \frac{x}{D^2} = \frac{1}{6}x^3 e^x$$

$$y_{p_2} = \frac{4e^{0x}}{(D-1)} \xrightarrow{D=0} 4$$

①:

$$(S-1)^2 = 0 \rightarrow S = 1 \quad \Rightarrow y_h = (C_1x + C_2)e^x$$

ت = ۳۰۳ = ۳۹

۱) اگه 1- ریشه‌ی مرتبه‌ی 3 مضاعف است: $\times$ ← 1- ریشش مشتق نمیکنه $S^3 + 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} 3S^2$

۲) جمله‌ی ثابت نداره (معادله‌ی غیرهمگن حتماً باید یه y_p ای داشته باشه)

گزینه‌ی ۳ و ۴: هم مثل هم‌ان و فقط میشه محاسبه کرد. وقتی x دارم باید حتماً یه 3 تو مخرج داشته باشم
پس ④

راه تشریحی =

$$y_p = \frac{e^{-x}}{D^3+1} = x\frac{e^{-x}}{3D^2} = \frac{1}{3}xe^{-x}$$

۲) Axe^{-x} حتماً باید $+ Be^{-x}$ هم داشته باشه وگرنه این جواب هیچ معادله‌ای نمیتونه باشه ..

Subject :

Year. Month. Date. ( )

T= ص 297 = س 23 =

۱) غلط معادله مرتبه ۴ است و در ① و ② دوتا پارامتر داره

۳) ۱- ریشه مرتبه ۴ معادله مشخصه است (۳ و ۴ میگه)

۴) پس مطمئنم = $(D+1)^4 y = e^{-x} \to y_p = \frac{e^{x}}{(D+1)^4} = x^4\frac{e^{x}}{4!} \to$ پس ④ :

روش دیگر = $s^4+4s^3+6s^2+4s+1=0 \to (s+1)^4=0$

T= ص 298 = س 29

۱) داره میگه ۱ ریشه مرتبه ۲ معادله مشخصه ← ① × ← ④ هم غلط $(s^4-1)' = 4s^3 \to$ غلط

دیگه نیاز نیست y_h ها رو حساب کنم ← چون در ۲ و ۳ مشترکه

در x ضرب شده ← پس میشه ②

$$y_p = \frac{\cos x+\sin x}{D^4-1} = x\,\frac{\cos x+\sin x}{4D^3} = \frac{1}{4}x(-\sin x+\cos x)$$

در این تستها ما فقط از خواص 3 و 4 و 5 استفاده می‌کنیم.

T= ص 297 = س 25 = چون عدده ← باید تشریحی حل کنیم دیگه =

$s^2+4=0 \to s=\pm 2j \to y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$

$$y_p = \frac{4\cos 2x}{D^2+4} = x\,\frac{4\cos 2x}{2D} = x.\sin 2x$$

$y = y_h + y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + x\sin 2x \ *$

$y(0)=1 \xrightarrow{*} A=1 \quad , \quad y'(0)=0 \to B=0$

$y = \cos 2x + x\sin 2x \to y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$: ④

T= ص 305 = س 66 =

مجموع ریشه‌ها باید بشه $-\frac{3}{2}$ ۱) $\frac{1}{2}$ × ۲) $-\frac{1}{2}$ × ۳) ۰ × پس ④

PAPCO

روش تشریحی =

$$y_p = \frac{(x+2)e^{-x}}{2D^2+3D+1} \overset{⑤}{=\!=} e^{-x}\frac{x+2}{2(D-1)^2+3(D-1)+1} = e^{-x}\frac{x+2}{2D^2-5}$$

میایم مخرج کسر رو تجزیه می‌کنم و از بسط تصاعد هندسی استفاده می‌کنم =

$$= e^{-x}\frac{x+2}{2D^2-D} = e^{-x}\left(\frac{1}{-D}\cdot\frac{x+2}{1-2D}\right) = e^{-x}\left(-\frac{1}{D}\right)(1+2D+4D^2+\dots)(x+2) =$$

$$= e^{-x}\left(-\frac{1}{D}\right)(x+2+2) \quad \to \quad 1\times(x+2)=x+2 \;\Big\{\; 2D\times(x+2) \xrightarrow{\text{مشتق}} 2$$

$$y_p = e^{-x}\left(-\frac{1}{2}x^2-4x\right)$$

$$\frac{1}{1+\alpha D} = 1-\alpha D+(\alpha D)^2-(\alpha D)^3+\dots$$ فرم تصاعد هندسی 8

برای اینکه از $-D$ فاکتور گرفته چون میخوام عدد ثابت 1 رو بکشم بیرون و به فرم $\frac{1}{1+\alpha D}$ درش بیارم

ت = م 336 = ر 241 =

$$y = \frac{3e^x}{(D-1)^2} \longrightarrow y_p = x^2\cdot\frac{3e^x}{2}$$

م 337 = س 246 = ر 247

مکانیک ۹۰ = جواب حذفی $\quad y'''-2y''+3y'-2y=2e^x$

$$y_p = x\,\frac{2e^x}{3D^2-4D+3} = xe^x$$

در همه‌ی گزینه‌ها می‌فهمیم که همه در x ضرب شده پس x رو حتماً میام
در یه x ضرب میکنم و از مخرج مشتق میگیرم :

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش تغییر پارامترها:

اگر جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی همگن $f_n(x)y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+f_1(x)y'+f_0(x)y=0$

بصورت " $y_h=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ " باشد آنگاه جواب خصوصی معادله

$f_n(x)y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+f_1(x)y'+f_0(x)y=R(x)$ بصورت زیر است:

$$y_p=u_1y_1+u_2y_2+\dots+u_ny_n$$

که در آن u_i ها از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$u_i=\int\frac{W_i}{W}\,dx$$

$W=$ رونسکین

سطر اول رو y_1 تا y_n میذاریم و انقدر ازش مشتق میگیریم تا مربعی شه:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

W_i از حذف ستون i ام W و جایگزینی آن با $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\R(x)\end{bmatrix}$ بدست می‌آید.

ویژگی های مثبت روش تغییر پارامتر:

① $R(x)$ هر تابعی می‌تواند باشد. (نمایی و...)

② برای معادلات خطی با ضرایب متغیر نیز کاربرد دارد.

تا حالا از مرتبه ۲ بیشتر در کنکور نیومده

ویژگی منفی روش تغییر پارامتر = محاسبات طولانی

مراحل روش تغییر پارامترها =

۱) y_h معادله داده شده را بدست می آوریم. $y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$

۲) در y_h بجای c_i ها u_i قرار می دهیم $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_ny_n$

۳) ابتدا W را محاسبه می کنیم و سپس از رابطه $u_i = \int \frac{W_i}{W}dx$ ، u_i ها را بدست می آوریم

مثال = جواب عمومی معادله دیفرانسیل « $y''' + y' = \csc x$ » را بدست آورید؟

اول معادله مشخصه رو تشکیل بده:

$$S^3 + S = 0 \longrightarrow S = 0 \ , \ S = \pm j \longrightarrow y_h = C_1 + C_2 \cdot \cos x + C_3 \sin x$$

انقدر مشتق میگیریم تا مربعی بشه

$$\longrightarrow y_p = u_1 + u_2 \cdot \cos x + u_3 \sin x \longrightarrow W = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \frac{1}{\sin x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin x} \rightarrow u_1 = \int \frac{W_1}{W}dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \frac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\cot x \longrightarrow u_2 = \int \frac{W_2}{W}dx = \int -\cot x \, dx = -\ln(\sin x)$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = -1 \longrightarrow u_3 = \int \frac{W_3}{W}dx = \int -dx = -x$$

$$y_p = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \cos x \cdot \ln(\sin x) - x\sin x$$

T = ص 326 = س 178 = چون $\tan x$ است ← به روش اپراتور نمیشه پس میشه تغییر پارامتر:

$$s^2+1=0 \rightarrow s=\pm j \rightarrow y_h=C_1\cos x+C_2\sin x$$

$$y_p=u_1\cos x+u_2\sin x \qquad W=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$$

$$W_1=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \tan x & \cos x\end{vmatrix}=-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\rightarrow u_1=\int\frac{W_1}{W}dx=\int\frac{\cos^2 x-1}{\cos x}dx=\sin x-\ln(\sec x+\tan x)$$

$$W_2=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \tan x\end{vmatrix}=\sin x\rightarrow u_2=\int\frac{W_2}{W}dx=\int\sin x\,dx=-\cos x$$

$$y_p=\sin x.\cos x-\cos x.\ln\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)-\sin x.\cos x=\cos x.\ln\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right):①$$

اگه در این تست شرایط نمیداد: بازم گزینه ① درست میشه

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x.\ln\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$

چون گفتیم این جزء اون قسمته که منحصر بفرده ← تا دیدیش آوردی بزن گزینه ①

y_p = (از جنس y_h است) + (قسمتی که از جنس y_h نیست)

قابل حذفند در گزینه‌ها

این از جوابمون حتماً باید در گزینه مورد نظرمون باشه

T = ص 334 = س 229 = در $x=\frac{\pi}{4}$: طرح این سؤال غلط: چون شرط اولیه نداره: در حالت کلی ∞ جواب داره.

