کنترل اتوماتیک و
مرفصل ها

۱- تشابه سیستم های دینامیکی
الکتریکی
مکانیکی
سیالاتی
حرارتی

۲- مدلسازی ریاضی و ترسیمی
دیاگرام جعبه ای
دیاگرام جریانی
تابع تبدیل *
معادلات برداری وضعیت *
معادلات دیفرانسیل حرکت (خلاصه)

۳- پاسخ زمانی سیستم های خطی ← عکس العمل سیستم یا رفتار یا پاسخ $y(t) = ?$

* $y_{ss} = ?$ ماندگار *

۴- پایداری *
مطلق ۹۰٪
نسبی ۱۰٪
روت - هرویتز

۵- سیستم کنترل مدار بسته

* Error خطا

* $e(t)$ و e_{ss} خطای ماندگار

*۶ مکان هندسی ریشه ها (روت لوکاس)
معادله مشخصه ← مکان هندسی
محاسبه بهره ثابت K — معیار پایداری روت لوکاس
طراحی کنترلرها

ورودی ایده‌آل ، ورودی ناخواسته (نویز)
سیستم مرتبه ۱ - سیستم مرتبه ۲
ثابت زمانی - قطب
اورشوت - زمان نشست

۷- پاسخ فرکانسی سیستم
نایکوئیست ← معیار پایداری نایکوئیست
بود ← معیار پایداری بود (حاشیه فاز - حاشیه بهره)

فصل ۶ و ۷ * توابع مینیمم فازها

* توابع نامینیمم فازها

فصل	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳
۱	—	۱	—	—	—	—	—	—	—
۲	۲	۱	۱	۱	۱	—	—	۲	—
۳	۲	—	—	۱	۲	—	۱	—	۱
۴	۲	۲	—	—	—	—	۲	۲	۱
۵	—	۱	—	—	—	—	۲	۲	۱
۶	—	۱	۲	۲	۱	۲	۲	—	۱
۷	۱	۱	۲	۱	۱	۲	۱	۱	—

Subject
Date

فصل ۱) تشابه سیستم‌های دینامیکی:

۱) سیستم‌های الکتریکی

$p(t) \equiv$ پتانسیل الکتریکی / $v(t)$

$f(t) \equiv$ جریان الکتریکی $i(t)$

اجزای انرژی در سیستم‌های الکتریکی:

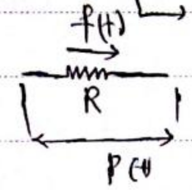
مقاومت - خازن - سلف (سلونوئید)

الف) مقاومت الکتریکی R (اُهم) (a) مدل‌های ریاضی منطقی

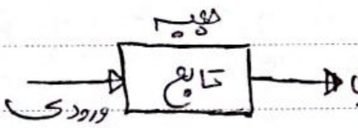
قانون اُهم: $\underset{\text{معلول}}{p(t)} = R \underset{\text{علت}}{f(t)}$ یا $\underset{\text{معلول}}{f(t)} = \frac{1}{R} \underset{\text{علت}}{p(t)}$ (b)

جریان $f(t)$ از مقاومت عبور کند اختلاف پتانسیل $P(t)$ به وجود می‌آید.

اختلاف پتانسیل $P(t)$ دو سر مقاومت سبب به وجود آمده $f(t)$ می‌باشد.



مدل ترسیمی بلوکی (جعبه‌ای) است



خروجی = تابع × ورودی

نمایش‌های ترسیمی (گرافیکی) منطقی مقاومت

تابع $\frac{1}{R}$ ثابت است.

خازن: خازن الکتریکی C (فاراد)

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$$f(t) = C\frac{dP(t)}{dt}$$

$\frac{d}{dt} \equiv D$ اپراتور ، $\frac{d^2}{dt^2} = D^2$

$$\int dt = \frac{1}{D} \qquad \iint dt = \frac{1}{D^2}$$

(a) $\cancel{\underset{\text{معلول}}{f(t)} = CD\underset{\text{علت}}{P(t)}}$ نمایش ریاضی خازن

(b) $\boxed{\underset{\text{معلول}}{p(t)} = \frac{1}{CD} \underset{\text{علت}}{f(t)}}$ = ورودی

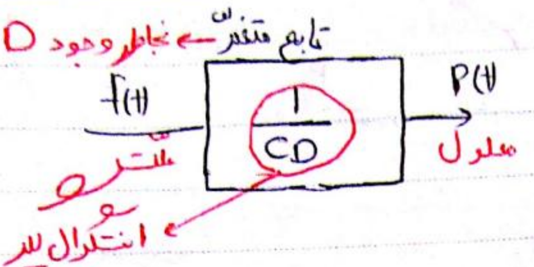
معلول ورودی

نمایش منطقی خازن

[illegible]

Subject
Date

نمایش منطقی ترسیمی خازن:



سلف: (L) مانند

$$v = L\frac{di}{dt} \rightarrow P(t) = L\frac{df(t)}{dt} \rightarrow P(t) = LDf(t) \quad (a)$$

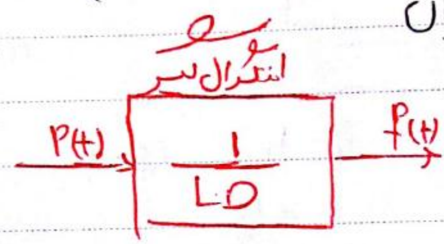
~~غیرمنطقی~~

نمایش های ریاضی سلف

✓ $f(t) = \frac{1}{LD}P(t) \quad (b)$ نمایش ترسیمی منطقی سلف

خروجی جریان (معلول) — علت (ورودی)

ورودی پتانسیل خروجی جریان



برای تابع ثابت ← مقاومت

انتگرال گیر: خازن: ورودی جریان

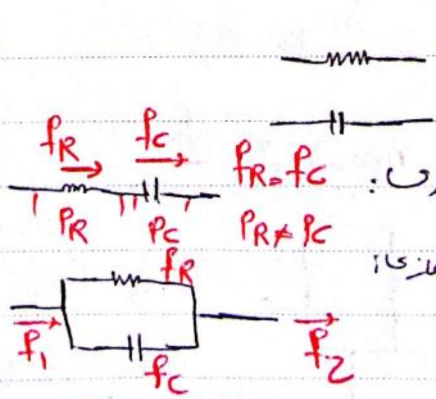
سلف: خروجی: ورودی پتانسیل

ترکیب: اتصال اعضا بدون قرار دادن

در مدار عامل جریان

ترکیب مدار:

انواع ترکیب



سری: $f_R = f_C$ ، $P_R \neq P_C$

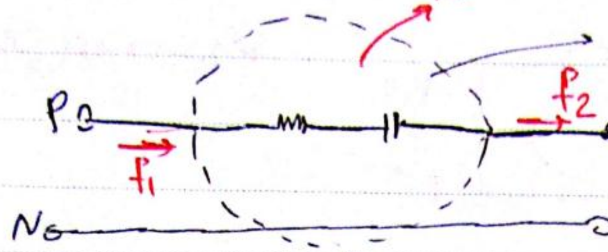
موازی:

$$f_1 = f_R + f_C$$

$$P_R = P_C$$

Date

ترکیب سری در مدار سری

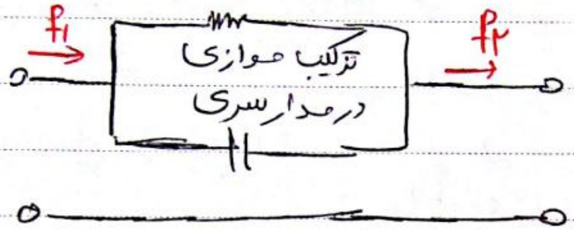


مدار: $Z(D) = R + \frac{1}{CD}$

مدار سری

$f_1 = f_2$

$P_1 \neq P_2$



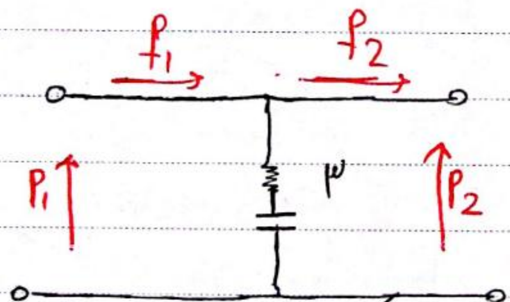
$$Z(D) = \frac{R \times \frac{1}{CD}}{R + \frac{1}{CD}}$$

$$Y(D) = \frac{1}{R} + CD$$

$$Z(D) = \frac{1}{Y(D)} = \frac{1}{\frac{1}{R} + CD}$$

۲ $f_1 = f_2$ مدار سری

$P_1 \neq P_2$



$f_1 \neq f_2$

$P_1 = P_2$

$$Y(D) = \frac{\frac{1}{R} \times CD}{\frac{1}{R} + CD}$$

$$Z(D) = R + \frac{1}{CD}$$

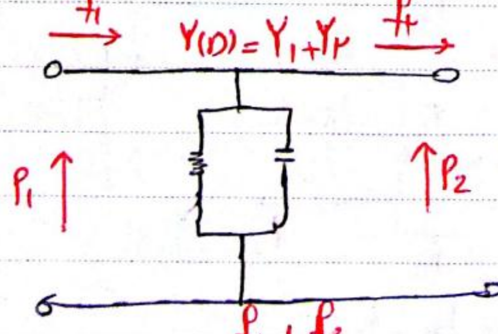
$$Y(D) = \frac{1}{Z(D)} = \frac{1}{R + \frac{1}{CD}}$$

ترکیب سری در مدار موازی

مدار موازی

$f_1 \neq f_2$

$P_1 = P_2$



ترکیب موازی
در مدار موازی

مدار موازی

$f_1 \neq f_2$

$P_1 = P_2$

$f_1 \neq f_2$

$P_1 = P_2$

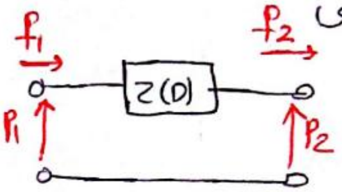
امپدانس - ادمیتانس :

$$\text{امپدانس}\quad Z(D) = \begin{cases} R & \text{مقاومت} \\ \frac{1}{CD} & \text{خازن} \\ LD & \text{سلف} \end{cases}$$

$$\text{ادمیتانس}\quad Y(D) = \frac{1}{Z(D)}$$

$$\text{ادمیتانس}\quad \begin{cases} \frac{1}{R} & \text{مقاومت} \\ CD & \text{خازن} \\ \frac{1}{LD} & \text{سلف} \end{cases}$$

مدار سری



① ترکیب سری در مدار سری

$$\underset{\text{امپدانس کل}}{Z(D)} = Z_1 + Z_2 + \dots$$

مجموع امپدانس ها

② ترکیب موازی در مدار سری

$$\frac{1}{Z(D)} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots$$

$$f_1 = f_2$$

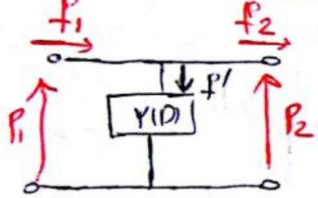
$$(P_1 - P_2) = Z(D) f_2$$

$$\begin{cases} P_1 = P_2 + Z(D) f_2 \\ f_1 = f_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z(D) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال مدار سری

مدار موازی



ترکیب سری در مدار موازی

$$\frac{1}{Y(D)} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \dots$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots \Rightarrow Y = \frac{1}{Z}$$

ترکیب موازی در مدار موازی

$$Y(D) = Y_1 + Y_2 + \dots$$

$$\begin{cases} P_1 = P_2 \\ f_1 = f' + f_2 \end{cases}$$

$$f' \rightarrow Y(D) \times P_2$$

$$P = R \times f$$

$$f = \underset{\text{ادمیتانس}}{\frac{1}{R}} \times P$$

$$\begin{cases} P_1 = P_2 \\ f_1 = f_2 + Y(D) P_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y(D) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال مدار موازی

۲- سیستم‌های مکانیکی:

پتانسیل $P(t) \equiv$ نیرو

سرعت

جریان $f(t) \equiv$ نیرو

سرعت

انواع تشابه:

۱) نیرو معادل پتانسیل - سرعت معادل جریان: تشابه مستقیم

۲) نیرو معادل جریان - سرعت معادل پتانسیل: تشابه معکوس

تشابه مستقیم: نیرو معادل پتانسیل - سرعت معادل جریان:

نیرو $F(t) \equiv P(t)$

سرعت $\dot{x}(t) = f(t)$

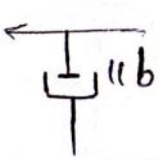
اجزای سیستم‌های مکانیکی عبارتند از:

دمپر - فنر - جرم

↓

وسکوز

الف - دمپر وسکوز



ضریب استهلاک ← «b»

$$F(t) = b\dot{x}(t)$$

$$P(t) = b\,f(t)$$

تابع ثابت

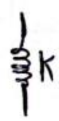
$$f(t) \longrightarrow \boxed{b} \longrightarrow P(t)$$

$$f(t) \longrightarrow \boxed{R} \longrightarrow P(t)$$

دمپر وسکوز در سیستم مکانیکی معادل مقاومت الکتریکی با رابطه

$$b \equiv R$$

ب - فنر



$$F = Kx$$

$$F(t) = K \times \frac{1}{D}\,\dot{x}(t)$$

$$P(t) = \frac{K}{D}\,f(t)$$

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{D}} \longrightarrow P(t)$$

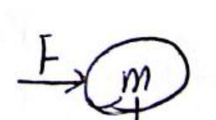
$$f(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{CD}} \longrightarrow P(t)$$

