Subject
Date

$$= \frac{S+1}{(S+1)(S+3)} = \frac{1}{S+3}$$ ۴ ترتیب

۹۲-۹۳-۸

$$G(S) = \frac{X(S)}{P(S)}$$

$$\frac{P - P'}{R} = Q = A \times \dot{x} \Rightarrow P - P' = R \times \overset{\text{دبی}}{Q} = RA \times \dot{x}$$

$$P - P' \to \frac{F}{A}$$

$$AP - F = RA^2 \dot{x} \longrightarrow AP - (m\ddot{x} + Kx) = RA^2 \dot{x}$$

$$m\ddot{x} + RA^2\dot{x} + Kx = A \times P$$

$$m\ddot{x} + Kx = F$$

$$ms^2X + RA^2sX + KX = A \times P$$

$$\frac{X}{P} = \frac{A}{ms^2 + RA^2s + K} \longrightarrow$$ ۲ ترتیب

تا مسئله ۱۹ حل شود ده

۸۷-۸۸ ۱۱۲) سیستم در تعادل ← ارتفاع مخازن تغییرات نسبت به زمان ندارد

$$U = 1 = x_1 - x_2 \longrightarrow$$ تفاوت x_1 و x_2 باید ۱ باشد

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \implies$$ در تعادل

دبی خروجی = دبی ورودی(S)

$$\frac{x_1 - x_2}{R - 1}$$

PAPCO

Subject
Date

معادلات دینامیکی از تابع تبدیل : (سیستم SISO)

$G(s)$ معلوم $\longrightarrow A, b, c, d =$ ؟

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}b + d$$

$A_{n\times n}$ $B_{n\times 1}$ $C_{1\times n}$ $d_{1\times 1}$, $G(s)_{1\times 1}$

اسکالر

n: رتبه سیستم

— منحصر به فرد نیست یعنی از تابع تبدیل تعدادی بی شماری A و b و c و d بدست می آید

$$G(s) = \frac{\overbrace{B(s)}^{\text{چندجمله ای صورت}}}{\underbrace{A(s)}_{\text{چندجمله ای مخرج}}}$$

m: درجه چندجمله ای صورت

n: درجه چندجمله ای مخرج

$$m \leq n$$

$$G(s) = \frac{\overbrace{C.adj(sI-A)b}^{<n} + d\times det(sI-A)}{\underbrace{det(sI-A)}_{n}}$$

$d = 0 \implies m < n$

$d \neq 0 \implies m = m$

ابتدا تابع تبدیل داده شده d را پیدا می کنیم

اگر $m < n \implies d = 0$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+5} \qquad m<n \implies d=0$$

اگر $m = n \implies d \neq 0$ $\qquad G(s) = \dfrac{s^2+1}{4s^2+3s+1}$

$\implies m = n \implies d \neq 0$

P4PCO

$\frac{1}{4}(4s^2+3s+10)$

$$= \frac{1\left(s^2+\frac{3}{4}s+\frac{10}{4}\right)-\frac{3}{4}s-\frac{6}{4}}{4s^2+3s+10} = \frac{1}{4}+\frac{-\frac{3}{4}s-\frac{6}{4}}{4s^2+3s+10} \Rightarrow d=\frac{1}{4}$$

درجه ۱ — درجه مخرج = ۲

درجه صورت کمتر از مخرج

برای محاسبه d در شرایطی که $d\neq 0$ ابتدا تابع تبدیل را به فرم زیر تبدیل می‌کنیم :

$$G(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B'(s)}{A(s)}+d$$

که $B'(s)$ درجه کمتر از $A(s)$ دارد در نتیجه عدد باقی مانده d است.

d معلوم است

$$G(s)=\frac{B'(s)}{A(s)}$$

درجه $B'(s) < A(s)$

$$C, b, A \Leftarrow$$

درجه صورت باید کمتر از مخرج باشد

امثال (الف) $G(s)=\frac{s+1}{s^2+3s+2}$ (a_0, a_1; b_0, b_1, b_2)

ب) $G(s)=\frac{1}{s+5}$ (a_0; b_0, b_1)

ج) $G(s)=\frac{5s+10}{2s^2+4s+5}$ (a_0, a_1; b_0, b_1, b_2)

$\rightarrow d=0$

P4PCO

روش ۱ و روش ۲ :

$$G(s)=\frac{a_0 s^{n-1}+a_1 s^{n-2}+\dots+a_{n-2}s+a_{n-1}}{b_0 s^n+b_1 s^{n-1}+\dots+b_{n-1}s+b_n}$$

حداقل یک درجه کمتر است.

الف $\begin{cases} a_0=1,\ a_1=1 \\ b_0=1,\ b_1=3,\ b_2=2 \end{cases}$

ب $\begin{cases} a_0=1 \\ b_0=1\quad b_1=5 \end{cases}$

ج $\begin{cases} a_0=5 \quad a_1=10 \\ b_0=2\quad b_1=4\quad b_2=5 \end{cases}$

روش ۱:

$$\underset{n\times n}{A}=\begin{bmatrix} -\frac{b_1}{b_0} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{b_2}{b_0} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\frac{b_{n-1}}{b_0} & \vdots & & & 1 \\ -\frac{b_n}{b_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

یک‌ها روی یک پله بالاتر از قطر قرار می‌گیرد و در هر سطری به غیر از آخری دو المان غیرصفر داریم جز آخری

b_0

$-\dfrac{\text{ضرایب مخرج به ترتیب}}{\text{ضرایب اولین جمله مخرج}}$

$$b=\begin{bmatrix} \frac{a_0}{b_0} \\ \frac{a_1}{b_0} \\ \vdots \\ \frac{a_{n-2}}{b_0} \\ \frac{a_{n-1}}{b_0} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$\dfrac{\text{ضرایب صورت}}{b_0}$

روش ۲

Subject
Date

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times n}$$

در تمرین‌ها الا هر سه ماتریس مانند این روش بود یعنی A و b و C دقیقاً مانند اینجا بود آن روش

صحیح است و در غیر این صورت غلط است.

روش دوم 8: ستون اول را حول آخرین المان لولا کرده و در آخرین سطر می‌اندازیم. (ساعتگرد)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 1 \\ -\frac{b_n}{b_0} & -\frac{b_{n-1}}{b_0} & \cdots & -\frac{b_2}{b_0} & -\frac{b_1}{b_0} \end{bmatrix}$$

را حول آخرین عنصر لولا کرده و می‌چرخانیم (ساعتگرد) و C روش دوم حاصل می‌شود.

$$C = \begin{bmatrix} \frac{a_{n-1}}{b_0} & \frac{a_{n-2}}{b_0} & \cdots & \frac{a_1}{b_0} & \frac{a_0}{b_0} \end{bmatrix}_{1\times n}$$

C را حول اولین عنصر لولا کرده و پادساعتگرد می‌چرخانیم.

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

الف)

$$G(s) = \frac{\overset{a_0 \quad a_1}{s+1}}{\underset{b_0 \quad b_1 \quad b_2}{s^2+3s+2}}$$

درجه مخرج تابع = رتبه سیستم

$a_0 = 1$

$a_1 = 1$

$b_0 = 1$

$b_1 = 3$

$b_2 = 2$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

یک سطر مانده به آخر، آخرین عضوش یک است.

روش ۲

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

روش ۱

$$G(s) = \frac{\overset{a_0}{1}}{\underset{b_0 \quad b_1}{s+5}}$$

رتبه سیستم = ۱

$$\frac{-b_1}{b_0} = A_{1\times1} = -5 \qquad b_{1\times1} = 1 = \frac{a_0}{b_0} \qquad C_{1\times1} = 1$$

$a = -5 \quad b = 1 = C$ روش ۱

روش ۲:

$C = 1 = b$ روش ۱

$$G(s) = C(sI-A)^{-1} b + \cancel{d}^{\,0} = 1 \times \frac{1}{s+5} \times 1 = \frac{1}{s+5}$$

ج)

روش اول :

$$a_0 = 0$$

$$G(s) = \frac{10 \longrightarrow a_1}{\underset{b_0}{2s^2} + \underset{b_1}{4s} + \underset{b_2}{5}}$$

مرتبه ۲

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}_{2\times1} \quad 5 \leftarrow \frac{10}{2} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{1\times2}$$

روش دوم :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$$

روش ۳ و ۴

$$G(s) = \frac{\text{چند جمله ای در صورت حداکثر از درجه } n-1}{(s+P_1)(s+P_2)\cdots(s+P_n)}$$

$$P_1 \neq P_2 \neq P_n$$

در این روش در مخرج تابع تبدیل عبارات تجزیه شده است. (تفاوت با روش قبلی)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

می توان مخرج را در هم ضرب کرد و از روش قبلی استفاده کرد یا برعکس یعنی می توان مخرج را تجزیه کرد و از روش ۳ و ۴ استفاده کرد.

$$E(s) = \frac{\alpha_1}{s+p_1} + \frac{\alpha_2}{s+p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s+p_n}$$

مثال :
$$E(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{\alpha_1}{s+\underset{p_1}{1}} + \frac{\alpha_2}{s+\underset{p_2}{2}} + \frac{\alpha_3}{s+\underset{p_3}{3}}$$

$\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$

روش ۳ :

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & & 0 \\ & -p_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری که روی قطر آن ریشه های مخرج است.