T* = ص 327 = س 184 =

$$y_h=C_1+C_2e^t$$

$R(x)=e^t$ است ← از اپراتور معکوس نمیتونیم بریم

نمایی است.

$$y_p=u_1+u_2e^t \rightarrow W=\begin{vmatrix}1 & e^t\\ 0 & e^t\end{vmatrix}=e^t$$

$$W_1=\begin{vmatrix}0 & e^t\\ e^t & e^t\end{vmatrix}=-e^{2t}\rightarrow u_1=\int\frac{W_1}{W}dt=\int -e^t\,dt=-e^t$$

$$W=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & e^t\end{vmatrix}=e^t\rightarrow u_2=\int\frac{W_2}{W}dt=\int dt=t$$

$$\Rightarrow y_p=-e^t+\boxed{te^t}$$

از جنس y_h است: پس در گزینه‌ها میتونه نیارش و فرمش باید از جنس y_h باشه

ولی این قسمت منحصر بفردش است و حتماً باید در گزینه‌ها تکرار بشه. یعنی گزینه درست باید حتماً شامل $+te^t$ باشد.

جواب عمومی $y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^t - e^t + te^t = C_1 + \underbrace{\cancel{(C_2+1)}}_{C_2} e^t + te^t$

معادلات خطی مرتبه‌ی دوم ضرایب متغیر:
- ۱_ کشی - اولر ← قابل تعمیم تا مرتبه‌ی n
- ۲_ معادله کامل
- ۳_ حدس جواب (کاهش مرتبه)

معادله‌ی کشی-اولر: فرم کلی این معادله مطابق زیر است:
*

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = R(x)$$

کنار هر y مرتبه‌ی n ($y^{(\boxed{n})}$) یه $x^{\boxed{n}}$ هست (برای تشخیصش)
این معادله با تغییر متغیر $x = e^z$ ($z = \ln x$) به معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود که قابل حل است.

$$\boxed{x^n y^{(n)} \longrightarrow D(D-1)(D-2)\dots(D-(n-1))y \quad \text{و} \quad Dy = \frac{dy}{dz}}$$

حفظ باشی:
وفقط باید حواست باشه که در آخر به جای z ها ت بذاری ln x.

م: $xy' = Dy$

$x^2 y'' = D(D-1)y$

$x^3 y''' = D(D-1)(D-2)y$

مثال: جواب عمومی معادله‌ی زیر را بدست آورید؟

$$x^3 y''' + x^2 y'' + x y' = \sin(2\ln x) + x^3$$

$$\big(D(D-1)(D-2) + D(D-1) + D\big)y = \sin 2z + e^{3z}$$

$$D(D^2 - 2D + 2)y = \sin 2z + e^{3z}$$

خطی ضرایب ثابت
$D = 0$ و $D = 1 \pm j \longrightarrow y_h = C_1 + e^z(C_2 \cos z + C_3 \sin z)$

$$y_{p_1} = \frac{e^{3z}}{D(D^2 - 2D + 2)} = \frac{e^{3z}}{15}$$

Subject
Date

$$y_{P_2} = \frac{\sin 2z}{D^3 - 2D^2 + 2D} = \frac{\sin 2z}{-4D + 8 + 2D} = \frac{\sin 2z}{-2D + 8} \times \frac{2D + 8}{2D + 8} = \frac{4\cos 2z + 8\sin 2z}{64 - 4D^2_{-4}}$$

$$y_{P_2} = \frac{\cos 2z + 2\sin 2z}{20}$$

$$\rightarrow y_p = \frac{e^{3z}}{15} + \frac{1}{20}\left(\cos 2z + 2\sin 2z\right)$$

$$\text{Cos}\ y = y_h + y_p = C_1 + e^{z}\left(C_2 \cos z + C_3 \sin z\right) + \frac{e^{3z}}{15} + \frac{1}{20}\left(\cos 2z + 2\sin 2z\right)$$

$$z = \ln x \rightarrow y = C_1 + x\left(C_2 \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x)\right) + \frac{x^3}{15} + \frac{1}{20}\left(\cos(2\ln x) + 2\sin(2\ln x)\right)$$

T= ص 300 = س 41 = اول اپراتورش رو حذف کنیم و به فرم مشتقش کنیم:

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^3 - x^2 \longrightarrow (D^2 - 4D + 3)\,y = 2e^{3z} - e^{2z}$$

از اینجا به بعد به گزینه‌ها رجوع کن

۱) او 2 ریشه‌ی معادله مشترند: اما مجموع ریشه معتبر باید باشد 4 ← X

2) معادله‌ی درجه‌ی 2، سه تا پارامتر داره + گزینه‌ی ۳ ← X

3) $C_3 x^4 \ln x$ باید حتماً $C_4 x^4$ هم داشته باشیم که نیست ← X

$(a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_1 x + a_0)\, e^{\alpha x} \equiv$ α ریشه‌ی مرتبه‌ی K معادله مفسر ← mmm

$(a_{k-1} (\ln x)^{k-1} + a_{k-2} (\ln x)^{k-2} + \dots + a_1 \ln x + a_0)\, x^{\alpha} \equiv$ — —

T= ص 313 = س 106 =

نکته = *

$$(ax+b)^n y^{(n)} + (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + (ax+b)y' + y_0 = R(x)$$

با تغییر متغیر $t = ax+b$ به معادله کشی-اولر تبدیل می‌شود.

heo

PAPCO

معادلات کشی به این 3 فرم هستند و e^x در فرم جوابهای اون نیست ↗

$x^{\alpha x}$ (تابعی برحسب $\ln$) $\alpha \ln x + \dots$ $\sin(\ln x)+\beta\cos(\ln x)$

Subject ۳۴
Date

ت = ص 313 = س 106 =

$t=x+2$

گزینه 2 : X ← برحسب t نیست / ۳) e^x به فرم معادلات کشی نیست / ۴) e^{x+2} به فرم کشی نیست

حل تشریحی =

$(D^2-2D+1)y=0 \quad D=1 \ : 2$

$y=(Az+B)e^z$

$y=(A\ln t+B)t \xrightarrow{t=x+2}$ ①

ت = ص 323 = س 165 =

۳) چون $B\ln x$ داره ← حتماً باید $\boxed{+C}$ هم داشته باشه ← ③ و ④ غلط

در ① و ② = نیاز به محاسبه y_h نیست

۱) ارشیهٔ مرتبهٔ 2 مضاعف است.

$(D^2-2D+1)y=4e^{-z} \longrightarrow y_p=\dfrac{4e^{-z}}{(D-1)^2}=e^{-z}$

ت = ص 304 = س 62 =

$(D^2-4D+5)y=0$

۱) میگه $2\pm j$ ریشهٔ مضاعف است که درسته ✓

ت = ص 309 = س 75 =

$(D^2+2D+5)y=0$

۱) میگه $1\pm 2j$ باید بشه ریشه مضاعف ← غلط $c_1 x^{-1}\cos(2\ln x)$

ت = ص 297 = س 26 =

$x^2y''+xy'=x^2 \longrightarrow D^2y=e^{2z} \rightarrow y_p=\dfrac{e^{2z}}{D^2}=\dfrac{1}{4}e^{2z}$

۱ و ۳ و ۴ ، y_p شون یکیه:

$D=0 \ 2 \quad : (Az+B)e^{0z}=A\ln x+B$

۲) میگه ریشه هاش میشه ۰ و ۱ ← X

معادله ای که ضریب $y'=0$ است ← میتونیم با ضرب در x به فرم کشی درش بیاریم.

PAPCO

Subject
Date

$(D^2-3Z+2)y = z^2-2z$ ت = ص 345 = ر 177

② یه ریشه = ۰ و 2 ← اما باید جوابش بشه ۳ ← X ③ هم به همین دلیل X

① $= C_1 + \frac{1}{4}C_2$ یه C_1 جدید ← اما معادله درجه ۲ ② باید ۲ تا جواب داشته باشه پس این گزینه غلطه.