خازن

فنر در سیستم مکانیکی معادل است با خازن الکتریکی

با رابطه $K \equiv \frac{1}{C}$

ج) جرم



$$F = m\ddot{x} = mD\dot{x}$$

$$P(t) = mD\,f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{mD}\,P(t)$$

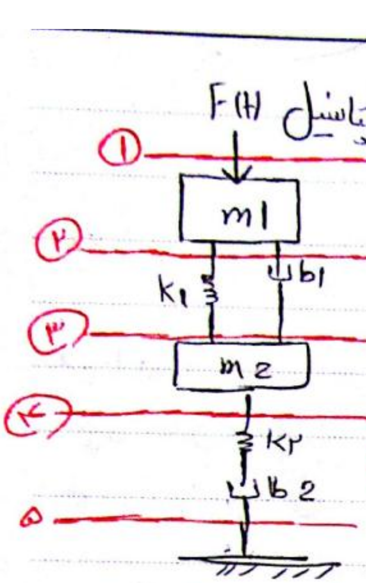
جرم m در سیستم مکانیکی معادل است

با سلف الکتریکی با رابطه

$$m = L$$

$$P(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{mL}} \longrightarrow f(t) \qquad P(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{mD}} \longrightarrow f(t)$$

مثال| مطلوب است رسم دیاگرام الکتریکی مشابه براساس تشابه نیرو-معادل پتانسیل



P_1, f_1

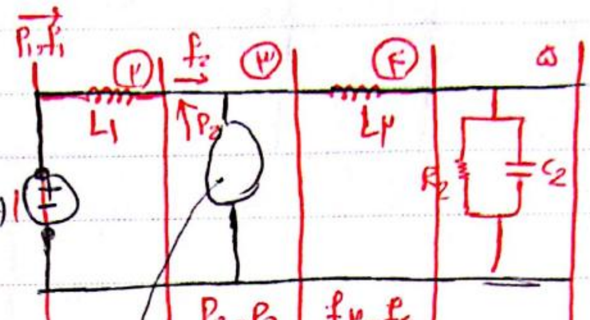
P_2, f_2

P_3, f_3

$f_1=f_2$

$P_2=P_3$

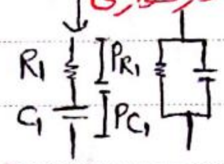
$P_4=P_5 \quad f_2\neq f_3$



$P_2=P_3 \quad f_3=f_4$

$P_4=P_5$ مدار موازی

مدار موازی



f_5 و P_5

f_5: سرعت تکیه گاه

P_5: نیرو انتقال یافته به تکیه گاه

$\Sigma F=ma \rightarrow$ نیروها در دو طرف مساوی نیست

$f_1=f_2$

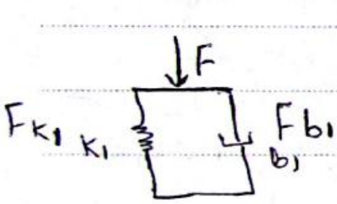
$P_1\neq P_2$

فنر و دمپر دو طرفی هستند $\xrightarrow{F}$ $F\leftarrow$

و جرم ندارد

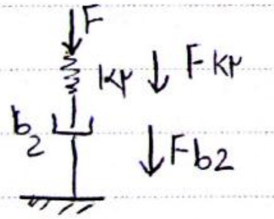
در دو طرف جرم سرعت ها مساوی و نیرو متفاوتند

در دو طرف فنر و دمپر نیروها مساوی و سرعت متفاوت اند.



$F=F_{k_1}+F_{b_1}$

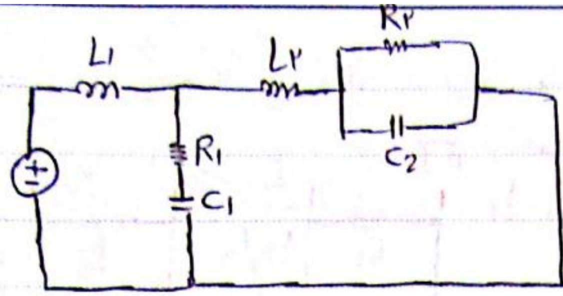
$P=P_{b_1}+P_{R_1}$



$\rightarrow P_{R_2}=P_{b_2} \longleftrightarrow F=F_{k_2}=F_{b_2}$

اول نوع مدار را مشخص می کنیم بعد نوع ترکیب

$f_5=0 \longrightarrow$ چون تکیه گاه صلب است $\longrightarrow$ جریان نباید عبور کند پس سیستم مربوط به آن را حذف می کنیم



ب) تشابه معکوس

نیرو معادل جریان $F(t) = f(t)$

سرعت معادل پتانسیل $\dot{x}(t) = P(t)$

۱- دمپر وسکیوز

$$F = b\dot{x}$$

$$f(t) = bP(t)$$

تابع ثابت

$$P(t) \longrightarrow \boxed{b} \longrightarrow f(t)$$

$$P(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{R}} \longrightarrow f(t)$$

مقاومت

دمپر در سیستم مکانیکی معادل است با مقاومت الکتریکی با رابطه

$$b = \frac{1}{R}$$

۲- فنر K

$$F = Kx$$

$$F = \frac{K}{D}\dot{x}$$

$$f(t) = \frac{K}{D}P(t)$$

فنر

$$P(t) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{D}} \longrightarrow f(t)$$

سلف

$$P(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{LD}} \longrightarrow f(t)$$

فنر در سیستم مکانیکی معادل است با سلف الکتریکی با رابطه

$$K = \frac{1}{L}$$

۳) جرم m

$$F = m\ddot{x}$$

$$F = mD\dot{x}$$

$$f(t) = mDP(t)$$

$$P(t) = \frac{1}{mD}f(t)$$

جرم

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{mD}} \longrightarrow P(t)$$

خازن

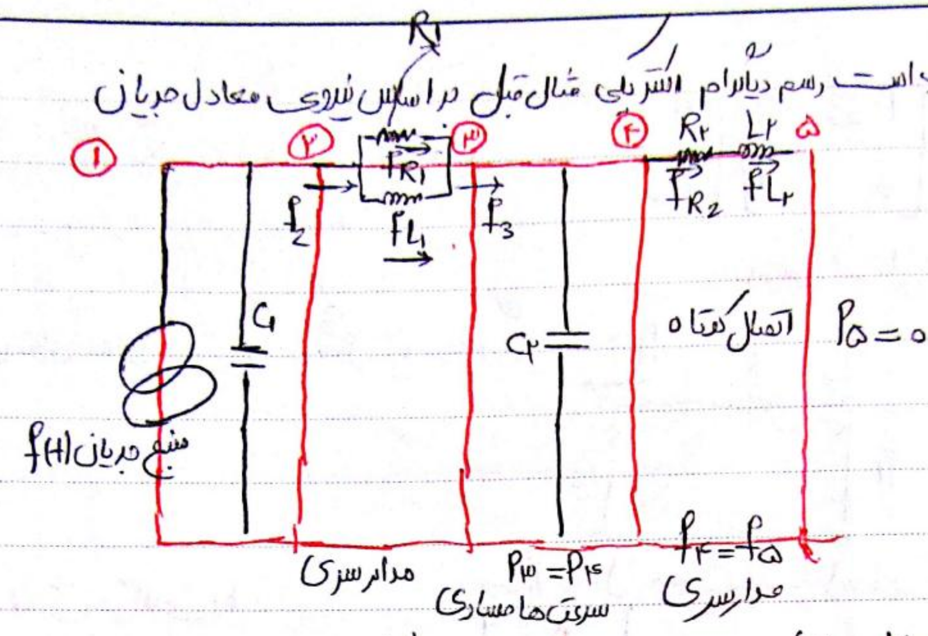
$$f(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{CD}} \longrightarrow P(t)$$

جرم در سیستم مکانیکی معادل است با خازن الکتریکی با رابطه

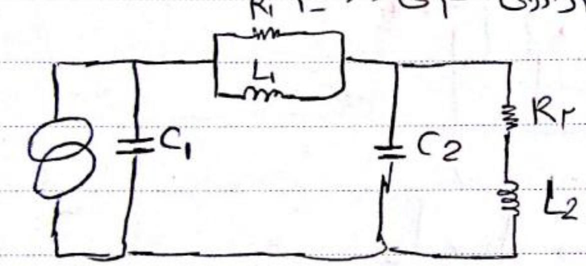
$$m \equiv C$$

Subject
Date

مثال) مطلوب است رسم دیاگرام الکتریکی مثال قبل بر اساس نیروی معادل جریان



وقتی پتانسیل صفر شود دو سر سیم را روی هم می‌گذاریم:



سیستم‌های سیالاتی:

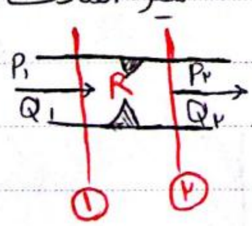
$P=\gamma h$

پتانسیل: فشار یا ارتفاع $\quad P(t) \equiv P(t) \pm h(t)$ (فشار، ارتفاع)

جریان: دبی حجمی $\frac{m^3}{s}$ $\quad f(t) = Q(t)$

شیر، اتصالات، زانویی، حداره لوله

الف) موانع سیالاتی (مقاومت سیالاتی) R



هر مانع یک R داره

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 \\ P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

$$\text{مقاومت سیالاتی } R = \frac{\text{اختلاف فشار یا ارتفاع}}{\text{دبی حجمی}} = \frac{P_1 - P_2}{Q_2 = Q_1}$$

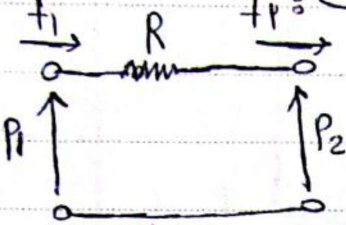
$$\begin{cases} f_1 = f_2 \\ R = \dfrac{P_1 - P_2}{f_2} \end{cases} \xrightarrow{\text{پتانسیل}} \begin{cases} P_1 = P_2 + R \times f_2 \\ f_1 = f_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_D = R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

موانع سیالاتی در مسیر گذر سیال معادل با مقاومت الکتریکی ← هستند که در مدار سری قرار می‌گیرند

ماتریس انتقال مدار سری

یعنی می‌توان معادل سیستم را به شکل زیر در نظر گرفت:

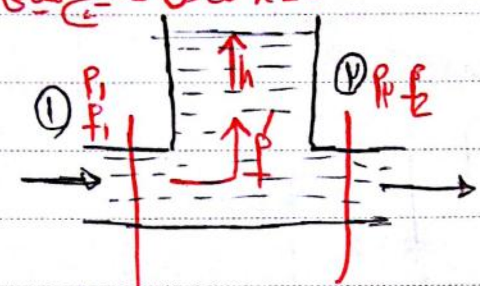


ب / مخازن سیالاتی:

$\dot{h} = 0$ تعادل = هیچ سیالی داخل مخازن تغییر ارتفاع نمی‌دهد

A سطح مقطع مخزن

h ارتفاع مخزن



$\dot{h} \neq 0 \rightarrow$ دینامیکی $\rightarrow f_1 \neq f_2$

$P_1 = P_2$

$$\left| \begin{array}{l} P_1 = P_2 \\ f_1 - f_2 = f' \end{array} \right. \longrightarrow \left| \begin{array}{l} P_1 = P_2 \\ f_1 = f_2 + AD\cancel{h}\ P_2 \end{array} \right.$$

$$f' = \frac{d}{dt}(\underset{\text{ثابت}}{A} \times h) = A\,Dh$$

جایگزین مخزن به سطح مقطع A

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ AD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

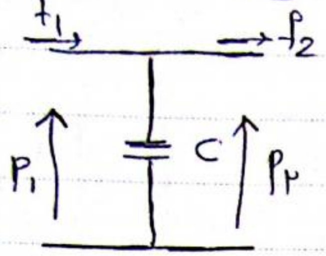
جزئی است از سیستم الکتریکی که

ماتریس انتقال مدار موازی

در مدار موازی قرار می‌گیرد (چون ماتریس مدار انتقال موازی بدست آمد)

$$Y(D) = \begin{cases} \frac{1}{R} \\ CD \\ \frac{1}{LD} \end{cases}$$

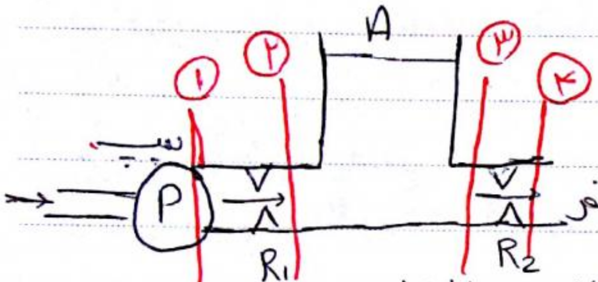
جایگزین مخزن A، خازن الکتریکی C قرار می‌گیرد با رابطه $A \equiv C$



در سیستم

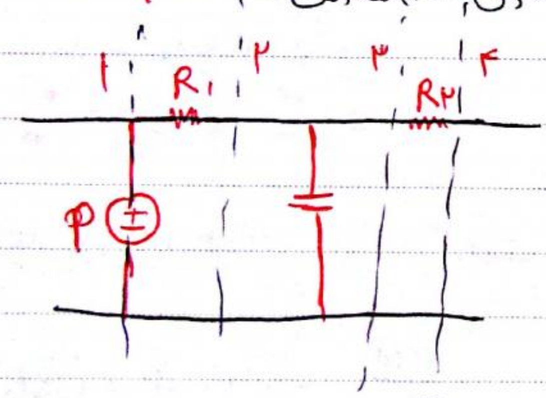
در سیستم سیالاتی جزئی به نام سلف شبیه سازی نمی شود ⇐ اگر در سیستمی سلف بود حذف می شود

مثال) مطلوب است رسم دیاگرام الکتریکی مشابه

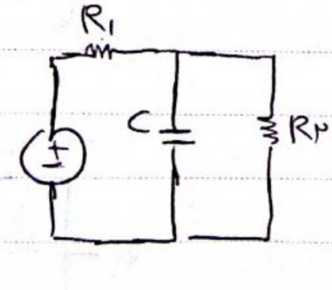


$\Rightarrow P_4 = 0$ (فشار استخر)

از ورودی شروع می کنیم ۱) مقاومت ۲) خازن ۳) مقاومت

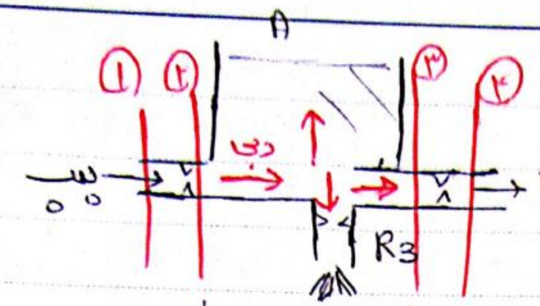


$P_4 = 0 \rightarrow$ یعنی پتانسیل دو سر سیستم صفر شود اتصال کوتاه

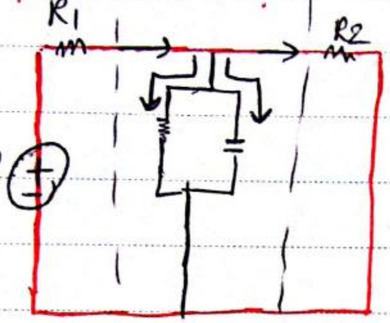


می توان R_2 را چرخاند.