در کنترل‌پذیری‌ها اگر A قطری بود از روش ۳ و ۴ رفته

$$b = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad c = [1 \; 1 \; \dots \; 1]$$

روش ۴ :

$$A_{روش ۴} = A_{روش ۳}$$

A مانند روش قبل است

$$\begin{bmatrix} -p_1 & & \\ & -p_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \\ & & & -p_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \dots \;\; \alpha_n]$$

در روش ۳ و ۴ چیز خاصی نداریم

Subject
Date

مثال ۱) $E(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{-1}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3}$

روش ۳ :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

روش ۴ :

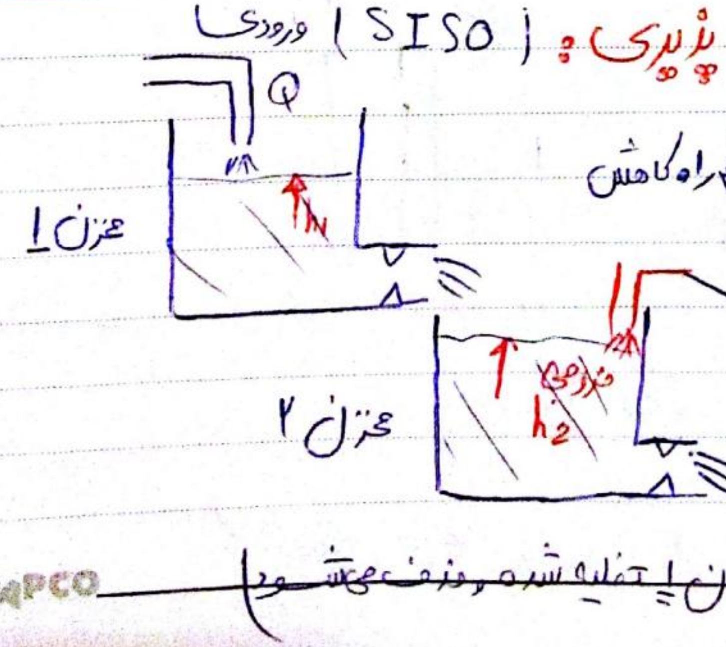
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$E(s)$ روش ۳ و ۴

$\downarrow \uparrow$

روش ۱ و ۲ $\rightarrow$ بعضی مواقع (زمانی که مخرج تابع تبدیل قابل تجزیه باشد.)

مبحث کنترل پذیری - مشاهده پذیری : (SISO)



اگر خروجی را h بگذاریم رتبه سیستم را کاهش داده ایم. زیرا دیگر مخزن ۲ روی h تأثیری ندارد

اگر ورودی اینجا باشد

~~باز سیستم رتبه اش پایین می آید (مخزن ۱ تخلیه شده و حذف می شود)~~

بنابراین معقول این است که ورودی به مخزن ۱ وارد شود و خروجی از مخزن ۲ گرفته شود

▪ کنترل پذیر ← سیستمی کنترل پذیر است که ورودی بر تمام متغیرهای وضعیت تاثیر بگذارد. ▪

سیستم
- کنترل پذیر : ورودی به مخزن ۱ در مثال قبل
- کنترل ناپذیر : ورودی بر همه متغیرهای وضعیت تاثیری نگذارد مانند ورودی به مخزن ۲ در مثال قبل

کنترل پذیری ← ذات سیستم + محل ورودی
b A

مشاهده پذیری: سیستمی مشاهده پذیر است که خروجی از تمام متغیرها وضعیت تاثیر ببیند.

سیستم‌ها
- مشاهده پذیر ← خروجی از مخزن ۲ در مثال قبل
- مشاهده ناپذیر ← خروجی از مخزن ۱ در مثال قبل

مشاهده پذیری ← ذات سیستم + محل خروجی
C A

درصورتی که معادلات وضعیت معلوم باشند A, b, c ✓ چگونه می توان کنترل پذیری

یا مشاهده پذیر بودن سیستم را بررسی نمود؟

روش ۱: استفاده از روابط تئوری: (حداکثر ابعاد ماتریس ها ۲ باشد)

بررسی کنترل پذیری: ابتدا ماتریس S را به شکل زیر می نویسیم:

$$S = \left[\underset{\text{ستون اول}}{b} \quad \underset{\text{ستون دوم}}{Ab} \;\Big|\; A^2b \dots A^{n-1}b \right]$$

۲ است

دترمینان S را بدست می آوریم. ۲ حالت پیش می آید:

$$|S| \begin{cases} = 0 & \text{ماتریس S سینگولار} \quad \text{سیستم کنترل ناپذیر} \\ \neq 0 & \text{ماتریس S ناسینگولار} \quad \text{سیستم کنترل پذیر} \end{cases}$$

عدد مخالف صفر است

بررسی مشاهده پذیری: ماتریس V را تشکیل می دهیم

$$V = \left[c' \quad A'c' \quad A'^2c' \dots A'^{n-1}c' \right]$$

ترانسپوز C ترانسپوز A

$$|V| \begin{cases} = 0 & \text{ماتریس V سینگولار} \quad \text{سیستم مشاهده ناپذیر} \\ \neq 0 & \text{ماتریس V ناسینگولار} \quad \text{سیستم مشاهده پذیر} \end{cases}$$

بررسی کنترل پذیری - مشاهده پذیری مثال قبل:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ورودی مخزن ۱

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

خروجی مخزن ۲

کنترل پذیری

$$S = \begin{array}{cc} b & A \cdot b \\ \end{array}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |S| = 1 \neq 0$$ کنترل پذیر

مشاهده پذیری:

$$V = \begin{bmatrix} C' & A'C' \end{bmatrix} \qquad n = 2$$

$$A'C' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|V| = -1 \neq 0$$ سیستم مشاهده پذیر

روش تستی: مشابه سازی با سیستم بالایی

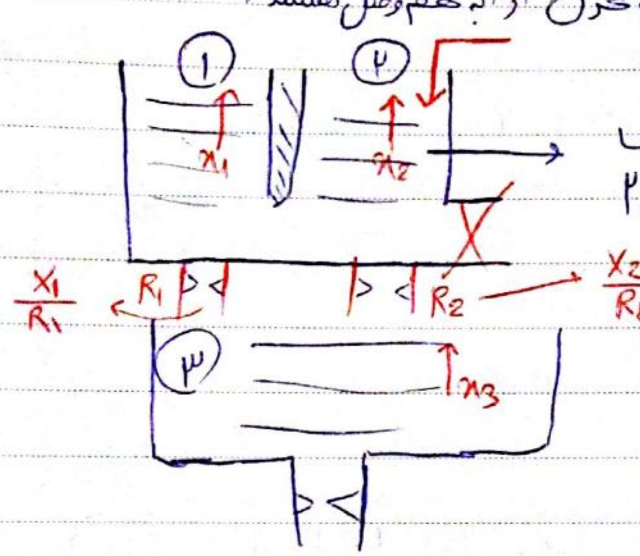
مستقیم یا غیر مستقیم از هم تأثیر بپذیرند

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

با عدد کاری نداریم ۱

نشان می‌دهد ← نشان می‌دهد خروجی از مخزن ۲ گرفته می‌شود

سطر اول و دوم نشان می‌دهد ← مخزن ۱ و ۲ به هم وصل هستند.