هر وقت $R(x)$ = یه چند جمله‌ای بود و به جای اپراتور معکوس از ضرایب نامشخص استفاده کنی بهتره ←

$$(D^2-3Z+2)y = z^2-2z \rightarrow \begin{matrix} n=2 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \end{matrix} \rightarrow m=0$$

mmm ↑

$$y_p = Az^2 + Bz + C$$

$$2A - 6Az - 3B + 2Az^2 + 2Bz + 2C = z^2 - 2z$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2} \\ -6A + 2B = -2 \rightarrow B = \frac{1}{2} \\ 2A - 3B + 2C = 0 \rightarrow C = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}.$$

$$(D^2 - D - 2)y = 0 \rightarrow (D-2)(D+1) = 0 \rightarrow D = 2,\ D = -1$$ ت = ص ۳۱۷ = ر ۱۳۰

به جای z بذار $\ln x$

$$y = Ae^{2z} + Be^{-z} \rightarrow y = Ax^2 + Bx^{-1}$$

میخواهیم در x کراندار باشه ← $B=0$ چون $\frac{1}{x}$ در صفر به سمت ∞ میره

کراندار: $x \rightarrow 0^+ \rightarrow B = 0$

$$y = Ax^2 \rightarrow y(1) = 1 \rightarrow A = 1 \Rightarrow y = x^2 \rightarrow 2 = 8$$

mmm

T= مکانیک ۴۴۷ = سال ۱۸۲

$$(D^2-3D+2)y=-2z \longrightarrow \begin{matrix} n=1 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \end{matrix} \longrightarrow m=0$$

$y_p = Az + B$ ← جاهایی که چند جمله ایه بهتره از روش "ضرایب نا مشخص" بریم

$\longrightarrow -3A + 2Az + 2B = -2z \longrightarrow 2A = -2 \longrightarrow A = -1$

$-3A + 2B = 0 \longrightarrow B = -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow y_p = -z - \frac{3}{2}$

T= مکانیک ۹۰ = معادله $t^2y'' + aty' + by = 0$ داده شده که در آن a و b ثابتهای حقیقی هستند به ازای کدام ثابت a و b معادله دارای جوابهای نوسانی است؟

برای نوسانی بودن باید حتماً "sin و cos ای باشد ← باید $\beta \neq 0$ باشد ← $\beta < 0$

وقتی $\Delta < 0$ بشه چون جواب مثلثاتی میشه، نوسانی میشه

$(D^2 + (a-1)D + b)y = 0$

$\Delta < 0 \rightarrow (a-1)^2 - 4b < 0 \longrightarrow (a-1)^2 < 4b$:③

T= صحفی ۹۰ = جواب $y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0$ ؟

۱) فرم معادله ضرایب ثابته ← x

۲) e^{-x} فرم معادله ضرایب ثابته ← x

۴) به دلیل e^{3x} فرم معادله ضرایب ثابته ← x

T= مکانیک ۹۱ = جواب عمومی $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$ ؟

$\xrightarrow{\times x} x^3y''' - 3x^2y'' + 3xy' = 0$

ریشه صفره ← تأثیری در مجموع ریشه ها نداره $D=0$؛

$(D(D-1)(D-2) - 3D(D-1) + 3D)y = 0 \rightarrow D(D^2-6D+8)y = 0 \rightarrow$

مجموع ریشه های گزینه ها باید 6 بشه ← ① = $6 = -\frac{b}{a} =$ مجموع ریشه ها

T= برق ۹۲ = کدامیک جواب خصوصی $y_p(x)$ معادله دیفرانسیل زیر نیست؟ $x^3\frac{dy^3}{dx^3} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^4$

جواب خصوصی = قسمت منحصر بفرد $+ y_h$

Subject
Date

$$\left(D(D-1)(D-2)+D(D-1)-2D+2\right)y = 2e^{4z}$$

قسمت منحصربفرد ضریبی از x^4 است.

قسمت x^4 و ضرایبش جزء جواب منحصربفرد شد = $y_p = \frac{1}{15}x^4$

① ریشه معادله مفسر هست پس جواب نیست

② مگه 2- ریشه معادله مفسر است ✓

$$-24+6+4+2 \neq 0$$

$$\text{عمومی}\quad y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^{-1} + \underbrace{\frac{1}{15}x^4}$$

فقط اینش باید ثابت باشه؛ چون قسمت منحصربفردش است.

معادلات خطی با ضرایب متغیر

1- معادله کامل = اگر در معادله دیفرانسیل $f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = R(x)$ داشته باشیم

$f_0(x) - f_1'(x) + f_2''(x) = 0$ میگوییم معادله کامل است و میتوان آنرا به فرم زیر مرتب کرد =

ضریب خودش منهای مشتقای قبلیش

$$\frac{d}{dx}\left[f_2(x)y' + \left(f_1(x) - f_2'(x)\right)y\right] = R(x)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله، به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل میشود که قابل حل است.

معادله $f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = R(x)$ کامل است اگر =

$$f_0(x) - f_1'(x) + f_2''(x) - f_3'''(x) + \dots + (-1)^n f_n^{(n)}(x) = 0$$

از ضریب کمترین مرتبه شروع کن و برو به چپ و مشتق بگیر + یه درمیون مثبت و منفیش کن.

$f_n(x)y^{(n-1)} + (f_{n-1}(x) - f'_n(x))y^{(n-2)} + (f_{n-2} - f'_{n-1} - f''_{n-2})y^{(n-3)} + \dots$ نکته

مثال = جواب عمومی معادله دیفرانسیل " $2xy'' + (x+2)y' + y = x$ " را بدست آورید؟
اول چک میکنیم کامل هست یا نه؟

$1 - 1 + 0 = 0 \rightarrow$ کامل است.

y ضریب $-$ y' مشتق ضریب $+$ y'' مشتق دوم ضریب

$\frac{d}{dx}\left[2xy' + (x+2-2)y\right] = x \rightarrow 2xy' + xy = \frac{1}{2}x^2 + C_1$

$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}x + \frac{C_1}{2x} \rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}x}\left[\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\right) - \frac{1}{16}e^{\frac{1}{2}x} + \int \frac{e^{\frac{1}{2}x}C_1}{x}dx + C_2\right]$

$\cos x - \cos x + 0 = 0 \rightarrow$ کامل است   = اول چک کن = ۱۱ = س = 294 = ص = T

$\frac{d}{dx}\left[y' + \sin x\, y\right] = n x^{n-1} \rightarrow y' + \sin x . y = x^n + C_1$

$y(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow y'(\pi) = \pi^n$ ۴

$0 - 2 + 2 = 0 \rightarrow$ کامل است   = چک کردن = ۴۷ = س = 299 = ص = T

$\frac{d}{dx}\left[(1+x^2)y' + (2x - 2x)y\right] = x^3 \rightarrow (1+x^2)y' = \frac{1}{4}x^4 + C_1$

$\rightarrow y' = \frac{1}{4}\frac{x^4}{1+x^2} + \frac{C_1}{1+x^2} \rightarrow y = \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1}x\right) + C_1\tan^{-1}x + C_2$

$1 - 1 + 0 = 0 \rightarrow$ کامل است   = چک کردن = ۲۲۷ = س = 334 = ص = T

$\frac{d}{dx}\left[xy' + (1+x-1)y\right] = 0 \rightarrow xy' + xy = C_1$

$\rightarrow \begin{cases} y(1) = -1 \\ y'(1) = 1 \end{cases} \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow y' + y = 0 \rightarrow y = C_2 e^{-x}$ ۴

Subject
Date

استقلال خطی و وابستگی خطی توابع =

توابع y_1 ، y_2 ، ..... ، y_n را مستقل خطی می‌نامند اگر و فقط اگر =

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

در غیراین صورت توابع وابسته خطی اند.
برای تشخیص استقلال، ترکیب خطیشو درست بیار و مساوی صفر بیار: اگه به این نتیجه رسیدی که تمامی ضرایب صفرند ← میشه استقلال دارند.

۱ـ هر تابع مخالف صفر، مستقل خطی است.

$$c_1 \underbrace{f_1(x)}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$$

(پس اگه صفر بود، وابسته میشه)

۲ـ دو تابع در صورتیکه نسبت آنها همواره یک عدد باشد، وابسته خطی اند. در غیراین صورت مستقل خطی اند.

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)=0 \longrightarrow c_1\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)+c_2=0$$

← باید یه عدد باشه تا c_1 و c_2 صفر بشن

≠ عدد

پس هر وقت 2 تا تابع باشند، باید سراغ نسبتاشون بریم.

1) x, x^2 مستقل

4) $\sin x, \cos x$ مستقل

2) $x, \frac{1}{x}$ مستقل

5) e^x, e^{-x} 〃

3) $1, x$ مستقل

6) $x, |x|$ 〃 ±1 میشه
2 عدد میشه ← مستقل

$$c_1x+c_2|x|=0 \begin{cases} \xrightarrow{x>0} c_1+c_2=0 \\ \xrightarrow{x<0} c_1-c_2=0 \end{cases} \longrightarrow c_1=c_2=0$$

V) x^2 و $3x^2$ وابسته

۳- برای سه تابع یا بیشتر ، ابتدا رونسکین توابع را بدست می آوریم

$W \neq 0 \Longrightarrow$ توابع مستقل خطی اند

$W = 0 \Longrightarrow$ ممکن است مستقل یا وابسته خطی باشند ؟

مثال- نشان دهید توابع ۱ و x و $\sin x$ مستقل خطی اند؟

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & \sin x \\ 0 & 1 & \cos x \\ 0 & 0 & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin x \neq 0 \rightarrow$$ مستقل خطی اند

بالا مثلثی است ← حاصل دترمینان = حاصلضرب قطر اصلی

T- مهر ۷۰ = ریاضی محض ۸۶ = توابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2|x|$ در بازه‌ی $[-1, 1]$ را در نظر بگیرید.
کدام گزینه غلط است ؟
۱) رونسکین f و g در بازه‌ی $[-1, 1]$ برابر است با صفر
۲) f و g روی بازه‌ی $[-1, 1]$ وابسته خطی هستند
۳) f و g روی بازه‌ی $[-1, 1]$ مستقل خطی هستند
۴) گزینه های ۱ و ۳ هردو صحیح است.