مثال



جریان مساوی نیست <= دبی ها مساوی نیست ← اختلاف فشارها



دبی ورودی به طور مساوی تقسیم نمی شود

پس جریان ها برابر نیستند

یعنی دبی ورودی به R3 و مخزن A برابر نیستند یعنی جریان های آن ها برابر نیست پس

به طور موازی قرار می گیرند

سیستم های حرارتی :

پتانسیل = اختلاف دما یا درجه حرارت

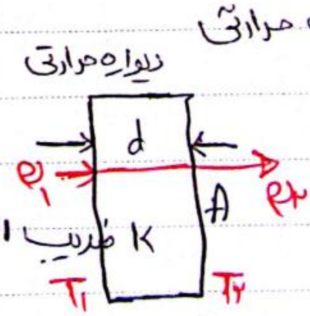
جریان = دبی حرارتی $\frac{Kcal}{h}$

الف) مقاومت حرارتی

دیواره حرارتی

* هدایت :

$$Q = \frac{KA}{d} \Delta T$$



$Q_2 = \frac{KA}{d}(T_1 - T_2)$ ضریب انتقال حرارت هدایت K

$T_1 \neq T_2$

$Q_1 = Q_2$

$$T_1 = T_2 + \frac{d}{KA} Q_2$$

$$\left| \begin{array}{l} T_1 = T_2 + \frac{d}{KA} Q_2 \\ Q_1 = Q_2 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} P_1 = P_2 + \frac{d}{KA} P \\ f_1 = f_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{KA} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس امپدانس ← ماتریس انتقال مدار سری

مقاومت زیر D ندارد

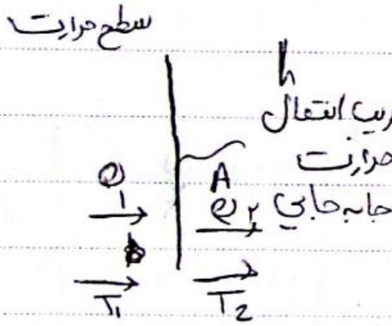
$\frac{d}{KA}$ را با ZD ها مقایسه می کنیم

$$ZD = \left| \begin{array}{l} R \\ \frac{1}{CD} \\ LD \end{array} \right.$$

جایگزین دیواره حرارتی جزء الکتریکی است که در مدار سری قرار می گیرد $R \equiv \frac{d}{KA}$

$$R = \frac{d}{KA}$$

* جابجایی :



$$T_1 > T_2$$

$$\left| \begin{array}{l} Q_1 = Q_2 \\ T_1 \neq T_2 \end{array} \right. \qquad Q_2 = hA\Delta T = hA(T_1 - T_2)$$

$$\rightarrow T_1 = T_2 + \frac{1}{hA} Q_2$$

$$\left| \begin{array}{l} T_1 = T_2 + \frac{1}{hA} Q_2 \\ Q_1 = Q_2 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} P_1 = P_2 + \frac{1}{hA} f_2 \\ f_1 = f_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{hA} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال مدارسری   مقاومت الکتریکی ← عدد ثابت

در انتقال حرارتی جابجایی معادل مقاومت الکتریکی $\frac{1}{hA}$ می باشد که در مدارسری قرار می گیرد

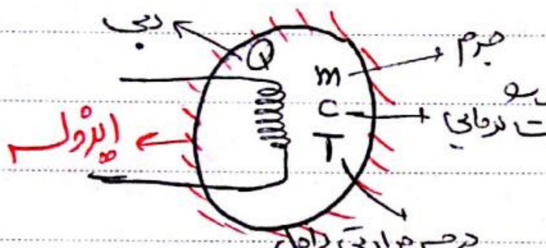
$$R = \frac{1}{hA}$$

مقاومت حرارتی = $\frac{\text{اختلاف دما}}{\text{دبی حرارتی}}$ $\rightarrow R = \frac{T_1 - T_2}{Q_1 = Q_2}$

$R \downarrow$ مقاومت حرارتی

$$R = \frac{d}{KA} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{hA}$$

ج) مخازن حرارتی :



$$Q = mc\frac{dT}{dt} = mcDT \rightarrow f(t) = mcDP(t)$$

$$P(t) = \frac{1}{mcD} f(t)$$

$$f(t) \rightarrow \boxed{\frac{1}{mcD}} \rightarrow P(t)$$

$$f(t) \rightarrow \boxed{\frac{1}{CD}} \rightarrow P(t)$$

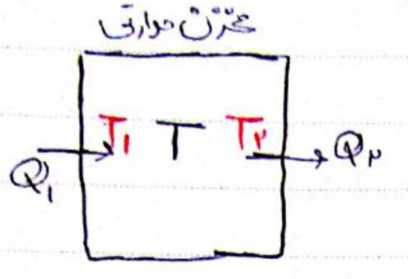
الکتریکی

مخازن حرارتی معادل با خازن الکتریکی با رابطه

$$mc = C$$

mc ↓ ظرفیت گرمایی ویژه C ← ظرفیت

ظرفیت C = C ظرفیت



$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ Q_1 \neq Q_2 \end{cases}$$

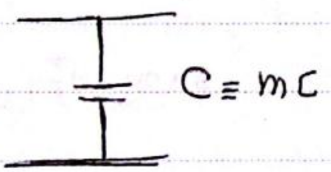
$$Q_1 - Q_2 = Q' = mc\frac{dT_2}{dt} \qquad \begin{cases} T_1 = T_2 \\ Q_1 = Q_2 + mcDT_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ f_1 = f_2 + mcDP_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ mcD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

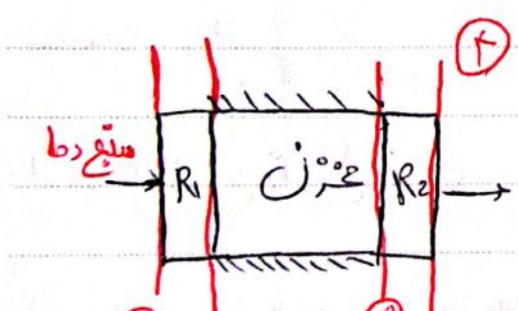
ماتریس انتقال مدار موازی

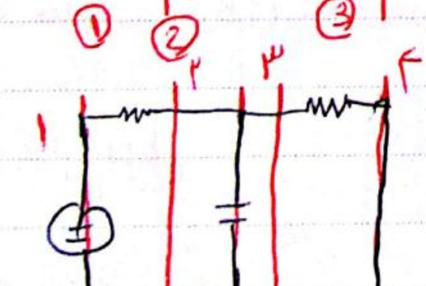
$C = mc$ در سیستم حرارتی معادل با خازن الکتریکی C است که در مدار موازی قرار می‌گیرد.

ظرفیت حرارتی



مثال)

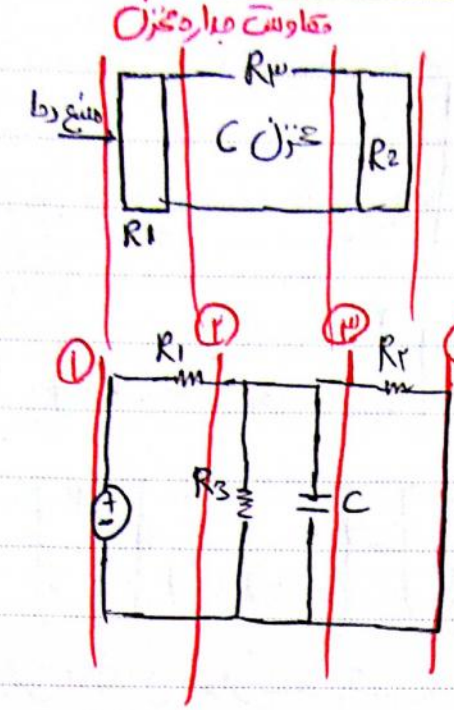




چون محیط اطراف است درجه حرارت

$T_4 = 0 \leftarrow$ اتصال کوتاه

$P_4 = 0$



فصل ۲

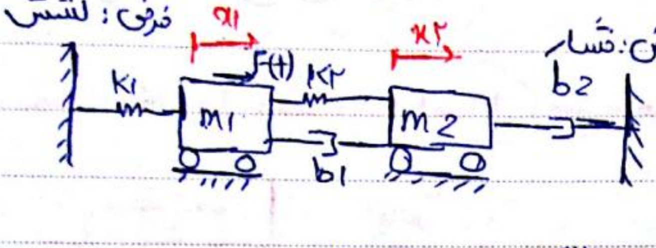
مدلسازی ریاضی و ترسیمی:

مدلهای ریاضی:	مدلهای ترسیمی
۱- معادلات دیفرانسیل حرکت	۱- دیاگرام بلوکی (جعبه ای)
۲- معادلات برداری وضعیت (حالت)	۲- دیاگرام جریانی (گرافی)
۳- تابع تبدیل	

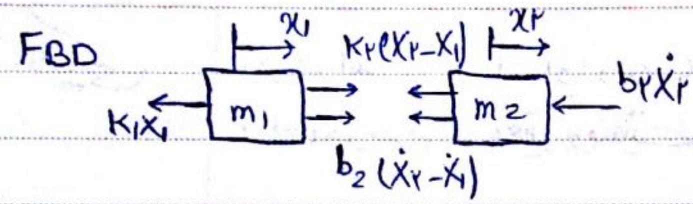
۱- معادلات دیفرانسیل حرکت:

قانون دوم نیوتون: $\sum F = m\ddot{x}$

مثال) مطلوب است معادلات دیفرانسیل حرکت: رسم ۴



همواره نیروی فنر و دمپر با حرکت مخالفت می‌کنند.



۴ متغیر وضعیت: x_1, $\dot{x}_1$, x_2, $\dot{x}_2$

$$\sum F = m_1\ddot{x}_1 \longrightarrow -k_1x_1 + k_2(x_2-x_1) + b_1(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + F(t) = m_1\ddot{x}_1$$

$$\sum F = m_2\ddot{x}_2 \qquad -k_2(x_2-x_1) - b_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) - b_2\dot{x}_2 = m\ddot{x}_2$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k_1(x_1) + b_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + k_2(x_1-x_2) = F(t) \\ m\ddot{x}_2 - b_1\dot{x}_1 + (b_1+b_2)\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\text{ماتریس جرم}}{[m]} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = [m]^T \; / \; \underset{\text{ماتریس استهلاک}}{[b]} = \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ -b_1 & b_1+b_2 \end{bmatrix} = [b]^T$$

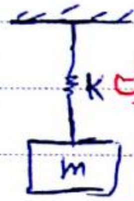
$$\underset{\text{سفتی}}{[k]} \text{ متقارن} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = [k]^T$$

۲- معادلات پردازی وضعیت (حالت):

متغیرهای وضعیت: متغیرهایی هستند که با داشتن آن‌ها، وضعیت (رفتار) سیستم در هر لحظه از زمان مشخص می‌شود.