وچون دو هم متغیرها وضعیت تأثیر می‌گذارد ← کنترل پذیر

مشاهده ناپذیر ← خروجی x_2 از خروجی x_3 تأثیر نمی‌گیرد

فصل ۳

پاسخ زمانی سیستم‌های خطی: ———▷ $y(t) = ?$

مدل ریاضی: معادلات حالت:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + bu \\ y = CX + du \end{cases}$$

بردار حالت State vector

خروجی یا رفتار یا عکس العمل یا پاسخ

$\dot X = AX + bu$ ← حل n معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول

$X =$ بردار حالت

$y = CX + du$

حل معادلات حالت : $\dot X = AX + bU$

مشابه معادله ـ دیفرانسیل

$X = X_h + X_p$

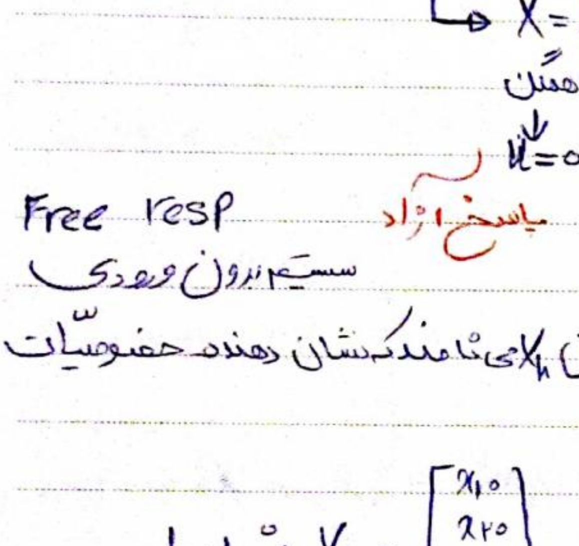
همگن ← $U = 0$ ، خصوصی ها

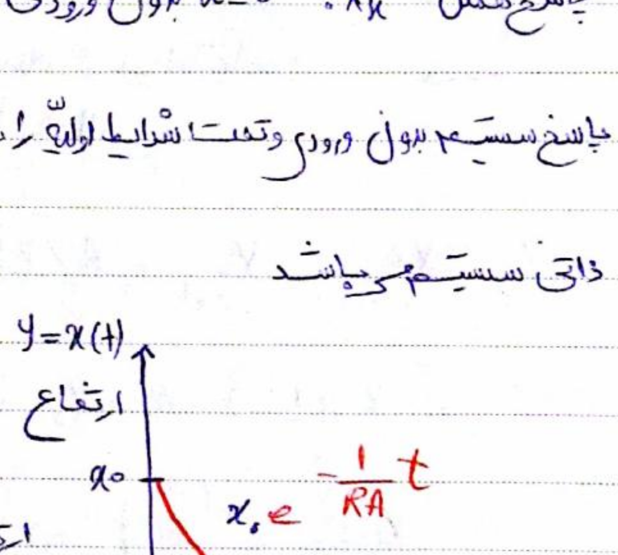
پاسخ همگن X_h : $U = 0$ بدون ورودی   پاسخ آزاد   Free resp
سیستم بدون ورودی

پاسخ سیستم بدون ورودی و تحت شرایط اولیه را پاسخ همگن X_h می نامند که نشان دهنده خصوصیات ذاتی سیستم می باشد

شرایط $X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{30} \end{bmatrix}$

بردار شرایط اولیه





مخزن در حال تخلیه شدن است.

مخزن تخلیه شد

$A\dot x = -\frac{x}{R}$ سیستم مرتبه ۱

پاسخ زمانی

معادله حالت $\dot x = -\frac{1}{RA}x = ax \Rightarrow x(t) = e^{at}x_0$

$\dot x - ax = 0$

$$\dot{x} = a \, e^{at} x_0 \rightarrow x(t)$$

$$\dot{x} = ax \qquad y(t) = x(t) = x_0 \, e^{-\frac{1}{RA} t}$$ → پاسخ زمانی سیستم بسته

!

سیستم بسته n بدون ورودی

معادلات وضعیت ؟

$$\dot{X} = AX$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \text{بردار حالت} \qquad y = CX$$

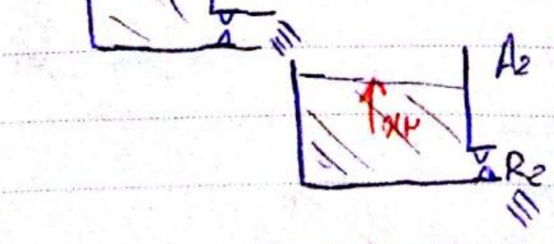
→ حل معادله حالت با استفاده از تبدیل لاپلاس

$$\underset{n\times 1}{SX(s)} - \underset{n\times 1}{X_0} = AX(s) \Rightarrow SX(s) - AX(s) = X_0$$

$$\Rightarrow X(s)\,(SI - A) = X_0 \Rightarrow X(s) = (SI - A)^{-1} X_0$$

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1} X(s) \Rightarrow X(t) = L^{-1}(SI - A)^{-1} X_0$$

ex) مطلوب است بردار حالت سیستم فیزیکی زیر؟



$$\begin{cases} x_{10} = 1 \\ x_{20} = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} A_1 = A_2 = 1 \\ R_1 = R_2 = 1 \end{aligned}$$

بردار حالت $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = ?$

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}(SI-A)^{-1}X_0$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad SI-A = \begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ -1 & S+1 \end{bmatrix}$$

$$(SI-A)^{-1} = \frac{(SI-A)\ \text{الحاقی}}{\text{دترمینان}\ (SI-A)} = \frac{\begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ 1 & S+1 \end{bmatrix}}{(S+1)^2} = \begin{bmatrix} \frac{S+1}{(S+1)^2} & 0 \\ \frac{1}{(S+1)^2} & \frac{S+1}{(S+1)^2} \end{bmatrix}$$

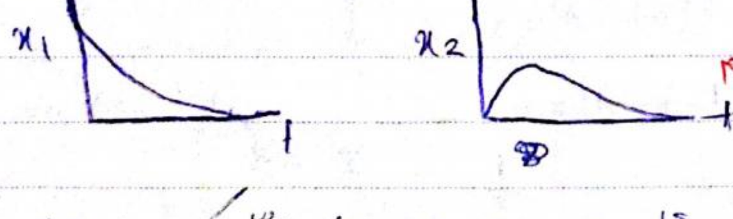
$$(SI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S+1} & 0 \\ \frac{1}{(S+1)^2} & \frac{1}{(S+1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(SI-A)^{-1} =$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{t} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{X_0} \begin{matrix} x_{10} \\ x_{20} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{-t} \\ x_2(t) = te^{-t} \end{cases}$$

مودهای سیستم

↓

شکل حرکتی سیستم



مودهای سیستم: مودهای سیستم توابع زمانی مشخص کننده نحوه تغییر متغیرهای

وضعیت سیستم در حوزه زمان

روش جوردن: نوشتن مدها

۱- با قرار دادن $t=0$ در پاسخ‌های بدست آمده نتایج را با شرایط اولیه داده مسئله مقایسه کنید

$1)\ e^{-t} \quad te^{-t}$ ✓ $\qquad 3)\ e^{-t} \quad \cancel{e^{-t}}$

$2)\ \cancel{2e^{-t}} \quad te^{-t} \qquad 4)\ \cancel{2e^{-t}} \quad e^{-t}$

$t=0 \rightarrow x_1(0)=2$

$x_{10}=1$

$x_{20}=0$

$5)\ e^{-t} \quad te^{-2t}$

گزینه اول و ۵ جواب می‌دهد. پس به بالا به سراغ مودسیستم رفت:

* چگونگی مودهای سیستم:

به طور کلی ... سیستم.

معادله مشخصه سیستم:

۱- $\Delta=0$ (زمانی که دیاگرام داریم)

۲- $G(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$ تابع تبدیل معلوم باشد $A(s)=0$

۳- معادلات وضعیت

$\det(sI-A)=0$

$|sI-A|=0 \xrightarrow[\text{برای مثال}]{} (s+1)^2=0 \rightarrow$ معادله مشخصه

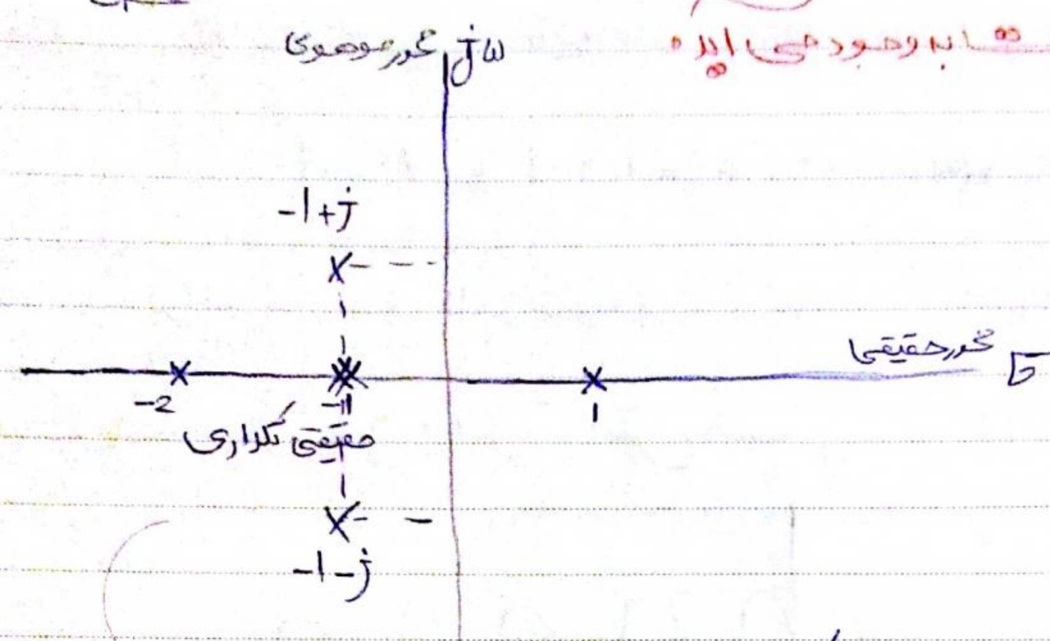
ریشه‌های معادله مشخصه (قطب‌ها سیستم)