۲ : $x < 0 \rightarrow W = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $x > 0 \rightarrow W = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$

چون نسبتشون یه عدد ثابت نمیشه ← مستقل خطی اند

چند جمله ای ، نمایی و مثلثاتی از رونسکین صفر میتونیم وابستگی خطی هم نتیجه بگیریم.

$\boxed{\text{اگر تابعی مشتق پذیر باشد} + W = 0 \leftarrow \text{وابستگی خطی}}$

mmmm

Subject
Date

قضیه آبل 8 $\quad y^{(n)} + P(x)\, y^{(n-1)} + \dots = 0$

وقتی از ما کلی ، رونسکین رو بخواد
الف) $W = K\, e^{-\int P(x)\, dx}$

وقتی یه نقطه رو به ما بده و یه نقطه دیگه رو از ما بخواد
ب) $W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\, dx}$

فرم های مختلف نمایش رونسکین =
$W = W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = W_{y_1, y_2, \dots, y_n}(x)$

ت= نقشه برداری 91= اگر y_1 و y_2 جواب مستقل خطی معادله $x^2 y'' - 2y' + (3+x)y = 0$ باشند
و بدانیم $W(y_1, y_2)(2) = 3$ آنگاه $W(y_1, y_2)(4)$ کدام است؟

$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\, dx}$

$W(4) = W(2)\, e^{-\int_2^4 (-\frac{2}{x^2})\, dx} = 3\, e^{-\frac{2}{x}\Big|_2^4} = 3\left(e^{1-\frac{1}{2}}\right) = 3\sqrt{e}$ $\quad$:1

ت= (مواد 91)= اگر y_1 و y_2 جواب مستقل خطی معادله $y'' - \frac{2}{x} y' + e^x y = 0$ باشند و رونسکین
آنها در نقطه $x=1$ برابر 2 باشند ، در این صورت رونسکین در $x=5$ = ؟

$W(5) = 2e^{-\int_1^5 (-\frac{2}{x})\, dx} = 2e^{2\ln x\Big|_1^5} = 2e^{2\ln 5} = 50$

ت= رونسکین دوجواب از معادله $xy''-(1+x)y'+\sin x . y=0$ برای $(x,0)$ ؟

۴: $W=Ce^{-\int -\frac{1+x}{x}dx}=Cxe^{x}$

چ قضیه مربوط به استقلال خطی=

* اگر y_1 ، y_2 ، .... ، y_n ، n جواب مستقل خطی معادله همگن خطی زیر باشند=

$$f_n(x)y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+f_1(x)y'+f_0(x)y=0$$

آنگاه جواب عمومی معادله ترکیب خطی این جوابها است.

$$y_h=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$$

* اگر y_1 یک جواب معادله همگن باشد Cy_1 هم حتماً جواب است.

کاهش مرتبه (حدس جواب) =

اگر y_1 یک جواب معادله دیفرانسیل همگن $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ باشد، آنگاه جواب مستقل خطی دوم آن مطابق زیر بدست می‌آید:

$$y_2=y_1u \qquad u=\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx$$

درنتیجه جواب عمومی آن مطابق زیر است=

$$y_h=C_1y_1+C_2y_2$$

Subject
Date

T= ص 300 - س 38 = یا جواب عمومی رو از ما میخواد یا جواب رو میش = در این مدل سؤال ها

$$y_2 = xu \qquad u = \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2} = \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{dx}{1-x^2}$$

$$u = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \to y_2 = -1 + \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad ;(1)$$

T= ص 301 - س 43 =

$$y_2 = xu \quad , \quad u = \int \frac{e^{\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx}}{x^2}dx = \int \frac{x^2-1}{x^3}dx = \ln x + \frac{1}{2x^2}$$

$$\to y_2 = x\ln x + \frac{1}{2x}$$

مهم :: در معادلات مرتبه ۲ با ضرایب متغیر = اولین روش حل همینه:

T= ص 312 = س 101 = از رو گزینه ها اونیکه از همه ساده تر بود رو انتخاب کن مثلاً در اینجا = x بزار توی معادله: اگر صدق کرد پس یکی از جوابهاست

هر گزینه ای که x نداشت غلطه

مرحله ۲ بعدی e^x ← صدق بده. اگه شد یکی از جوابهاست و هر گزینه ای که e^x نداشت رو حذف کن

اگه e^x صدق نکرد برو سراغ e^{-x}

T= ص 304 - س 61 یه جواب به ما داده پس همینه .. و جواب عمومی میخواد

چون جایگذاری در معادله سخته از راه حل کلی برو

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}}\sin x \, u \qquad u = \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{x^{-1}\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

$$y_2 = -x^{-\frac{1}{2}}\cos x$$

T= ص 335 - س 233 = بین بین y_1 و y_2 کدوما ساده تره و در گزینه ها انتخابش کن و در معادله صدق بده

ساده ترین x است ← معرفش بده در معادله ⇐ صدق میکنه ← جواب (۳) (چون بقیه x ندارند)

P4PCO

آ= ص 311 = س 92 = 3 و 4 غلطه چون هیچکدوم از y_1 و y_2 شامل x نیست

حالا بین 1 و 2 = بیا x^2+1 رو در معادله صدق بده:

$$2x^2-2-4x^2+Cx^2+2=0 \to ②$$

= ص 304 = س 61 x^3 ماشون ضریب ندارند.

آ= ص 337 = س 245 = ② و ④ قطعاً غلطه: معادله همگنه و هیچوقت نمیتونه جمله‌ی فاقد y را داشته باشه

بین ① و ③: جاگذاری =

$$y=xe^x \to y'=e^x+xe^x \to y''=2e^x+xe^x$$

$$2x^2+x^3-\underbrace{(x^2+2x)(1+x)}_{x^3+x^2+2x+2x^2}+\underbrace{(x+2)x}_{x^2+2x}=0 \to ③ \checkmark$$

آ= ص 338 = س 254 =

از گزینه‌ها نگاه کن: ساده‌ترینشون x صدق نمیکنه / $x \leftarrow e^x$ / $x \leftarrow \sin x$ ⇐ ④

(انتقال گاز 91)

آ= جواب سوم ؟ $(1+x^2)y''-2xy'+2y=0$

41 -- همه گزینه‌ها x داره پس هیچی / چون در گزینه‌ها Arc tan داره پس ریسک داره ⇐ حل کن بهتره

$$y_2=xu \qquad u=\int \frac{e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx}}{x^2}dx=\int \frac{x^2+1}{x^2}dx = x-\frac{1}{x}$$

$$y_2=x^2-1$$ = ①

آ= مکانیک 92 = جواب کلی معادله ... $xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=0$

در گزینه‌ها e^x هست صدق بده / ① و ③ غلط

$$y=e^x u \qquad u=\int \frac{e^{\int \frac{2x-1}{x}dx}}{e^{2x}}=\int \frac{dx}{x}=\ln x$$

$$y_2=e^x \ln x$$: ④

Subject
Date

برق 93 = اگر $W(f,g)$ مربوط به توابع f و g باشند و تعریف کنیم $u=2f-g$ و $V=f+2g$ ، آنگاه $W(u,V)$ برحسب $P=W(f,g)$:

$$W(u,V)=\begin{vmatrix} 2f-g & f+2g \\ 2f'-g' & f'+2g' \end{vmatrix}=\cancel{2ff'}+\cancel{4fg'}-gf'-2gg'-\cancel{2ff'}-\cancel{4f'g}+g'f+2gg'=$$

$$=5fg'-5f'g=5\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}=5W(f,g)$$

(4) :

نکته =

$u=af+bg$

$V=cf+dg$

$$W(u,V)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}W(f,g)$$

تغییر متغیر :