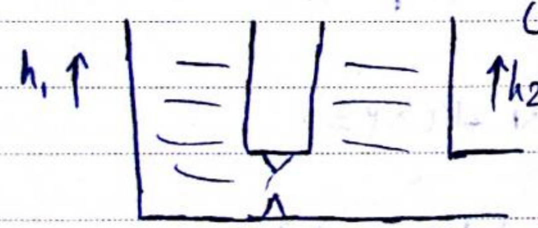
تعریف متغیرهای وضعیت برای انواع سیستم‌ها:

سیستم	متغیر وضعیت
مکانیکی	عبارت است از جابه‌جایی و سرعت برای هر جرم (برای هر جرم دو متغیر وضعیت وجود دارد)
* مهم سیالاتی	عبارت است از ارتفاع مخزن برای هر مخزن (برای هر مخزن یک متغیر وضعیت وجود دارد)
حرارتی	عبارت است از درجه حرارت مخزن برای هر مخزن (برای هر مخزن یک متغیر وضعیت وجود دارد)

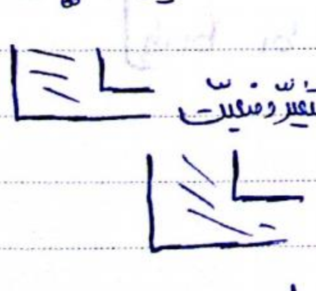


۲ متغیر وضعیت
رسته ۲
۲ معادله

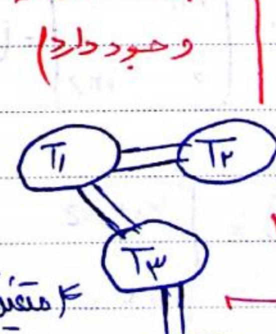
مخزن سیالاتی
یک معادله (اسکالر) رسته یک
یک متغیر وضعیت



۲ معادله رسته ۲
دو متغیر وضعیت



رسته ۳
سه متغیر وضعیت
۳ معادله



رسته ۴
۴ متغیر وضعیت
۴ معادله
سیستم حرارتی

درجه یا رتبه سیستم :

مرتبه سیستم که :

مرتبه یا رتبه سیستم برابر است با تعداد متغیرهای وضعیت

معادلات برداری وضعیت برای یک سیستم رتبه n عبارت است از : n معادله

دیفرانسیل مرتبه اول (یعنی حداکثر مرتبه مشتق ها یک باشد)

ورودی - خروجی : اصطلاحات ورودی - خروجی در سیستم کنترلی با سیستم

فیزیکی می تواند متفاوت باشد

هدف کنترل : خروجی متغیری است که می خواهیم به حد مطلوب و مورد نظر

برسد. (هر چه آنچه که می خواهیم کنترل کنیم) و آن را کنترل کنیم که هدف

کلی است.

ورودی : عاملی است که سبب تغییرات در سیستم و رسیدن خروجی به حد مطلوب

و مورد نظر می شود.

ورودی → عامل تزریق انرژی

ورودی → Set Point (نقطه مرجع، ورودی مبنا) : از جنس خروجی است

کنترل: به نظم درآوردن خروجی‌ها از طریق تنظیم ورودی (عامل خارجی تزریق انرژی)

سیستم‌های کنترلی را از نقطه نظر تعداد ورودی و خروجی می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

عامل تزریق انرژی

۱- سیستم‌های با یک ورودی و یک خروجی Single Input - Single output (SISO)

۲- سیستم‌های مستقل با چند ورودی و چند خروجی
Multi - Input - multi output (MIMO)

هرکدام از ورودی یا خروجی بیش از یکی باشد MIMO محسوب می‌شود.

خصوصیات معادلات وضعیت:

۱- به تعداد n (رسته سیستم) معادله وضعیت (مرتبه اول دیفرانسیل) وجود دارد.

۲- متغیرهای وضعیت را به صورت استاندارد با x_n نمایش می‌دهیم.

متغیر $\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}_{\text{تا } n}$

در هر معادله وضعیت فقط یک مشتق از هر وضعیت وجود دارد که به تنهایی سمت چپ معادله قرار می‌گیرد و شماره معادله وضعیت عبارت است از اندیس مشتق متغیر وضعیت مربوط در هر معادله

Subject
Date

معادله شماره ۱ $\dot{x}_1 = \cancel{x_1}, \cancel{x_2} \ldots$ ——

معادله شماره ۲ $\dot{x}_2 = \ldots\ldots$

⋮

معادله شماره (n) $\dot{x}_3 = \ldots\ldots$

۳- در سمت راست معادله موارد زیر قرار می‌گیرند

* متغیرهای وضعیت حداقل یکی در هر معادله

* ورودی که در یکی از معادلات قرار می‌گیرد

(ورودی حداقل در یک معادله) ← SISO

ورودی‌ها حداقل هرکدام در یک معادله ← MIMO

---

n معادله وضعیت

ویژگی‌های

معادلات (معادله) خروجی

SISO ↓ MIMO ↓

۱- به تعداد خروجی معادله خروجی داریم.

یک معادله خروجی → SISO

به تعداد خروجی معادله خروجی داریم → MIMO

P4PCO

که بصورت توابعی سمت چپ معادله قرار می‌گیرند و با y_m نشان داده می‌شوند.

m: تعداد خروجی

$y_1 = \dots$ معادله خروجی ۱

$y_2 = \dots$ 〃 〃 ۲

$y_m = \dots$ 〃 〃 m

۲- در سمت راست معادلات خروجی موارد زیر قرار می‌گیرند:

* حداقل یک متغیر وضعیت در هر معادله
* ورودی می‌تواند در معادلات خروجی وارد شود

شکل کلی معادلات وضعیت سیستم‌های رسته n و SISO

n معادله $\rightarrow$ $\dot{X} = AX + bu$

فرم ماتریسی معادلات دینامیکی (وضعیت)

شکل کلی معادلات خروجی سیستم‌های رسته n و SISO

یک معادله $\rightarrow$ $y = cX + du$

به مجموعه $n+1$ معادله شامل n معادله وضعیت و ۱ معادله خروجی

اصطلاحاً معادلات دینامیکی گفته می‌شود. ولی معمولاً منظور از

معادلات وضعیت همان معادلات دینامیکی است.

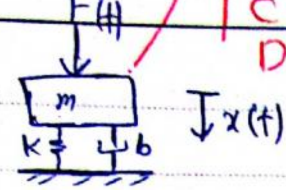
Subject

Date

$A_{2\times 2}$
$b_{2\times 1}$
$C_{1\times 2}$
$D_{1\times 1}$

دینامیکی

معادلات وضعیت سیستم های مکانیکی SISO



سیستم درجه ۲ $\xrightarrow{\text{دلیل}}$ ۲ متغیر وضعیت جابجایی و سرعت (x , $\dot{x}$)

مسئله: باید ورودی و خروجی را مشخص کرده باشد

$x_1 = x(t)$ جابجایی

$x_2 = \dot{x}(t)$ سرعت

متغیر ورودی: $F(t)$

کنترلی خروجی: $x(t)$

روش بدست آوردن معادلات حالت در سیستم های مکانیکی:

* معادلات دیفرانسیل حرکت بایستی معلوم باشد.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

از معادله دیفرانسیل برای بدست آوردن معادله وضعیت استفاده می کنیم

باید ۲ معادله وضعیت بدست آورد و یک معادله خروجی

* تعدادی از معادلات وضعیت از تعریف متغیرهای وضعیت بدست می آید.

شماره معادله وضعیت

۲ معادله

$$\dot{x}_{(1)} = x_2$$

$$\dot{x}_{(2)} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}F(t)$$

شماره معادله وضعیت

یک معادله $y = x_1$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \longrightarrow \dot{x}_{(1)} = x_2$$

اولین معادله

زیرا اندیس مشتق یک است

شماره معادله وضعیت

برای معادله دوم از معادله دیفرانسیل استفاده می کنیم:

$$m\cancel{\ddot{x}}_{\dot{x}_2} + b\cancel{\dot{x}}_{x_2} + k\cancel{x}_{x_1} = F(t) \rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}F(t)$$

خروجی: $y = x(t)$ اطلاعات مسئله

$$y = x(t) = x_1$$

نحوه ی استخراج ماتریس های A و B و C و D:

$$\underset{n\times1}{\dot{X}} = \overset{n\times n}{A}\underset{n\times1}{X} + \overset{n\times1}{B}\underset{1\times1}{u}$$

ماتریس مربعی ← $n\times n$ — بردار ستونی ← $n\times1$

$$\underset{1\times1}{y} = \underset{1\times n}{C}\underset{n\times1}{X} + \underset{1\times1}{D}u \rightarrow 1\times1$$

بردار سطری ← C

n: رتبه سیستم

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times1}$$

متغیرهای وضعیت

بردار وضعیت (حالت)

رتبه

همواره یک است

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}_{n\times1}$$

بردار مشتق وضعیت

همواره یک است

$u_{1\times1}$: ورودی

← اسکالر چون یک ورودی داریم و نمی توان آن را به صورت بردار نمایش داد (SISO)

$y_{1\times1}$: خروجی

← اسکالر مانند بالا

[###] $\underset{n\times n}{A}$: ماتریس مربعی

مرتبه = تعداد سطر

مرتبه = " ستون

مرتبه سیستم × مرتبه سیستم

$b_{n\times1}$: بردار ستونی

$\begin{bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix}_{n\times1}$

مرتبه

تعداد ورودی

بردار سطری : $C_{1\times n}$ $[\cdot \;——]$

مرتبه

تعداد خروجی

اسکالر : $d_{1\times1}$

تعداد خروجی ها

تعداد ورودی

حل مثال :

بردار ستونی

$$\underset{2\times1}{\dot X} = \underset{2\times2}{A}\,\underset{2\times1}{X} + \underset{2\times1}{b}\,\underset{1\times1}{u}$$

$$\underset{1\times1}{y} = \underset{1\times2}{C}\,\underset{2\times1}{X} + \underset{1\times1}{d}\,\underset{1\times1}{u}$$

معادلات دینامیکی :

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}F(t) \end{cases}$$

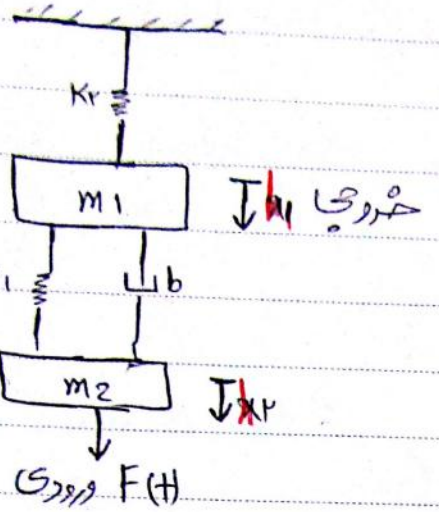
$$\begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

$y = x_1$

$$y = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}^{C}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0\,F(t)$$

$$y = Cx + du$$

تمرین:



$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[b] = \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_1 \\ -k & k_1 \end{bmatrix}$$

A, b, c, d

$$\begin{cases} x_1 = h_1 \\ x_2 = \dot{h}_1 \\ x_3 = h_2 \\ x_4 = \dot{h}_2 \end{cases}$$

معادلات وضعیت سیستم های سیالاتی (SISO):

* در سیستم ها سیالاتی چون رتبه سیستم برابر است با تعداد متغیرهای وضعیت که همان ارتفاع مخازن هستند بنابراین به تعداد مخازن معادلات وضعیت وجود دارد برای بدست آوردن معادلات وضعیت کافی است قانون پیوستگی را برای هر مخزن بنویسیم تا به معادله وضعیت مربوط به آن مخزن برسیم.

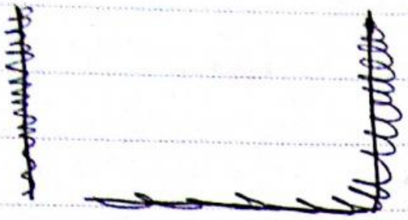
ابتدا برای هر مخزن عرض در نظر می گیریم. فیزیکی

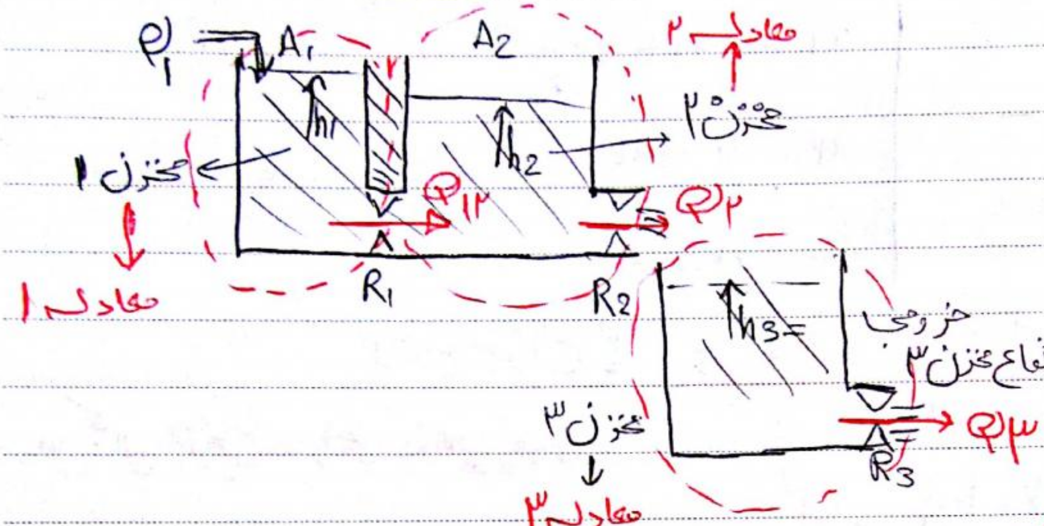
قانون پیوستگی: نرخ تغییرات حجم سیال داخل مخزن = مجموع دبی ها خروجی - مجموع دبی های ورودی

فیزیکی

<= معادلات وضعیت

مثال ۲) مطلوب است ماتریس های A و b و c و d ؟





تک ورودی تک خروجی ⟵ SISO

فرض: $A_1 = A_2 = A_3 = 1$

$R_1 = R_2 = R_3 = 1$ سه متغیر وضعیت ⟵ رسته ۳

بدون تغییر $\frac{x_1 - x_2}{R_1}$ جای h

صرف

1 مخزن: $Q_1 - \cancel{Q_{12}} = \frac{d}{dt}(A_1 x_1) = A_1 \dot{x}_1$

صرف

2 مخزن: $\underbrace{\cancel{Q_{12}}}_{\frac{x_1 - x_2}{R_1}} - \underbrace{\cancel{Q_2}}_{\frac{x_2}{R_2}} = A_2 \dot{x}_2$

صرف

۳ مخزن: $\underbrace{\cancel{Q_2}}_{\frac{x_2}{R_2}} - \underbrace{\cancel{Q_3}}_{\frac{x_3}{R_3}} = A_3 \dot{x}_3$