حقیقی و تکراری ۱- و ۱-

مودهای سیستم

صفحه s

۴ حالت ها به وجود می‌آید



حالت ۳) حقیقی مکرر

$S = \sigma + j\omega$ — حالت ۲) موهومی مختلط مزدوج

(۳) $(s+1)^2 = 0 \Rightarrow -1, -1$ — حالت ۴) حقیقی مجزا

(۴) مثلاً $(s-1)(s+2) = 0$ — حالت ۱) موهومی خالص

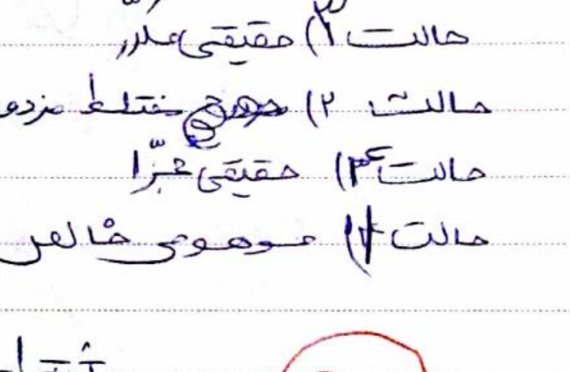
(۲) مثلاً $s^2 + 2s + 2 = 0 \Rightarrow s = -1 \mp j$

(۱) $s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s = \pm j$

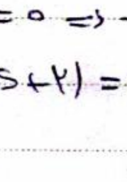
$\xi = 0$

حالت ۱) قطب ها موهومی خالص:

فرکانس بیشتر ← دورتناوب کمتر



$s^2 + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\omega_n$



$s^2 + \frac{K}{m} = 0$

جرم و فنر بدون دمپر

محور بدون استهلاک

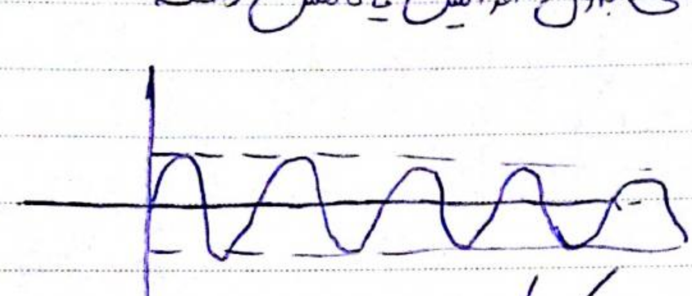
محور فرکانس ← زیرا هر مقداری روی این محور مشخص کننده ω است.

مودها: $\sin(\omega_n t)$ یا $\cos(\omega_n t)$ یا ترکیب این ها

$x_1(t) = 5\sin t$, $x_2 = 10\sin t$ یا $4\sin t$

$\cancel{x_1 = e^{t}}$ ← قطعاً مودها در پاسخ ها بایستی ظاهر شوند

حالت کاملاً نوسانی بدون افزایش یا کاهش دامنه



سیستم با فرکانس ω_n نوسان می‌کند که ω_n ضریب j در قطب سیستم است.

$s^2 + 4 = 0$ ← سیستم کاملاً نوسانی ← $s_{1,2} = \pm 2j \Rightarrow \omega_n = 2\frac{rad}{s}$

سیستم کاملاً نوسانی است و با فرکانس $2\frac{rad}{s}$ نوسان می‌کند

$\cancel{1)\ x(t) = \sin t}$

$2)\ x(t) = \sin 2t$ ← حتماً باید (ω_n) ظاهر شود

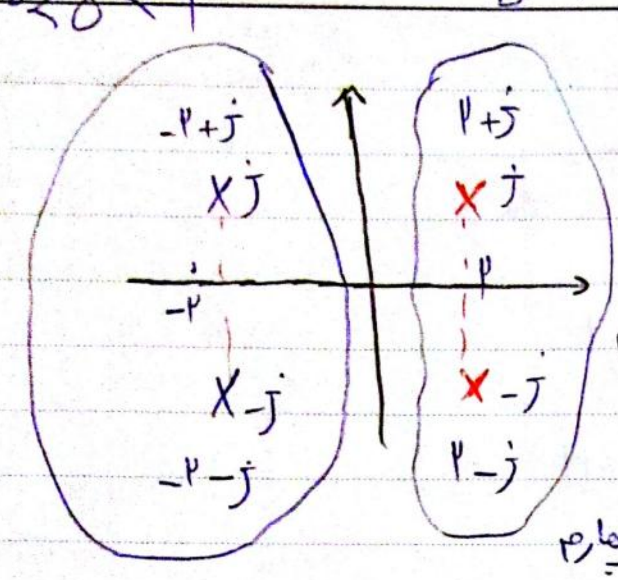
هرچه به مبدا نزدیک‌تر فرکانس طبیعی کمتر و دوره تناوب بیشتر می‌شود.

$s^2 + (k-1)s + 8 = 0 \longrightarrow if\ k = 1$ سیستم کاملاً نوسانی

← با فرکانس $2\sqrt{2}\frac{rad}{s}$ نوسان می‌کند

$0<\xi<1$ $\quad$ $-1<\xi<0$

حالت ۳) قطب ها مختلط مزدوج :



$S_{1,2} = \sigma \pm j\omega$

قسمت حقیقی یکسان

قسمت موهومی مزدوج

قطب یا هم در ربع اول و سوم یا در ربع دوم و چهارم قرار می گیرند.

$\xi = \dfrac{b}{2\sqrt{km}}$

نسبت استهلاک

Damping Ratio

$0<\xi<1$

یا

$-1<\xi<0$

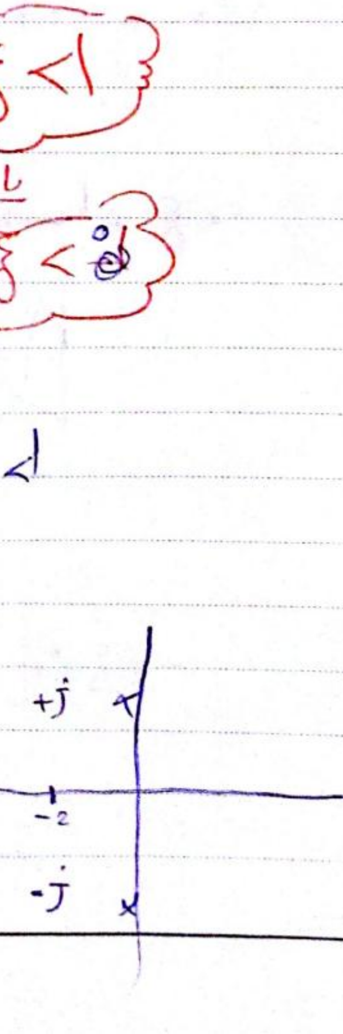
under Damped ← تحت میرا

معادله مشخصه $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ $\qquad 0<\xi<1$

$$S_{1,2} = \underbrace{-\xi\omega_n}_{\sigma_d} \pm \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n\, j$$

$\omega_d < \omega_n$

معادله مشخصه $s^2 + 4s + 5 = 0$ $\qquad s = -2 \pm j$



مودهای سیستم :