1- تعویض متغیر مستقل $(z=g(x))$

2- تعویض متغیر تابع $u=f(y)$ یا $(u=f(y,x))$

3- کاهش مرتبه $y'=P$

تعویض متغیر مستقل $(z=g(x))$: دیگه متغیر مستقلمون z میشه

$$y''+P(x)y'+q(x)=R(x)$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot g'(x) \Rightarrow \boxed{y'=\frac{dy}{dz}g'(x)}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d\left(g'(x)\frac{dy}{dz}\right)}{dx}=g''(x)\cdot\frac{dy}{dz}+g'(x)\frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dx} \Rightarrow \boxed{y''=g''(x)\frac{dy}{dz}+(g'(x))^2\frac{d^2y}{dz^2}}$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{d^2y}{dz^2}\cdot g'(x)$$

PAPCO

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(g''(x)\frac{dy}{dz} + \left(g'(x)\right)^2 \frac{d^2y}{dz^2}\right)$$

$$y''' = g'''(x)\frac{dy}{dz} + g''(x)\underbrace{\frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dx}}_{g'(x)\frac{d^2y}{dz^2}} + 2g''(x)g'(x)\frac{d^2y}{dz^2} + \left(g'(x)\right)^2 \underbrace{\frac{d\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)}{dz}}_{g'(x)\frac{d^3y}{dz^3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y''' = g'''(x)\frac{dy}{dz} + 3g''(x)g'(x)\frac{d^2y}{dz^2} + \left(g'(x)\right)^3\frac{d^3y}{dz^3}}$$

یه جوراییِ حفظ بشن 8)

= 243 س = 337 ص = T

$$y' = \frac{dy}{dz}\overbrace{x}^{\frac{dz}{dx}} \longrightarrow y'' = \frac{dy}{dz} + x^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$x\frac{dy}{dz} + x^3\frac{d^2y}{dz^2} + (x^2-1)x\frac{dy}{dz} + x^3y = 0 \longrightarrow x^3\left(\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + y\right) = 0 \quad : (4)$$

$z = g(x)$ به فرم

= 186 س = 327 ص = T =

$$t = \tan^{-1}x$$

$$y' = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{dy}{dz} + \frac{1}{(1+x^2)^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$-2x\frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2} + 2x\frac{dy}{dz} + y = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + y = 0 \rightarrow y = C_1.\cos z + C_2.\sin x$$

$$y = C_1.\cos(\tan^{-1}x) + C_2\sin(\tan^{-1}x). \quad ;(15)$$

خود گزینه ها هم به ما میگه با تغییر متغیر $\tan^{-1}x$

هر معادلهٔ مرتبهٔ دومی که میخواهیم حلش کنیم (چه خطی و چه غیرخطی)
۱ـ تبدیل کنیم به ضرایب ثابت و حلش کنیم، ۲ـ تبدیل کنیم به مرتبهٔ اول
وسپس حل کنیم.

حتی اگه در گزینه ها: ۱ مورد دیدی (۲ فرم ضرایب ثابت باشه که به جای x اش g(x) گذاشته باشه) حتماً با این روش
قابل حله (با تغییر متغیر)

Subject
Date

م= ص233 = س1 بس طبق آخر صفحه پیش =

$$z=P.\cos^{-1}x \to y'=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{-P}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y''=+2x\left(-\frac{P}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{dy}{dz}+\frac{P^2}{1-x^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\frac{-xP}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dz}+P^2\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{xP}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dz}+P^2y=0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+y=0 \to y=C_1\cos z+C_2\sin z$$: 1

2 و 4: فرم جواب ضرایب ثابت نیست ← X

ص304 = س61

T= ملکیا 93 = جواب عمومی؟

$$x^4y''+2x^3y'+y=\frac{1+x}{x}$$

چون خودش گفته با تغییر متغیر $\frac{1}{x}$ میفهمیم میشه 2 :

اما حلش = تنها گزینه 2 با ضرایب ثابت و به فرم $\frac{1}{x}$ میشه 2

$$y'=\frac{dy}{dz}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y''=\frac{2}{x^3}\cdot\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$2x\frac{dy}{dz}+\frac{d^2y}{dz^2}-2x\frac{dy}{dz}+y=z+1$$

yp همه گزینه ها مشابه هست پس نیاز به محاسبه نیست : $y=C_1\cos z+C_2\sin z+y_p$

$$y=C_1\cos\left(\frac{1}{x}\right)+C_2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}+1$$: 2

ملاک

T= ص298 = س32 = یه معادله به فرم ضرایب ثابت است که در یه g(x) ضرب شده : با تغییر متغیر $y=g(x)u$

به فرم ضرایب ثابت درمیاد :

معادله غیر همگنه ← 1 و 2 : غلطه : به فرم همگنند X (معادلمون غیر همگنه) 3 و 4 و 2 باید ...

3 : جواب معادله ضرایب ثابته ← هیچوقت نمیتونه به فرم یه ضرایب متغیر بشه X

امکان نداره فرم یه معادله ضرایب متغیری، شبیه فرم معادله ضرایب ثابت بشه

PAPCO

اگر گزینه ۴ به این فرم بود = $y=x\left[e^{x}+C_1\cos x+C_2\sin x\right]$: تغییر متغیر بده:

$y=g(x).u \rightarrow y=xu \rightarrow y'=u+xu' \rightarrow y''=u'+u'+xu''$

$2u'+xu''-\frac{2}{x}(u+xu')+\left(1+\frac{2}{x^2}\right)xu=xe^{x}$

$xu''+xu=xe^{x} \rightarrow u''+u=e^{x} \Rightarrow u=C_1.\cos x+C_2.\sin x+\frac{e^{x}}{2}$

جواب به فرم : $\vec{y}=x(u)$ میشه $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ $y=x\left(C_1.\cos x+C_2.\sin x+\frac{1}{2}e^{x}\right)$

T= محض ۹۵ = با جایگذاری $y^2=u$ معادله $(xy'-y)^2=-x^2yy''$ به کدام معادله کشی - اویلر تبدیل می‌شود؟

$u'=2yy' \rightarrow u''=2y'^2+2yy''$

$x^2 y'^2+y^2-2xyy'=-x^2yy'' \rightarrow x^2\left(\frac{u'}{2y}\right)^2+u-2x\frac{u'}{2}=-x^2\left(\frac{u''}{2}-\frac{u'^2}{4y^2}\right)$

$u-xu'=-x^2\frac{u''}{2} \rightarrow x^2u''-2xu'+2u=0$: ①

معادلات مرتبه دوم غیر خطی :
- ۱- فاقد متغیر مستقل
- ۲- فاقد متغیر تابع
- ۳- معادله همگن

فاقد متغیر مستقل = فرم کلی معادلاتش = $f(y, y', y'')=0$

روش حلش =

$y'=P \rightarrow y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dP}{dx}=\frac{dP}{dy}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{P}=P.\frac{dP}{dy}$

$$\boxed{y''=P\frac{dP}{dy}}$$

Subject
Date

$$f(y, y', y'') = 0 \xrightarrow{y' = P} f\left(y, P, P\frac{dP}{dy}\right) = 0$$

پس از جایگذاری به یک معادله مرتبه‌ی اول تبدیل می‌شود که قابل حل است.

T= ص 295 = س 16 = $\sin y$ ← غیرخطی

شتاب این $V = 10\sqrt{x}$ = ؟

$$\frac{dV}{dt} = 10\,\frac{\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x}} = 50 \qquad V = 10\sqrt{x}$$

چون در معادله t را نمی‌بینیم پس فاقد متغیر مستقل است =

$$y' = P \longrightarrow P\frac{dP}{dy} + \sin y = 0 \xrightarrow{\text{تفکیک پذیر}} P\,dP = -\sin y\,dy \xrightarrow{\int} \frac{1}{2}P^2 = \cos y + C$$

$$P^2 = 2\cos y + C \longrightarrow P = \sqrt{2\cos y + C}$$

$$P = y' = V = \sqrt{2\cos y + C}$$

$$y'(0) = \sqrt{2\cos(y(0)) + C} \longrightarrow 0 = \sqrt{2 \times \frac{1}{2} + C} \longrightarrow C = -1$$

حواست باشه ۰ به جای y، ۰ نذاری:

(1).

$$y'' + y'^3 e^{2y} = 0$$

T= ص 298 = س 30 =

بعد از جایگذاری حتماً تبدیل میشه به مرتبه‌ی ۱ =

$$y' = P \longrightarrow P\frac{dP}{dy} + P^3 e^{2y} = 0 \longrightarrow \frac{-dP}{P^2} = e^{2y}dy \longrightarrow \frac{1}{P} = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1 \longrightarrow$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1 \xrightarrow{\text{تفکیک پذیر}} dx = \left(\frac{1}{2}e^{2y} + C_1\right)dy \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}e^{2y} + C_1 y + C_2} \quad (1).$$

T= ص 323 = س 164 =

$$y' = P \longrightarrow 2P\frac{dP}{dy} + 2P^2 - e^{2y} = 0 \longrightarrow$$ مرتبه‌ی اول: تغییر متغیر ←

$$\longrightarrow z = P^2 \longrightarrow \frac{dz}{dy} = 2P\frac{dP}{dy} \longrightarrow \frac{dz}{dy} - 2z = e^{2y}$$: خطی مرتبه‌ی اول ←

$$z = e^{2y}(y + C_1) \longrightarrow P^2 = e^{2y}(y + C_1) \longrightarrow P = e^{y}(y + C_1)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow e^{-y}(y + C_1)^{-\frac{1}{2}}dy = dx$$

$$\longrightarrow x = \int e^{-y}(y + C_1)^{-\frac{1}{2}}dy + C_2$$

(2).