تنها Q که باید ثابت بماند و تغییر ندهیم Q ورودی است یعنی Q_1

$$R_1 = \frac{X_1 - X_2}{Q_{12}} \xrightarrow{} $$ جریان از مخزن ۱ به ۲ است $$\Rightarrow Q_{12} = \frac{X_1 - X_2}{R_1}$$

$$R_2 = \frac{X_2}{Q_2} \qquad R_3 = \frac{X_3}{R_3}$$

فرض $A=1$، $R=1$ ⟶ ۳ معادله وضعیت

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + Q_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

خروجی $y = x_3 = h_3$ = ارتفاع مخزن ۳

حال شکل ماتریس‌ها را می‌نویسیم:

$$\underset{3\times1}{\dot{X}} = \underset{3\times3}{A}\underset{3\times1}{X} + \underset{3\times1}{b}\underset{1\times1}{u}$$

$$\underset{1\times1}{y} = \underset{1\times3}{C}\underset{3\times1}{X} + \underset{1\times1}{d}\underset{1\times1}{u}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times3} \qquad \underset{1\times1}{d} = 0$$

بهترین کار انتخاب ترتیب‌ها

ابتدا C ها را مقایسه می‌کنیم که از خروجی بدست می‌آید

C　b　A

1) c_1

2) c_2　یکسان

$$\text{فرق : خروجی}\ y = Q_{12} = \frac{x_1 - x_2}{R_1} = x_1 - x_2$$

3) c_3　یکسان

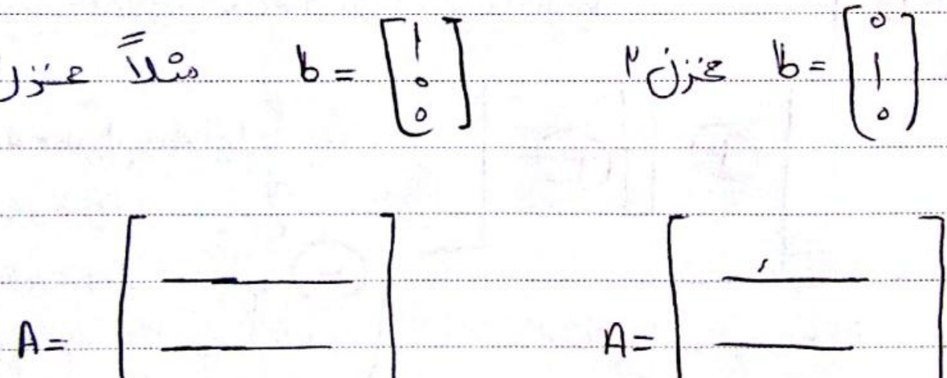
$$C = [1\ \ -1\ \ 0]$$

4) c_4

سپس b ها را مقایسه می‌کنیم ورودی به هر مخزن مستقیماً اثر کند جزء مربوط به آن مخزن در b غیرصفر و بقیه صفر است

مثلاً مخزن ۱　$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$　　مخزن ۲　$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

مقایسه A ها



مثلاً سطر اول و دوم مشابه و سطر سوم اختلاف دارد

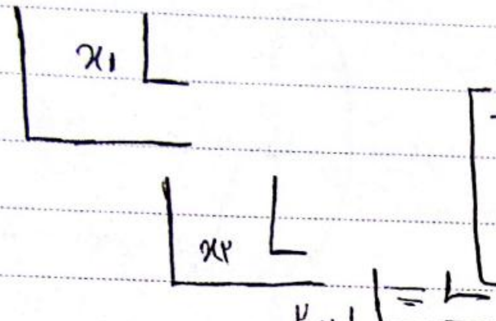
~~...~~ A : المان ها روی قطر منفی هستند
سیالاتی

ارتباط مخزن ۱ با خودش

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

با ۳ هیچ ارتباط مستقیمی ندارد

علامت ـ : مخزن که با خودش در ارتباط است و یک خروجی دارد



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

مخزن ۲ از ۳ تاثیر نمی‌پذیرد ولی ۳ از ۲ تاثیر می‌پذیرد.

۱ بر ۲ تاثیر می‌گذارد

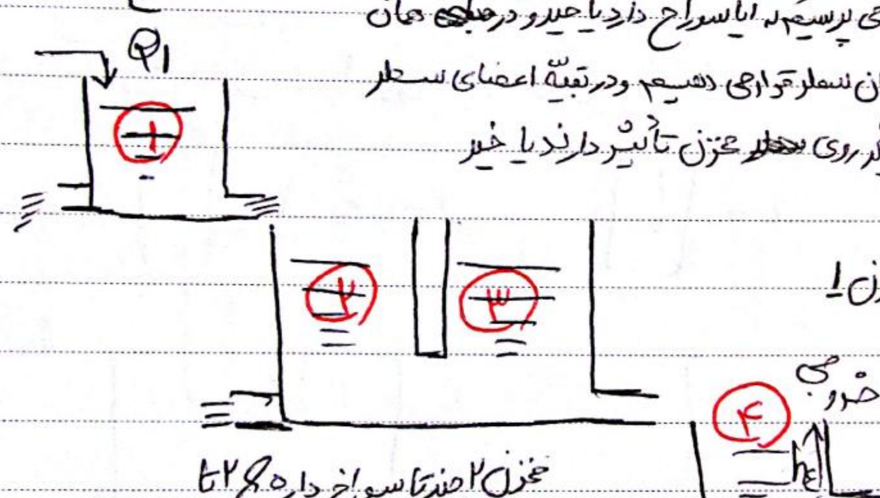
۱ بر ۲

۱۲ از هم تاثیر بپذیرند

برای ماتریس c می‌بینیم که خروجی روی کدام مخزن است در شماره آن مخزن یک قرار می‌دهیم و بقیه صفر

در مورد هر مخزن می‌پرسیم که آیا سوراخ دارد یا خیر و در شماره همان

مثال: مخزن در همان سطر قرار می‌دهیم و در بقیه اعضای سطر می‌پرسیم آیا مخازن دیگر روی این مخزن تاثیر دارند یا خیر



در ماتریس A سطر اول برای مخزن ۱ و سطر دوم برای مخزن ۲ و سطر سوم برای مخزن ۳ و سطر چهارم مربوط به مخزن ۴ است

مخزن ۲ چند تا سوراخ دارد؟ ۲ تا

آیا مخزن ۱ مستقیماً روی ۲ تاثیر دارد؟

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{4\times4} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر ۲ در ماتریس A فقط در یک سطر تفاوت بود فقط معادلات مربوط به آن سطر را بنویسیم.

برای ماتریس b می‌بینیم روی کدام مخزن مستقیما تاثیر دارد در شماره آن مخزن ۱ قرار می‌دهیم و بقیه اعضا صفر

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Date

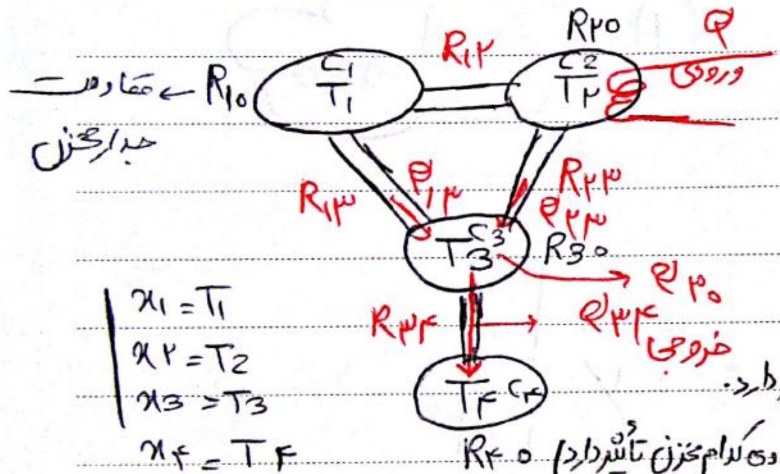
معادلات وضعیت سیستم های حرارتی SISO

متغیرهای وضعیت برای سیستم های حرارتی عبارتند از درجه حرارت هر مخزن

بنابراین با در نظر گرفتن دو مورد برای هر مخزن و نوشتن قانون تعادل حرارتی

می توان به معادلات وضعیت برای هر مخزن رسید.

نرخ تغییرات درجه حرارت × ظرفیت حرارتی = مجموع دبی خروجی از مخزن − مجموع دبی حرارتی ورودی به مخزن



$C = 1$ ظرفیت حرارتی هر مخزن

$R = 1$

T_0 درجه حرارت محیط

$V = IR \Rightarrow R = \frac{V}{I}$

$x_1 = T_1$
$x_2 = T_2$
$x_3 = T_3$
$x_4 = T_4$

ورودی مستقیماً روی مخزن ۲ تأثیر دارد.

b را برسیم ورودی (مستقیماً روی کدام مخزن تأثیر دارد)

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

معادله هم بر طبق خروجی می نویسیم

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{1\times 4}$$

$$y = q_{34} = \frac{T_3 - T_4}{\cancel{R_{34}}\ 1} = T_3 - T_4$$

خروجی — مخزن ۱

۱- خودش (قطر اصلی) چند بار ظاهر می شود؟ ✓✓✓

مخزن ۲ دخالت دارد؟ ✓

مخزن ۳ دخالت دارد؟ ✓

مخزن ۴ دخالت دارد؟ ✗

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

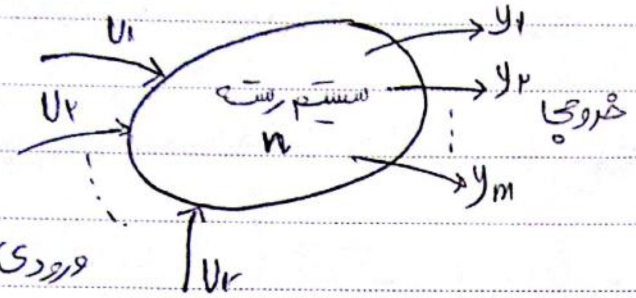
مخزن یک چند تا سوراخ دارد؟

آیا مخزن ۲ روی مخزن یک تأثیر دارد؟

سطر سوم: $\cancel{q_{13}} + \cancel{q_{23}} - \cancel{q_{30}} - q_{34} = C_3 \dot{x}_3$

$$\frac{x_1 - x_3}{R_{13}} \quad \frac{x_2 - x_3}{R_{23}} \quad \frac{x_3 - T}{R_{30}} \quad \frac{x_3 - x_4}{R_{34}}$$

معادلات وضعیت سیستم های رسته n و MIMO



n: رتبه سیستم

r: تعداد ورودی

m: تعداد خروجی

$r = 1 = m \Rightarrow$ SISO

$$\underset{n\times 1}{\dot{X}} = \underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{X} + \underset{n\times r}{B}\,\underset{r\times 1}{\overset{\text{ستونی}}{U}}$$

$$\boxed{A_{SISO} = A_{MIMO}}$$

$$\underset{m\times 1}{Y} = \underset{m\times n}{C}\,\underset{n\times 1}{X} + \underset{m\times r}{D}\,\underset{r\times 1}{U}$$

بردار ورودی $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$ بردار خروجی $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

$B = n \times r$

n: مرتبه، r: تعداد ورودی

$C_{m\times n}$

m: تعداد خروجی، n: مرتبه

$D_{m\times r}$

تعداد خروجی، تعداد ورودی

ورودی‌ها

$$\text{خروجی}\left|\begin{array}{l} y_1 = Q_{12} = x_1 - x_2 \\ y_2 = Q_{23} = x_2 - x_3 \\ y_3 = Q_{34} = x_3 - x_4 \end{array}\right.$$

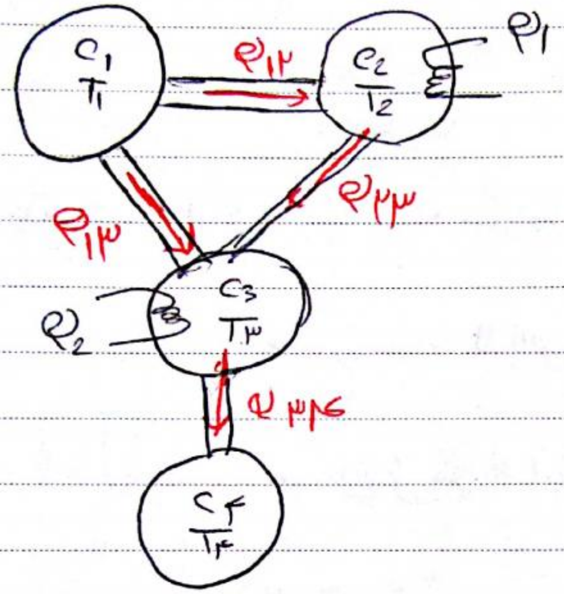
Q_1, Q_2

تعداد ورودی $r = 2$

رتبه سیستم $n = 4$

تعداد خروجی $= 3 = m$

در سیستم حرارتی برای نوشتن ماتریس C ابتدا ماتریس را تشکیل می‌دهیم در سطرها خروجی‌ها و آرایه‌های هر ورودی سیستم خروجی‌ها بین کدام دو مخزن ارتباط برقرار می‌کند. یکی از خروجی‌ها از آن خارج می‌شود + دیگری به خروجی آن وارد می‌شود (۱-) و مابقی صفر



$$\underset{4\times1}{\dot{X}} = \underset{4\times4}{A}\,\underset{4\times1}{X} + \underset{4\times2}{B}\,U_{2\times1}$$

$$\underset{3\times1}{Y} = C\,\underset{4\times1}{X} + \underset{3\times2}{D}\,U_{2\times1}$$

$A_{MIMO} = A_{SISO}$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{خروجی ۱} \\ \text{خروجی ۲} \\ \text{خروجی} \end{array} & C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