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n j$$

مودها : $e^{\sigma t}\sin\omega_d t$

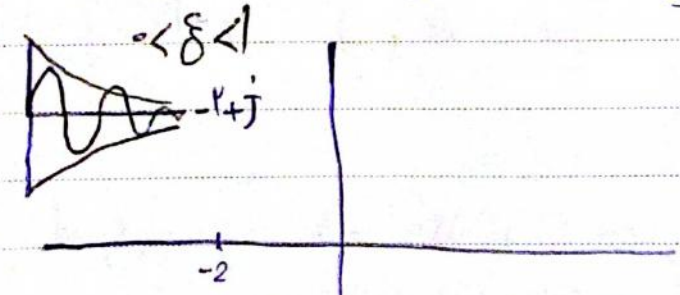
$$e^{\sigma t}\cos\omega_d t$$

$$e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t$$

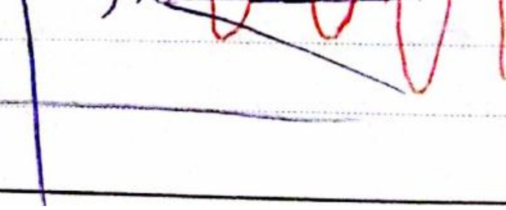
$$e^{-\xi\omega_n t}\cos\omega_d t$$

مثلاً : $s_{1,2} = -2 \pm j \rightarrow e^{-2t}\sin t$, $e^{-2t}\cos 2t$

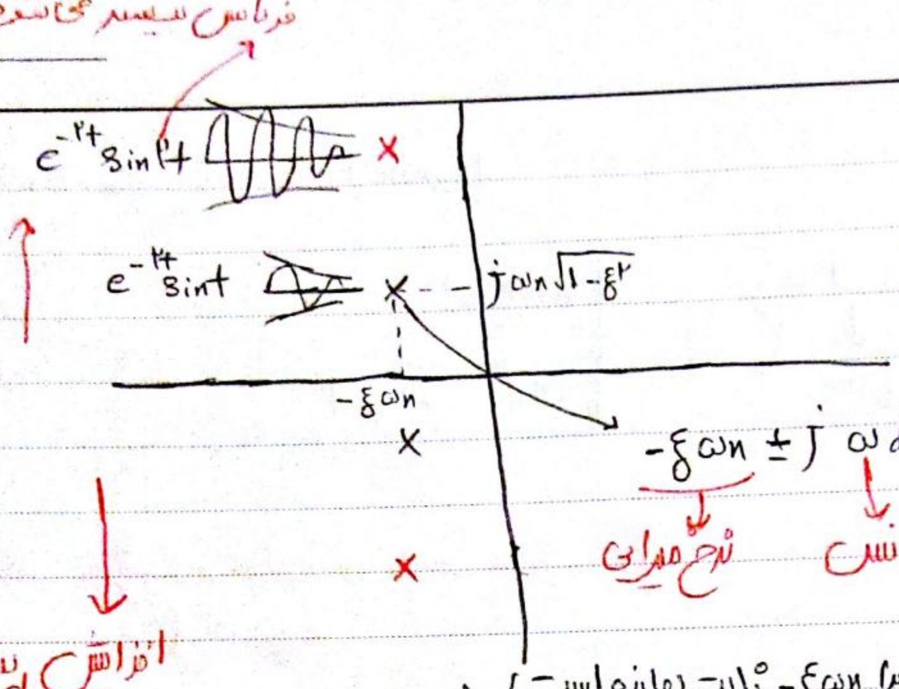
$0<\xi<1 \rightarrow e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t \longrightarrow$ نوسانی میرا



$-1<\xi<0 \rightarrow e^{\overbrace{-\xi\omega_n t}^{>0}}\sin\omega_d t \longrightarrow$ نوسانی ناپایدار



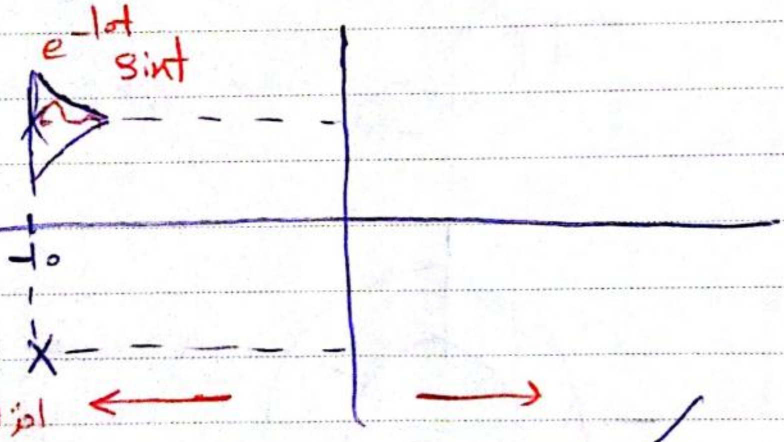
Subject
Date



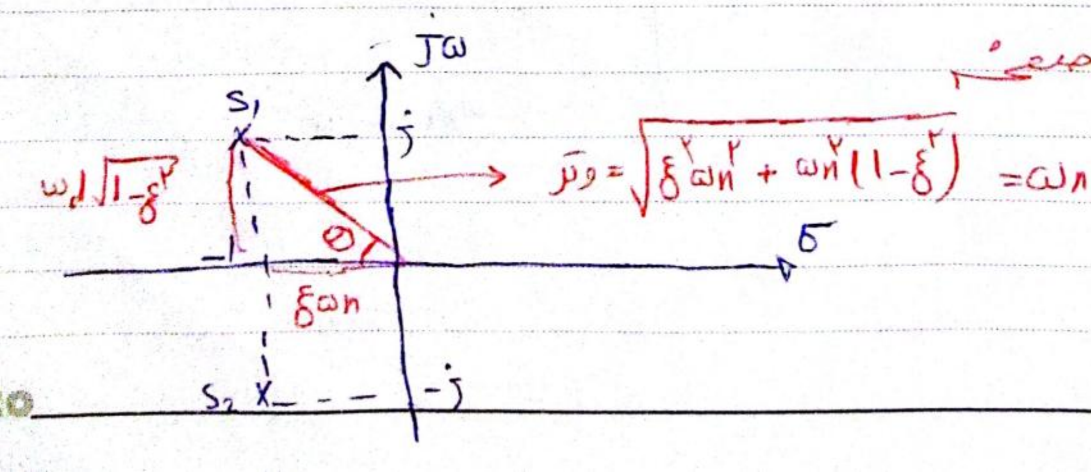
زیرا $\xi\omega_n$ ثابت مانده است

اما تعداد نوسانات بیشتر می‌شود ← rate میرایی ثابت ← $-\xi\omega_n = cte$

هرچه قدر از محور حقیقی فاصله بگیریم ← افزایش ω_d



فرکانس تغییری نمی‌کند ولی سریع‌تر میرا می‌شود.



مختصات $S_1 \Rightarrow \xi$ و ω_n (هندسی)

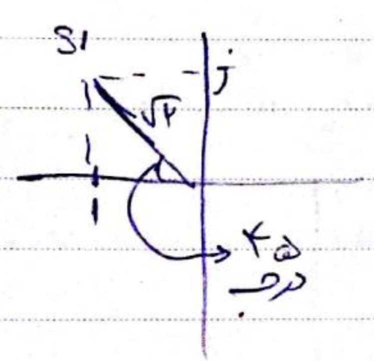
$S_1 = \underbrace{-2}_{\xi\omega_n} \pm \underbrace{j}_{\omega_d}$

$$\begin{cases} \xi\omega_n = 2 \\ \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 1 \end{cases}$$

فاصله $\omega_n \Rightarrow$ از ریشه به مبدا مختصات $= \omega_n =$ وتر
می‌شود وصل کنیم

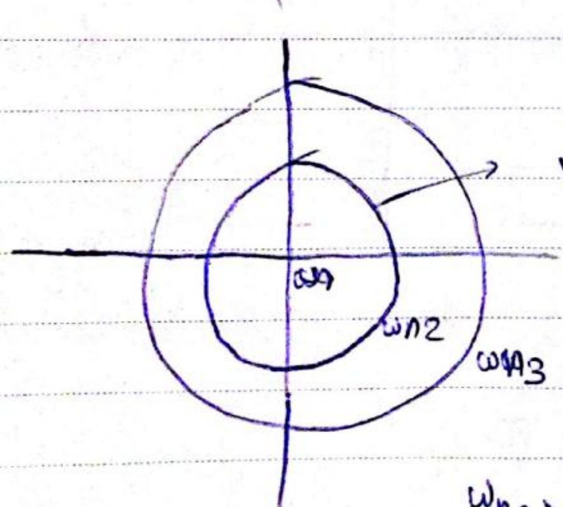
ω_n : فاصله ریشه در صفحه مختلط تا مبدا مختصات.

در این مثال :



$\omega_n\big|_{S_1} = \sqrt{2}\ \frac{rad}{s}$

نکته :



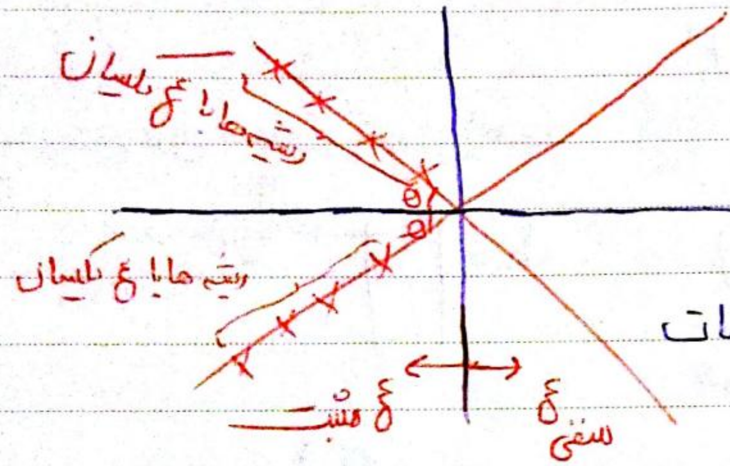
مکان هندسی ریشه‌ها با ω_n یکسان

$\omega_{n3} > \omega_{n2}$

$$\cos\theta = \frac{\xi\omega_n}{\omega_n} = \xi \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \xi}$$

در مثال : $\xi = \cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0/7 < 1$

که کوچکتر از یک است و باید هم باشد زیرا در صفحه قرار داریم.



نکته :

مکان هندسی ریشه ها با ξ یکسان خطوط شعاع رسم شده از مبدا مختصات هستند.

حل تست : تست ۶

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

مخزن ۲ و ۳ حذف می شوند $\Rightarrow$ سیستم رسته ۱ $\quad \frac{U_1}{Y_2} = R$

$$\text{سیستم رسته ۱} = \frac{1}{s+1}$$

حل تست ۹) سیستم SISO ← یک ورودی و خروجی (مخازنی که بین ورودی و خروجی تا شروع کدام است مدنظر ماست)

تمام مخازن مخزن بالا رد می‌شود زیرا پس از مدتی تخلیه می‌گردد

مخزن ۴ رد می‌شود زیرا ارتباط به خروجی سیستم ما ندارد.

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1} b + \cancel{d}^{\,0}$$

شماره‌بندی مخزن‌ها دست خودمان است.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ورودی به مخزن اول}$$

خروجی از مخزن سوم

$$\frac{1}{|sI - A|} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A \ \text{الحاقی} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(۱۳) ← المان

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 & 0 \\ -1 & s+2 & 0 \\ -1 & 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

ماتریس الحاقی ← ابتدا ترانهاده و سپس ترانسپوز

$sI - A$

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)\left((s+2)^2 - 1\right)} = \frac{s+2}{(s+1)(s^2 + 4s + 3)}$$

$$= \frac{s+2}{(s+1)(s+1)(s+3)} \longrightarrow \text{گزینه ۲}$$

Subject
Date

تست ۱۰)

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}b$$

معکوس ماتریس قطری = معکوس المان های قطری اصلی

$$[1\ 1\ 1\ 0]\begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} & & & \\ & \frac{1}{s+3} & & \\ & & \frac{1}{s+2} & \\ & & & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{5}{s+4} + \frac{2}{s+2} \longrightarrow 2$$ گزینه

تست ۱۱)

$$\frac{1}{|sI-A|}\,C = [2\ \ 1]\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{s+5}{s^2+s+1}$$ جواب تست غلط است.

ابتدا دترمینان را حساب می‌کنیم $\det|sI-A| = s(s+1)+1 = s^2+s+1$

تست ۱۳)

$y = x_1 \xrightarrow{\text{قرار می‌دهیم}}$ در خروجی x_1

$$x_2 = \dot{y} \Rightarrow X_2 = sY \Rightarrow \frac{Y}{X_2} = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$y = x_1 \rightarrow C = [1\ \ 0]$ ابتدا C را چک می‌کنیم ← گزینه حذف

$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ b را چک می‌کنیم ← ورودی به x_2 اثر کرده است

← گزینه ۱

PAPCO

تست ۱۱۹ گزینه ۳و۴ رد می شود $C = [1\ 0\ 0]$ ⇐ $y = x_1$

λها یکسان پس نیازی نداریم λها را محاسبه کنیم

در ماتریس A سطر اول دوم و سوم یکسان است و در سطر سوم تفاوت دارند پس کدی را چک میکنیم

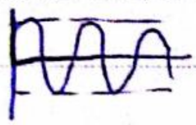
که خروجی آن x_3 است.

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_3$$
$$x_1 = 5x_3 + x_3$$

⟸ گزینه ۱

ادامه مودهای سیستم:

پاسخ سیستم ترکیبی است خطی از مودهای سیستم



$y(t) = f($مودهای سیستم$)$ خروجی یا پاسخ

معادله مشخصه
↓
قطب‌های سیستم
↓
مودهای سیستم
↓
پاسخ (خروجی)

قطب‌ها و محور موهومی

حالت ۱: موهومی خالص $\zeta = 0$ جرم و فنر بدون دمپر

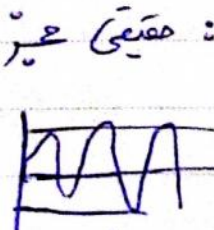
حالت ۲: $0<\zeta<1$ و $-1<\zeta<0$ جرم و فنر و دمپر

ربع صفحه اول و چهارم $-1<\zeta<0$

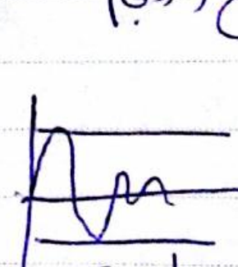
ربع دوم و سوم $0<\zeta<1$

حالت ۳: حقیقی مکرر

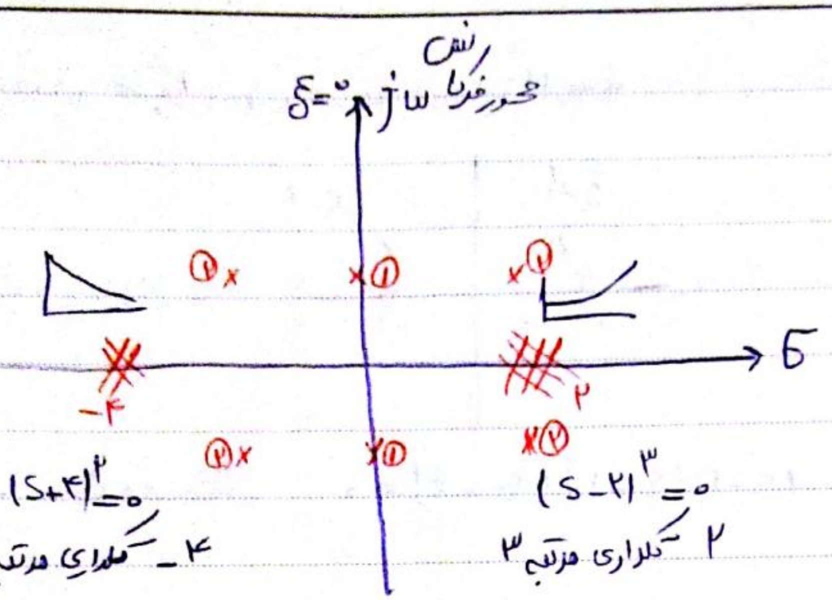
حالت ۴: حقیقی غیر ۱



نوسانی ناپایدار
$-1<\zeta<0$



$0<\zeta<1$
نوسانی پایدار



بحرانی

راستهلال $S_{1,2} = \sigma \pm j\omega$

$\sigma \rightarrow e^{\sigma t}$ نرخ میرایی یا نامیرا

$j\omega$: نوسانی — $\sin \omega t$

حالت ۳: قطب‌های حقیقی تکراری

: روی محور حقیقی σ (بدون نوسان)

میرا یا نامیرا
$\downarrow$ $\xi=-1$ $\downarrow$ $\xi=1$

$(s+\alpha)^k=0 \xrightarrow{\text{مودها}}$

$$\begin{cases} e^{-\alpha t} \\ te^{-\alpha t} \\ \frac{t^2}{2}e^{-\alpha t} \\ \vdots \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\alpha t} \end{cases}$$

k مرتبه تکرار ریشه

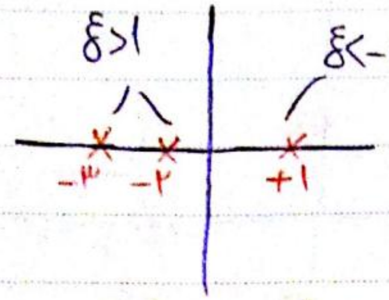
معادله مشخصه $(s+4)^2=0$

$e^{-4t},\ te^{-4t}$

$$(s-2)^3=0 \quad \begin{cases} e^{2t} \\ te^{2t} \\ t^2e^{2t} \end{cases}$$

✓ عبارت sin یا cos نداریم.

حالت ۴) قطب‌ها حقیقی مجزا : روی محور حقیقی مجزا هستند.



$(s-1)(s+2)(s+3) = 0$ معادله مشخصه ← مودها : e^{t} , e^{-2t} , e^{-3t}

حالت بدون نوسان است ($\omega = 0$)

معادله مشخصه $(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)\dots(s+\sigma_n) = 0$

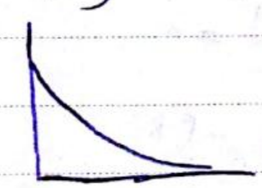
مودها : $e^{-\sigma_1 t}$, $e^{-\sigma_2 t}$, ... , $e^{-\sigma_n t}$

↓

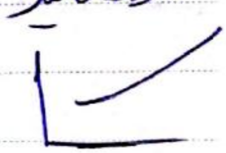
در اینجا دیگر t نداریم.