T= ص ۲۹۷ = س ۱۱۸

T= عمران ۹۳ = در معادله دیفرانسیل زیر مقدار $y(3)$ کدام است؟

$yy'' - (y')^2 = 0 \quad , \quad y(1) = 2 \quad y'(1) = 3$

۱) $\frac{۳}{۲} e^{-\frac{3}{2}}$ ۲) $۲ e^{-\frac{3}{2}}$ ۳) $\frac{۳}{۲} e^{۳}$ ۴) $۲e^3$

$y' = P \Rightarrow yP\left(\frac{dP}{dy}\right) - P^2 = 0 \rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dy}{y} \rightarrow \ln P = \ln y + \ln c \rightarrow P = cy$

$\frac{dy}{dx} = cy \rightarrow \frac{dy}{y} = c\,dx \rightarrow \ln y = cx + c_2 \rightarrow \ln y = \frac{3}{2}x + c_2 \rightarrow$

$\ln 2 = \frac{3}{2} + c_2 \rightarrow c_2 = \ln 2 - \frac{3}{2} \rightarrow \ln y = \frac{3}{2}x + \ln 2 - \frac{3}{2} \rightarrow$

$\ln(y(3)) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} + \ln 2 = 3 + \ln 2 \rightarrow y(e) = 2e^3$:۴

چون مقدار را در یک نقطه خاص خواسته باید مقدار c رو بدست بیاریم.

روش دیگر= $d\left(\frac{y'}{y}\right) = 0 \xrightarrow{\int} \frac{y'}{y} = c_1 \rightarrow \frac{dy}{y} = c_1 dx \rightarrow \ln y = c_1 x + c_2$

T= ص ۲۹۳ = س ۲

$y'^2 + yy'' = 0$

$d(yy') = 0 \xrightarrow{\int} yy' = c_1 \rightarrow y\,dy = c_1 dx \rightarrow \frac{1}{2}y^2 = c_1 x + c_2$

$y^2 = c_1 x + c_2$

mmmm

هر موقع یه معادله غیرخطی دیدی بیشتر جبرش توی کاهش مرتبه

خطی ← مرتبه اول (با تغییر متغیر) ← ضرایب ثابت

با ضرایب متغیر

هر معادله مرتبه ۲ ← ضرایب ثابت

مرتبه اول

Subject
Date

فاقد متغیر تابع = $f(x, y', y'') = 0$ اینجا دیگه y نداره

معادله مرتبه اول وقابل حل است ← $f(x, P, P') = 0$ ← $y'' = P'$ ← $y' = P$ = روش حل

T = مسئله 311 = تست 95 = وقتی فاقد متغیر مستقل وهم تابع بود، بهتره با راه متغیر تابع حل کنی، دردسرش کمتره

$y' = P \rightarrow PP' = 2 \rightarrow PdP = 2dx \rightarrow \frac{1}{2}P^2 = 2x + C \rightarrow P^2 = 4x + C \rightarrow$

$y'(0) = 2 \rightarrow 4 = C \rightarrow P^2 = 4x + 4 \rightarrow P = 2(x+1)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = 2(x+1)^{\frac{1}{2}} \rightarrow y = 2 \times \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$

$y(0) = 1 \rightarrow 1 = \frac{4}{3} + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{-1}{3} \rightarrow y = \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}$

$y(3) = \frac{4}{3} \times 8 - \frac{1}{3} = \frac{31}{3}$: (۴)

نکته: * = این شیوه برای معادلات خطی هم قابل استفاده است.

T = مسئله 336 = تست 240 = این معادله خطیه ولی چون y درش نیست، میتونی ازاین روش استفاده کنی و $y' = P$ بگیر

هروقت یه معادله فاقد متغیر تابع بوده حالا مرتبش هرچی بود (1، 2 یا 3 یا ...) ازهمین روش استفاده کن و $y' = P$ بگیرو...

$y'' + \tan x \, y' = \cos^2 x$

$y' = P \rightarrow P' + \tan x \, P = \cos^2 x \rightarrow P = \cos x(\sin x + C_1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \cos x \rightarrow y = \frac{-1}{4}\cos 2x + C_1 \sin x + C_2$

PAPCO

T. م $\underline{252} = \underline{338}$ = خبری از y در معادله نیست ← فاقد متغیر تابع ← $xy'' + xy'^2 - y' = 0$

$y' = P \rightarrow xP' + xP^2 - P = 0 \xrightarrow{\text{برنولی}} \div P^2 \rightarrow xP'P^{-2} - P^{-1} = -x$

$Z = P^{-1} \rightarrow Z' = -P'P^{-2} \rightarrow -xZ' - Z = -x \rightarrow Z' + \frac{1}{x}Z = 1 \rightarrow Z = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{P} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right) \xrightarrow{y'(2)=1} 1 = \frac{1}{2}(2 + C_1) \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$

دراینجور جاها توصیه میشه که C_1 رو پیدا کنن که معادله ساده‌تر بشود.

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}x \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}dy \rightarrow \frac{1}{2}y = \ln x + C_2 \Rightarrow y = 2\ln x + C_2$

T. عمران 92 = درمعادله دیفرانسیل « $xy'' + 2y' = e^{-x^2}$ » اگر $y'(1) = 2$ باشد. $y'(-1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

④:

معادله خطی + فاقد متغیر تابع ←

$y' = P \rightarrow xP' + 2P = e^{-x^2} \rightarrow P' + \frac{2}{x}P = \frac{1}{x}e^{-x^2} \rightarrow P = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C_1\right)$

راه دیگر = e^{-x^2} زوجه ← طرف دیگر تساوی هم باید زوج باشه ← y' و xy'' هم زوجند پس $y'(1) = y'(-1) = 2$ میشه

معادله همگن = معادله ای همگن است که نسبت به متغیر تابع و مشتقاتش همگن باشه.

$\underbrace{x^2y'y'''^3}_{4} + 4\underbrace{x^4y^4}_{4} = 0$ همگنه

$x\cos^2 x\underbrace{y^2y'}_{3} + \underbrace{3xy''^2}_{2} + x^2y^3 = 0$ غیرهمگن

معادله همگن = اگر یک معادله دیفرانسیل همگن باشد، با تغییر متغیر $y = e^{\int z\,dx}$ مرتبهٔ آن یک واحد

کاهش می‌یابد. (اگر مرتبهٔ ۲ باشد به معادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل می‌شود که قابل حل است.)

Subject
Date

$$y=e^{\int z\,dx} \longrightarrow y'=ze^{\int z\,dx} \Longrightarrow y''=z'e^{\int z\,dx}+z^2e^{\int z\,dx}$$

پس نتیجه = هروقت y دیدی به جاش بذار 1 و ...

$$\text{پس} = \begin{cases} y=e^{\int z\,dx} \\ y'=ze^{\int z\,dx} \\ y''=(z^2+z')e^{\int z\,dx} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y\longrightarrow 1 \\ y'\longrightarrow z \\ y''\longrightarrow z^2+z' \end{cases}$$

میتونم $e^{\int z\,dx}$ رو از کل جملات فاکتور بگیریم و بعد طرفین رو برش تقسیم کنم و حذفش کنم

پس ؛ بطور کلی $f(x,y,y',y'')=0 \longrightarrow f(x,1,z,z^2+z')=f(x,z,z')=0$

معادلهٔ مرتبهٔ اول و قابل حل است

$yy''+2y'^2=0$ T = ص 297 = س 27 فاقد متغیر مستقل هست.

به جای y 1 بذار و ...

$$z^2+z'+2z^2=0 \to z'=-3z^2 \to \frac{-dz}{z^2}=3dx \to \frac{1}{z}=3x+C_1 \to z=\frac{1}{3x+C_1}$$

$$y=e^{\int z\,dx}=e^{\int\frac{dx}{3x+C_1}}=e^{\frac{1}{3}\ln(3x+C_1)+\ln C_2}$$

$$\to y=C_2(3x+C_1)^{\frac{1}{3}} \to y^3=C_2x+C_1$$

T = ص 293 = س 4 = جواب عمومی معادلهٔ $x^2yy''=(y-xy')^2$ رابدست آورید؟

معادله همگنه پس به جای y بذار 1 و ...

$$x^2(z^2+z')=(1-xz)^2 \to x^2z^2+x^2z'=1+x^2z^2-2xz$$

$$z'+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^2} \xrightarrow{\text{خطی مرتبهٔ اوله}} z=\frac{1}{x^2}(x+C_1) \to z=\left(\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}\right)$$

$$y=e^{\int z\,dx} \to y=e^{\int\left(\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}\right)dx}=e^{\ln x-\frac{C_1}{x}+C_2} \to y=xe^{\frac{C_1}{x}+C_2}$$

مرحلهٔ اول زماندار نباشه + حداقل 20% تست هر فصل رابزن

فصل سوم: «حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری های توانی»

تعریف تابع تحلیلی = تابع $f(x)$ را در x_0 تحلیلی می نامند اگر تمامی مشتقات مراتب بالاتر f در x_0 موجود باشد. به عبارت دیگر بسط تیلور f حول x_0 موجود باشد.