در ارتباط با مخزن ۱ ←

در ارتباط با مخزن ۲ ←

در ارتباط با مخزن ۳ ←

در ارتباط با مخزن ۴ ←

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

۳- تابع تبدیل (مهم) : ۱۰

خروجی = ورودی × تابع تبدیل

$$\text{تابع تبدیل} = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}}$$

تابع تبدیل عبارت است از : * نسبت خروجی به ورودی ① خروجی = ورودی × تابع تبدیل G

* در حوزه لاپلاس ② $G(S)$ ← اپراتور لاپلاس

* با فرض شرایط اولیه صفر ③ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$

سیستم فیزیکی : معادلات وضعیت مدل ترسیمی

↓ ↕ ↓

تابع تبدیل تابع تبدیل تابع تبدیل

تابع تبدیل از معادلات دینامیکی :

$$\begin{cases} \underset{n\times1}{\dot{X}} = \underset{n\times n}{A}\underset{n\times1}{X} + \underset{n\times1}{b}\underset{1\times1}{U} \\ \underset{1\times1}{y} = \underset{1\times n}{C}\underset{n\times1}{X} + \underset{1\times1}{d}\underset{1\times1}{U} \end{cases}$$ وضعیت

الف) SISO

معلوم : A, b, C, d

مجهول : تابع تبدیل $G(S)$

$$\underset{1\times1}{G(S)} = \underset{1\times n}{C}(SI - A)^{-1}\underset{n\times1}{b} + \underset{1\times1}{d}$$ اسکالر

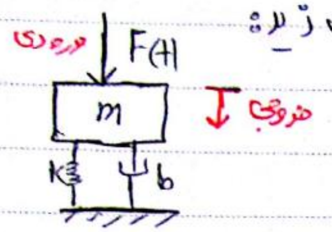
$$G(S)_{1\times1} = \frac{Y(S)_{1\times1}}{U(S)_{1\times1}}$$

خروجی در حوزه لاپلاس

ورودی در حوزه لاپلاس

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$ ماتریس واحد

مثال) مطلوب است محاسبه تابع تبدیل سیستم مکانیکی زیر:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

مراحل محاسبه تابع تبدیل:

الف) تشکیل ماتریس $(SI - A)$

$$SI - A = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S & -1 \\ \frac{k}{m} & S+\frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

ب) محاسبه معکوس $(SI - A)^{-1}$

$$(SI - A)^{-1} = \frac{Adj\,(SI - A)}{det(SI - A)}$$ ماتریس الحاقی / دترمینان

$$\text{الحاقی } 2\times 2 = \begin{bmatrix} \searrow & -\bigcirc \\ -\bigcirc & \end{bmatrix}$$

$$\text{الحاقی}\,(SI - A) = \begin{bmatrix} S+\frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & S \end{bmatrix}$$

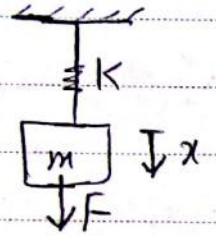
$$|SI - A| = s\left(s+\frac{b}{m}\right) + \frac{k}{m} = s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}$$

$$G(s) = C(SI-A)^{-1}b + d \qquad (SI-A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(SI-A)}{|SI-A|}$$

$$= \frac{1}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}} \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} s+\frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{2\times 1}}_{1\times 1} + 0$$

$$1 \times \frac{1}{m} = \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}} = \frac{1}{ms^2+bs+k}$$



$$G(s) = \frac{1}{ms^2+k}$$

الحاقی ماتریس 3×3

برای محاسبه ماتریس الحاقی 3×3 دترمینان هر عنصر را گرفته و با علامت قرار می دهیم.

$SI - A =$

ستون

سطر $1+1$

ماتریس ترانهاده = دترمینان $(-1)^{1+1}$ $|2\times 2|$

ماتریس الحاقی = (ماتریس ترانهاده)^T

جای سطر و ستون را عوض کنیم

اگر $SI-A$ قطری بود

$$\begin{bmatrix} s+4 & 0 & 0 \\ 0 & s+5 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

دترمینان = حاصل ضرب قطرها = $(s+5)(s+4)(s+1)$

$$\text{الحاقی} \begin{bmatrix} (s+5)(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & (s+4)(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & (s+4)(s+5) \end{bmatrix}$$

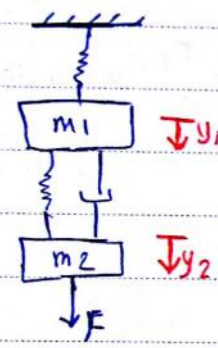
Subject

Date

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس قطری = معکوس المان های قطر

حل مثال)



$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dot{y}_1 \end{cases} \qquad \dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{cases} x_3 = y_2 \\ x_4 = \dot{y}_2 \end{cases} \qquad \dot{x}_3 = x_4$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 - b\dot{y}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_1x_2 = 0 \\ m_2\ddot{y}_2 - b\dot{y}_1 + b\dot{y}_2 - ky_1 + k_1y_2 = F(t) \end{cases}$$

→ [illegible]

[illegible]

$$\cancel{\dot{x}_2 = \frac{k_1}{m_1}x_1 - \frac{b}{m_1}x_2 - \frac{k_1}{m_1}x_3 + \frac{b}{m_1}x_4}$$

$$m_1\dot{x}_2 + bx_2 - bx$$

$$m_2\dot{x}_4 - bx_2 + bx_4 - k_1x_1 + k_1x_3 = F$$

P4PCO

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{(k_1+k_2)}{m_1}x_1 - \frac{b}{m_1}x_2 + \frac{k_1}{m_1}x_3 + \frac{b}{m_1}x_4$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k_1}{m_2}x_1 + \frac{b}{m_2}x_2 - \frac{k_1}{m_2}x_3 - \frac{b}{m_2}x_4$$

تعریف متغیرهای وضعیت

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k_1}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف متغیرهای وضعیت

معادلات دیفرانسیل

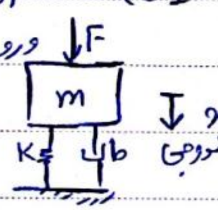
همیشه منفی

همیشه منفی

تابع تبدیل معادلات وضعیت : (SISO)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}b + d$$

معادله وضعیت



$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + 1}$$

تابع تبدیل از معادله دیفرانسیل :

$$\mathcal{L}(m\ddot{x} + b\dot{x} + kx) = \mathcal{L}f(t)$$

$$G(s) = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}}$$

شرایط اولیه صفر

در حوزه لاپلاس

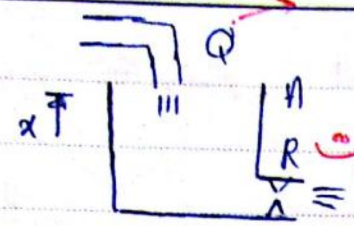
$$m^2 \mathcal{L}\ddot{x} + b\mathcal{L}\dot{x} + k\mathcal{L}x = \mathcal{L}F(t)$$

$$m[s^2X(s)] + b[sX(s)] + kx(s) = F(s)$$

$$x(s)[ms^2 + bs + k] = F(s) \rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Subject

Date



تابع تبدیل سیستم سیالاتی:

از روی شکل می توان ورودی را تشخیص داد

اما خروجی بایستی حتماً تعریف شود (در شکل یا در صورت مسئله)

مطلوب است تابع تبدیل با فرض

الف) خروجی x

ب) " Q

الف) خروجی x

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}b + d$$

سیستم بسته یک | یک معادله وضعیت
یک معادله خروجی

$$\underset{1\times1}{\dot{x}} = \underset{1\times1}{a}\,\underset{1\times1}{x} + \underset{1\times1}{b}\,\underset{1\times1}{u}$$

$$\underset{1\times1}{y} = \underset{1\times1}{c}\,\underset{1\times1}{x} + \underset{1\times1}{d}\,\underset{1\times1}{u}$$

زیرا دیگر A ماتریس نیست

با فرض R و A واحد

$$\frac{1}{s-a} = (s-a)^{-1}$$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}b + \cancel{d}$$

$$= 1 \times \frac{1}{s+1} \times 1 = \frac{1}{s+1} = \frac{X(s)}{Q(s)}$$

ب) خروجی Q

$$y = Q_o = \frac{x}{R=1} = x$$

$c=1$, $a=-1$, $b=1$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Q_o}{Q} = \frac{1}{s+1}$$

محاسبه‌ی $G(S)$ با فرض $R, A \neq 1$

معادله وضعیت

$$A\dot{x} = Q - \cancel{Q}_o \frac{x}{R}$$

$$\dot{x} = \underbrace{\left(-\frac{1}{RA}\right)}_{a} x + \underbrace{\left(\frac{1}{A}\right)}_{b} Q$$

الف

ب

$$a = -\frac{1}{RA}, \quad b = \frac{1}{A}$$

الف) خروجی x

$$y = x \Rightarrow C = 1$$

$$G(s) = C \times \frac{1}{s-a} \times b = 1 \times \frac{1}{s+\frac{1}{RA}} \times \frac{1}{A} \Rightarrow G(s) = \frac{R}{1+RAS}$$

ب) خروجی Q_o

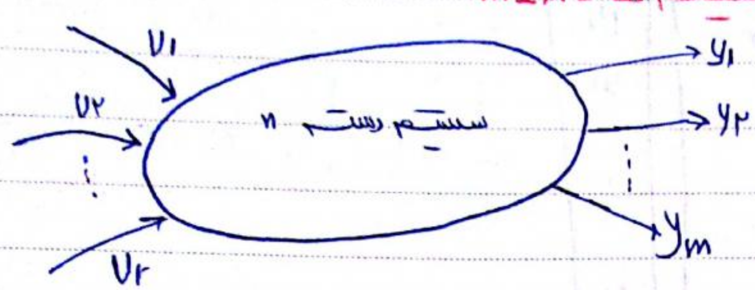
$$y = Q_o = \frac{x}{R} \Rightarrow C = \frac{1}{R}$$

$$G(s) = C \times \frac{1}{s-a} \times b = \frac{1}{R} \times \frac{1}{s+\frac{1}{RA}} \times \frac{1}{A}$$

$$= \frac{\frac{1}{RA}}{s+\frac{1}{RA}} = \frac{1}{1+RAS} \Rightarrow \text{خروجی } Q_o$$

حفظ باشیم

تابع تبدیل از معادلات وضعیت سیستم‌های MIMO



r تا ورودی ← سیستم رسته n ← m تا خروجی

$$U=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_r\end{bmatrix}_{r\times 1} \longrightarrow Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$\underset{m\times 1}{Y} = \underset{m\times r}{G} \cdot \underset{r\times 1}{U}$$

ماتریس $m\times r$

سیستم MIMO به تعداد $m\times r$ تابع تبدیل داره

مثال جلسه قبل موارد:

سیستم رسته ۴ / دو ورودی / ۳ خروجی ⟶ 3×2 (تعداد توابع تبدیل)

3: خروجی‌ها، 2: ورودی

$$\underset{m\times r}{G(s)} = \underset{m\times n}{C}\,\underset{n\times n}{(sI-A)^{-1}}\,\underset{n\times r}{B}+\underset{m\times r}{D} \longrightarrow$$

راه حل مناسب برای ست نیست

تستی :

خروجی — ورودی

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1r} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2r} \\ \vdots & & & \\ G_{m1} & G_{m2} & \cdots & G_{mr} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_r \end{bmatrix}
$$

خروجی ۱ $y_1 = G_{11}U_1 + G_{12}U_2 + \dots + G_{1r}U_r$

خروجی ۲ $y_2 = G_{21}U_1 + G_{22}U_2 + \dots + G_{2r}U_r$

$\vdots$

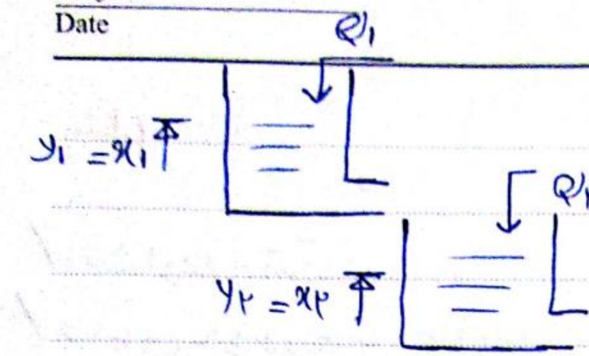
خروجی m $y_m = G_{m1}U_1 + G_{m2}U_2 + \dots + G_{mr}U_r$

هر خروجی متأثر از تمام ورودی ها است به شرط آنکه اجزا سطر مربوطه در ماتریس تابع تبدیل همگی غیر صفر باشند. اگر جزئی از یک سطر ماتریس تابع تبدیل صفر باشد یعنی ورودی مربوط به آن بر خروجی مورد نظر تأثیری ندارد.

مثلاً $G_{12} = 0 \Rightarrow$ ورودی ۲ بر خروجی ۱ تأثیر ندارد

خروجی — ورودی

$G_{43} \neq 0$ ورودی ۳ بر خروجی ۴ تأثیر دارد



۲ ورودی

۲ خروجی

۲ متغیر وضعیت

$2 \times 2 = 4$

۴تا ماتریس تبدیل دارد.