$\xi > 1$, $\xi < -1$

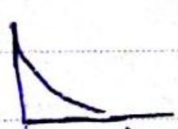
قطب‌ها روی محور حقیقی منفی باشند ← مودهای میرا



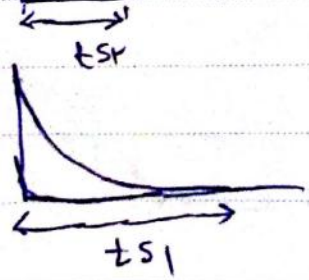
قطب‌ها روی محور حقیقی مثبت ← مودها ناپایدار



$\xi = 1$



$\xi > 1$



$t_{s1} > t_{s2}$

زمان رسیدن به تعادل $\xi > 1$ زیادتر است زیرا ξ بیشتری دارد.

منفی غالب منفی منفی

برای سیستمی با معادله مشخصه زیر چگونه رفتار (پاسخ) می‌کند؟

$$(s+10)(s+1)^2(s^2+1)(s^2+2s+2)=0$$

حقیقی مجزا — حقیقی تکراری — موهومی خالص — مختلط مزدوج

۳ و ۴

۱) بدون نوسان میرا ۲) کاملاً نوسانی ① ۳) نوسانی میرا ② ۴) نوسانی نامیرا

$s=-10$ ④

$s=-1,-1$ ③

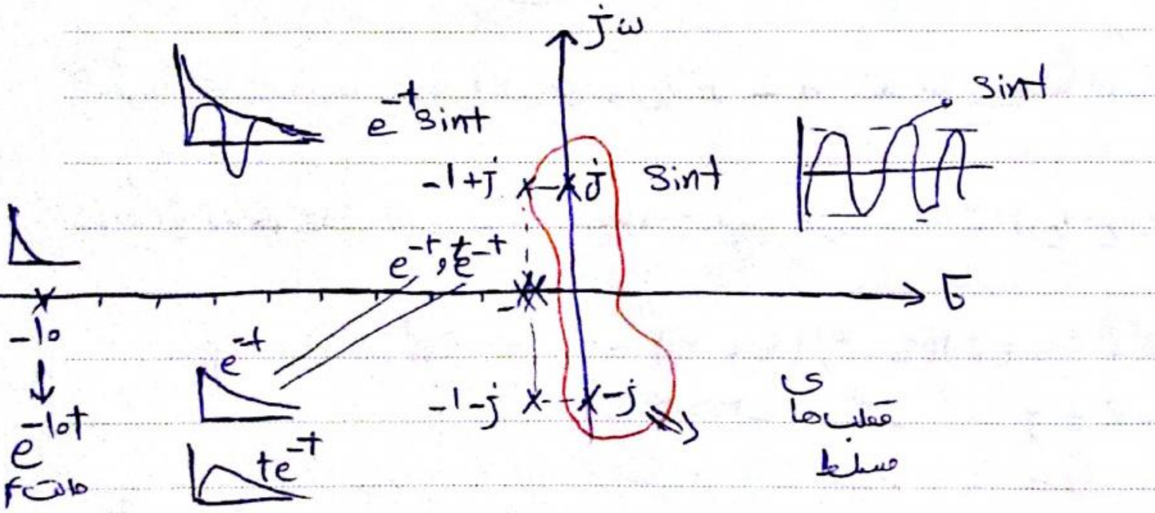
$s=\pm j$ ①

$s=-1\pm j$ ②

گزینه ۴ رد می‌شود → نوسانی میرا زیرا قسمت حقیقی منفی است

(نمایش‌ها)

قطب‌های مسلط و غالب:



$$y(t)=C_1e^{-10t}+C_2e^{-t}+C_3te^{-t}+C_4e^{-t}\sin t+C_5e^{-t}\cos t$$

$$+C_6\sin t+C_7\cos t$$

مابقی قطب‌ها غالب هستند.

Subject
Date

قطب‌های خنثی

ع منفی انرژی تولید می‌کند
و سیستم را ناپایدار می‌کند

قطب‌ها مسلط (غالب) ، قطب‌های هستند که نسبت به بقیه قطب‌ها رفتار سیستم را بیشتر تحت تاثیر

قرار می‌دهند. و لذا مودها آن‌ها نیز مودهای مسلط و غالب هستند و رفتار سیستم مطابق با آن‌ها

می‌باشد.

جواب مسئله گزینه ۲ است

یک سیستم مرتبه ۷ به یک سیستم مرتبه ۲ تبدیل شده گرده $(s^2+1)=0$

۱) اگر یک جفت قطب موهومی خالص داشته باشیم و بقیه قطب‌ها سمت چپ محور موهومی باشند

آن جفت قطب موهومی خالص مسلط و بقیه خنثی هستند.

۲) اگر تمام قطب‌ها در سمت چپ محور موهومی باشند ← قطب‌های مسلط آنهاییند به محور موهومی

نزدیک ترند. هر قطب نسبت به قطب سمت چپ خود مسلط است (زیرا دیرتر به صفر می‌رسد)

$$(s^2+4s+5)(s+3)(s+4)^2=0 \quad = (s^2+4s+5)$$

$$-2\pm j \qquad -3 \qquad -4,-4$$

مسلط خنثی خنثی

اگر ع و فرکانس سیستم را خواسته بود از مسلط استفاده می‌کنیم

$$4=2\xi\omega_n$$

$$5=\omega_n^2$$

PAPCO

Subject
Date

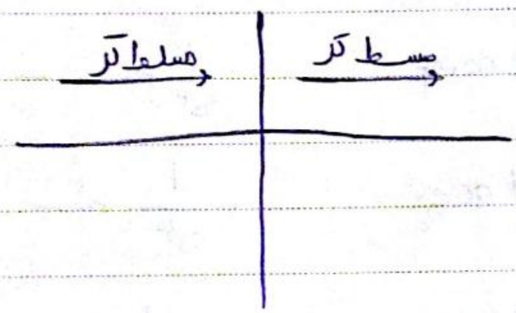
* از بین دو قطب (مسلط یکسان) قطبی که می‌خواهد سیستم را نوسانی کند مسلط‌تر است)

۳ وجود حداقل یک قطب در سمت راست محور موهومی و بقیه قطب‌ها (روی محور یا سمت چپ محور موهومی) باعث می‌شود آن قطب سمت راست مسلط و بقیه خنثی باشند.

$$(s+1)^2(s^2+1)(s-2)=0$$

$-1,-1$ $\pm j$ 2 مسلط

سمت راست
(هر چه قدر دورتر شویم
مسلط‌تر است)



$\pm 2j$ ← مسلط‌تر است
$\pm j$ زیرا نوسان بیشتر است

$(-3\pm j)$ $(s-3)$

مسلط‌تر است.

پاسخ با ورودی $(U\neq 0)$:

$$U(S) \longrightarrow \boxed{G(S)} \longrightarrow Y(S)$$

$y(t)=?$

$y(\infty)=?$

$$Y(s)=G(s)\times U(s)$$

انواع ورودی:
- ضربه: در یک مدت زمان کوتاهی وارد می‌شود — F_0
- پله: به سیستم — $\frac{F_0}{s}$
- شیب: $\frac{F_0}{s^2}$
- شتاب: $\frac{F_0}{s^3}$
- نمایی: e^{-t} — $\frac{1}{s+1}$

Date

برای $y(t)$ ابتدا $Y(S)$ را به دست آورده و سپس از آن $\mathcal{L}^{-1}$ $\quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\, Y(S)$

محاسبه سریع $\quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(S) \times U(S)\right]$

لاپلاس

ورودی ها:

ضربه واحد ← 1 Unit Impulse

پله واحد ← $\frac{1}{S}$ Unit Step

شیب واحد ← $\frac{1}{S^2}$ Unit ramp

شتاب واحد ← $\frac{1}{S^3}$ Unit acc.

نمایی e^{-t} ← $\frac{1}{S+1}$ Unit ex.

مثال) برای سیستمی با تابع تبدیل $G(S) = \frac{2(S+3)}{(S+1)(S+2)}$ درصورتی که ورودی e^{-t} باشد خروجی کدام است؟

1) $4e^{-t} - 2te^{-t} + 2e^{-2t}$

2) $4te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t}$ ✓

3) $2e^{-t} + 4te^{-t} - 2e^{-2t}$

4) $2e^{-t} - 4te^{-t} - 2e^{-2t}$

Subject
Date

$$y(s) = U(s) \times G(s) = \frac{1}{s+1} \times \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2(s+3)}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$y(s) = \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} = 4te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t}$$

$$(s+1)^2(s+2)$$

$$-1, -1 \quad -2$$

$$e^{-t}, \; te^{-t} \qquad e^{-2t}$$

اگر فاصله قطب‌ها زیاد بود به دنبال قطب‌های مسلط می‌رفتیم

$$\frac{d}{ds}\frac{2(s+3)}{(s+2)}\Bigg|_{s=-1} = \frac{2s+4-2s-6}{(s+2)^2}\Bigg|_{s=-1} = -2$$

مقدار اولیه - مقدار نهایی:

$f(t)$ مقدار اولیه تابع $= f(0) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$

$f(t)$ مقدار نهایی تابع $= f(\infty) = f_{ss} = \lim_{t \to \infty} f(t)$

$$y(0) = \lim_{t \to 0} y(t) = 0 - 2 + 2 = 0$$

$y(\infty) = \lim_{t \to \infty} y(t) = 0$ توابع نمایی با توان منفی

قضیه مقدار اولیه - قضیه مقدار نهایی:

با استفاده از این قضایا می‌توان مقادیر اولیه و نهایی یک تابع را بدست آورد بدون اینکه تابع را در حوزه زمان داشته باشیم فقط تابع در حوزه لاپلاس کافی است.

PAPCO

قضیه مقدار اولیه:

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

قضیه مقدار نهایی:

$$f(\infty) = \underbrace{f_{ss}}_{\text{Steady State}} = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

مقدار نهایی ≡ مقدار ماندگار ≡ مقدار حالت تعادل ≡ مقدار پایدار

مطلوب است مقادیر اولیه و نهایی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{s+1}$ به ورودی پله واحد.

مخزن   شیر آب

$$Y(s) = G(s) \times U(s) = \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\text{مقدار اولیه} = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s+1} = 0$$

$$\text{مقدار نهایی} = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

مقادیر اولیه و نهایی مشتق یک تابع $f(t)$:

$$\text{مقدار اولیه مشتق} = \dot{f}(0)$$

$$\text{مقدار نهایی مشتق} = \dot{f}_{ss} = \dot{f}(\infty)$$

قضیه مقدار اولیه:

$$\dot f(0) = \lim_{t\to 0} f'(t) = \lim_{s\to\infty} s\left(sF(s) - f_0\right) = \lim_{s\to\infty} \left(s^2F(s) - sf_0\right)$$

$$f'_{ss} = \lim_{t\to\infty} f'(t) = \lim_{s\to 0} s\left(sF(s) - f_0\right) = \lim_{s\to 0} \left(s^2F(s) - sf_0\right)$$

مثال) کدام گزینه مقدار اولیه مشتق تابع $y(t)$ را نشان می دهد؟

$$y(s) = \frac{3s}{s^2+4s+2}$$

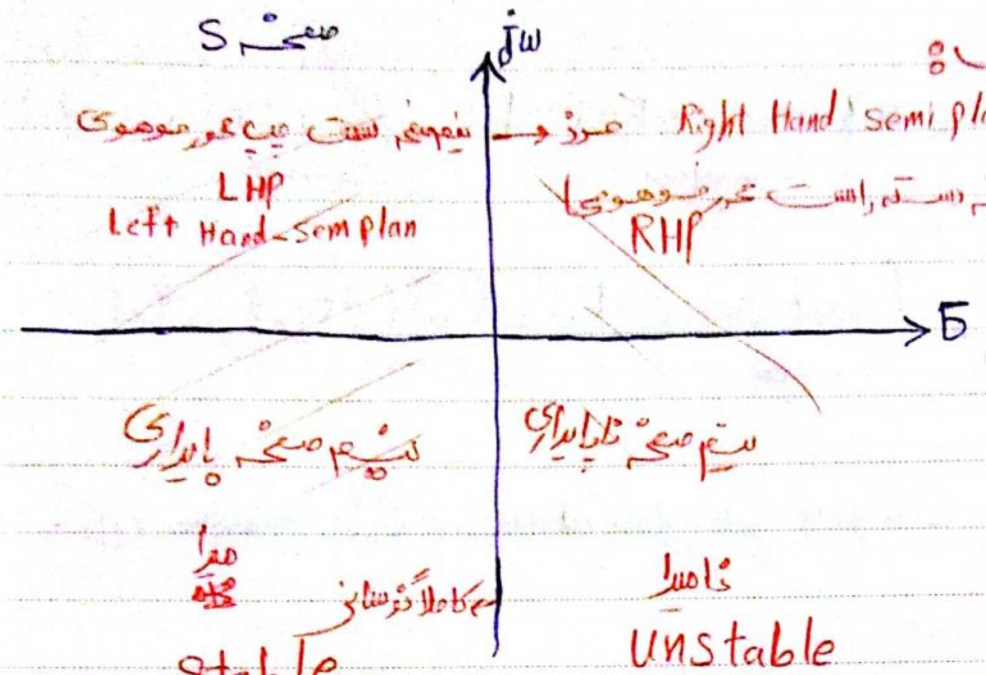
۱) -1 ۲) 1 ۳) -12 ۴) 0

$$\dot y_0 = \lim_{s\to\infty} \left(s^2Y(s) - s\underbrace{y_0}_{3}\right)$$

$$y_0 = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{3s^2}{s^2+4s+2} = 3$$

$$\dot y_0 = \lim_{s\to\infty} \left(\frac{3s^3}{s^2+4s+2} - 3s\right) = \lim_{s\to\infty} \left(\frac{3s^3 - 3s^3 - 12s^2 - 6s}{s^2+4s+2}\right) = -12$$

فصل ۴ پایداری:



سیستم پایدار است اگر هیچ قطبی در RHP نداشته باشیم

و سیستمی کاملاً پایدار است اگر تمام قطب ها در LHP باشند

اگر حداقل یک جفت قطب روی محور موهومی و بقیهٔ قطب در LHP باشند سیستم در

مرزی پایداری است و رفتار کاملاً نوسانی دارد ($\xi = 0$)

اگر حداقل یک قطب در RHP قرار گیرد حتی با قرار گرفتن تمام قطب ها در LHP نیز سیستم

ناپایدار است.

مرز سیستم به سمت پایداری است تا ناپایداری

معادله مشخصه: $(s+1)(s+2)(s^2+4s+2)$ ⟵ پایدار است

$-1 \quad -2 \quad -2\pm\sqrt{2}j$ تمام قطب‌ها در LHP است

معادله مشخصه $(s-1)(s+2)=0$ ⟵ ناپایدار

RHP   LHP

معادله مشخصه $(s^2+1)(s+1)=0$ ⟵ مرز پایداری (در حوزه پایداری)

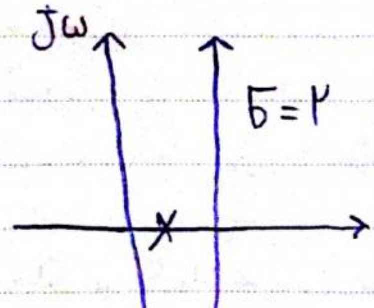
معادله مشخصه: $s^4+3s^3+s^2+s+10=0$

ریشه‌ها را نمی‌توانیم به دست آوریم

انواع پایداری:

مطلق: ملاک پایداری موقعیت قطب‌ها نسبت به محور $j\omega$ است. (محور $\sigma=0$)

نسبی: " " " " محوری موازی $j\omega$ (محور $\sigma=$ ثابت)



معیار روث - هورویتز (راوث):

سوالاتی که معیار روث - هورویتز به آن‌ها جواب می‌دهد:

۱- آیا سیستم پایدار است؟ yes or No

۲- اگر سیستم ناپایدار است چند قطب در RHP دارد؟ تعداد قطب های ناپایدار مشخص

می کند (ان شاالله)

۳- محدوده‌ای از پارامتر مجهول در معادله مشخصه را مشخص می کند که به ازای آن سیستم پایدار است.

محدود K را طوری مشخص کنید که سیستم پایدار باشد.

$K>0 \quad s^3+4s^2+Ks+4=0$

ناپایدار $K>\frac{3}{2}$ $\quad\quad$ $0<K<\frac{3}{2}$ پایدار موفق

روش روث - هرویتز:

مراحل انجام روش روث - هرویتز:

۱- معادله مشخصه برحسب توان های نزولی s مرتب می کنیم

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$s^5 + 4s^4 + s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$$

شرایط لازم - شرط کافی: $\quad$ شرایط لازم برقرار است.

۲- شرایط لازم:

الف) تمام ضرایب a_n ها وجود داشته باشند (غیر صفر باشند)

ب) تمام ضرایب a_n ها هم علامت باشند (همه مثبت یا همه منفی)

$S^3 + S^2 + 1 = 0 \rightarrow$ ناپایدار ← حداقل یک قطب در RHP دارد.

$S^3 + S^2 - 2S + 1 = 0 \rightarrow$ ناپایدار ← حداقل یک قطب در RHP دارد

چه زمانی شروط کافی چک شود:

۳- شرط کافی:

ابتدا جدول راوث را تشکیل می‌دهیم.

$$a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

✓ شرایط لازم برقرار است:

s^6
s^5
s^4
s^3
s^2
s^1
s^0

سطر اول و دوم با استفاده از ضرایب معادله مشخصه تکمیل می‌شود

هر ستون نسبت به سمت چپ دو توان (s) کمتر دارد.