* ممکن است تابعی در x_0 مشتق پذیر باشد اما در x_0 تحلیلی نباشد.

مثال = تابع $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ در $x=0$ مشتق دارد اما در $x=0$ تحلیلی نیست (چون مشتق دومش ∞ میشه، توانش منفی میشه و در صفر ∞ میشه).
مثلاً sin و cos و مابقی چندجمله ای و ... همه تحلیلی اند.

تعریف نقطه تکین (ویژه - غیرعادی - منفرد) = اگر تابع $f(x)$ در x_0 تحلیلی نباشد اما در همسایگی x_0 حداقل از یک سمت مشتق پذیر باشد، x_0 را نقطه تکین می نامند.

$f(x) = \sqrt{x}$ مثال = $x=0$ تکین است (برای $x>0$ تعریف شده تابع و مشتق‌پذیره)
$x=-1$ تکین نیست

$f(x) = \ln(x-1)$ — $x=1$ تکین است
$x=2$ نیست (تحلیلیه)
$x=0$ نیست

$f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ — $x=\pm1$ نقاط تکین اند.
(چپ و راستش مشتق داره)

* در معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+q(x)y=R(x)$ ، اگر x_0 حداقل نقطه تکین یکی از توابع P و q و R باشد و در سایر توابع نیز تعریف شده باشد، x_0 نقطه تکین معادله است.

* در معادله دیفرانسیل $f_2(x)y''+f_1(x)y'+f_0(x)y=R(x)$ اگر توابع f_0 و f_1 و f_2 و R تحلیلی باشند آنگاه ریشه های معادله $f_2(x)=0$ نقاط تکین معادله هستند.

چون معادله باید به فرم استاندارد باشه یعنی ضریب بالاترین مرتبه = 1 باشه ← پس در اینجا طرفین را باید تقسیم بر $f_2(x)$ کنیم ← ریشه هاش میشه نقاط تکین.

مثال= نقاط تکین معادله دیفرانسیل $\sin x(x^2-1)y''+x\sqrt{x+1}\,y'+\ln x\,y=0$ را بدست آورید؟

اولین کار= $\sin x(x^2-1)=0 \longrightarrow \sin x=0 \to x=k\pi \to x=0,\pi,2\pi,\dots$

$x^2-1=0 \to x=\pm 1$

منفی ها را به دلیل * در نظر نمیگیریم

ریشه زیر رادیکال میشه نقطه تکین ← $x=-1$ = تکین در $\sqrt{x+1}$ ، $x=0$ در $\ln x\,y$ تکین اند

$x=-1$ × ← چون جلوی Ln را منفی میکنه ← عوق

$x=0$ ✓

$$\to \begin{cases} x=0,\pi,2\pi,\dots \\ x=1 \end{cases}$$

تعریف نقطه‌ی تکین منظم و نا منظم =

نقطه‌ی تکین x_0 ، نقطه‌ی تکین منظم معادله است اگر حدهای زیر موجود و تحلیل باشند. در غیر اینصورت نقطه تکین نامنظم است.

گفتیم همیشه به فرم استاندارد باشه : $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$

$$\begin{cases} P_0 = \lim\limits_{x\to x_0} (x-x_0)\,P(x) \\[2ex] Q_0 = \lim\limits_{x\to x_0} (x-x_0)^2\,Q(x) \end{cases}$$

هر موقع لگاریتم یا Ln ای یا √ بود : در نقاط مرزشون ← تکین نامنظم اند.

مثال = نقاط تکین منظم و نامنظم معادلات زیر را بدست آورید؟

$۱ = y'' + 2x^{\frac{5}{3}}y' + xy = 0$

$x=0$ تکین است ← $\lim\limits_{x\to 0} x\,x^{\frac{5}{3}}$ (تحلیلی باشه) ← تحلیلی نیست ← $x=0$ تکین نامنظم است

هر موقع توان کسری دیدی ← حتماً نامنظم است.

$۲ = \sin^2 x\, y'' + \overset{x^2\frac{1}{x-K\pi}}{x}y' + (x-K\pi)\,y = 0$

$\sin^2 x = 0 \to x = K\pi \to$ نقاط تکین

$x=0 \to P_0 = \lim\limits_{x\to 0} x\,\frac{x^2}{1-K\pi}\,\frac{1}{\sin^2 x} = 0$

$\Rightarrow$ $x=0$: تکین منظم است

$Q_0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2\,\frac{x-K\pi}{\sin^2 x} = -K\pi$

$x=k\pi \rightarrow P_0 = \lim_{x\to k\pi} (x-k\pi)\dfrac{x^2}{(x-k\pi)} \times \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{(k\pi)^2}{0} = \infty$ ← تکین نامنظم $x=k\pi$, $k\neq 0$

روش دیگر =

اول ریشه‌های ضریب y'' رو پیدا کن ← مرتبه اش رو پیدا کن = $\overset{\text{بزا مرتبه}}{K}$ ← $\overset{\text{حداقل}}{\text{مرتبه}}$ ریشه y' باید باشه $K-1$

و برای y : حداقل مرتبه ضریبش باید باشه $K-2$ ...

اگر x_0 ریشه مرتبه K ام ضریب y'' باشد، درصورتیکه x_0 حداقل ریشه مرتبه $(K-1)$ ام ضریب

y' و حداقل ریشه مرتبه $(K-2)$ اُم ضریب y باشد، x_0 تکین منظم است ودرغیراین‌صورت

تکین نامنظم است.

$\sin^2 x = 0 \rightarrow x=0$: ریشه مرتبه ۲ $\rightarrow x^2 =$ ریشه مرتبه ۲

که البته حداقل باید 1 بود

$x=k\pi$: ریشه مرتبه ۱ $\rightarrow$ X

ت = ص 424 = س 2 = ۲ تکین دارد:

$x=0 \rightarrow$ ۲ مرتبه ← $\overset{\text{عرتبه}}{\text{حداقل باید 1 باشه}}$ ✓ ← حداقل باید ۰ باشه ✓ ← منظم

$x=1 \rightarrow$ ۳ ← ۲ - ✓ ← ۱ - X ← نامنظم

④:

ت = ص 424 = س 4 =

ریشه مرتبه 1

③ : ← باید ۱ باشه ✓ ← حداقل باید ۰ ✓ ← | $x=0$ حداقل باید مرتبه 1 باشه X ← مرتبه ۲ ← $x=3$

ت = ص 427 = س 21 =

$x=0 \rightarrow$ ۲ مرتبه ← باید حداقل 1 باشه ✓ ← باید حداقل ۰ باشه ✓ ← منظم

مرتبهٔ $x=0$ برای معادله؟ $x^2(1-\cos x)^3(x-\sin x)^4$ ریشهٔ ۱ $x=0$ → $\sin x$ → ریشهٔ ۳ → $(2\times3)=6$

$\underset{2}{\downarrow}\quad\underset{6}{\downarrow}\quad\underset{12}{\downarrow}$

T= نقطهٔ $0=x$ برای معادله $y''+(x\sqrt{x})y=0$ چه نقطه ای؟

$x=0$: غیرتحلیلی → نامنتظم

همیشه توان کسری (مثل $\sqrt{}$ و ...) و Ln → نامنتظم میشه

T= نقاط تکین نامنتظم این معادله؟ $(x\sin x)y''+3y'+xy=0$

~~...~~ نامنتظم باید مرتبهٔ ۱ باشه X → مرتبهٔ ۲

$$x\sin x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\longrightarrow \text{نامنتظم}\\ x=K\pi \longrightarrow \text{منتظم}\\ K\neq 0\end{cases}$$

اولین مشتق مخالف صفر = مرتبه میشه

معادلهٔ شاخص = اگر x_0 نقطهٔ تکین منتظم معادله باشد، آنگاه معادلهٔ شاخص حول x_0 مطابق زیر است =

$$r^2+(P_0-1)r+q_0=0$$

که در آن = ضریب y'' نشون

$$\begin{cases}P_0=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)P(x)\\ q_0=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)\end{cases}$$

T= ۴۲۵ = ص = ۶ = س

$$P_0=\lim_{x\to 0} x\frac{1+6x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2}$$