چون دو مخزن منفصل هستند

$$\underset{2\times 2}{G(s)} = \begin{bmatrix} \underset{\neq 0}{G_{11}} & G_{12} = 0 \\ \underset{\neq 0}{G_{21}} & \underset{\neq 0}{G_{22}} \end{bmatrix}$$

$$G_{mr} = \frac{y_m}{U_r}\Bigg|$$

تمام U ها مساوی صفر

فقط U_r غیر صفر باشد

$$G_{24} = \frac{y_2}{U_4}\Bigg|_{\substack{U_i = 0 \\ i \neq 4}}$$

خروجی ← → ورودی

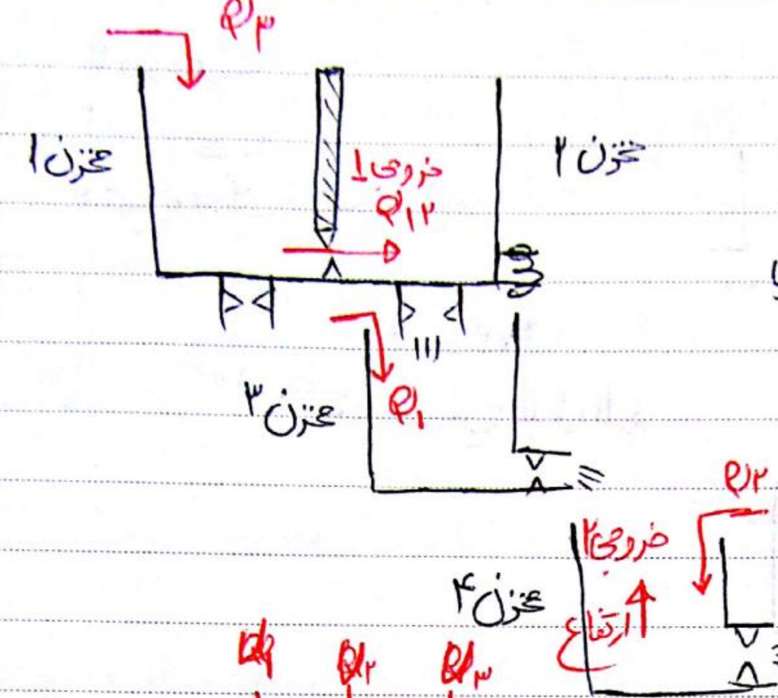
اگر هدف محاسبه یک جزء از اجزاء ماتریس تابع تبدیل باشد ورودی و خروجی مورد نظر را نگه داشته بقیه ورودی ها را صفر قرار می دهیم ولذا سیستم MIMO به سیستم SISO تبدیل می شود.

امکان کاسته شدن رتبه سیستم نیز وجود دارد

مثلاً

سیستم رتبه ۱ ← سیستم رتبه ۴

مثال)



✓ به شماره مخازن دقت شود

✓ و خروجی ندارد ورودی ها به مخزن ها وارد می شود.

رسته ۴ ، ۲ خروجی ، ۳ ورودی

$$\begin{array}{c} \\ G(s)_{2\times 3} = \end{array} \begin{array}{ccc} Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ \left[\begin{matrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \end{matrix}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \leftarrow y_1 \\ \leftarrow y_2 \end{array}$$

$G_{11} = 0$ ورودی اول ـ خروجی اول

ـ چون دو مخزن جدا هستند و ورودی ها بعد از مخزن بالایی قرار دارد

رسته صفر

$G_{12} = 0$ $\qquad G_{21} \neq 0$ $\qquad G_{23} \neq 0$

رسته صفر

$G_{13} \neq 0$ $\qquad G_{22} \neq 0$ $\qquad G_{11} = 0$

رسته ۲

$G_{21} \left| \begin{matrix} Q_3 = 0 \\ Q_2 = 0 \end{matrix} \right.$ → مخزن ۱ و ۲ تخلیه می شود و صفر می شوند ← رسته ۲

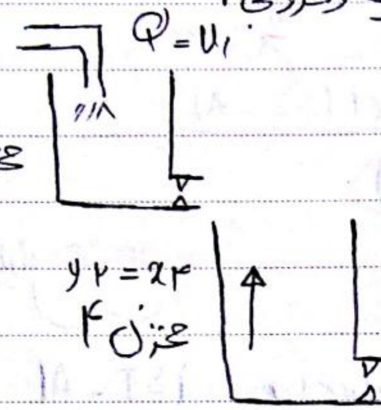
G_{22} | $P_3 = 0$, $P_1 = 0$ — سیستم رسته یک $\rightarrow$ مخازن ۱، ۲ و ۳ تخلیه می شوند

در تابع تبدیل فقط شرایط ماندگار تأثیر دارد.

$G_{23} \rightarrow$ رسته ۴

سوال: است محاسبه تابع تبدیل بین ورودی یک و خروجی ۲

G_{24}



$R = 1$ ها

$A = 1$ ها

سیستم رسته ۲

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 2}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} b$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \qquad = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A) \text{ الحاقی } = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \qquad = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$|sI - A| = (s+1)^2$$

$$[0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} ۳\times۳ \\ \text{الحاقی} \\ ۳۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فقط نیاز است ۳۲ را محاسبه کنیم

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}b+d = C\frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}b+d$$

$$\rightarrow \frac{\overbrace{\underbrace{C\,adj(sI-A)b+d}_{\text{درجه} < n} \times det(sI-A)}^{B(s)\ \text{درجه}\ n}}{\underbrace{det(sI-A)}_{A(s)}} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

چند جمله‌ای صورت

$A(s) = det|sI-A|$

چند جمله‌ای مخرج

مخرج تابع تبدیل $= |sI-A|$ بدون ساده شدن صورت و مخرج

$A(s) \longrightarrow n$ درجه

$B(s) \longrightarrow m$ درجه

$m=n \qquad m<n \qquad m>n \qquad \boxed{m\le n} \qquad m\ge n$

$$adj(sI-A) = \begin{bmatrix} (-1)^{i+j} & & \\ & \text{اجزای ماتریس} & \\ & \text{الحاقی حداکثر یک درجه} & \\ & \text{کمتر از دترمینان} & \\ & \text{هستند} & \end{bmatrix}$$

$SI - A = \begin{bmatrix} \text{ماتریس} \\ \text{میشود} \end{bmatrix}_{3\times 3}$

همیشه ژله نسبت به دترمینان کمتر است.

اگر در تابع تبدیل درجه صورت کمتر از مخرج باشد حتماً $d = 0$

$d = 0 \longrightarrow m < n$

$d \neq 0 \longrightarrow m = n$

ریشه‌های قید معادل صورت صفر‌های سیستم نامیده $B(S) = 0$ می‌شوند (zero)

محدود

$\frac{1}{(S+1)^2}$ صفر ندارد

" " مخرج قطب‌های سیستم نامیده می‌شوند (poles)

$\det|SI - A| = 0 \Rightarrow$ قطب‌ها $\longrightarrow$ معادله مشخصه

$\frac{1}{(S+1)^2}$

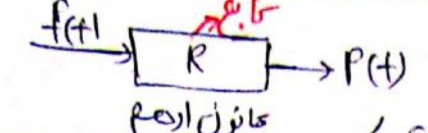
$-1, -1$

قطب‌های سیستم

$\boxed{0 = \text{مخرج تابع تبدیل}}$ = معادله مشخصه

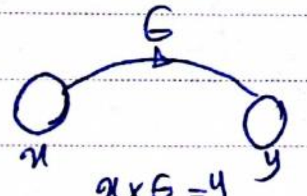
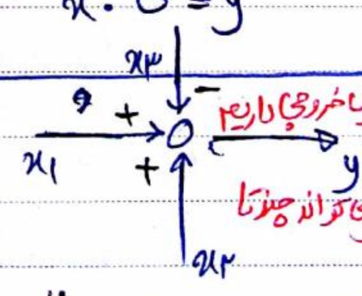
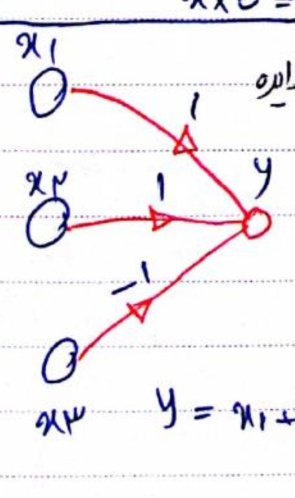
$= \det|SI - A|$

Subject
Date



P(t) یا سیگنال f(t)

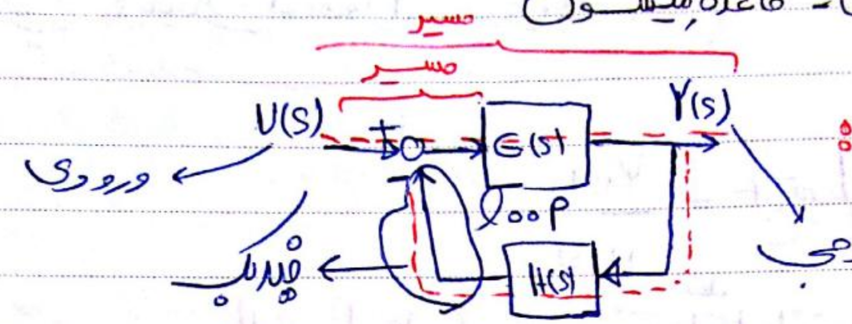
مدل های ترسیمی :
- دیاگرام جعبه ای (الگوریتمی) block Dia.
- دیاگرام جریانی (گذر سیگنال) Signal Flow Dia

عنوان	نمایش در دیاگرام جعبه	نمایش در دیاگرام جریانی
سیگنال	فلش (بردار) $\xrightarrow[x]{+}$ سیگنال علامت دارد اگر علامت ننویسند + است	O x سیگنال همیشه + است
تابع	جعبه تابع تابع همواره مثبت است	تابع منحنی جهت دار تابع علامت دارد
ضرب	 $x \cdot G = y$	 $x \times G = y$
جمع تفریق	 فقط یک خروجی داریم ورودی ها می توانند چندتا باشند $y = x_1 + x_2 - x_3$ جمع و تفریق داخل دایره کوچک	 تجمع سیگنال ها در دایره کوچک $y = x_1 + x_2 - x_3$

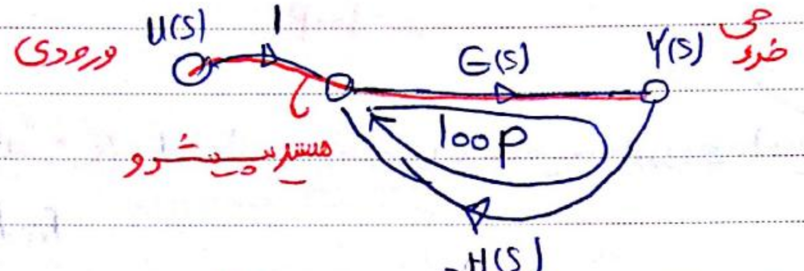
PAPCO

تابع تبدیل از مدل‌های ترسیمی:

قاعده ماسون - قاعده میشسون



قاعده ماسون:



* برخی مسیرها یک طرفه و بعضی مسیرها بن بست هستند
ورود ممنوع

Path (مسیر): حرکت از یک سیگنال و رسیدن به سیگنال بعد به شرط آنکه مسیر طی شده تکرار یا قطع نشود.

* مسیر پیشرو: (Feed Forward Path)

مسیری که از ورودی شروع و به خروجی ختم شود و باید خصوصیات مسیر را داشته باشد.

ورودی: سیگنالی که قبل از آن چیزی نیست (عامل خارجی)

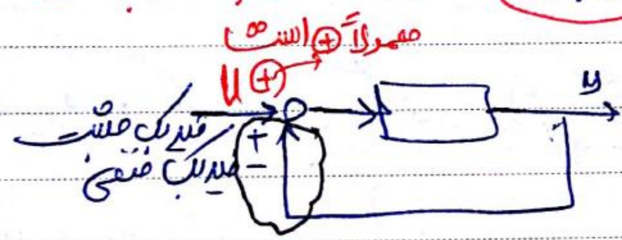
خروجی: سیگنالی که بعد از آن چیزی نباشد

$$G(s) = \text{تابع تبدیل} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

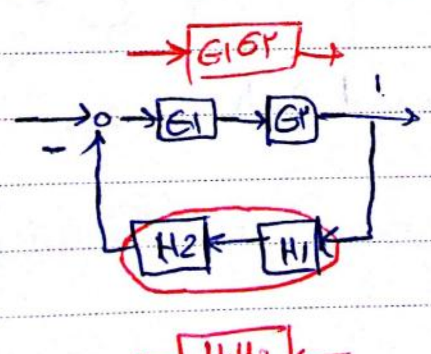
مسیر بسته: Colsed_path loop : مسیری که ابتدا و انتهای آن (نقطه) یکسان باشد

فیدبک (برگشت): انشعاب از خروجی و مقایسه با ورودی را فیدبک می نامند
Feedback

فیدبک می تواند مثبت و منفی باشد — به علامت فیدبک توجه شود



تابع تبدیل از قاعده میسون:



۱- دیاگرام شامل یک loop باشد

$$\text{تابع تبدیل } T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{حاصل ضرب توابع در مسیر پیشرو}}{1 \mp \text{حاصل ضرب توابع در مسیر بسته}}$$

علامت خلاف جهت علامت فیدبک

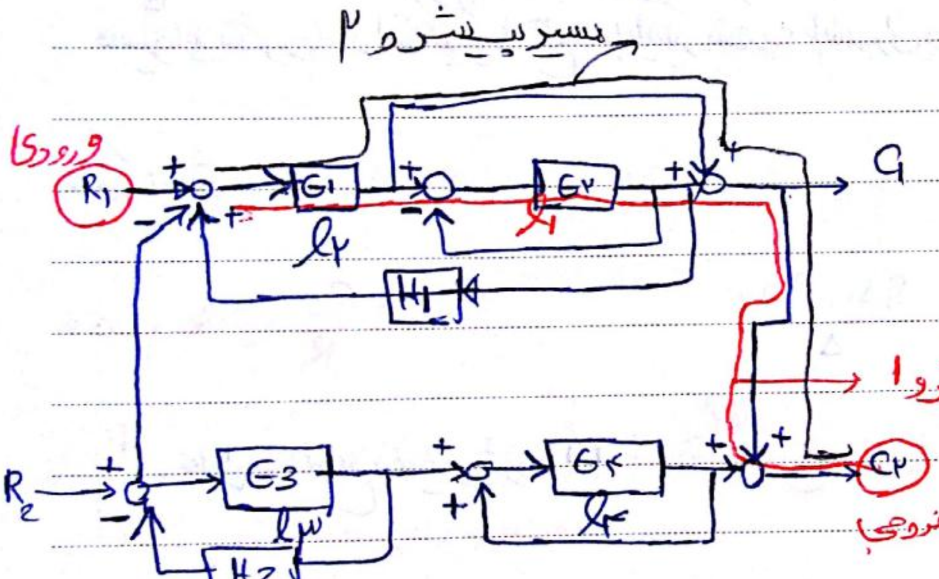
علامت ⊖ ← برای فیدبک ⊕

علامت ⊕ ← برای فیدبک ⊖

$$T(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H_1 H_2}$$

$$U \longrightarrow \boxed{T(s)} \longrightarrow y$$

قاعده میسون:



دو ورودی R_1 و R_2 ← 4 تابع تبدیل: $\frac{C_1}{R_1}$ ، $\frac{C_1}{R_2}$ ، $\frac{C_2}{R_1}$ ، $\frac{C_2}{R_2}$

دو خروجی C_1 و C_2

با اعمال هر بار قاعده میسون به یک تابع تبدیل می رسیم.

اگر $R(s)$ ورودی و $C(s)$ خروجی باشد:

تابع تبدیل بین خروجی $C(s)$ و ورودی $R(s)$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$$

$$K=1: \quad T(s) = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta}$$

$$K=3: \quad T(s) = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta}$$

$$K=2: \quad T(s) = \frac{P_2\Delta_2 + P_1\Delta_1}{\Delta}$$

K: تعداد مسیرهای پیشرو (تعداد مسیرهایی که از ورودی مورد نظر به خروجی مورد نظر می‌رسیم)

مسیرهای پیشرو می‌توانند یکدیگر را قطع یا با یکدیگر مشترک باشند ولی هر مسیر نباید خودش را قطع یا با خودش مشترک باشد.

هدف محاسبه $\frac{C_2}{R_1}$:

$$K=2 \Rightarrow T(s) = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

P_k: حاصل ضرب توابع در مسیر پیشرو kام با در نظر گرفتن علامت سیگنال‌ها در جمع‌کننده و با در نظر گرفتن نقاط وابسته به مسیرهای پیشرو

علامت توابع در جریان‌ها

$$P_1 = \oplus G_1 G_2 \longrightarrow \text{مسیر پیشرو 1}$$

$$P_2 = \oplus G_2 \longrightarrow \text{مسیر پیشرو 2}$$

Δ: دترمینان دیاگرام (در مخرج تابع تبدیل تعیین کننده) $\det|sI - A|$

Subject
Date

فقط وابسته به لوپ ها یا مسیرهای بسته است.

$$l_1 = -G_2$$

$$l_2 = +G_1 G_2 H_1$$

$$l_3 = -G_3 H_2$$

$$l_4 = G_4$$

می‌تواند وجود داشته باشد.

$\Delta = 1 -$ (مجموع تمام لوپ‌های دیاگرام) + (مجموع حاصل‌ضرب دو به دو لوپ‌های مستقل)

$-$ (مجموع حاصل‌ضرب ۳ به ۳ لوپ‌ها مستقل) + (" " ۴ به ۴ " ")

لوپ‌ها مستقل ← عبارتند از حلقه‌های بسته‌ای که هیچ ارتباطی (نقطه مشترک یا بخش مشترک) با یکدیگر نداشته باشند.

$$\Delta = 1 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + (l_1 l_3 + l_1 l_4 + l_2 l_3 + l_2 l_4 + l_3 l_4) - (l_1 l_3 l_4 + l_2 l_3 l_4)$$

لوپ‌های دو به دو مستقل: $(l_3, l_4), (l_1, l_4), (l_1, l_3)\ (l_1, l_4)\ (l_2, l_4)$

لوپ‌های ۳ به ۳ مستقل $= l_1 l_3 l_4$

$l_2 l_3 l_4$

P4PCO

Δ_k:

اگر در تست مخرج ها برابر بود دنباله ی به محاسبه مخرج نداریم. و فقط صورت را حساب می کنیم

Δ_k: هر دو مسیر پیشرو و مسیرهای بسته حالت دارند

بخشی از Δ که مسیر پیشرو k ام در آن حذف شود برای محاسبه Δ_k مسیر پیشرو k ام را حذف می کنیم لوپ هایی که با حذف این مسیر حذف شود (نیازی به حذف کامل لوپ نیست بخشی از لوپ یا حتی نقطه ای از آن حذف شود کافی است) را در فرمول Δ صفر قرار می دهیم

آنچه از Δ می ماند Δ_2 است.

$$\Delta_1 = \Delta \Big|_{l_1, l_2 = 0} = 1 - (l_3 + l_4) + (l_3 l_4)$$

$$\Delta_2 = 1 - (l_2 + l_3 + l_4) + (l_1 l_3 + l_1 l_4 + l_3 l_4) - (l_1 l_3 l_4 + \cancel{l_2 l_3 l_4})$$

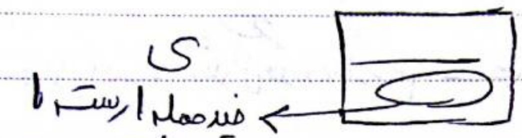
معادلات و تعیین از مدل های ترسیمی:

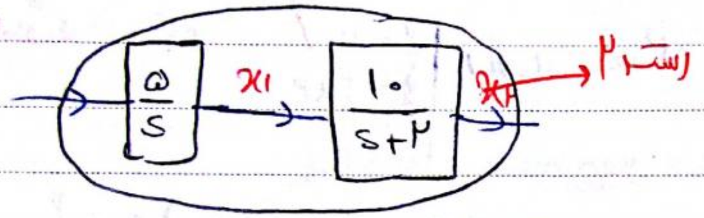
یادآوری جبر ⇐ A, b, c, d معلوم مجهول

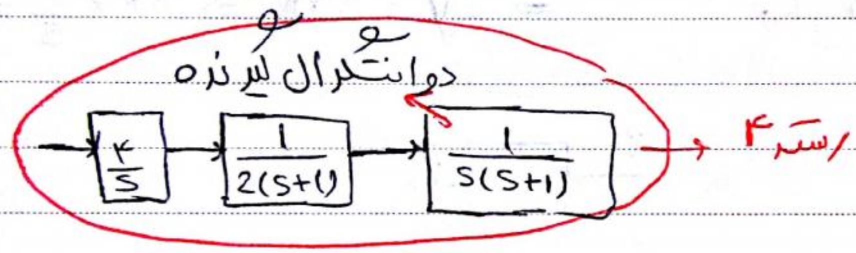
* تعداد هر انتگرال گیرنده یک متغیر وضعیت قرار می گیرد

به ازای هر انتگرال گیرنده یک متغیر وضعیت یک انتگرال گیرنده وجود دارد.

n = تعداد انتگرال گیرنده = رتبه سیستم







$A_{n\times n}$

$b_{n\times 1}$

$c_{1\times n}$

$d_{1\times 1}$

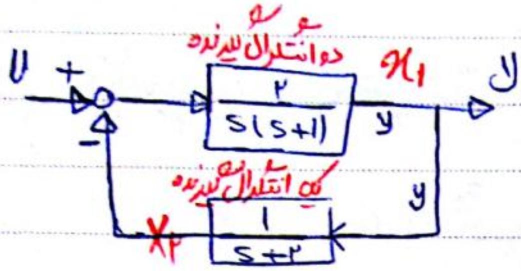
مکان متغیرها وضعیت = تعداد هر انتگرال گیرنده:

مکان آن ها در مسئله مشخص شده است

مکان آن ها در مسئله مشخص نشده است

با توجه به اطلاعات مسئله بایستی مکان صحیح متغیرهای وضعیت را تعیین کنیم

مثال) مطلوب است ماتریس ها A و b و c و d



سیستم رسته ۳ ← زیرا سه انتگرال گیرنده داریم ← ۳ متغیر وضعیت ← x_1, x_2, x_3

اطلاعات مسئله:

$$\dot{y} = x_1 \checkmark$$
$$\ddot{y} = 2x_3$$

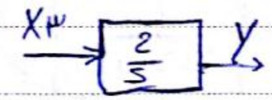
اطلاعات مسئله

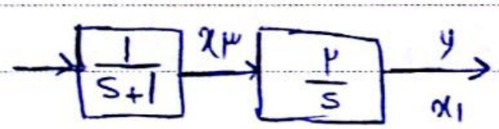
$\Rightarrow sy = 2X_3 \Rightarrow X_3 \times \frac{2}{s} = Y$

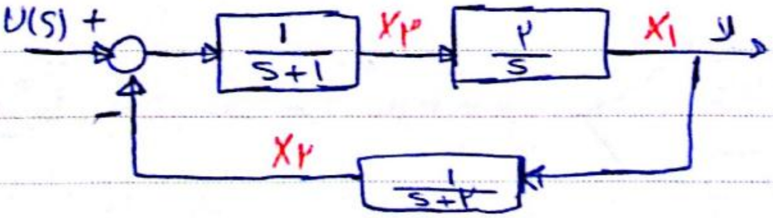
به جای X_2 نمی توان x_3 قرار داد زیرا

$\cancel{y \times \frac{1}{s+2} = X_3}$

که مغایرت دارد.







مرحله ۱) $y = x_1 = cx + du \Rightarrow c = [1 \ 0 \ 0] , \ d = 0$

توجه: در مرحله اول سراغ بدست آوردن c برویم.

مرحله اول ستون‌های محاسبه c را از تعریف y

〃 دوم 〃 : محاسبه b (ورودی‌ها به ~~متغیرهای وضعیت~~ وضعیت در مسیر

با ورودی به هر متغیر وضعیت در مسیر پیشرو مستقیماً اثر کند المان مربوطه

در b غیر صفر و بقیه صفرانند.

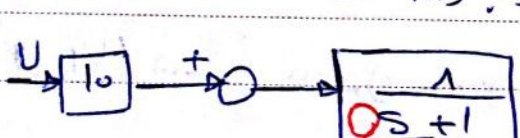
$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \neq 0 \end{bmatrix}$$

$10 \times 8 = 80$

حاصل ضرب اعداد قرار گرفته در صورت توابع تبدیل مسیر پیشرو

تا رسیدن به اولین متغیر وضعیت

که اینجا x_3 است.



ضریب s عدد یک باشد اگر نبود فاکتور بگیریم و در صورت بیاوریم.

مقادیر ماتریس A :

$$\begin{array}{r c l} \text{معادله وضعیت ①} \rightarrow & & \text{انتگرال گیرنده‌ای که خروجی } x_1 \text{ دارد} \\ \text{معادله وضعیت ②} \rightarrow & A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \text{〃 〃 〃 〃 } x_2 \text{ دارد} \\ \text{معادله وضعیت ③} \rightarrow & & \text{〃 〃 〃 } x_3 \text{ دارد.} \end{array}$$

سطر اول A

$x_3 \rightarrow \boxed{\frac{2}{s}} \rightarrow x_1$

$$x_3 \times \frac{2}{s} = x_1 \Rightarrow \underbrace{2x_3 = s\,x_1}_{\text{لاپلاس}}$$

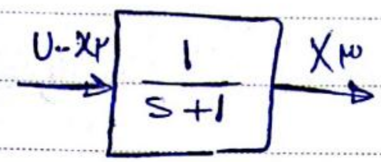
$$\Rightarrow \underbrace{\dot{x}_1 = 2x_3}_{\text{زمان}}$$

سطر دوم A :

$$x_1 \times \frac{1}{s+2} = X_2 \Rightarrow sX_2 + 2X_2 = X_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2$$

سطر سوم A



$$U - x_2 = sX_3 + X_3 \Rightarrow \dot{x}_3 = -x_2 - x_3 + 1U$$

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حل تست‌های ۷۱-۷۲ ۵- دو مخزن ← رسته ۲

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = x_1 =$ خروجی $\Rightarrow C = [1 \quad 0]$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

مانند دو مخزن سیالاتی
که به هم وصل هستند.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} b$$

=

Subject
Date

مخرج تابع تبدیل با هم متفاوت هستند پس $|SI-A|$ را بدست می آوریم.

$$\begin{vmatrix} S+1 & -1 \\ -1 & S+2 \end{vmatrix} = S^2+3S+1 \rightarrow \text{گزینه ۲ و ۴}$$

رد

$$\text{الحاقی } (SI-A) = \begin{bmatrix} S+2 & 1 \\ 1 & S+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = S+2$$

$[1 \quad 0]$

$\underline{\underline{\text{گزینه ۳}}}$

۱۰

۴۲ـ۴۳ ـ۷

$$G(S) = C(SI-A)^{-1}b+d$$

$$y = Q_2 = \frac{x_2}{R} \Rightarrow C = [0 \quad 1] \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R \to 1$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad |SI-A| = \begin{vmatrix} S+2 & -1 \\ -1 & S+2 \end{vmatrix}$$

$$= S^2+4S+3 = (S+1)(S+3)$$

$$[0 \quad 1] \begin{bmatrix} S+2 & 1 \\ 1 & S+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(S+3)(S+1)} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

حال خروجی را برابر Q_3 می گیریم:

$$y = Q_3 = \frac{x_1 - x_2}{R} \Rightarrow C = [1 \quad -1]$$

P4PCO

$$[1 \quad -1] \begin{bmatrix} S+2 & 1 \\ 1 & S+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$