Subject

Date

محاسبه‌ی ضرایب و روابط بازگشتی =

① اگر جواب معادله به فرم سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ باشد آنگاه =

$$a_n=\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$$

حالت خاص $x_0=0$ داریم = $a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$

ویژگی های مثبت = ۱- کوتاه

۲- برای نقاط عادی و تکین منتظم قابل استفاده است.

۳- برای روابط بازگشتی قابل استفاده است.

ویژگی منفی = فقط برای اندیس های پایین قابل استفاده است.

$a_2=\dots$

$a_3=\dots$

$a_{20}=\times$

اول همیشه روش اول و حل می کنیم اگه رسیدیم به اندیس بالا مثلاً میریم سراغ روش دوم ؛ همیشه از روش اول شروع می کنیم

دیگه ۴ تا و ...

T ـ ص 43 ـ س 433 : a_3 اندیسش خوبه

$y''+xy=0 \quad *$

$a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=-\frac{1}{6}$

از * مشتق بگیر؛ y''' رو میخوای ←

$y'''+y+xy'=0 \xrightarrow{x=0} y'''(0)+y(0)=0 \to y'''(0)=-1$

سبط میگه حول ۰ بسطش بده

T ـ ص 49 ـ س 434 = گزینه ۱ : بازگشتیه ← $n=0$ بذار ←

$a_2=\frac{a_0}{6}\neq 0$: a بیشترینه مقدار داشته مگر اینکه خودش بگه

$x=0 \to y''(0)=0 \to a_2=0$

گزینه ۲ : به $n=-1$ بذار ← $\times$ گزینه ۳ = کمترین مقداری که میتونم به n بدم $=1$ هست ← $a_4=-\frac{a_0}{20}$

گزینه ۴ : کمترین مقداری که میتونم به n بدم : $n=0$ ← $a_4=-\frac{a_0}{12}$

PAPCO

گزینه ها همه ضرایب مخالف صفرند به جز اینکه شرایط مسئله خودش اینو به ما بگه .

Subject ۵۱
Date

پس به a_4 نیاز داریم

$$y'' + x^2 y = 0 \xrightarrow{\text{مشتق}} y''' + 2xy + x^2 y' = 0 \xrightarrow{x=0} y'''(0) = 0$$

$$y^{(4)} + 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y'' = 0 \xrightarrow{x=0}$$

$$y^{(4)}(0) + 2y(0) = 0 \Rightarrow 4! \times a_4 + 2a_0 = 0 \rightarrow a_4 = -\frac{a_0}{12}$$

طبق $\frac{y^{(n)}(0)}{n!} = a_n$

پس ④ :

ت: ۴۲۷ = س ۱۷ = اولین چیزیکه نیاز دارم پیدا کنم در c_0 و c_1 = c_6 است ← پس بره واسه روش دوم
با گزینه ها:

ت: ۴۲۵ = س ۱ = $x=0$ تکین منتظمه ← حتماً طرفین رو در این x ضرب کن که توابع تحلیلی بشه و بتونیم از این روش استفاده کنم.

$$xy'' + y' = \sin x$$

$$x=0 \rightarrow y'(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0 \rightarrow 1 \times \text{حذف}$$

وقتی ضریب y'' باشه x^r باید r بار مشتق بگیری ←

$$y'' + xy''' + y'' = \cos x \xrightarrow{x=0} 2y''(0) = 1 \rightarrow y''(0) = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{1}{2(2!)} \rightarrow ③$$

ت: تهران ۹۰ = ۴ جمله اول سری جواب معادله $y'' + (y')^2 = e^x y^3$ با شرط اولیه $y(0)=1$ و $y'(0)=2$ کدام است؟

در گزینه ها a_2 متفاوته ...

$$x=0 \rightarrow y''(0) + 4 = 1 \rightarrow y''(0) = -3 \rightarrow a_2 = \frac{-3}{2} \rightarrow \text{۱ و ۲ حذف}$$

بین ۳ و ۴ a_3 متفاوته پس یه بار دیگه مشتق بگیر:

$$y''' + 2y'y'' = e^x y^3 + 3e^x y' y^2 \xrightarrow{x=0} y'''(0) + 2(2)(-3) = 1 + 3(2)(1)$$

$$y'''(0) = 19 \rightarrow a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{19}{6} \rightarrow y = 1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{19}{6}x^3 + \cdots$$

T: در بسط تیلور تابع جواب معادله زیر حول نقطه ۰ ضریب x^3 کدام است؟

$y''-(\sin x)y'+xy=0$ ، $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$

$a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=-\frac{1}{6}$

$y'''-\cos x\cdot y'-\sin x\, y''+y+xy'=0 \xrightarrow{x=0} y'''(0)-y'(0)+y(0)=0$

$y'''(0)=-1$

T= هوافضا ۹۰ = جواب معادله دیفرانسیل $2x^2y''+x^2(2x-1)y'+x^2y=0$ را به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ می‌نویسیم. مقدار r کدام است؟

ریشه های معادله شاخص = r

$r^2+(1+\frac{1}{2})r+\frac{1}{2}=0 \to$ جمع ریشه ها $=-\frac{۳}{۲} \to$ ①: $-1, -\frac{1}{2}$

T= هوافضا ۹۰ = در روابط بین ضرایب جواب سری $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ معادله $xy''-y'+y=0$ کدامند؟

هروقت میخوایم مقدار ضرایبو حساب کنیم: چون بسطو میخوایم به جای x بذار ۰

$x=0 \to -y'(0)+y(0)=0 \to a_0=a_1$

$\times$ 4 , 2

مشتق $\to y''+xy'''-y''+y'=0$

۱) $a_0=a_1=0$ ، a_2 دلخواه و $a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(n-1)}$ ...

$x=0 \to y'(0)=0 \to a_1=0 \to$ ۳ $\times$

T= هوافضا ۹۱ =

* روش دوم :

قضیه لایب نیز = $(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + \binom{n}{1}u'v^{(n-1)} + \binom{n}{2}u''v^{(n-2)} + \dots + \binom{n}{n}u^{(n)}v$

بسط دوجمله‌ای نیوتن =

$$(u+v)^n = u^0v^n + \binom{n}{1}u^1v^{n-1} + \binom{n}{2}u^2v^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}u^nv^0$$

دقیقاً همین بسط است فقط توانها تبدیل به مرتبه شدن :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-(n-r))}{r!}$$

$$\binom{n}{1} = n \quad , \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad , \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad , \dots$$

بسط مک لوران در نقطه ۰ یا $x-x_0=0$ بدست میاریم ببین *

روش : برای استفاده از روش دوم به ترتیب زیر عمل می کنیم =

① از طرفین معادله مشتق مرتبه n می‌گیریم (درصورت نیاز از قضیه لایب نیز استفاده می کنیم).

② در رابطه بدست آمده در قسمت ① $x=0$ قرار می دهیم و به جای $y^{(k)}(0)$ ، $k!\,a_k$ قرار می دهیم.

③ با ساده کردن رابطه بدست آمده در قسمت ② رابطه بازگشتی بدست می آید.

* در روش فوق رابطه بازگشتی برای $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بدست می آید. اگر این رابطه بازگشتی بصورت $a_n = f(n)\, a_{n+k}$ ④ باشد درصورتیکه بخواهیم رابطه بازگشتی را برای فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ بنویسیم به فرم $a_n = f(n+r)\, a_{n+k}$ خواهد بود.

اندیس ها تغییر نمیکنه و فقط در f به جای n می گذاریم $n+r$

$y = \sin x \longrightarrow y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$

$y = \cos x \longrightarrow y^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ت = ص ۴۳۴ = س ۴۹ =

$y'' + x^2 y = 0 \longrightarrow$ از طرفین مشتق n ام بگیر →

تایپ نیز

① $y^{(n+2)} + (\cancelto{0}{x^2}) y^{(n)} + n(2\cancelto{0}{x}) y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}(2) y^{(n-2)} = 0$

② $x = 0 \rightarrow (n+2)!\, a_{n+2} + n(n-1)(n-2)!\, a_{n-2} = 0$

③ $(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \rightarrow$ ④ ✓ ← n رو ۲ واحد زیاد کن تا به a_{n+4} برسه

ت = ص ۴۲۷ = س ۱۷ =

$\frac{d^2y}{dx^2} = (1 + x^2) y$

از جمله قبل مشتق بگیر

ضریبشو جدا کن

① : $y^{(n+2)} = (1 + x^2) y^{(n)} + n(2\cancelto{0}{x}) y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}(2) y^{(n-2)}$

② : $x = 0 \rightarrow (n+2)!\, a_{n+2} = n!\, a_n + n(n-1)(n-2)!\, a_{n-2}$

③ : $(n+3)(n+1) a_{n+2} = a_n + a_{n-2} \xrightarrow{n=4} 30 a_6 = \cancelto{\frac{4}{4!}}{a_4} + \cancelto{\frac{1}{2}}{a_2} \rightarrow a_6 = \frac{5}{240} \rightarrow$ درکنکورها نیست

خط بالا رو ساده کن

باید ضریب a_6 باشه $\frac{5}{240}$

ت = ص ۴۲۵ = س ۱۰ = مثلاً میخواستیم ضریب $x^{(4)}$ رو حساب کنیم:

$\xrightarrow{\times x} xy'' + y' = \sin x$: در x ضرب کن که بتونی به جای x، ۰ بذاری

① : $\cancelto{0}{x y^{(n+2)}} + n(1) y^{(n+1)} + y^{(n+1)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$

② $x = 0 \rightarrow n(n+1)!\, a_{n+1} + (n+1)!\, a_{n+1} = \sin(\frac{n\pi}{2}) \Rightarrow a_{n+1} = \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n+1)(n+1)!}$

$a_4 = \frac{-1}{4 \times 4!}$

وقتی سؤال فرم $\sum a_n x^{n+r}$ میخواد؛ یا خودش میگه ، یا اینکه میگه حول ریشه‌ی کوچکتر معادله مشخصه

$$y=(x+a)^{-1}$$
$$y'=-(x+a)^{-2}$$
$$y''=2(x+a)^{-3}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}=n!\,(-1)^n(x+a)^{-(n+1)}$$

ت= عنوان ۹۳= در حل معادله دیفرانسیل زیر به روش سری‌ها حول نقطه صفر، رابطه بازگشتی نظیر ریشه کوچکتر معادله مشخصه کدام است؟ ← وقتی این جمله رو میگه منظورش فرم $\sum a_n x^{n+r}$ است.

$$xy''+x(3-x)y'-x^2y=0 \to r^2+2r+0=0 \quad r=0,\ r=-2$$

① $\cancel{xy^{(n+2)}} + n(1)y^{(n+1)} + (3-x)y^{(n+1)} + n(-1)y^{(n)} - y^{(n)} = 0$

② $x=0 \to n(n+1)!\,a_{n+1} + 3(n+1)!\,a_{n+1} - n\,n!\,a_n - n!\,a_n = 0$

③ $(n+3)(n+1)!\,a_{n+1} - \underbrace{(n+1)n!}_{(n+1)!}\,a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+3} \Rightarrow a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n+2}$

این جواب برای فرم $\sum a_n x^n$ است اما ما فرم $\sum a_n x^{n+r}$ میخواهیم ، پس میشه

$\to a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n}$

۱) $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n-2}$, $n\neq 2$ ۲) $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n-1}$, $n\neq 1$

۳) $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n}$, $n\neq 2$ ✓ ۴) $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n+2}$, $n\neq 1$

روش دوم= حل بوسیله‌ی روش اول= $r^2+2r=0 \quad r=0,\ r=-2$

گزینه‌ها را به فرم $\sum a_n x^n$ بدست می‌آوریم=

Subject:

Year. Month. Date. (در معادله: $xy''+(3-x)y'-y=0$: $x=0 \to 3y'(0)=y(0) \to a_1=\frac{a_0}{3}$ ،

در گزینه‌ها به جای n بذار 1 =

$\sum a_n x^n$

① $a_n=\frac{a_{n-1}}{n} \to a_1=\frac{a_0}{1}$ ×

② $a_n=\frac{a_{n-1}}{n+1}$ ×

③ $a_n=\frac{a_{n-1}}{n+2}$ ✓

④ $a_n=\frac{a_{n-1}}{n+4}$ ×

نکته = اگر در یک سوال رابطه‌ی بازگشتی را برای فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ بخواهند و یا به عبارتی دیگر، رابطه‌ی بازگشتی را برای یکی از ریشه‌های معادله‌ی مشخصه بخواهند، میتوانیم مطابق زیر عمل کنیم =

1- ابتدا معادله‌ی شاخص را تشکیل می‌دهیم تا r بدست آید.

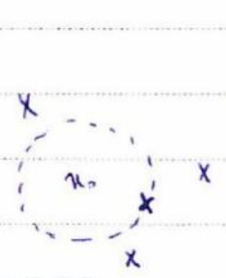
2- در گزینه‌ها که به فرم $a_n=f(n)a_{n+k}$ داده شده‌اند، در f : n را به n-r تبدیل می‌کنیم یعنی آنها را به فرم $a_n=f(n-r)a_{n+k}$ و سپس مانند قبل مسئله را حل می‌کنیم (با توجه به گزینه‌های جدید)

روش اول

« راه‌حل‌های کتاب زیاد جالب نیست: این 2 روش بهترین که گفته »

محاسبه‌ی شعاع همگرایی =

برای محاسبه‌ی شعاع همگرایی پاسخ‌های معادله دیفرانسیل حول نقطه‌ی x_0 کافیست نقاط غیرتحلیلی معادله را بدست آورده و کمترین فاصله‌ی x_0 از آن نقاط را به عنوان شعاع همگرایی در نظر میگیریم.



مثال = ناحیهٔ همگرایی پاسخ های معادله دیفرانسیل $(x^2+2x+2)(x^2+9)(x+3)y''+xy'+(2x+1)y$ (شعاع) حول نقطه $x=2$ بدست آورید؟ $(x_0=2)$

$x^2+2x+2=0 \to x=-1\pm j \to d=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$x^2+9=0 \to x=\pm 3j \to d=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$x+3=0 \to x=-3 \to d=5$

$\Rightarrow R=\text{Min}(d_1, d_2, d_3)=\sqrt{10}$

نکته = فاصلهٔ دو نقطه $A\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ یا $Z_1=x_1+jy_1$ و $Z_2=x_2+jy_2$ برابر است با =

$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

T = ص ۴۲۵ = س ۹ = نقاط غیرتحلیلی رو پیدا کن ←

$4+x^2=0 \to x=\pm 2j \to R=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$: ③

T = ص ۴۲۶ = س ۱۲ =

نقاط غیرتحلیلی : $a^2+x^2=0 \to x=\pm aj \to R=\sqrt{a^2+\frac{9}{4}} \to \frac{25}{4}=a^2+\frac{9}{4} \to a^2=4 \to a=2$

T = ص ۴۲۶ = س ۱۵ =

نقاط غیرتحلیلی $\to 2+x^2=0 \to x=\pm\sqrt{2}j \to R=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$

معادلهٔ لژاندر 8

فرم استاندارد معادلهٔ لژاندر بصورت زیر است =

$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$

در معادلهٔ لژاندر توجه به مطالب زیر مفید است.

فقط وفقط وقتی بهش فکر می کنیم که ازمون جواب عمومی رو میخوان. وقتی به ما بگه جواب معادله لژاندر چیه؟ ما فقط باید $P_n(x)$ رو پیدا کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

① جواب عمومی معادله لژاندر:

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$$

جواب نوع اول معادله لژاندر — جواب نوع دوم معادله لژاندر

② $P_{2n}(x)$: تابعی زوج و $P_{2n+1}(x)$ تابعی فرد است.

③ فرمول رودریگس:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$$

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ \vdots \end{cases}$$

(این 3 تا رو حفظ باش)

④ تعامد جوابهای معادله لژاندر:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

$(P_n(x))^2 \leftarrow m=n \leftarrow$

$$* \int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\, dx = \underbrace{\|P_n(x)\|^2}_{\text{نُرم}} = \frac{2}{2n+1}$$

$$* \int_{-1}^{1} P_n(x)\, dx = 0 \qquad n \neq 0$$

$\int P_n(x)\cdot 1\, dx = \int P_n(x)\, P_0(x) \overset{n\neq 0}{=} 0$

*⑤ تابع $f(x)$ را می‌توان مطابق زیر برحسب جوابهای معادله لژاندر بسط داد. (بسط لژاندر —

بسط لژاندر ، فوریه):

تری مهندس گفته = $f(x) = \sum a_n g_n(x)$ ، $a_n = \frac{1}{\|g_n(x)\|^2} \int_a^b f(x)\, g_n(x)\, dx$

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_m . P_n(x) \\ a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x).P_n(x)\, dx \end{cases}$$

مثال = بسط لژاندر تابع $f(x) = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ 0 & -1<x<0 \end{cases}$ را بدست آورید؟

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^1 x.P_n(x)\, dx \longrightarrow a_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_0^1 x \frac{1}{2}(3x^2-1)\, dx = \cdots$$

$\vdots$

مثال = بسط لژاندر تابع $f(x) = x^2+4x+6 \quad -1<x<1$ را بدست آورید؟

وقتی تابع چند جمله ای هست میتونیم از فرمول استفاده نکنیم

روش ①: $f(x) = \cancel{x^2} + \cancel{4x} + \cancel{6}$ ، $4P_1(x)$ ، $6P_0(x)$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \longrightarrow x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \cancel{\frac{1}{3}} \quad \frac{1}{3}P_0(x)$$

$$f(x) = \frac{2}{3}P_2(x) + \left(\frac{1}{3}+6\right)P_0(x) + 4P_1(x)$$

روش ②: $a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2+4x+6)\, dx = \int_0^1 (x^2+6)\, dx = \frac{1}{3}+6$

مثال = در بسط لژاندر تابع $f(x) = \begin{cases} \cos x & 0<x<1 \\ 0 & -1<x<0 \end{cases}$ ضریب $P_1(x)$ را بدست آورید؟

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 \cos x\, P_1(x)\, dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x.\cos x\, dx = \frac{3}{2}(x\sin x + \cos x)\Big|_0^1 =$$

* در معادله لژاندر: ① $P_n(x)$ چندجمله‌ای از درجهٔ n است.

② اگر n زوج باشد: $P_n(x)$ فقط شامل توانهای زوج x است.

③ اگر n فرد باشد: $P_n(x)$ فقط شامل توانهای فرد x است.

④ $P_n(1)=1$

T = ص ۴۶۸ = س ۱ =

$(1-x^2)y''-2xy'+6y=0 \qquad (1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

$n(n+1)=6 \to n=2 \to P_2(x) \to y_1(x)=P_2(x)$ $\quad \to$:②

$n(n+1)=2 \to n=1 \to P_1(x) \to y_2(x)=P_1(x)$

T = ص 468 = س 2 =

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{(x^4-2x^2)}_{\text{زوج}}\,\underbrace{P_{2k+1}(x)}_{\text{فرد}}}_{\text{فرد}}\,dx = 0 \quad :④$$

T = ص 468 = س 5 = ② و ④ غلط: به جای x، $\cos x$ گذاشته ← حدود انتگرال باید عوض شود

③ غلط x

حل: $$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m=n \end{cases} \xrightarrow[dx=-\sin t\,dt]{x=\cos t} +\int_{\cancel{1}\,0}^{\cancel{-1}\,\pi} P_n(\cos t)P_m(\cos t)\sin t\,dt = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m=n \end{cases}$$

T = ص 468 = س 4 =

$$\int_{-1}^{1} \left(P_n(x)\right)^2 dx = \frac{2}{2n+1}\Big|_{n=5} = \frac{2}{11} \quad :④$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$$

Subject ۵۴
Year. Month. Date. ( )

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{x^3 P_2(x)\, dx}_{\text{فرد}} - \underbrace{\int_{-1}^{1} P_2(x)\, dx}_{0} = 0$$ $\vdots$ ④ نکته ۴

T=ص ۴۴۹ = س ۱۰ =

T=ص ۴۴۹ = س ۱۲ = تمام از کمترین شروع می کنیم ← از a_0 شروع می کنیم:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4 \cancel{P_0(x)}\, dx = \int_{0}^{1} x^4\, dx = \frac{1}{5} \rightarrow ②$$

$$\underbrace{\int (x^3+ax) P_2(x)}_{\text{فرد}} + b \underbrace{\int P_2(x)}_{\text{صفر}} = 0 \rightarrow$$ ③ = س 13 = ص 470 = T

T = ص 470 = س 14

$$\int_{-1}^{1} 6x P_1(x)\, dx + \int_{-1}^{1} 5 \cancelto{0}{P_2(x)}\, dx = 2\int_{0}^{1} 6x^2 dx \cdot 4$$

نکته:

$$\int_{-1}^{1} (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0) P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & k<n \\ & k \geqslant n \end{cases}$$

چند جمله ای درجه n

با توجه به فرمول رودریگس $P_n(x)$ را برحسب چند جمله ای جایگذاری می کنیم وسپس انتگرال رامحاسبه می کنیم:

مثلاً: $$\int_{-1}^{1} (x^3+x^2+4x+5) P_2(x)\, dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} (x^3+4x) P_2(x)\, dx}_{0} + \int_{-1}^{1} x^2 P_2(x)\, dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} 5 P_2(x)\, dx}_{0} =$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2}(3x^2-1)\, dx = \dots$$

T= صفحه ۹۰ = حاصل انتگرال زیر کدامست که در آن $P_n(x)$ چند جمله ای درجه n لژاندار است؟

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{(x-x^3)}_{\text{فرد}} \underbrace{P_{2n}(x)}_{\text{زوج}}}_{\text{فرد}}\, dx = 0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

T= جواب معادله لژاندر زیر؟ $(1-x^2)y''-2xy'+20y=0$

گزینه ③ ← چندجمله‌ای از درجه ۴ ← $n(n+1)=20 \rightarrow n=4$

۱) $1-3x^2$ ۲) $x-\frac{5}{3}x^3$ ۳) $1-10x^2+\frac{35}{2}x^4$ ۴) $\frac{1}{4}x^5$

T= مکانیک ۹۱ = مطلوبست مقدار c_2 در بسط لژاندر- فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0\\ 1 & 0<x<1\end{cases}$ را به $f(x)=\sum c_n P_n(x)$

که در آن $P_n(x)$ چندجمله‌ای های لژاندری باشند و برای $n=2$،

$\ldots P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$$c_2=\frac{5}{2}\int_0^1 P_2(x)\,dx=\frac{5}{4}\int_0^1(3x^2-1)\,dx=\frac{5}{4}(x^3-x)\Big|_0^1=0$$

معادلهٔ بسل 8 فرم استاندارد معادلهٔ بسل بصورت زیر است =

$$x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$$

① $x=0$ نقطهٔ تکین منظم معادلهٔ بسل است.

② معادله شاخص حول $x=0$ مطابق زیر است =

$$r^2+(1-1)r-\nu^2=0 \rightarrow r^2-\nu^2=0 \rightarrow r=\pm\nu$$

③

$$\nu\notin Z \longrightarrow \begin{cases} y_1=x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\ y_2=x^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\end{cases}$$

$$\nu\in Z \longrightarrow \begin{cases} y_1=x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\ y_2=Ky_1\ln x+x^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\end{cases}$$

آ=عمران ۹۲= در حل یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی ۲ به روش سری‌ها، حول یک نقطه‌ی تکین منظم (مثلاً $x=0$)

① : x ممکنه $K\neq 0$ ④ ✓ ممکنه ...

در معادله بسل توجه به مطالب زیر مفید است =

① جواب عمومی معادله بسل مطابق زیر است =

$$y = C_1 J_{\nu}(\lambda x) + C_2 Y_{\nu}(\lambda x)$$

جواب نوع اول معادله بسل — جواب نوع دوم معادله بسل — اینم مثل لژاندر نقطه برای جواب عمومی به کار میاد

تذکر =

$$\nu \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y = C_1 J_{\nu}(\lambda x) + C_2 J_{-\nu}(\lambda x)$$

مثال = جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید؟

(الف) $4x^2 y'' + 4xy' + (3x^2 - 9)y = 0 \rightarrow$ تبدیل به فرم استاندارد ←

$$x^2 y'' + xy' + \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}\right)y = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda^2 = \frac{3}{4} \rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \nu^2 = \frac{9}{4} \rightarrow \nu = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = C_1 J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 Y_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ y = C_1 J_{+\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 J_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ب) $x^2y'' + xy' + (12x^2 - 9)y = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 16 \rightarrow \lambda = 4 \\ \nu^2 = 9 \rightarrow \nu = 3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$y = C_1 J_3(4x) + C_2 Y_3(4x)$

۴) بعضی از معادلات دیفرانسیل با تغییر متغییر مناسب به معادله بسل تبدیل میشوند. یکی از مهمترین

این معادلات ، معادله زیر است:

$x^2y'' + (2K+1)xy' + (\alpha^2 x^{2r} - \beta^2)y = 0$

$\xrightarrow{\text{جوابش}} x^{-K} J_{\frac{m}{r}}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right) \quad , \quad m = \sqrt{K^2+\beta^2}$

جواب عمومی $\rightarrow y = C_1 x^{-K} J_{\frac{m}{r}}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right) + C_2 x^{-K} Y_{\frac{m}{r}}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right)$

۱۵ = ۴۸۶

T = برق 83 = معادله دیفرانسیل $xy'' + y' + y = 0$ درنظر بگیرید. اگر J_0 تابع بسل مرتبه صفر باشد، کدامیک از عبارتهای داده شده در معادله صدق میکند؟

۱) $J_0\sqrt{x}$ ۲) $J_0(2x)$ ۳) $J_0(2\sqrt{x})$ ۴) $J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)$

۳:

۱) x: جواب معادله بسل استاندارده ($J_\nu(\lambda x)$: اما این استاندارد نیست پس غلط

بقیه گزینه ها میگه با $z = \sqrt{x}$ ← به بسل تبدیل میشه.

$z = \sqrt{x}$ ← تبدیل به بسل استاندارد میشود

۲) روش : $x^2y'' + xy' + xy = 0 \longrightarrow \begin{cases} K = 0 \\ \alpha = 1 \\ r = \frac{1}{2} \\ \beta = 0 \rightarrow m = 0 \end{cases} \Rightarrow J_0(2\sqrt{x})$

تبدیل به فرم استاندارد

۳) روش $\rightarrow z = \sqrt{x}$ $\quad$ 8 $\quad x^2y'' + xy' + xy = 0$

مفهوم: $z = \sqrt{x}$ ← $(\sqrt{x})^2$ = این باید باشه یه چیزی به توان ۲

باتوجه به فرم معادله

باید ضریب y'' باشه حتماً x^2

Subject: ۵۸
Year. Month. Date. ( )

استاندارد $\rightarrow x^2y''+xy'+\left(4x^4-\frac{4}{9}\right)y=0$ $T=\text{س}484=\text{س}16=$

روش ①: $\begin{cases} K=0 \\ \alpha=2 \\ r=2 \\ \beta=\frac{2}{3} \rightarrow m=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow J_{\frac{1}{3}}(x^2)$

روش ②:

③ و ④ X : چون جواب معادله بسل استاندارده

به بسل استاندارد تبدیل می‌شود $\rightarrow x^2$ $Z=x^2 \Leftarrow$ گزینه های دیگ میگ

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}(2x) \rightarrow y''=2\frac{dy}{dz}+4x^2\frac{d^2y}{dz^2} \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$

$2x^2\frac{dy}{dz}+4x^4\frac{d^2y}{dz^2}+2x\,\frac{2dy}{dz}+\left(4x^4-\frac{4}{9}\right)y=0$

$4z^2\frac{d^2y}{dz^2}+4z\frac{dy}{dz}+\left(4z^2-\frac{4}{9}\right)y=0 \rightarrow z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+\left(z^2-\frac{1}{9}\right)y=0 \Rightarrow$

$J_{\frac{1}{3}}(Z) \Rightarrow J_{\frac{1}{3}}(x^2)$

روش ③: $x^2y''+xy'+\left(\underbrace{4x^4}_{(x^2)^2\text{ بود}}-\frac{4}{9}\right)y=0$

$(x^2)^2$ بود $\xrightarrow{\text{پس معلومه}} Z=x^2$

ص484

$T=\text{س}5=$

$x^2y''+xy'+\left(\frac{x}{4}-\frac{v^2}{4}\right)y=0$

روش ①: $\begin{cases} K=0 \\ \alpha=\frac{1}{2} \\ r=\frac{1}{2} \\ \beta=\frac{v}{2} \rightarrow m=\frac{v}{2} \end{cases} \rightarrow J_v\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مکانیک ۹۳

T= ریاضی محض ۹۰ = معادله فوق مفروض است. با فرض $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ و $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$ توابع بسل به ترتیب از مرتبه $\frac{1}{3}$ و $-\frac{1}{3}$ باشند جواب عمومی معادله داده شده کدام است؟

$4x^2y''+4xy'+(8x^2-1)y=0$

$x^2y''+xy'+(2x^2-\frac{1}{4})y=0 \longrightarrow J_{\frac{1}{3}}(\sqrt{2}x)$: ④

$\downarrow$

$y=$

T= مهندسی انرژی ۹۱ = جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ $y''+(e^{2x}-\frac{1}{9})y=0$

① : فرم جواب معادله کوشی اویلر ← غلط

② : فرم جواب معادله ضرایب ثابت ← غلط

④ فرم جواب معادله بسل استاندارد ← غلط

اگر گزینه ③ بود: بجای x هایش سمت راست e^x بود ←

$z=e^x \to y'=\frac{dy}{dz}e^x \to y''=e^x\frac{dy}{dz}+e^{2x}\frac{d^2y}{dz^2}$

$z\frac{dy}{dz}+z^2\frac{d^2y}{dz^2}+(z^2-\frac{1}{9})y=0 \to J_{\frac{1}{3}}(z) \to J_{\frac{1}{3}}(e^x)$

T= برق ۹۲ = دو جواب مستقل خطی معادله فوق $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{9}{4})y=0$

$v=\frac{3}{2} \to$ ①

۳ گزینه که $\ln x$ دارند قطعاً غلطه...

T= محض ۹۲ = جواب عمومی معادله فوق؟ $x^2y''+xy'+(x^4-1)y=0$

: ③

$$\to \begin{cases} K=0 \\ \alpha=1 \\ r=2 \\ B=1 \to m=1 \end{cases} \to J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

PAPCO

روش ۲ : $z = x^2$ ⟵ به معادله بسل استاندارد تبدیل می‌شود

روش ۳ : $z = x^2$

$$J_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$$

T = برق ۹۳ = خودش میگه n رو بزار ۰

اگر بخوام $\sin^2\theta$ بیارد ← میفهمیم باید ۲ بار مشتق بگیریم

$$J_0'' = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\theta\cos(x\sin\theta)\,d\theta \quad ③$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

اگر معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$ جوابی به صورت $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$ داشته باشد آنگاه $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta.\cos(x\sin\theta)\,d\theta$ برابر است با؟

۱) $-J_0(x)$　۲) $-J_0'(x)$　۳) $-J_0''(x)$　۴) $-J_0'''(x)$

③ :

مرتبه اش یکی از توان اونیکی کمتره

\+ است

③

الف) $\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_{\nu}(x)\right) = x^{\nu}J_{\nu-1}(x) \Longrightarrow \int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,dx = x^{\nu}J_{\nu}(x) + C$

ب) $\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) \Longrightarrow \int x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{-\nu}J_{\nu}(x) + C$ **

یا توان + است یا − ؛ یا انتگرال بالا یا پایین

مثال = حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید؟

۱) $\int x^3 J_2(x)\,dx = x^3 J_3(x) + C$

۲) $\int x^{-2} J_3(x)\,dx = -x^{-2} J_2(x) + C$

و روبذار انتگرال اونیکه میخوای حساب کنی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳) $\int x^0 J_1(x)\,dx = -J_0(x)+C$

۴) $\int x^5 J_2(x)\,dx =$ اینجا همیشه ازاون فرمولا استفاده کرد ← جزء ۶ به جزء برو

$f=x^2 \quad , \quad g_0=x^3 J_2$

(جدولی)

$= x^2\left(x^3 J_3(x)\right) \xrightarrow{2x^4 J_3(x)} 2x^4 J_4(x)$ *

مشتق این x ایناکی

۵) $\int x^2 J_2(x)\,dx = x^3\left(-x^{-1}J_1(x)\right) \xrightarrow{-3xJ_1(x)} \left((-3x)(-J_0(x)) \xrightarrow{3y_0} 3\int J_0(x)\,dx\right)$

$f=x^3 \,,\, g_0=x^{-1}J_2(x)$

* نکته = $\int x^m J_n(x)\,dx$

فرد $m+n$ → انتگرال به طور کامل حل می‌شود.

زوج $m+n$ → در اینجا به $\int J_0(x)$ می‌رسیم
بهتر است از فرمول دوم ** استفاده کنیم

برق ۷۵ = س ۱ = $\quad r^2 J_2(2)\Big|_0^1 = J_2(1)$

برق ۷۷ = س ۲ = $\quad \int_0^1 \underbrace{x(1-x^2)}_{f}\, \overbrace{J_0(x)}^{g}\,dx$

$= (1-x^2)(xJ_1) \xrightarrow{-2x^2 J_1} \left(-2x^2 J_2(x)\right)\Big|_0^1 = 2J_2(1) \quad ;$ ①

میخوای مشتق اولی دردوم

آ= محض ۹۲ = انتگرال $\int xJ_0(x)dx$ که در آن $J_0(x)$ تابع بسل از مرتبهٔ صفر میباشد

$xJ_1(x) \quad :$ ④

P4PCO

روابط بازگشتی =

الف) $\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(x)\right) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \Longrightarrow \nu x^{\nu-1} J_{\nu}(x) + x^{\nu} J'_{\nu}(x) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$

بر x^{ν} تقسیم میکنیم $\longrightarrow \boxed{\frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) + J'_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x)}$ ①

ب) $\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_{\nu}(x)\right) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \Longrightarrow -\nu x^{-\nu-1} J_{\nu}(x) + x^{-\nu} J'_{\nu}(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$

بر $x^{-\nu}$ تقسیم $\longrightarrow \boxed{\frac{-\nu}{x} J_{\nu}(x) + J'_{\nu}(x) = -J_{\nu+1}(x)}$ ②

① + ② $\Rightarrow \boxed{2 J'_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)}$ ③

① − ② $\Rightarrow \boxed{\frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)}$ ④

این ۴ رابطه برای بسل مهمند: نیاز به حفظ کردن نیست: روشهای حلشون رو بلد باش

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل چهارم : « تبدیل لاپلاس » :

تبدیل لاپلاس =

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) . e^{-sx} \, dx$$

$F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(x)$ است.

یه تیکه از جزوه رو نگفت: بطور مستقیم در کنکور مهندسی نیامده.

محاسبه تبدیل لاپلاس =

جدول تبدیل لاپلاس =

$f(t)$	$F(s)$
$\Longrightarrow$ t^{p}	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
t^{n}	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$\Longrightarrow$ $\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$\Longrightarrow$ $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\Longrightarrow$ $\delta(t-a)$	e^{-as}
$\delta(t)$	1
1	$\dfrac{1}{s}$

$\rightarrow \begin{cases} \Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) : \\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \end{cases}$

$\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in N$

P4PCO

Subject: 41

Year. Month. Date. ( )

$$u_a(x) = u(x-a) = \begin{cases} 1 & x > a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

جدول خواص:

① تغییر مقیاس: $f(x) \xrightarrow{L} F(S)$

$$f(ax) \xrightarrow{L} \frac{1}{a} F\left(\frac{S}{a}\right)$$

② انتقال نوع 1: $e^{ax} f(x) \xrightarrow{L} F(S-a)$

③ انتقال نوع 2: $f(x-a)\, u_a(x) \xrightarrow{L} e^{-aS} F(S)$

نتیجه: خاصیت حذف پله ← $f(x)\, u_a(x) \xrightarrow{L} e^{-aS} L\{f(x+a)\}$

④ $F^{(n)}(x) \xrightarrow{L} S^n F(S) - S^{n-1} f(0) - S^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

⑤ $x^n f(x) \xrightarrow{L} (-1)^n F^{(n)}(S)$ $\quad n \in N$

⑥ $\int_0^x f(t)\, dt \xrightarrow{L} \frac{F(S)}{S}$ $\quad f(x) * 1 = \int_0^x f(t)\, dt$

⑦ $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{L} \int_S^\infty F(S)\, dS$

⑧ متناوب با دوره تناوب T: $f(x) \equiv f(x+kT) = f(x)$

$$F(S) = \frac{1}{1-e^{-TS}} L\{f_T(x)\}$$ تعریف f در یک دوره تناوب

⑩ $f(x) * g(x) \xrightarrow{L} F(S)\, G(S)$

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(\lambda)\, g(x-\lambda)\, d\lambda = \int_0^x f(x-\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۹ (الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$ (مقدار اولیه)

(با شرایط وجود حدهای طرفین)

(ب) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$ (مقدار نهایی)

وقتی میگن تبدیل لاپلاس را حساب کن باید هسته‌ی عبارت را محاسبه کنیم؛ هسته پایه برای عبارت نهایی که موارد آن حذف شده اند و اضافه ها را حذف کنیم تا هسته بدست آید.

$x^2 e^{-2x} \sin x \longrightarrow$ هسته $= \sin x$

مثال= تبدیل لاپلاس تابع مقابل را بدست آورید؟

$$f(x) = x e^{-x} \int_0^x e^{2t} \frac{\sin 3t}{t}\, dt$$

هرچیزی رو که با خواص اینجا نشده و میتونیم حذفش کنیم اضافیه ← هسته بدست میاد

طبق خواص: ۵: x ، ۴: e^{-x} ، ۴: $\int_0^t$ ، ۲: e^{at} ، ۷: $\frac{1}{t}$ $\Rightarrow$ هسته $= \sin 3t$

$$\sin 3t \xrightarrow{\text{جدول}} \frac{3}{s^2+9}$$

$$\frac{\sin 3t}{t} \xrightarrow{7} \int_s^\infty \frac{3}{s^2+9}\, ds = \tan^{-1}\left(\frac{s}{3}\right)\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s}{3}\right)$$

$$e^{2t}(\dots) \xrightarrow{2} \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s-2}{3}\right)$$

$$\int_0^x (\dots)\, dt \xrightarrow{6} \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s-2}{3}\right)\right)$$

$$e^{-x}(\dots) \xrightarrow{2} \frac{1}{s+1}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s-1}{3}\right)\right)$$

$$x(\dots) \xrightarrow{5} -\left(\frac{1}{s+1}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s-1}{3}\right)\right)\right)' = \dots$$

هسته از حذف عبارتهایی که در خواص هستند بدست می آید.

تذکر= اگر هسته در جدول موجود نباشد، سعی می کنیم با ساده کردن و یا مشتق گیری از طرفین آن هسته را

ایجاد کرده و سپس مسئله را حل کنیم.

مثال= تبدیل لاپلاس $f(t)=te^{-t}.\cos^2 t$ را بدست آورید؟

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}\xrightarrow{L}\frac{1}{2S}+\frac{1}{2}\frac{S}{S^2+4}$$

$$e^{-t}(\dots)\xrightarrow{L}\frac{1}{2(S+1)}+\frac{1}{2}\frac{S+1}{(S+1)^2+4}$$

$$t(\dots)\xrightarrow{L}-\left(\frac{1}{2(S+1)}+\frac{1}{2}\frac{S+1}{(S+1)^2+4}\right)'=\dots$$

T= ریاضی مهندسی 89 = ص 519 = اگر $f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$ آنگاه تبدیل لاپلاس $f(x)$ برابر است با؟

۱) $\frac{1}{S\sqrt{S+1}}$ ۲) $\frac{1}{S(S+1)}$ ۳) $\frac{1}{S^2\sqrt{S+1}}$ ۴) $\frac{1}{S^2(S+1)}$

الان کل این خودش جزء نکته هاست ← گفتیم در این مواقع: یا ساده کردن یا مشتق گرفتن:

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}\Rightarrow SF(S)-\cancel{f(0)}=L\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}\xrightarrow{L}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{S^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}$$

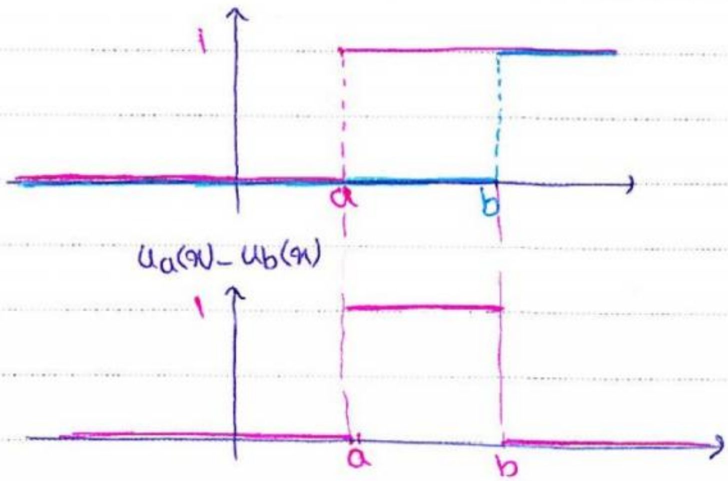
$$\frac{e^{-x}}{x}\xrightarrow{②}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{S+1}}$$

$$\frac{1}{S\sqrt{S+1}}$$

تبدیل لاپلاس توابع چند ضابطه‌ای =

$$y = f(x) \quad a<x<b \equiv y = f(x)\left(u_a(x) - u_b(x)\right)$$



8 تعمیم

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & 0<x<x_1 \\ f_2(x) & x_1<x<x_2 \\ f_3(x) & x_2<x<x_3 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x>x_{n-1} \end{cases} \equiv$$

$$f(x) = f_1(x)\left(\overset{1}{\cancel{u_0}} - u_{x_1}\right) + f_2\left(u_{x_1} - u_{x_2}\right) + f_3\left(u_{x_2} - u_{x_3}\right) + \dots + f_n(x)\left(u_{x_{n-1}} - \underset{0}{u_\infty}\right)$$

پله ابتدا   پله انتها

برای محاسبه تبدیل لاپلاس توابع چند ضابطه‌ای به نظم زیر عمل می‌کنیم =

۱- ابتدا مطابق فوق تابع را بصورت حاصلضرب ضابطه‌ها در توابع پله واحد می‌نویسیم.

۲- از خاصیت حذف تابع پله استفاده می‌کنیم و توابع پله حذف می‌شوند (نتیجه خاصیت ③).

۳ـ مانند قبل تبدیل لاپلاس توابع یک ضابطه ای ایجاد شده در بند ② را بدست می آوریم

مثال= تبدیل لاپلاس تابع مقابل را بدست آورید؟

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0<x<1 \\ e^{-x}\sin x & 1<x<\pi \\ 3 & x>\pi \end{cases}$$

مال رو بگیر ۱ — ابتدا بازه — انتهای بازه

$$① \; f(x)=x^2(1-u_1)+e^{-x}\sin x\,(u_1-u_\pi)+3u_\pi$$

$$② \; F(s)=\frac{2!}{s^3}-e^{-s}L(x+1)^2+e^{-s}L\left\{e^{-(x+1)}\sin(x+1)\right\}-e^{-\pi s}L\left\{e^{-(x+\pi)}\sin(x+\pi)\right\}+e^{-\pi s}L\{3\}$$

$$\frac{3}{s}$$

③

$$x^2+2x+1 \to \frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}$$

$$e^{-1}e^{-x}\{\sin x.\cos 1+\cos x.\sin 1\}$$

$$\sin x.\cos 1+\cos x.\sin 1 \xrightarrow{L} \frac{\cos 1}{s^2+1}+\sin 1\frac{s}{s^2+1}$$

$$e^{-1}e^{-x}(\dots)\to e^{-1}\left(\frac{\cos 1}{(s+1)^2+1}+\sin 1\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)$$

$$-e^{-\pi}e^{-x}\sin x \to \frac{-e^{-\pi}}{(s+1)^2+1}$$

T= ص ۵۷۱ = س ۱۴ ـ هر وقت تابع پله داشتیم ← اولین کارمون = حذف تابع پله.

$$f(t)=(t-\pi)\sin(3t)e^{2t}u_\pi(t)$$

$$F(s)=e^{-\pi s}L\left\{t.\sin 3(t+\pi)e^{2(t+\pi)}\right\}=-e^{2\pi}\times e^{-\pi s}\frac{6(s-2)}{[(s-2)^2+9]^2}$$

ساده اش کن

$$-e^{2\pi}t\sin 3t\,e^{2t}$$

$$\sin 3t \xrightarrow{\text{جدول}} \frac{3}{s^2+9}$$

$$t\sin 3t \xrightarrow{⑤} \frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

$$e^{2t}t\sin 3t \xrightarrow{②} \frac{6(s-2)}{[(s-2)^2+9]^2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y'' + 4y = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi \\ 0 & \pi \leq t < \infty \end{cases}$$

ت = ص 587 = س 57 =

$$y'' + 4y = 1 - u_\pi \longrightarrow S^2 Y(S) - S y(0) - \cancel{y'(0)}^{\,0} + 4Y(S) = \frac{1}{S} - e^{-\pi S} \times \frac{1}{S}$$

$$(S^2+4)Y(S) = S + \frac{1 - e^{-\pi S}}{S} \qquad ; ④$$

ت = ص 577 = 52

① $f(t) = t(1-u_2) + 2u_2$

$$④\ F(S) = \frac{1}{S^2} - e^{-2S}\, L\{\underbrace{t}_{\frac{1}{S^2}} + \underbrace{2}_{\frac{2}{S}}\} + e^{-2S}\, L\{\underbrace{2}_{\frac{2}{S}}\} = \frac{1}{S^2} - \frac{e^{-2S}}{S^2} - \frac{2e^{-2S}}{S} + \frac{2e^{-2S}}{S}$$

ت = ص 571 = س 16

$$f(t) = t^3 * \sin t \xrightarrow{⑩} \frac{3!}{S^4} \times \frac{1}{S^2+1} \qquad ④$$

هروقت انتگرال دیدی ← بیاد کانولوشن بیفت ،

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \\ \sin x & x \geq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

ت = عمران 91 = لاپلاس = ؟

① $f(x) = \sin x \,.\, u_{\frac{\pi}{6}}(x)$

$$④\ F(S) = e^{-\frac{\pi}{6}S}\, L\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$F(S) = e^{-\frac{\pi}{6}S}\, L\left\{\sin x . \cos\frac{\pi}{6} + \cos x . \sin\frac{\pi}{6}\right\} = e^{-\frac{\pi}{6}S}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{S^2+1} + \frac{1}{2}\frac{S}{S^2+1}\right)$$

Subject: ۴۴
Year. Month. Date. ( )

H چون تابع پله است ... ما که مهندسی نیست

$$f(t) = \sin(t)\left(\overset{1}{H(t)} - \overset{u_\pi}{H(t-\pi)}\right)$$

T= محفن ۹۱= ص ۶۹= س ۲۲ =

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s} L\{\sin(t+\pi)\} = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1} \quad (E)$$

T= عمران ۹۳= تبدیل لاپلاس = ?

$$e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{t} \sin t \, dt =$$

$$\sin t \xrightarrow{L} \frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[7]{L} \int_s^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \tan^{-1} s \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

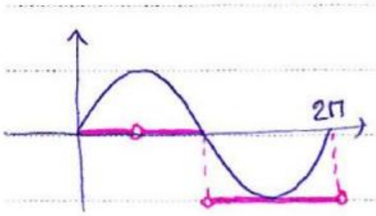
$$e^{-t}(\dots) \xrightarrow[2]{L} \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(s+1)$$

$$\int_0^x (\dots) dt \xrightarrow[6]{} \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(s+1)\right)$$

$$e^x(\dots) \xrightarrow{2} \frac{1}{s-1}\left(\frac{\pi}{2} - \tan(s)\right) = \frac{1}{s-1}\cot^{-1} s = \frac{1}{s-1}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \; ; (i)$$

مثال= لاپلاس تابع متناوب= تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \begin{cases} [\sin x] & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ را بدست آورید؟

$$\xrightarrow{8} F(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} L\{f_T\} \; *$$



$$\rightarrow f_T = \begin{cases} 0 & 0 < x < \pi \\ 1 & x = \frac{\pi}{2} \\ -1 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$\parallel$$

$$-1(u_\pi - u_{2\pi})$$

یه نقطه در تبدیل لاپلاس تأثیری ندارد.

$$L\{f_T\} = e^{-\pi s} L\{-1\} - e^{-2\pi s} L\{-1\} = -\frac{1}{s}\left(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}\right)$$

PAPCO

$$* \; \frac{1}{(1-e^{-\pi s})(1+e^{-\pi s})}\left(\frac{-1}{s}\right) e^{-\pi s}(1-e^{-\pi s}) \Rightarrow F(s) = -\frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-\pi s}}{1+e^{-\pi s}}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0, 1, 2 \\ 2 & x = 0 \\ 3 & x = 1 \\ 5 & x = 2 \end{cases} \longrightarrow F(S) = \frac{1}{S^2}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

T= ص 569 = س 2

$$① \Rightarrow F(S) = \frac{1}{1-e^{-2S}} L\{f_T\} = *$$

$$f_T = a(1-u_1) = \frac{a}{S} - \frac{a}{S} e^{-S}$$

$$* \frac{1}{(1-e^{-S})(1+e^{-S})} \cdot \frac{a}{S}\cancel{(1-e^{-S})} = \frac{a}{S} \frac{1}{1+e^{-S}}$$

T= ص 576 = س 45 = متناوب با دوره‌ی تناوب L =

$$T=1 \quad \xrightarrow{①} F(S) = \frac{1}{1-e^{-S}} L\{f_T\} \quad *$$

$$f_T(x) = x \quad 0<x<1 \quad = x(1-u_1) \longrightarrow L\{f_T(x)\} = \frac{1}{S^2} - e^{-S} L\{\underbrace{x}_{\frac{1}{S^2}} + \underbrace{1}_{\frac{1}{S}}\}$$

$$* : \frac{1}{1-e^{-S}} \frac{1-e^{-S}(S+1)}{S^2} \overset{\times e^{S}}{=} \frac{e^{S} - (S+1)}{S^2(e^{+S}-1)}$$

محاسبه‌ی انتگرالهای معین با استفاده از تبدیل لاپلاس =

$$\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\infty}} f(x) \cdot e^{-ax} dx = F(S) \Big|_{S=a}$$

مثال = حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید؟

$$1) \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx = L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}\Big|_{S=1} \overset{*}{=} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} S\right)\Big|_{S=1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin x \longrightarrow \frac{1}{S^2+1}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \int_S^\infty \frac{dS}{S^2+1} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} S \quad *$$

۲) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = L\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}\Big|_{S=0} = \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} S\right)\Big|_{S=0} = \frac{\pi}{2}$

۳) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = L\left\{\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right\}\Big|_{S=0} \overset{*}{=} -\ln\left(\frac{S+a}{S+b}\right)\Big|_{S=0} = -\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$\displaystyle e^{-ax} - e^{-bx} \xrightarrow{L} \frac{1}{S+a} - \frac{1}{S+b}$

$\displaystyle \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \xrightarrow{L} \int_S^\infty \left(\frac{1}{S+a} - \frac{1}{S+b}\right) dx = \ln\left(\frac{S+a}{S+b}\right)\Big|_S^\infty = -\ln\left(\frac{S+a}{S+b}\right) *$

روش دیگه $\displaystyle = \int_0^\infty \int_a^b e^{-xy}\,dy\,dx = \int_a^b \int_0^\infty e^{-xy}\,dx\,dy = \int_a^b -\frac{1}{y} e^{-xy}\Big|_0^\infty dy = \int_a^b \frac{1}{y}\,dy = \ln y\Big|_a^b = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

۴) $\displaystyle\int_0^\infty x^{\frac{2}{3}} e^{-x^2}\,dx =$ تعجبی اوقات میتونیم با یه تغییر متغیر مناسب به اون فرم درش بیاریم

$\displaystyle x^2 = t \rightarrow 2x\,dx = dt \rightarrow I = \int_0^\infty t^{\frac{1}{3}} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{6}} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2} L\left\{t^{-\frac{1}{6}}\right\}\Big|_{S=1}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{S^{\frac{5}{6}}}\Big|_{S=1} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$

2

۵) $\displaystyle\int_0^\infty x^{\frac{5}{2}} e^{-3x}\,dx = L\left\{x^{\frac{5}{2}}\right\}\Big|_{S=3} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}{S^{\frac{5}{2}+1}}\Big|_{S=3} = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{3^{\frac{7}{2}}} \overset{*}{=}$

نکته = بدرش جابش ۵)

$\displaystyle \boxed{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \left(\frac{k}{2}-1\right)\left(\frac{k}{2}-2\right)\cdots + \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\displaystyle \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi} \overset{*}{=} \frac{15}{8}\frac{\sqrt{\pi}}{3^{\frac{7}{2}}}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

حتی اگه حدود از ۰ تا ∞ نبود؛ ولی اگه تونستیم با یه تغییر متغیر به ۰ تا ∞ تبدیلش کنیم؛ میتونیم از اون راه بریم.

$t = -\ln x \rightarrow dt = -\frac{dx}{x}$

$\hookrightarrow x = e^{-t}$

$$= \int_0^\infty \frac{-x\,dt}{\sqrt{t}} = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt = \mathcal{L}\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\}\Big|_{s=1} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}\Big|_{s=1} = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

V) $\int_0^\infty \int_0^x e^{-2x-2t} \, \frac{\sin 2t}{\cancel{t}} \, dt\, dx = \int_0^\infty e^{-2x} \int_0^x e^{-2t} \cdot \sin 2t \, dt \, dx =$

$$= \mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{-2t} \cdot \sin 2t \, dt\right\}\Big|_{s=2} = *$$

$\sin 2t \rightarrow \frac{2}{s^2+4}$

$e^{-2t} \cdot \sin 2t \rightarrow \frac{2}{(s+2)^2+4} \rightarrow \int_0^x e^{-2t} \cdot \sin 2t \, dt \xrightarrow[\mathcal{L}]{⑥} \frac{1}{s} \times \frac{2}{(s+2)^2+4}$

$$* = \left(\frac{1}{s} \times \frac{2}{(s+2)^2+4}\right)\Big|_{s=2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{20} = \frac{1}{20}$$

ت = ص 702 = س 6

ت = ص 684 = س 3

$$I = \int_0^\infty x^c \cdot e^{-ax^n} dx$$

$x^n = t \rightarrow n x^{n-1} dx = dt \rightarrow I = \int_0^\infty t^{\frac{c}{n}} \cdot e^{-at} \frac{dt}{n t^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \int_0^\infty t^{\frac{c-n+1}{n}} \cdot e^{-at} dt$

$= \frac{1}{n} \mathcal{L}\left\{t^{\frac{c-n+1}{n}}\right\}\Big|_{s=a} =$

P4PCO

Subject: ۴۴
Year. Month. Date. ( )

$$= \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{c-n+1}{n}+1\right)}{s^{\frac{c-n+1}{n}+1}}\Bigg|_{s=a} = \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{c+1}{n}\right)}{a^{\frac{c+1}{n}}}$$

ت = ص 727 = س 69 =

$$\int_0^{\infty} e^{-3t}\underbrace{\int_0^{t} x^2 \sin(t-x)\,dx}_{t^2 * \sin t}\,dt = L\left\{t^2 * \sin t\right\}\Big|_{s=3}$$

$$= \frac{2}{s^3}\times\frac{1}{s^2+1}\Big|_{s=3} = \frac{2}{27}\times\frac{1}{10} = \frac{1}{135} \qquad : (1)$$

«مهم»

تبدیل لاپلاس جوابهای معادله دیفرانسیل =

$$x^k y^{(n)} \xrightarrow[(5)]{(4)} (-1)^k\left(s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n+1)}(0)\right)^{(k)}$$

«۹۰»

ت = ص 571 = س 15 =

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0$$

عبارت چندجمله‌ای در y ضرب شده بود ← همیشه جدا جدا حسابش کن

y'' = هسته

همیشه از هسته شروع کن

$$-\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right)' + sY(s) - y(0) + \left(sY(s) - y(0)\right)' + Y(s) = 0$$

$$-2sY(s) - s^2Y'(s) + y(0) + sY(s) - y(0) + Y(s) + sY'(s) + Y(s) = 0$$

$$\to (-s^2+s)Y'(s) + (2-s)Y(s) = 0 \to \frac{dY(s)}{Y(s)} = \frac{2-s}{s(s-1)}\,ds \Rightarrow \ln Y(s) = \int\left(\frac{-2}{s} + \frac{1}{s-1}\right)ds$$

$$\to \ln Y(s) = -2\ln s + \ln(s-1) + \ln C \to Y(s) = C\,\frac{s-1}{s^2}$$

$y(0) = 1 \to$ مقدار اولیه $\to \lim_{s\to\infty} sY(s) = 1 \to C = 1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش دوم = تو قضیه نهایی = گزینه ۱ و ۳ غلط $y(0)=1 \rightarrow \lim_{S\to\infty} SY(S)=1 \longrightarrow$

$$y'(0)=1 \rightarrow \lim_{S\to\infty} S(SY(S)-y(0))=1$$

$$④: \lim_{S\to\infty} S\left(\frac{S^2}{S^2-1}-1\right)=0\neq 1 \rightarrow \text{گزینه ۴ غلط}$$

T = ص 580 = س 63

(11) دریه t^2 ضرب شده پس دوبار مشتق بگیر

$$S^2Y(S)-SY(0)-y'(0)-\left(S^2Y(S)-SY(0)-y'(0)\right)''+2\left(SY(S)-y(0)\right)'+2Y(S)=0\rightarrow\dots$$

T = ص 681 = س 5

مثال = تبدیل لاپلاس $J_0(x)$ را بدست آورید؟
میایم یه معادله دیفرانسیل تشکیل میدیم که جوابش J_0 باشه ←

$$x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0\rightarrow J_\nu(\lambda x)\longrightarrow\begin{cases}\nu=0\\ \lambda=1\end{cases}$$

$$x^2y''+xy'+x^2y=0\longrightarrow xy''+y'+xy=0$$

$$-\left(S^2Y(S)-Sy(0)-y'(0)\right)'+SY(S)-y(0)-Y'(S)=0\rightarrow$$

$$-2SY(S)-S^2Y'(S)+y(0)+SY(S)-y(0)-y'(S)=0$$

$$\rightarrow-(S^2+1)Y'(S)-SY(S)=0\rightarrow\frac{dY(S)}{Y(S)}=\frac{-S}{S^2+1}dS \Rightarrow$$

$$\ln Y(S)=-\frac{1}{2}\ln(S^2+1)+\ln C$$

$$Y(S)=\frac{C}{\sqrt{S^2+1}}$$

Subject: ۹۷
Year. Month. Date. ( )

$y(0)=1 \xrightarrow{\text{مقدار اولیه}} \lim_{s\to\infty} sY(s)=1 \rightarrow C=1 \Longrightarrow$ $\boxed{L\{J_0(x)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}}$

حفظشم کن خوبه... 8)

تی ۹۰
T = ۶۷۵ = ۲ ۞: هر معادله دیفرانسیل خطی، حتماً 2 جواب مستقل دارد ← ۞ غلط

هر موقع که از یه معادله تبدیل لاپلاس میگیریم ← فقط تبدیل لاپلاس جوابهایی که تبدیل لاپلاس دارند بدست میاد

T = ۵۷۳ = ۲۷

$-(sY(s)-y(0))'-Y'(s)+Y(s)=0$

$-Y(s)-sY'(s)-Y'(s)+Y(s)=0 \rightarrow (-s-1)Y'(s)=0$

$Y'(s)=0 \rightarrow Y(s)=C$

$\lim_{s\to\infty} Y(s)=0 \rightarrow C=0 \rightarrow Y(s)=0$

فقط تبدیل لاپلاس صفر بدست اومده ← جوابهای غیر صفر، تبدیل لاپلاس ندارند.

مثال: جواب عمومی معادله زیر: $xy''-y'=1$

~~کوشی اویلر~~ $\cancel{\rightarrow A+Bx^2-x}$

تبدیل لاپلاس $\rightarrow -x+Bx^2+A$

در هر مرحله کم میشه

از روی اینکه مرتبه معادله بدست میاد نمیتونیم نتیجه بگیریم که تبدیل لاپلاس جوابها وجود دارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(برق ۹۰) ص 675 ← 2

(برق ۸۹) ص 573 ← 27

$$-\left(sY(s)-y(0)\right)' - Y'(s) + Y(s) = 0$$

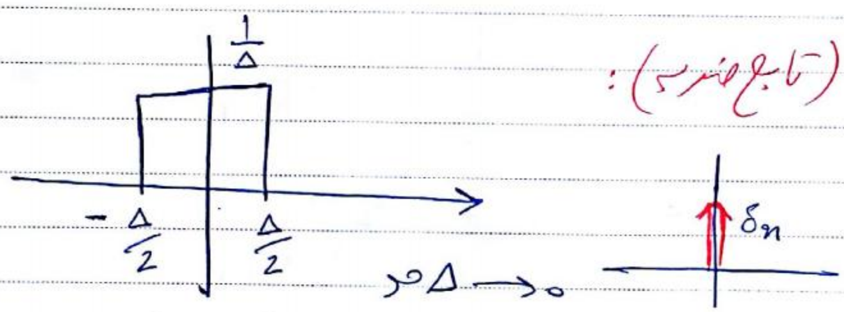
$$-Y(s) - sY'(s) - Y'(s) + Y(s) = 0 \rightarrow (-s-1)\,Y'(s) = 0$$

$$Y'(s) = 0 \rightarrow Y(s) = C$$

در $\underset{s\to\infty}{} \; Y(s) = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow Y(s) = 0$

جلسهٔ دهم 93/6/20

معرفی δ دیراک (تابع ضربه):



① $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \delta(x)\,dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\,dx = 1$

② $f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a)$

③ $f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)$

④ $\frac{d\,u_a(x)}{dx} = \delta(x-a)$

⑤ $\delta(x-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as}$

⑥ $\delta(-x) = \delta(x)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(مکانیک 75) ص 574 ← 34

$$\delta(t-1)\cos t = \delta(t-1)\cos 1$$

(عمران 80) ص 577 ← 50

$$s^2 Y(s) - s\,\cancel{y(0)}^{\,0} - y'(0) + Y(s) = e^{-2\pi s}$$

$$(s^2+1)Y(s) = 1 + e^{-2\pi s}$$

لاپلاس وارون:

لاپلاس وارون تابع $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s\sqrt{s+2}}$ را بدست آورید.

$$t^p \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$$

$$\frac{1}{s^{p+1}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t^p}{\Gamma(p+1)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \xrightarrow[\text{(جدول)}]{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s+2}} \xrightarrow[2]{\mathcal{L}^{-1}} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\frac{1}{s\sqrt{s+2}} \xrightarrow[6]{\mathcal{L}^{-1}} \int_0^t \frac{e^{-2\lambda}}{\sqrt{\pi\lambda}}\,d\lambda$$

$$\frac{e^{-\pi s}}{s\sqrt{s+2}} \xrightarrow[3]{\mathcal{L}^{-1}} \left(\int_0^{t-\pi} \frac{e^{-2\lambda}}{\sqrt{\pi\lambda}}\,d\lambda\right) u_\pi(t)$$

★ اگر لاپلاس وارون همه در جدول نباشد سعی می‌کنیم با مشتق گیری

یا ساده کردن آن را ایجاد کنیم.

مثال: لاپلاس وارون تابع $F(s) = e^{-2s}\,\dfrac{\cot^{-1} s}{s+2}$ را بدست آورید.

★ اگر همه توابع، معکوس مثلثاتی و لگاریتمی باشند آنها را با مشتق گیری

از آنها لاپلاس وارون آنها قابل محاسبه است.

$$G(s) = \cot^{-1} s \Longrightarrow G'(s) = \frac{-1}{s^2+1} \Longrightarrow -t\,g(t) = -\sin t \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow g(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$\cot^{-1} s \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{\sin t}{t}$$

$$\cot^{-1}(s-2) \xrightarrow[2]{\mathcal{L}^{-1}} e^{2t}\,\frac{\sin t}{t}$$

$$\frac{\cot^{-1}(s-2)}{s} \xrightarrow[6]{\mathcal{L}^{-1}} \int_0^t e^{2\lambda}\,\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda$$

$$\frac{\cot^{-1}(s)}{s+2} \longrightarrow e^{-2t}\int_0^t e^{2\lambda}\,\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda$$

$$e^{-2s}\,\frac{\cot^{-1} s}{s+2} \longrightarrow \left(e^{-2(t-2)}\int_0^{t-2} e^{2\lambda}\,\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda\right) u_2(t)$$

$7 \leftarrow$ ص 570 (برق 74)

$$F(s)=\frac{1}{4}\operatorname{Ln}(s^2+4\alpha^2)-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}s \Rightarrow F'(s)=\frac{1}{4}\,\frac{2s}{s^2+4\alpha^2}-\frac{1}{2s}$$

$$-t\,f(t)=\frac{1}{2}\cos(2\alpha t)-\frac{1}{2}\longrightarrow f(t)=\frac{1-\cos 2\alpha t}{2t}$$

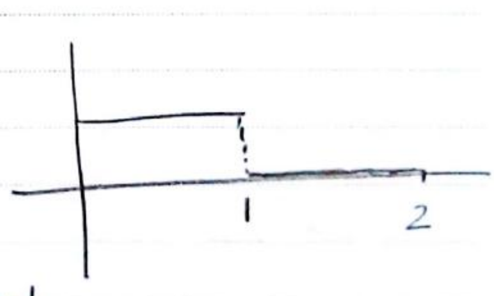
$31 \leftarrow$ ص 574 (79 مکانیک)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^{\frac{3}{2}}}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^{\frac{1}{2}}}\right\}=\frac{4t^{\frac{1}{2}}}{\underbrace{\Gamma(\frac{3}{2})}_{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}}-\frac{5\,t^{-\frac{1}{2}}}{\underbrace{\Gamma(\frac{1}{2})}_{\sqrt{\pi}}}=\frac{8t^{\frac{1}{2}}-5t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

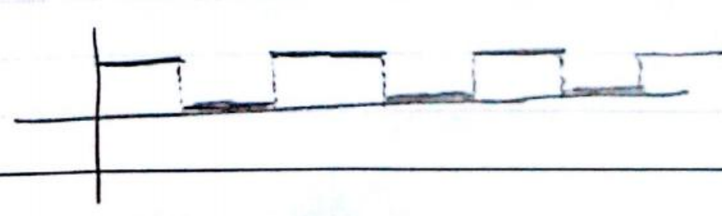
$20 \leftarrow$ ص 572 (برق 84)

روش اول: $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{1-e^{-2s}}}_{T=2}\times\underbrace{\frac{1-e^{-s}}{s}}_{\mathcal{L}\{f_T\}}\right\}$$

$$f_T=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-s}}{s}\right\}=1-u_1$$



روش دوم: $$\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+\ldots\right)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}1-u_1+u_2-u_3+u_4\ldots$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\boxed{a^{s} = e^{s\ln a}}$$

(ریاضی 88) ص 586 ← 105

$$\frac{1}{s-1} \xrightarrow{\text{جدول}} e^{x}$$

$$\frac{e^{-s\ln 2}}{s-1} \xrightarrow{③} \left(e^{x-\ln 2}\right) u_{\ln 2}(x)$$

برای محاسبه‌ی لاپلاس وارون توابع چند جمله‌ای کسری به منظور زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا کسر را به کسرهای جزئی تفکیک می‌کنیم و در حالت کلی به عبارت‌های زیر برخورد می‌کنیم،

الف) $\frac{1}{(s+a)^{k}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-at}$

ب) $\frac{1}{(s^2+as+b)^{k}} \Rightarrow$ ابتدا از اتحاد ناقص استفاده می‌کنیم و سپس با توجه به تبدیل لاپلاس توابع sin و cos تابع را بازسازی می‌کنیم

(ریاضی 88) ص 587 ← 107

$$\frac{6s-4}{(s-2)^2+16} \longrightarrow \frac{6(s-2)}{(s-2)^2+16} + \frac{8}{(s-2)^2+16} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 6e^{2t}\cos 4t + \frac{8}{4} e^{+2t}\sin 4t$$

(ریاضی مهندسی ۹۰) ص $\underline{685}$ ← $\underline{16}$

$$\sqrt{s} = \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}$$

$$\sqrt{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t}\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}$$

$$\Gamma(P+1) = P\Gamma(P) \longrightarrow \Gamma(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2}\Gamma(-\tfrac{1}{2}) \longrightarrow \Gamma(-\tfrac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

(برق ۹۰) ص $\underline{676}$ ← 3

☆ برای محاسبهٔ لاپلاس وارون تابع $F(s)$ اگر محاسبهٔ لاپلاس وارون $F(s+a)$ ساده‌تر باشد ابتدا لاپلاس وارون $F(s+a)$ بدست می‌آوریم وسپس با استفاده از آن لاپلاس وارون $F(s)$ را بدست می‌آوریم.

$$F(s) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \longrightarrow F(s+1) = \frac{s^n}{(s+1)^{n+1}} \Longrightarrow$$

$$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}\right\}$$

$$\frac{1}{s^{n+1}} \xrightarrow[\text{جدول}]{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t^n}{n!}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n(e^{-t}t^n)}{dt^n}}$$

$$\frac{1}{(s+1)^{n+1}} \xrightarrow[③]{} e^{-t}\frac{t^n}{n!}$$

$$\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}} \xrightarrow[④]{} \frac{1}{n!}\frac{d^n(e^{-t}t^n)}{dt^n}$$

(نقشه برداری 91) ص 721 ← 30

$$\frac{s}{s^2+4}\,\frac{s}{s^2+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \cos 2t * \cos 2t = \int_0^t \cos(2\lambda)\cos(2(t-\lambda))\,d\lambda$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \big(\cos(2t)+\cos(4\lambda-2t)\big)\,d\lambda = \frac{1}{2}\left(\lambda\cos(2t)+\frac{1}{4}\sin(4\lambda-2t)\right)\Big]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{8}\big(\sin(2t)+\sin(2t)\big)$$

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t}$$

(هوافضا 91) ص 721 ← 31

$$x^4 * x^3 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{4!}{s^5}\times\frac{3!}{s^4}=\frac{4!\,3!}{s^9} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{4!\,3!}{8!}x^8$$

$$=\frac{1}{280}x^8$$

(هوافضا 91) ص 721 ← 35

$$\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t-(t-2)u_2(t)=\begin{cases} t & 0\le t<2 \\ 2 & t\ge 2\end{cases}$$

★ اگر در معادلات دیفرانسیل عبارت سمت راست تساوی تابعی برحسب تابع
دلتای دیراک یا پله واحد باشد برای محاسبه جواب آن از تبدیل لاپلاس استفاده
می‌کنیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(نقشه برداری 92) ص 762 ← 37

$$\delta(t-2n\pi)\cos t = \delta(t-2n\pi)$$

$$s^2 Y(s) + 4Y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-2n\pi s} \Rightarrow Y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{-2n\pi s}}{s^2+4}$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{2}\sin(2t-4n\pi)\, u_{2n\pi}(t)$$

$$\frac{1}{s^2+4} \xrightarrow[\text{جدول}]{\mathcal{L}} \frac{1}{2}\sin 2t$$

$$\frac{e^{-2n\pi s}}{s^2+4} \xrightarrow{(3)} \left(\frac{1}{2}\sin\right.$$

(مکانیک 93) پاسخ مسئلهٔ مقدار اولیه $y(0)=6,\ y'(0)=0$

$$y''+y = 3\delta(t-\pi)$$

کدام است :

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + Y(s) = 3e^{-\pi s} \Rightarrow (s^2+1)Y(s) = 6s + 3e^{-\pi s}$$

$$Y(s) = \frac{6s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1}e^{-\pi s} \longrightarrow y(t) = 6\cos t + 3\sin(t-\pi)\,u_\pi(t)$$

حل معادلات انتگرالی :

معادلهٔ انتگرالی ← (پیچیده) → مجهول برحسب t بدست می‌آید

↓ تبدیل لاپلاس

↑ لاپلاس وارون

معادلهٔ جبری → مجهول را برحسب s بدست می‌آوریم.

Subject :
Year . Month . Date . ( )

5 ← 569 ص (برق 76)

$$f(t) = e^{-t} + t \star f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2} F(s)$$

$$F(s)\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s+1} \Longrightarrow F(s) = \frac{s^2}{(s-1)(s+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{(s+1)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{s+1}$$

$$f(t) = \frac{1}{4} e^{t} - \frac{1}{2} t e^{-t} + \frac{3}{4} e^{-t}$$

6 ← 570 ص (برق 75)

$$f(t) = t^2 + \sin t \star f(t) \longrightarrow F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2+1} F(s)$$

$$F(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2}{s^3} \longrightarrow F(s) = 2\,\frac{s^2+1}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

$$f(t) = 2 \times \frac{t^2}{2!} + 2 \times \frac{t^4}{4!}$$

18 ← 571 ص (برق 85)

$$s\,Y(s) - y(0) + 2Y(s) + \frac{Y(s)}{s} = 0$$

$$\left(s + 2 + \frac{1}{s}\right) Y(s) = 1 \Longrightarrow Y(s) = \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = e^{-t} - t e^{-t}$$

22 ← 572 ص (برق 86)

$$y(t) + y(t) \star t\cos t = \sin t \longrightarrow Y(s) + Y(s)\,\mathcal{L}\{t\cos t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)\left(1 + \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{1}{s^2+1} \longrightarrow Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{s^2} + \frac{\frac{2}{3}}{s^2+3}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y(t) = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\,t)$$

23 ← 719 ص (91 ریاضی محض)

$$J_0(x) * J_0(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \times \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin t$$

13 ← 759 ص (92 عمران)

$$f(t) = te^{-t} + te^{-t} * f(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}F(s)$$

$$F(s)\left(1 - \frac{1}{(s+1)^2}\right) = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

49 ← 577 ص (78 , 81 عمران)

$$s^2X(s) + X(s) = F(s) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s^2+1} \times F(s)$$

$$x(t) = \sin t * f(t)$$

62 ← 579 ص (78 عمران , 91 مکانیک)

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = G(s) \Rightarrow (s^2+4)Y(s) = 3s - 1 + G(s)$$

$$Y(s) = \frac{3s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4} \longrightarrow y(t) = 3\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$$

$$+ \frac{1}{2}\sin 2t * g(t)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل :

دستگاه معادله دیفرانسیل $\xrightarrow{\text{پیچیده}}$ مجهول برحسب t بدست می آید

تبدیل لاپلاس ↓ ↑ لاپلاس وارون

دستگاه معادلات جبری $\xrightarrow{\text{به روش کرامر}}$ مجهول برحسب s بدست می آید

(برق 86) ص 572 ← 23

$$\begin{cases} y'' + z + y = 0 \\ z' + y' = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} s^2 Y(s) + Z(s) + Y(s) = 0 \\ s Z(s) - 1 + s Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2+1) Y(s) + Z(s) = 0 \\ s Y(s) + s Z(s) = 1 \end{cases} \qquad Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+1 & 1 \\ s & s \end{vmatrix}} = \frac{-1}{s^3}$$

$$\longrightarrow y(x) = -\frac{1}{2} x^2$$

(برق 90) ص 676 ← 4

$y_1(t)$ مطلوبست f

$$u_1(t) e^t \longrightarrow e^{-s} \mathcal{L}(e^{t+1}) = e \frac{e^{-s}}{s-1}$$

$$\begin{cases} sY_1 = -3Y_1 + Y_2 + \dfrac{e^{1-s}}{s-1} \\ sY_2 - 3 = -4Y_1 + 2Y_2 + \dfrac{e^{1-s}}{s-1} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (s+3) Y_1 - Y_2 = f \\ 4Y_1 + (s-2) Y_2 = 3 + f \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} f & -1 \\ 3+f & s-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+3 & -1 \\ 4 & s-2 \end{vmatrix}} = \frac{sf-2f+3+f}{s^2+s-2} = \frac{(s-1)f+3}{(s-1)(s+2)}$$

$$= \frac{e^{1-s}+3}{(s-1)(s+2)}$$

(برق 91) ص 716 ← 3

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{s-2} + \frac{Y_2}{s} \\ Y_2 = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-2} Y_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Y_1 - \frac{Y_2}{s} = \frac{1}{s-2} \\ \frac{1}{s-2} Y_1 + Y_2 = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s-2} & -\frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{s} \\ \frac{1}{s-2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2}}{1 + \frac{1}{s(s-2)}} = \frac{s^2+s-2}{s(s^2-2s+1)} = \frac{(s-1)(s+2)}{s(s-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{s} + \frac{3}{s-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -2+3e^t$$

(مکانیک 92) ص 758 ← 9

$x_1'(0) = -1-2\times 2 = -5$

$x_2'(0) = -3-8 = -11$ ⇐ روش اول

$x_1'' = x_1' - 2x_2' \longrightarrow x_1'' = x_1' - 2(3x_1 - 4x_2)$ ⇐ روش دوم

$x_1'' = x_1' - 6x_1 + 8\left(\frac{x_1' - x_1}{-2}\right) \longrightarrow \dots$

$$\begin{cases} sX_1 = X_1 - 2X_2 - 1 \\ sX_2 = 3X_1 - 4X_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-1)X_1 + 2X_2 = -1 \\ -3X_1 + (s+4)X_2 = 2 \end{cases}$$ ⇐ روش سوم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & s+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 2 \\ -3 & s+4 \end{vmatrix}} = \frac{-s-4-4}{s^2+3s+2} = \frac{-s-8}{(s+1)(s+2)} = \frac{-7}{s+1} + \frac{6}{s+2}$$

$$\longrightarrow x_1 = -7e^{-t} + 6e^{-2t}$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{2s-2-3}{(s+1)(s+2)} = \frac{-7}{s+1} + \frac{9}{s+2}$$

$$x_2(t) = -7e^{-t} + 9e^{-2t}$$