(۴):

$$\Rightarrow r^2-\frac{1}{2}r=0 \begin{cases}r=0\\ r=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$q_0=\lim_{x\to 0} x^2\frac{2}{3x(1+x)}=0$$

راه دیگر =
همیشه عبارت دوم رو در x و عبارت سوم رو در x^2 ضرب کن:
کمترین توان ضریب y'' واسه ما ملاکه ← ضریب x عبارت دوم * بر ضریب عبارت اول = P_0 رو میده
— q_0 = — سوم —

ملاک $=x$

$$2x(1+x)y''+x(1+6x)y'+x^2 2y=0 \longrightarrow \frac{1}{2}$$
$$\frac{0}{2}=0$$

Subject
Date

ت = $\frac{435}{\text{ص}}$ = $\frac{58}{\text{س}}$

$2x^2y'' + x(3x - 2x^2)y' - x^2(x+1)y = 0$

x^2 = کمترین توان y''

$\frac{x^2 \text{ ضریب عبارت دوم}}{y' \text{ در } x^2 \text{ ضریب}} = \frac{3}{2} = P_0 \quad \Rightarrow r^2 + \frac{1}{r} - \frac{1}{2} = 0$ ③

$\frac{x^2 \text{ ضریب عبارت سوم}}{y'' \text{ در } x^2 \text{ ضریب}} = q_0 = \frac{-1}{2}$

ت = عمران ۹۱ = ریشه های معادله شاخص معادله ی ؟

$4x^2y'' + x(2x^4 - 5x)y' + x^2(3x^2+2)y = 0$

x^2 = معیار

$P_0 = \frac{-5}{4}$

$\Rightarrow r^2 - \frac{9}{4}r + \frac{1}{2} = 0 \quad$ ④ $\rightarrow 2, \frac{1}{4}$

$q_0 = \frac{1}{2}$

ت = اگر معادله زیر به روش سری ها حول $x=0$ حل شود، ریشه های معادله مشخصه آن ؟

$6x^2y'' + 7x^2y' - x^2(1+x^2)y = 0$

$P_0 = \frac{7}{6}$

$\rightarrow r^2 + \frac{1}{6}r - \frac{1}{6} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

$q_0 = -\frac{1}{6}$

حاصلجمع ریشه ها = $\frac{-b}{a} = \frac{-1}{6}$

حاصلضرب ریشه ها = $\frac{c}{a} = -\frac{1}{6}$

تشخیص فرم کلی جواب معادله دیفرانسیل بصورت سری توانی حول x_0 =

P4PCO

تشخیص فرم کلی جواب معادلهٔ دیفرانسیل بصورت سری توانی حول x_0 =

نقطه عادی است ⇐ هر نقطه ای که تکین نباشد: عادی است ⇐ $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

سری توانی برای نقطه

x_0

نقطه تکین است — تکین نامنظم است ⇐ معادله جواب به فرم سری توانی حول x_0 ندارد.

تکین منظم است ⇐ برای تشخیص فرم کلی مطابق زیر عمل می‌کنیم:

* ابتدا معادلهٔ شاخص حول x_0 تشکیل می‌دهیم و ریشه های معادله شاخص را بدست می‌آوریم

(r_1 و r_2)، حالتهای زیر را خواهیم داشت =

ریشه معادله مشخصه

$$y=(x-x_0)^{r}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

جواب به فرم فروبنیوس

اعداد صحیح

الف) $r_1-r_2 \notin \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y_1=(x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ y_2=(x-x_0)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \end{cases} \longrightarrow y_h=C_1y_1+C_2y_2$$

ب) $r_1-r_2=r \longrightarrow$ ریشهٔ مضاعف

$$\begin{cases} y_1=(x-x_0)^{r}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ y_2=y_1\,Ln(x-x_0)+(x-x_0)^{r}\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \end{cases} \longrightarrow y_h=C_1y_1+C_2y_2$$

ج) $r_1-r_2 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y_1=(x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ y_2=K y_1\,Ln(x-x_0)+(x-x_0)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \end{cases} \longrightarrow y_h=C_1y_1+C_2y_2$$

Subject

Date

$$y'' + x\frac{3x-1}{x^2-x}y' + x^2\frac{1}{x^2-x}y = 0$$ ت = ص 425 = س 5

کمترین توان $y'' = -x$

$P_0 = 1$, $q_0 = 0$ $\rightarrow r^2 + (1-1)r \Rightarrow 0 = 0 \rightarrow r^2 = 0 \rightarrow r = 0$: ریشه مضاعف $\rightarrow$ ۲

اونایکه در مخرج جز مشتق توان y''

$\dfrac{\text{ضریب } -x \text{ در عبارت اول}}{-1} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

ت = ص 429 = س 29 گزینه ها به ما میگن حول ۰ ← معادله مشخصه رو حول ۰ بنویس

$$2xy'' + xy' + x^3y = 0$$

$P_0 = \frac{1}{2}$, $q_0 = 0$ $\longrightarrow r^2 - \frac{1}{2}r = 0 \longrightarrow r = \frac{1}{2}, 0$: ①

پس $x_0 = 0$ حول صفر میشه

$(x - x_0)^n$

ت = ص 429 = س 30 حول صفره پس در x و x^2 ضرب کن:

گزینه ها میگه

$$4xy'' + 3xy' + 2x^2y = 0$$

$P_0 = \frac{3}{4}$, $q_0 = 0$ $\quad r^2 - \frac{1}{4}r = 0 \longrightarrow r = 0, \frac{1}{4} \longrightarrow$ ③

در اون حالت همیشه در x و x^2 ضرب کن

اگه حول ۰ نبود ← باید حد بگیری

$$2x^2y'' + x^4y' - x^2(x+1)y = 0$$ ← حول صفره = ت = ص 427 = س 18

$P_0 = \frac{1}{2}$, $q_0 = -\frac{1}{2}$ $\longrightarrow r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 2r^2 - r - 1 = 0 \rightarrow (2r+1)(r-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ r = 1 \end{cases}$

سوال ۸۰ = دو جواب مستقل معادله زیر؟

$$x^2y'' + 3x^4y' + x^2(1+x)y = 0 \quad , \quad x > 0$$

از گزینه ها مشخصه حول صفره پس در x و x^2 ضرب کن

$P_0 = 3$, $q_0 = 1$ $\rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \rightarrow r = -1 \rightarrow$ ریشه مضاعف $\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1(x) = \frac{1}{x}\sum a_n x^n \\ y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{cases}$$

Subject ۵۰
Date

ت: ص ۴۳۰ = س ۳۱ = حول صفر ریشه‌های x و x^2 را بیابید فرض کن:

$3x(2+3x)y'' - x4y' + x^2 4y = 0$

$P_0 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

$q_0 = 0$

$\rightarrow r^2 - \frac{5}{3}r = 0 \rightarrow r = 0$, $r = \frac{5}{3}$ $\longrightarrow$ (1)

ت: ص ۴۲۷ = س ۲۰ = معادله فروبنیوس ← r = ریشه معادله شاخصی ←

$(x^2 - x)y'' - x^2 y' + x^2 y = 0$

$P_0 = 0$

$q_0 = 0$

$\longrightarrow r^2 - r = 0 \rightarrow r = 0$, $r = 1$

روش دیگه $= P_0 = \lim_{x \to 0} x \frac{-x}{x^2 - x} = 0$

ت: ص ۴۳۰ = س ۳۲ =

$3x^2 y' + \dots$

$P_0 = \frac{2}{3}$

$q_0 = 0$

$\longrightarrow r^2 - \frac{1}{3}r = 0 \rightarrow r = 0$, $r = \frac{1}{3}$

ت: ص ۴۳۵ = س ۵۷

ت: یک جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟

$x^2 y'' + 3x^2 y' + x^2(1+x)y = 0$

$P_0 = 3$

$q_0 = 1$

$\longrightarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \rightarrow r = -1$ ریشه مضاعف: -1

صفحه ۸۳ = ۹۲

ت: به ازای چه مقادیری از پارامتر مثبت λ، معادله $x^3 y'' + 2x^2 y' + \lambda(e^x - 1)y = 0$ دارای دو جواب به فرم فروبنیوس حول $x = 0$ است؟

نکته: شرط داشتن دو جواب به فرم فروبنیوس

hei

$$\begin{cases} \text{ریشه} \neq 0 \\ \Delta \neq 0 \\ r_1 - r_2 = \sqrt{\Delta} \end{cases}$$

$P_0 = 2$

$q_0 = \lambda$

$\Longrightarrow r^2 + r + \lambda = 0 \longrightarrow 0 \neq$ ریشه $\longrightarrow \lambda \neq 0$

$\Delta = 1 - 4\lambda \neq 0 \rightarrow \lambda \neq \frac{1}{4}$

$\longrightarrow \lambda \neq 0, \frac{1}{4}$: (1)

بسط مک لورن * رو بنویس و ضریب x^3 اش میشه λ: