Subject عکس دترمینان

Date عنصر اول ستون قبل

اولین ستون ستون اول ثابت می ماند
و یک ستون بعد خودش ستون های بعد تغییر می کند

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^6 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\
 & A & B & & \\
s^4 & \dfrac{a_5 a_4 - a_6 a_3}{a_5} & \dfrac{a_2 a_5 - a_6 a_1}{a_5} & \dfrac{a_5 a_0 - 0 \times a_6}{a_5} = a_0 & \\
 & C & D & & \\
s^3 & \dfrac{a_3 A - a_5 B}{A} & \dfrac{A a_1 - a_5 a_0}{A} & 0 & \\
s^2 & \dfrac{CB - AD}{C} = E & \dfrac{C a_0 - 0 \times A}{C} = a_0 & & \\
s & \dfrac{ED - C \times a_0}{E} = F & 0 & & \\
s^0 & \dfrac{F \times a_0 - 0 \times E}{F} = a_0 & & &
\end{array}
$$

یکی هستند

همواره a_0 است

چک کردن جدول :

* a_0 یکی درمیان به عنوان عنصر آخر هر سطر ظاهر شده است

a_0 (عدد ثابت) همواره به صورت یک سطر درمیان به عنوان آخرین عنصر سطر ظاهر می شود

$s^2 \rightarrow s^2 \quad s^0$ $\qquad$ $s^4 \rightarrow s^4 \quad s^2 \quad s^0$

s^1 $\qquad$ $s^3 \rightarrow s^3 \quad s^1$

$s^0 \rightarrow$ تعداد کسر حلقوی المان

اگر n بزرگترین توان s در معادله مشخصه باشد:

اگر | a_0 آخرین عنصر سطر یک n زوج
| a_0 آخرین عنصر سطر ۲ n فرد

* همواره عنصر مقابل s^0 در جدول راوث a_0 است.

شرط کافی: شرط کافی برای پایداری سیستم آن است که عناصر ستون اول جدول راوث همگی هم علامت باشند و هیچ تغییر علامتی نداشته باشند.

مثال: معادله مشخصه $\quad s^3 + 4s^2 + s + \underbrace{2}_{a_0} = 0$

مطلوب است بررسی پایداری سیستم فوق

✓ شرایط لازم برقرار است.

ستون اول

+	s^3	1	1
+	s^2	4	2
+	s^1	$\frac{4\times1-2\times1}{4}=\frac{1}{2}$	
+	s^0	$\frac{0.5\times2-4\times0}{0.5}=2$	

شرط کافی

۲ یک از میان ظاهر شده و در مقابل s^0، عدد ۲ قرار دارد $\rightarrow$ پس جدول صحیح است.

هیچ تغییر علامتی در ستون اول نداریم و سیستم هیچ قطبی در RHP ندارد و

پایدار است ~~[illegible]~~

و همه ریشه‌ها سمت چپ قرار دارند

مثال) مطلوب است بررسی پایداری سیستمی با معادله مشخصه زیر:

عدد ثابت

$$s^3 + 2s^2 + s + 4 = 0$$

شرایط لازم برقرارند

شرط کافی:

$$\begin{array}{c|cc} + \; s^3 & 1 & 1 \\ + \; s^2 & 2 & 4 \\ - \; s & -1 & \\ + \; s^0 & 4 & \end{array}$$

یک تغییر علامت

یک تغییر علامت

عدد ثابت

چون در ستون اول تغییر علامت داریم سیستم ناپایدار است و به تعداد تغییر علامت ها قطب در RHP دارد

۲ قطب ناپایدار دارد

تعداد تغییر علامت های ستون اول = تعداد قطب های ناپایدار

(" " " در RHP)

مثال) محدوده K را برای پایداری مشخص کنید.

$$s^3 + 4s^2 + Ks + 4 = 0$$

Subject حذف یکی از قطب ها   ناهم علامت
Date

$(K \neq 0 \quad K < 0 \;) \quad K > 0 \longleftarrow$ شرایط لازم

شرط کافی

شرط اول

(+) s^3	1	K
(+) s^2	4	6
(+) s^1	$\frac{4K-6}{4} \overset{\text{باید}}{>} 0$	
(+) s^0	6	

شرط پایداری

$4K - 6 > 0$

$4K > 6 \rightarrow K > \frac{3}{2} \rightarrow K > 1/5$

شرط کافی

اشتراک شرط لازم و کافی

$K > 1/5$

$K < 1/5$ سیستم ناپایدار

مثال ۱

$s^2 + 1 = 0$

شرایط لازم برقرار نیست $\rightarrow$ ناپایدار

$S_{1,2} = \pm j \longrightarrow$ روتر-هیچ جواب نمی دهد

$\underbrace{(s^2+1)}_{\pm j}\underbrace{(s^3 + s^2 + 2s + 10)}_{\text{فقط این رو بررسی می کنیم}} = 0$

روی مرز
ناپایدار نیست

$$s^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} \to +1 \\ \to -1 \end{cases}$$

راوث برقرار است

راوث در روش موضوعی خاص مشکل دارد که آن را جدا بررسی می‌کنیم

حالات مختلف در جدول راوث:

۱) هیچ عنصری در ستون اول صفر نباشد

۲) اولین عنصر ستون اول یک سطر صفر ولی حداقل یک عنصر هم سطر آن غیرصفر است

۳) یک سطر کاملاً صفر باشد یعنی عنصر ستون اول یک سطر صفر و بقیه عناصر هم سطر نیز صفر شوند

۴- بیش از یک سطر صفر در جدول به وجود بیاید.

حالت ۱: هیچ عنصری در ستون اول صفر نباشد

الف) معادله مشخصه درجه ۲:

$27{,}5s^2 + 1000655s + 98764 = 0$ → شرط لازم ✓ بررسی شرط کافی

$63{,}3s^2 + 9873s - 1 = 0$ → ناپایدار (شرط لازم را ندارد)

$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$

شرط لازم $a_0, a_1, a_2 > 0$

شرط کافی	s^2	a_2	a_0
	s^1	a_1	
	s^0	a_0	

ستون اول

شرط کافی: $a_0, a_1, a_2 > 0$

$\Leftarrow$ شرط لازم و کافی پایداری $a_0, a_1, a_2 > 0 \Rightarrow$

$s^2 + 2s + 6 = 0$

$98s^2 + 93s + 4830 = 0$

$\rightarrow$ پایدارند

ب) معادله مشخصه درجه ۳:

$s^3 + 4s^2 + s + 2 = 0 \rightarrow$ پایدار

$s^3 + 2s^2 + s + 4 = 0 \longrightarrow$ ناپایدار

$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$

شرایط لازم: $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$

اگر همه منفی بودند در یک منفی ضرب می‌کنیم.

شرط کافی:

$+$ s^3	a_3	a_1
$+$ s^2	a_2	a_0
$+$ s^1	$\frac{a_2a_1 - a_0a_3}{a_2 > 0} > 0$	
$+$ s^0	a_0	

شرط کافی

$$\longrightarrow \quad a_2a_1 > a_0a_3$$

$a_0, a_2, a_3 > 0$

حاصل ضرب کناری ها > حاصل ضرب وسطیا

حالت ۲: یک عنصر ستون اول یک سطر صفر و حداقل یک عنصر هم سطر آن غیر صفر است

مثال: پایداری سیستم را بررسی کنید

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$$

شرایط لازم برقرار است

شرط کافی

$+$ s^4	1	2	3
$+$ s^3	1	2	0
s^2	$\cancel{0}\ \varepsilon$	3	
$-$ s^1	$\frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon > 0} < 0 \rightarrow$		
$+$ s^0	3		

یک عنصر صفر و هم سطر آن غیر صفر است

برای رفع عنصر صفر در ستون اول (در این حالت) به جای صفر ε عددی بسیار کوچک

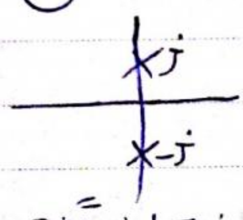
و مشتق جایگزین نموده و جدول را تکمیل می کنیم

۲ تغییر علامت ← سیستم ناپایدار و دو ریشه در RHP دارد.

حالت ۳: یک سطر صفر: (عناصر یک سطر همگی صفر باشند) (بیشترین موارد در

نکته) وجود سطر صفر نشان دهنده حداقل یکی از موارد زیر است:

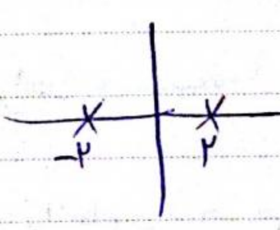
الف) معادله مشخصه شامل یک جفت قطب موهومی خالص است



در شرایطی که بقیه قطب در LHP باشند رفتار

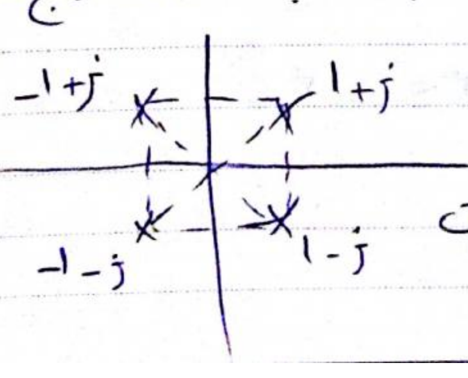
سیستم کاملاً نوسانی است. ← نمی توان گفت صد درصد ناپایدار است
باید بررسی پایداری انجام دهیم

ب) معادله مشخصه شامل یک جفت قطب حقیقی قرینه است.



در این حالت سیستم ناپایدار است.

ج) معادله مشخصه شامل دو جفت قطب مختلط مزدوج متقارن نسبت به مبدا مختصات است.



در حالت سیستم ناپایدار است

مثال) مطلوب است بررسی پایداری سیستم با معادله مشخصه زیر:

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$$

شرایط لازم برقرار شد. شرط کافی:

+	s^5	1	8	7
+	s^4	$4 \equiv 1$	$8 \equiv 2$	$4 \equiv 1$
+	s^3	$6 \equiv 1$	$6 \equiv 1$	
سطر بالای سطر صفر +	s^2	$4 \equiv 1$	$4 \equiv 1$	
سطر صفر +	s^1	$\cancel{0}$ 2		
+	s^0	4		

چون علامت صفر را نفی داشتیم این مراحل را رفتیم

این سطر صفر است

در حالت ۲ حتماً بالای یک عنصر صفر سطر غیر صفر باشد

هر سطر را می توان را به عدد مثبت می توان تقسیم کرد و هیچ تاثیری در جدول ندارد

برای رفع سطر صفر مراحل زیر را انجام می دهیم:

* با سطر بالای سطر صفر معادله کمکی تشکیل می دهیم $A(s)$ = معادله کمکی

$$A(s) = 4s^2 + 4s^{0} \quad (0 = 2-2) \Rightarrow A(s) = 4s^2 + 4$$

$$= s^2 + 1$$

Subject می‌توان بر ۲ تقسیم کرد
Date

* از معادله کمکی نسبت به S مشتق می‌گیریم $\frac{dA(s)}{ds} = 2s$

* ضرایب معادله مشتق به جای سطر صفر قرار داده و جدول را تکمیل می‌کنیم

هیچ تغییر علامتی در ستون اول نداریم هیچ قطبی در RHP نداریم و سیستم پایدار

است : ~~حالت الف است~~

چون سیستم پایدار است و موارد ب و ج به سیستم ناپایدار منجر می‌شوند زیرا

مورد الف برای این سیستم وجود دارد یعنی سیستم شامل یک قطب موهومی خالص است
حداقل

رفتار این سیستم کاملاً نوسانی است . قطب‌های مسلط موهومی خالص است

(برای سمت راست قطبی ندارد . فرکانس نوسانات :

ریشه‌های معادله کمکی
ریشه‌های معادله مشخصه اصلی
نیز هستند

$s^2+1=0 \rightarrow s=\pm j$

فرکانس نوسانات $= \omega = 1\frac{rad}{s}$

PAPCO

$$
\begin{array}{l|l}
s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 & s^2+1 \\ \hline
\underline{-\,s^5 + s^3} & s^3 + 4s^2 + 7s + 4 \\
4s^4 + 7s^3 & \\
\underline{-\,4s^4 + 4s^2} & \\
7s^3 + 4s^2 & \\
\underline{-\,7s^3 + 7s} & \\
4s^2 + 4 & \\
\underline{4s^2 - 4} & \\
0 &
\end{array}
$$

K را طوری تعیین کنید که رفتار سیستم کاملاً نوسانی شود ؟

سطر صفر

شرط لازم $K>0$

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + Ks + 4 = 0$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 8 & K \\
s^4 & 4 \equiv 1 & 8 \equiv 2 & 4 \equiv 1 \\
s^3 & 6 & K & \\
s^2 & \frac{12-K}{6} & 1 & \\
s^1 & \dfrac{\frac{12K-K^2}{6} - 6}{\frac{12-K}{6}} = 0 & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

$$\longrightarrow \frac{12K - K^2 - 36}{12 - K} = 0 \longrightarrow K = 6$$

معادله کمکی $\quad \frac{12-K}{6} s^2 + 1 = 0 \xRightarrow{\text{معادله کمکی}} s^2 + 1 = 0$

$$\Rightarrow s = \pm j \qquad \omega = 1 \frac{rad}{s}$$

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 & \\ s^0 & & \end{array}$$

s^1 ← سطر صفر

حاصل ضرب کناریها = حاصل ضرب وسطیها ⇐ سطر صفر

$a_2 a_1 = a_3 a_0 \Rightarrow$ سطر صفر

معادله کمکی : $2s^2 + 2 = 0 \Rightarrow s^2 + 1 = 0$

$$s_{1,2} = \pm j$$

یک جفت ریشه موهومی خالص + ریشه در LHP

پایدار

پایدار $\quad a_2 a_1 \geq a_3 a_0$

خلاصه مطلب قبل:

۱- هیچ صفری در ستون اول نباشد

۲- صفر در ستون اول و حداقل یک غیرصفر هم سطر

۳- یک سطر صفر

۴- بیش از یک سطر صفر

حالت چهارم: بیش از یک سطر صفر بوجود آید

برای رفع هر سطر صفر بایستی همانند حالت ۳ معادله کمکی و مشتق را ایجاد نموده به جای سطر صفر قرار داده و جدول را تکمیل کنیم

عدد ثابت

مثال/ سیستمی با معادله مشخصه زیر: $s^5+s^4+2s^3+2s^2+s+1=0$

۱) پایدار است ✓؟ ۲) در مرز پایداری است ؟✓ ۳) ناپایدار است و یک قطب در RHP دارد

۴) ناپایدار است.

۱) شرایط لازم برقرار است

۲) بررسی شرط کافی ← جدول

s^5	1	2	1
	1	2	1
s^4 سطر بالای سطر صفر	1	2	1
s^3 سطر صفر	$\cancel{0}$ 1 ضریب s^3	$\cancel{0}$ 1 ضریب s	
s^2	1	1	
s^1 سطر صفر	$\cancel{0}$ 2		
s^0	1		

ضرایب ① → $A_1(s):\ s^4+2s^2+1 \equiv (s^2+1)^2$ معادله کمکی

$$\frac{dA_1(s)}{ds} = 4s^3+4s \equiv s^3+s$$

۴ بی‌تأثیر است

$$A_2(s) = s^2+1$$

$$\frac{dA_2(s)}{ds} = 2s$$

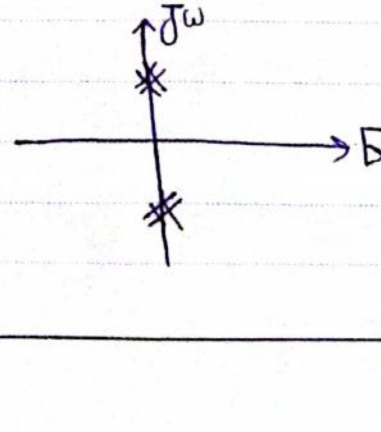
جدول مشکلی ندارد

همه ثابت‌ها در ستون اول ⊕ و هیچ تغییر علامتی نداریم و سیستم پایدار است ؟ ✓

تعدادی از قطب‌های سیستم ریشه‌های معادله کمکی است

معادله کمکی ۱ $A_1(s) = (s^2+1)^2 = 0 \rightarrow s = \pm j$ و $\pm j$ دو قطب قطب موهومی خالص تکراری واقع بر $\pm j$

معادله کمکی ۲ $A_2(s) = 0 \rightarrow s^2+1 = 0 \rightarrow s = \pm j$

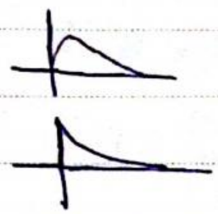


$$s^5+s^4+2s^3+2s^2+s+1=(s+1)(s^2+1)^2$$

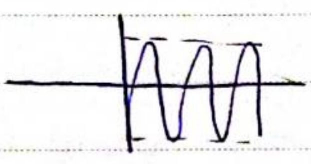
$s=-1$ قطب دیگر سیستم است.

قطبهای سیستم حقیقی تکراری: $-1,-1$

مودها: e^{-t}, te^{-t}



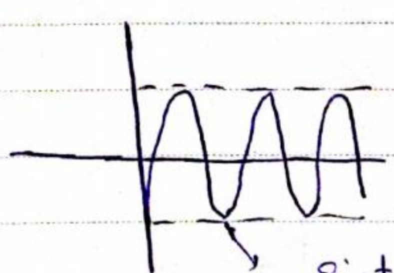
قطبهای سیستم موهومی: $\pm j$

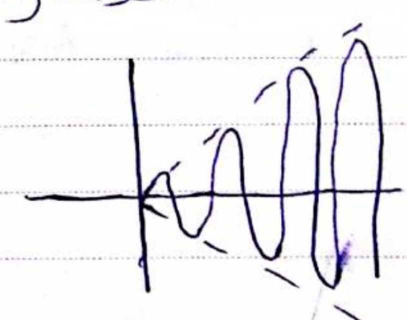


$\sin t, \cos t$

قطبهای سیستم موهومی تکراری: $\pm j, \pm j$

مودهای سیستم: $\sin t, t\sin t$





مود این سیستم ناپایدار است ← سیستم ناپایدار است.

در شرایطی که سیستم دارای مودهای ناپایدار باشد حتی با وجود شرایط پایداری در جدول

راوث سیستم ناپایدار است.

هرگاه ریشه های موهومی خالص تکراری (قطب ها موهومی خالص تکراری) وجود داشته باشد سیستم ناپایدار است.

~~[illegible]~~

تعداد سطرهای صفر = مرتبه تکرار قطبهای موهومی خالص

هرگاه در جدول بیش از یک بار سطر صفر به وجود اید به تعداد سطرهای صفر مرتبه تکرار ریشه ها موهومی خالص وجود دارد

$A(S) = (S^2 + \omega^2)^K = 0$ معادله کمکی

K = تعداد سطرهای صفر

$(S^2+1)^2$ ← یک بار سطر صفر به وجود آمده و بعد از آن یک بار دیگر به وجود می آید

پس ترتیب ۴ است

سیستم به وسیله قطب در RHP ناپایدار نیست بلکه به وسیله صورهایش ناپایدار است.

هرگاه معادله کلی شامل ریشه‌های موهومی خالص تکراری شد می‌توان به ناپایداری سیستم پی برد

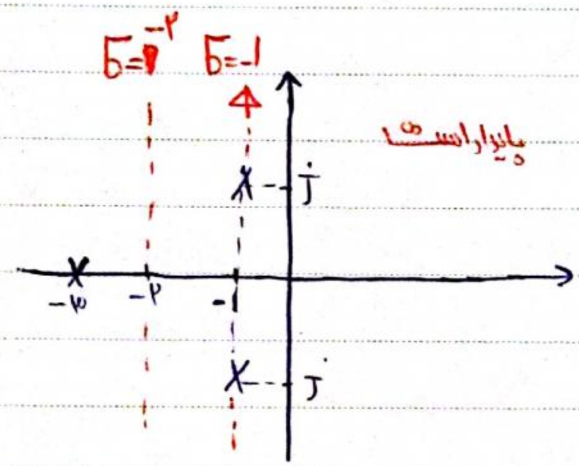
و جدول را ادامه نداد.

پایداری نسبی:

پایداری (پایداری مطلق): بررسی پایداری نسبت به محور $j\omega$ ($\sigma = 0$)

پایداری نسبی: بررسی پایداری نسبت به محوری موازی محور $j\omega$ ($\sigma =$ ثابت)

مثال)



سیستم نسبت به $\sigma=-1$ در مرز پایداری است و سیستم نسبت به $\sigma=-2$ ناپایدار است.

معادله مشخصه: $(s^2+2s+2)(s+3)=0 \Rightarrow s^3+5s^2+8s+6=0$

$$(s^2+2s+2) \rightarrow -1\pm j \qquad (s+3) \rightarrow -3$$

درصورتی که پایداری نسبی سیستمی با معادله مشخصه ای مدنظر باشد بایستی ابتدا معادله مشخصه

را به فضای متغیر جدید منتقل و پس از آن از راوث استفاده کنیم

معادله مشخصه در فضای S $\xleftrightarrow{S = S_n + \sigma}$ معادله مشخصه در فضای S_n

مثال ۱) بررسی پایداری معادله مشخصه $S^3 + 5S^2 + 8S + 4 = 0$ نسبت به $\sigma = -1$

حل: $S = S_n + \sigma = S_n - 1 \longrightarrow (S_n - 1)^3 + 5(S_n - 1)^2 + 8(S_n - 1) + 4 = 0$

$$\longrightarrow S_n^3 - 1 - 3S_n^2 + 3S_n + 5S_n^2 + 5 - 10S_n + 8S_n - 8 + 4 = 0$$

$$\longrightarrow S_n^3 + 2S_n^2 + S_n + 2 = 0$$

$\longrightarrow 2 \times 1 = 2 \longrightarrow$ در مرز پایداری

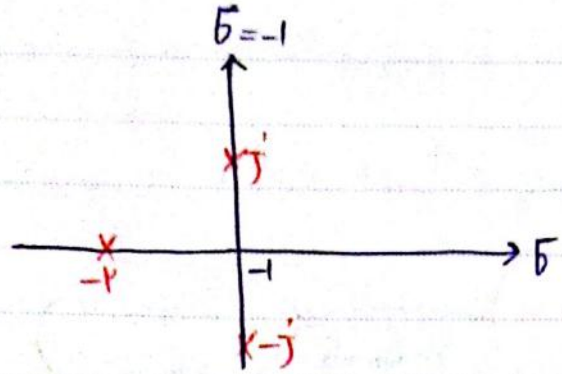
ضرب طرفین < ضرب وسطین معادله درجه ۳

S_n^3	1	1
S_n^2	2	2
S_n^1	~~0~~ 2	
S_n^0	2	

$$\longrightarrow A(S_n) = S_n^2 + 1 = 0$$

$$\frac{dA(S_n)}{dS_n} = 2S_n$$

$$S_{n1,2} = \pm j$$



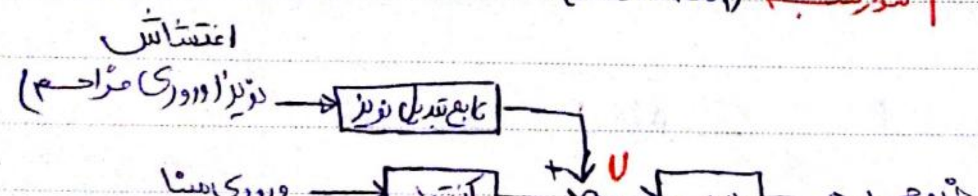
$$\begin{array}{l|l} s_n^3 + 2s_n^2 + s_n + 2 & s_n^2+1 \\ \hline -s_n^3 \pm s_n & s_n+2 = 0 \Rightarrow s_n = -2 \\ \hline 2s_n + 2 & \\ \underline{-2s_n - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

فصل ۵

سیستم مدار بسته : ← خطای ماندگار * مهم

سیستم کنترلی:

- مدار باز (open-loop)
- مدار بسته (close-loop)



مدار باز

مرجع (اصلی)

set_Point

s.p

مدار باز

open loop

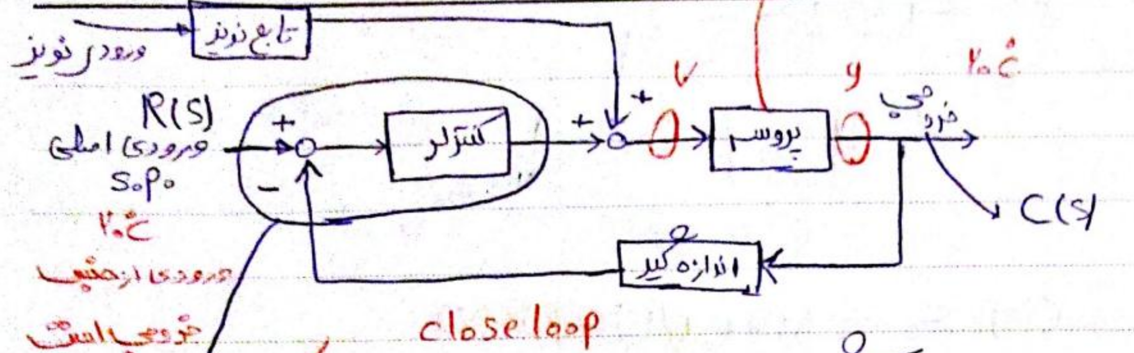
اتو برقی - ماشین لباسشویی

درمدار باز و مدار بسته حسب ورودی و خروجی تابعی است

Process plant

فرایند = پلنت = پروسه

Subject
Date



تفاوت مدار باز و بسته در اندازه گیر است.

اجرا کننده + تحلیل کننده + مقایسه کننده ≡ کنترلر

ورودی نویز: ورودی ناخواسته

تفاوت مدار باز و مدار بسته:

- ورودی نویز بر مدار باز تاثیر دارد و بر مدار بسته تاثیری ندارد
- اثر تغییر پارامترهای پروسه بر مدار باز وجود دارد و در مدار بسته وجود ندارد

خطا: |Error| مدار باز / مدار بسته

خطا در مدار باز:

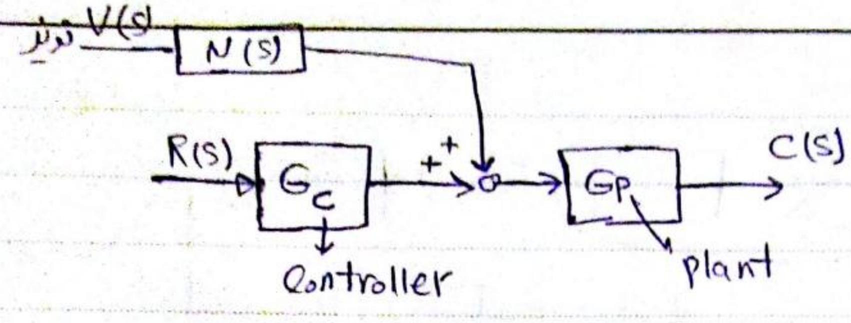
$$E(S) = R(s) - C(s)$$

ورودی − خروجی

$$\Rightarrow E(S) = R(s)\left[1 - \frac{C(S)}{R(S)}\right]$$

PAPCO

Date



$$C(s) = G_c G_p R(s) + N(s) G_p V(s)$$

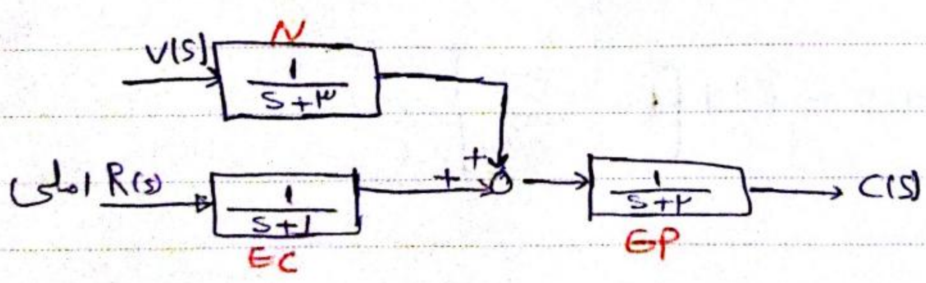
$$E(s) = R(s) - G_c G_p R(s) - N \times G_p V(s)$$

$$E(s) = \underbrace{R(s)\left[1 - G_c G_p\right]}_{\text{خطا نسبت به ورودی اصلی}} - \underbrace{N G_p V(s)}_{\text{خطا نسبت به ورودی نویز}}$$

خطای ماندگار (نهایی یا پایدار) $e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$

خطای ماندگار مدار باز $e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \underbrace{\lim_{s \to 0} sR(s)\left[1 - G_c G_p\right]}_{\text{ورودی اصلی}} - \underbrace{\lim_{s \to 0} s N G_p V(s)}_{\text{ورودی نویز}}$

مطلوب است خطای ماندگار سیستم زیر به ازای ورودی اصلی پله واحد و بدون نویز



$V(s)=0\ ,\quad e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} sR(s)\left[1-G_cG_p\right]$

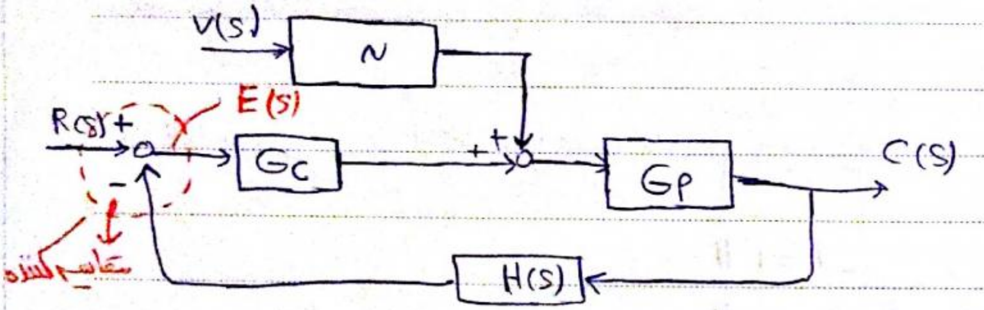
نسبت به ورودی اصلی $\quad e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\times\frac{1}{s}\left[1-\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]=0.5$

خطای ماندگار نسبت به ورودی نویز پله واحد:

$$\left|\begin{array}{l} V(s)=\frac{1}{s} \\ R(s)=0 \end{array}\right.\qquad E(s)=-NG_pV(s)\rightarrow e_{ss}=\lim_{s\to 0} -s\times\frac{1}{s+3}\times\frac{1}{s+2}=\frac{-1}{6}$$

خطا اگر منفی بدست آمد، قدر مطلق آن مدنظر است.

خطای ماندگار در مدار بسته:



مکانیک $E(s)=R(s)-C(s)\times H(s)$

$E(s)$ سیگنال خروجی از مقایسه‌کننده است.

$$E(s)=\underbrace{E(s)\Big|}_{\text{خطا نسبت به ورودی اصلی}}+\underbrace{E(s)\Big|}_{\text{خطا نسبت به ورودی نویز (اغتشاش) یا مزاحم}}$$

برای محاسبه‌ی $E(S)$ از روش میسون استفاده می‌کنیم.

محاسبه‌ی $E(S)$ نسبت به ورودی اصلی:

$E(S)$ را خروجی و $R(S)$ را ورودی و تابع تبدیل بین این دو بدست می‌آوریم.

خروجی مجازی / ورودی

$$\frac{E(S)}{R(S)} = \frac{\overset{P_1}{1}}{1+G_cG_pH}$$

$$E(S)\Big| = \frac{R(S)}{1+G_cG_pH}$$

خطا نسبت به ورودی اصلی

محاسبه‌ی $E(S)$ نسبت به ورودی مزاحم:

$E(S)$ را خروجی و $V(S)$ مزاحم را ورودی می‌گیریم

خروجی مجازی / ورودی

$$\frac{E(S)}{V(S)} = \frac{-NG_pH}{1+G_cG_pH}$$

$$E(S)\Big| = \frac{-NG_pH}{1+G_cG_pH}V(S)$$

خطا نسبت به نویز

خطای ماندگار مدار بسته:

خطای ماندگار نسبت به ورودی اصلی

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G_cG_pH}$$

خطای ماندگار نسبت به ورودی نویز

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} -sV(s) \frac{NG_pH}{1 + G_cG_pH}$$

عوامل موثر بر خطای ماندگار:
- ورودی ها
- توابع تبدیل

نوع سیستم (تیپ سیستم) Type of system

$$G_cG_pH = \frac{\text{چندجمله‌ای صورت}}{\text{چندجمله‌ای مخرج}}$$

آنچه در مخرج e_{ss} است
و کل را از آن جدا کردیم

$$= S^N (s+1)(s^2+8)(s^2+10s+4)$$

N: نوع سیستم : توان s های فاکتورگیری شده در مخرج تابع تبدیل G_cG_pH

مثال:

$$G_cG_pH = \frac{10(s+2)}{s(s+4)(s^2+s)} = \frac{10(s+2)}{s^2(s+1)(s+4)}$$

$N=2$ سیستم نوع دو

$$G_cG_pH = \frac{1}{(s+2)(s+3)^2}$$

سیستم نوع صفر $N=0$

Subject
Date

در ضرب GcGpH می‌توان صورت و مخرج را ساده کرد

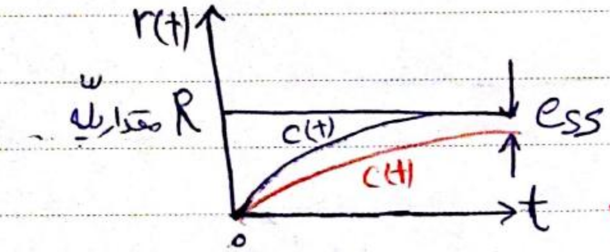
نوع سیستم N = مرتبه‌ی تکرار قطب‌های GcGpH واقع در مبدأ مختصات

خطای حالت ماندگار سیستم مدار بسته بدون ورودی نویز $V(S)=0$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1+G_cG_pH}$$

انواع ورودی :

۱- ورودی پله : (ورودی وضعیت) step input



در قرمز خطای ماندگار داریم یعنی نوع سیستم صفر است ولی در آبی خطای ماندگار نداریم یعنی آبی برای سیستم نوع ۱ و بالاتر است.

$R=1$ پله واحد Unit Step

ورودی پله در حوزه زمان
$$r(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ R & t \geq 0 \end{cases}$$

$$R(s) = \mathcal{L}(r(t)) = \frac{R}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s} \times \frac{R}{\cancel{s}}}{1+G_cG_pH} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{R}{1+G_cG_pH}$$

Subject
Date

$$= \frac{R}{1+\lim\limits_{s\to 0} G_c G_p H}$$

تعریف : $K_p = \lim\limits_{s\to 0} G_c G_p H$

K_p: ثابت خطای پلّه (موقعیّت)

$$\boxed{e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}}$$

خطای ماندگار مدار بسته نسبت به ورودی پله

پلّه واحد :

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}}$$

N نوع سیستم	K_p (ثابت خطای پلّه)	e_{ss}
0	ثابت K	$1+K$
1 و بالاتر	∞	0
2	∞	0

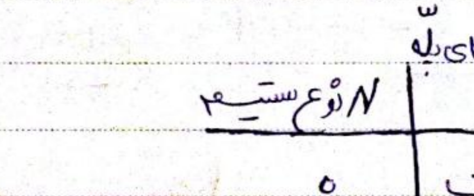
$$G_c G_p H = \frac{1}{(s+2)(s+3)^2}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+\frac{1}{18}}$$

$$G_c G_p H = \frac{1}{s(s+1)}$$

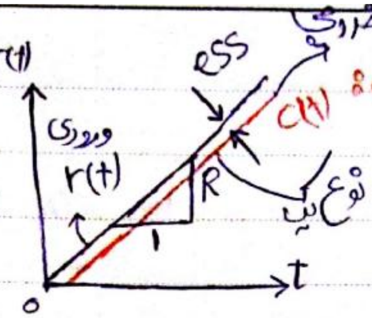
اگر نوع سیستم ۱ و بالاتر باشد نسبت به ورودی پله خطا ندارد.

مثال) خطای ماندگار نسبت به ورودی پله واحد



کل نوع ۱ ←

$N=1$ $\quad e_{ss}=0$



۲- ورودی شیب (رمپ) سرعت :

ورودی شیب (رمپ) $r(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ Rt & t \geq 0 \end{cases}$

$R(s) = \frac{R}{s^2}$ $\qquad$ $e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1+G_cG_pH}$

if $R=1 \Rightarrow$ شیب واحد

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \times \frac{R}{s^2}}{1+G_cG_pH} = \lim_{s \to 0} \frac{R}{s+sG_cG_pH} = \frac{R}{\lim_{s \to 0} sG_cG_pH}$$

K_v: تعریف

ثابت خطای شیب یا سرعت $K_v = \lim_{s \to 0} s \times G_cG_pH$

$e_{ss} = \frac{R}{K_v}$ خطای ماندگار نسبت به ورودی شیب

If $R=1 \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v}$

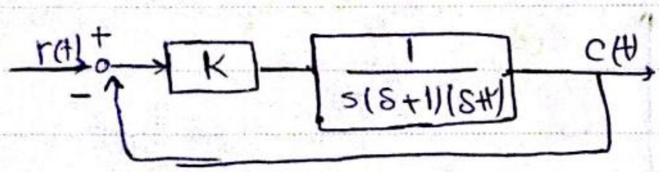
$N = 0 =$ کمینه s در مخرج G_cG_pH
بیشینه

نوع سیستم N	K_v	e_{ss}
۰	۰	∞
۱	K ثابت	$\frac{R}{K}$
۲ و بالاتر	∞	۰

سیستم‌های نوع ۲ و بالاتر نسبت به ورودی شیب، خطای ماندگار ندارند

مثال) چه مقدار K می‌تواند خطای ماندگار سیستم زیر را نسبت به ورودی شیب واحد به ۰/۰۱ برساند؛

۱) $\boxed{200}$ ۲) ۰/۰۳ ۳) ۰ ۴) هیچ مقدار K



$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0/01 \qquad K_v = \lim_{s \to 0} s \times \underbrace{\frac{K}{s(s+1)(s+2)}}_{G_cG_pH} = \frac{K}{2}$$

$$\frac{1}{\frac{K}{2}} = \frac{1}{100} \Rightarrow K = 200$$

معادله مشخصه:

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$s(s+1)(s+2) + K = 0$$

$$\longrightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

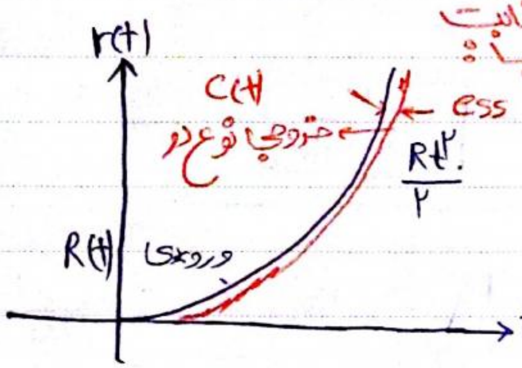
شرط پایداری از فصل قبل : $K>0$ و
$3\times 2 > K\times 1$

محدوده K برای پایداری $\Leftarrow$ $0<K<6$

چون $K=200$ در محدوده پایداری نیست لذا هیچ مقدار K نمی‌تواند خطا را به ۱۰٪ برساند

نکته : برای بررسی خطای ماندگار ابتدا پایداری سیستم بررسی شود همواره شرایط پایداری مقدم بر خطای ماندگار است

۳- ورودی شتاب ثابت :



$\frac{Rt^2}{2}$ همان $\frac{1}{2}at^2$

$$r(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{2}Rt^2 & t\geq 0\end{cases}$$

R : مقدار شتاب

R=1 : شتاب واحد

$$R(s)=\frac{R}{s^3}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \times \frac{R}{s^3}}{1+G_cG_pH} = \lim_{s \to 0} \frac{R}{s^2+s^2G_cG_pH} = \frac{R}{\lim_{s \to 0} s^2G_cG_pH}$$

تعریف :

ثابت خطای شتاب
$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2G_cG_pH$$

خطای ماندگار نسبت به ورودی شتاب
$$e_{ss} = \frac{R}{K_a}$$

شتاب واحد : $e_{ss} = \frac{1}{K_a}$

N	K_a	e_{ss}
۱,۰	۰	∞
۲	K ثابت	$\frac{R}{K}$
۳ و بالاتر	∞	۰

سیستم های نوع ۳ نسبت به انواع ورودی پله - شیب - شتاب خطای ماندگاری ندارد

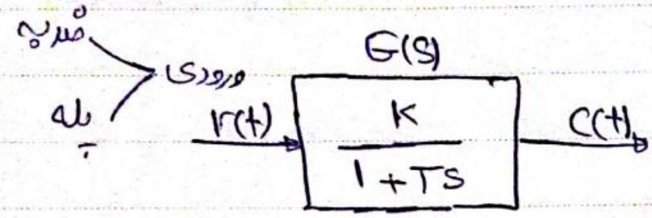
سیستم های مرتبه اول (یک مخزن آب - یک مخزن حرارتی)

دسته ۱ باشد (یعنی ۱ متغیر وضعیت داشته باشد یا توان s مخرج تابع تبدیل یک باشد

فرم استاندارد تابع تبدیل سیستم مرتبه ۱

$$G(s)=\frac{K}{1+Ts}$$

$$G(s)=\frac{10}{s+2}=\frac{5}{1+0.5s}$$



$$C(s)=\frac{K}{1+Ts}\times R(s)$$

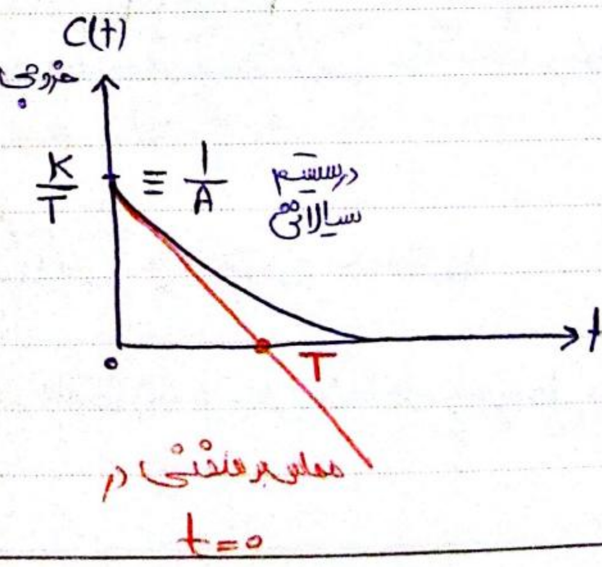
$$c(t)=\mathcal{L}^{-1}C(s)$$

ورودی ضربه واحد

$$R(s)=1$$

$$C(s)=\frac{K}{1+Ts}=\frac{K/T}{s+\frac{1}{T}} \Rightarrow c(t)=\frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

جهت گرفتن تبدیل لاپلاس



$$c(0)=\frac{K}{T}$$

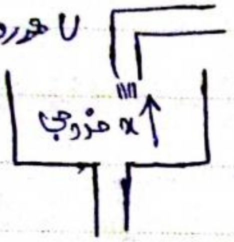
$$c(\infty)=0$$

در سیستم سیالاتی $\left|\begin{array}{l}K=R\\T=RA\end{array}\right.$

$$\dot{C}(t) = \frac{-K}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\dot{C}(0) = \frac{-K}{T}$$ شیب اولیه را نشان می دهد

اگر T را کم‌تر کنیم سیستم سریع‌تر به صفر می رسد و اگر T را بیشتر کنیم سیستم دیرتر به صفر می رسد.



$$\text{تابع تبدیل} = \frac{R}{1+RAS}$$ خروجی x

$$\text{تابع تبدیل} = \frac{1}{1+RAS}$$ خروجی دبی

ورودی پله واحد: $R(s) = \frac{1}{s}$

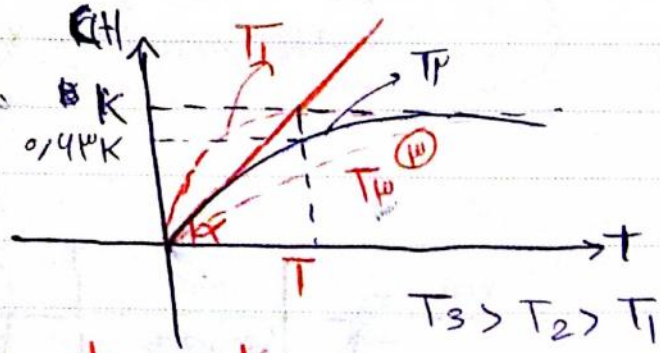
$$C(S) = \frac{K}{S(1+TS)} = \frac{\frac{K}{T}}{S(S+\frac{1}{T})} = \frac{K}{S} + \frac{-K}{S+\frac{1}{T}}$$

$$= K\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S+\frac{1}{T}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

$C(0) = 0$

$C(\infty) = K$ Gain یا بهره K

مقدار نهایی خروجی نسبت به ورودی پله واحد



$T_3 > T_2 > T_1$

$\tan\alpha = \frac{K}{T}$

$$\dot{C}(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

$$C'(0) = \frac{K}{T}$$

اگر T را کم کنیم سریع خیز برمی دارد به سمت مقدار نهایی

و اگر T زیادتر باشد آهسته‌تر به سمت مقدار نهایی می رود.

$C(t=T)=K(1-e^{-1})=0.632K$

T : ثابت زمانی

$C(t=2T)=0.95K$

$C(t=3T)=0.98K$

ثابت زمانی معیاری است برای سرعت خروجی سیستم

ثابت زمانی کمتر ≡ سرعت خروجی بیشتر

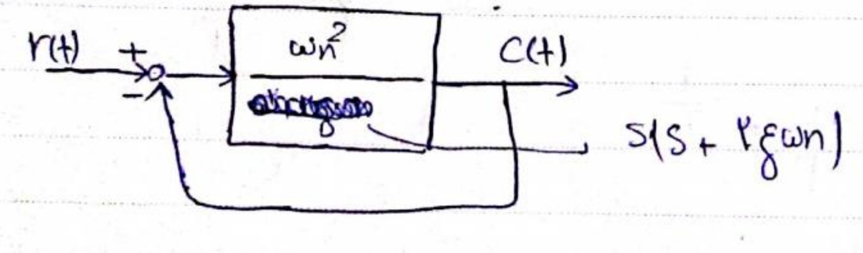
ثابت زمانی $\times 4$ ≃ زمان رسیدن خروجی سیستم به مقدار نهایی

ثابت زمانی عبارتست از مقدار زمانی که طول می‌کشد تا خروجی سیستم به ۶۳/۲٪ مقدار نهایی اش برسد

$C(t=T)=63.2\%\,K$

ظرفیت × مقاومت خروجی = ثابت زمانی

سیستم مرتبه ۲:



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{\underbrace{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0}_{\text{معادله مشخصه}}}$$

فرم استاندارد تابع تبدیل سیستم مرتبه ۲

$$G(S) = \frac{1 \neq 15}{s^2 + s + 25}$$

مکان ω_n^2 تنها فقط عدد ثابت مخرج است

$$\omega_n^2 = 25 \rightarrow \omega_n = 5$$

$$2\xi\omega_n = 1 \Rightarrow \xi = 0.1$$

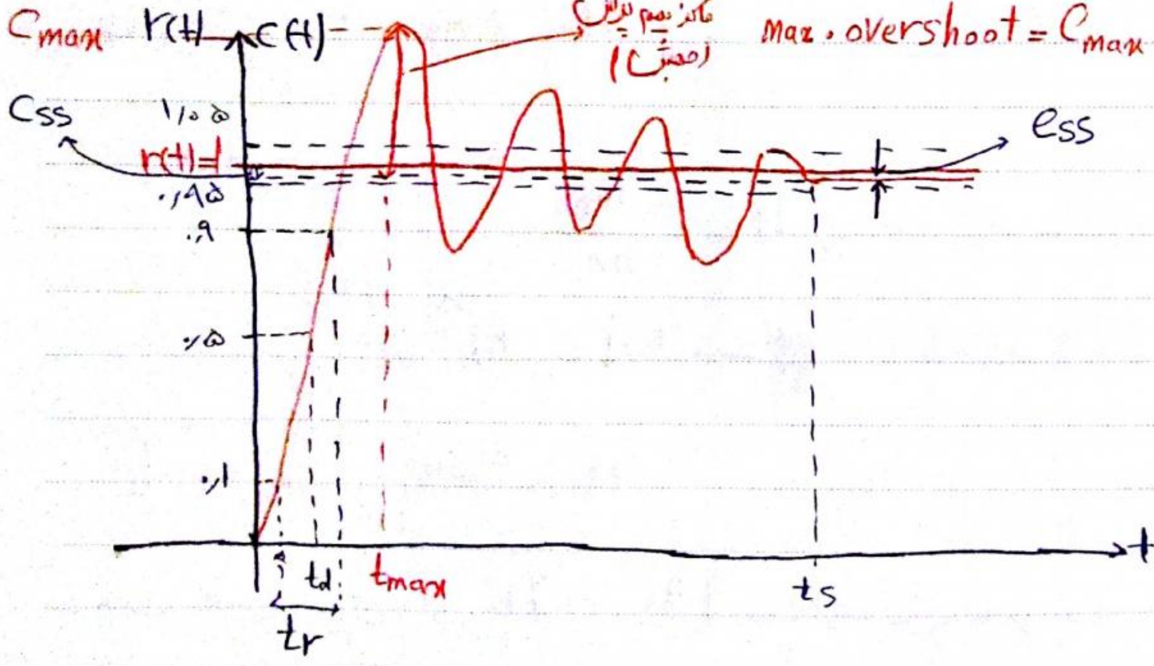
در شرایطی که ضریب s^2 یک باشد.

ورودی پله واحد به سیستم:

$$R(S) = \frac{1}{S} \rightarrow C(S) = \frac{\omega_n^2}{S(S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2)}$$

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \cos^{-1}\xi)$$

$$\text{Max. overshoot} = C_{max} - C_{ss}$$



$$C_{ss} = \lim_{t \to \infty} C(t)$$

Subject
Date

ماکزیمم پرش maximum overshoot

$$0<\xi<1 \rightarrow \%M.O. = 100\, e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$\xi = 0 \longrightarrow$ سیستم بدون استهلاک $\quad \%max = 100\%$

$\xi \uparrow \longrightarrow$ کاهش اورشوت $\longrightarrow$ اثرات نوسان کم می‌شود

t_{max} زمان ماکزیمم : زمان رسیدن خروجی به اولین ماکزیمم

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

t_d زمان تأخیر : (delay time) : مدت زمانی است که خروجی به ۵۰ درصد مقدار نهایی اش می‌رسد.

$$t_d \simeq \frac{1+0/7\xi}{\omega_n}$$

$$\xi\uparrow \longrightarrow \omega_n\downarrow \longrightarrow t_d\uparrow$$

t_r : زمان خیزا (risetime

مدت زمانی که خروجی از ۱۰٪ به ۹۰٪ مقدار نهایش می‌رسد

$$t_r \simeq \frac{0/8+2/5\xi}{\omega_n}$$

$$\xi\uparrow \longrightarrow \omega\downarrow \longrightarrow t_r\uparrow$$

Subject
Date

(زمان استقرار)

t_s: زمان نشست: مدت زمانی که طول می‌کشد تا خروجی در محدوده ۲ یا ۵ درصد مقدار نهایی اش قرار گیرد.

حفظ باشیم.

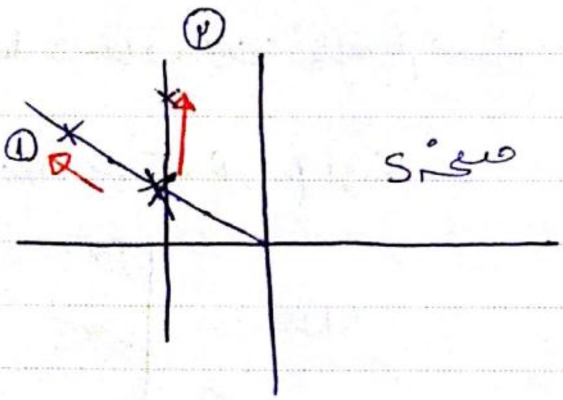
٪۵ معیار: $t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 3T$

٪۲ معیار: $t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4T$

$T = \frac{1}{\xi\omega_n}$

ثابت زمانی سیستم مرتبه ۲

مثال ۱



① = ثابت = ξ اما ω_n زیاد می‌شود
پس زمان تاخیر کم می‌شود
زیرا فاصله قطب‌های زیاد می‌شود

در سیستم ۲ زمان استقرار ثابت زیرا $\xi\omega_n$ ثابت است ⇐ پاسخ ۱

برای سیستم ۱ و ۲ کدام عبارت صحیح است؟

۱) در سیستم ۲ زمان استقرار ثابت و در سیستم ۱ زمان تاخیر ~~زیاد~~ کم می‌شود

۲) در سیستم ۲ " " زیاد و " " کم می‌شود

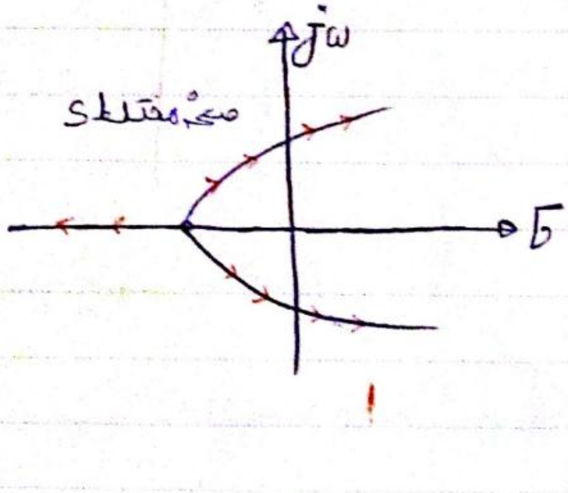
۳) در سیستم ۲ " ثابت و " " ثابت است

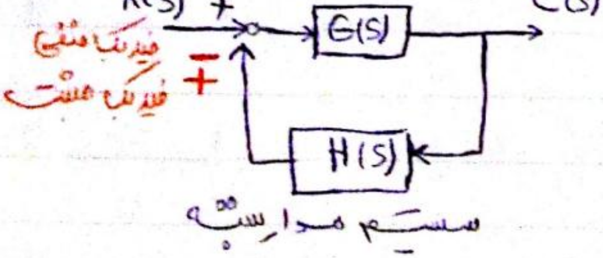
۴) نمی‌توان در ارتباط با زمان استقرار ① و زمان تاخیر ۲ نظر داد.

مکان هندسی ریشه‌ها (Root-Locus)

- تعریف مکان هندسی ریشه‌ها
- شرط اندازه و زاویه
- مراحل رسم مکان هندسی
- معیار پایداری روث - لوکاس
- طراحی کنترلرها با استفاده از مکان هندسی

- تعریف مکان هندسی ریشه‌ها: مکان هندسی ریشه‌ها عبارت است از منحنی مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه مدار بسته در صفحه مختلط S به ازای تغییرات پارامترهای مجهول در معادله مشخصه (قطب‌های مدار بسته) (مثل بهره K یا هر پارامتر دیگری نظیر σ، α، T، β و ...) از ۰ تا ∞





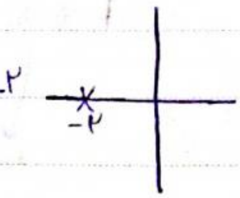
در سال‌ها اخیر به فیدبک ⊕ توجه شده است.

معادله مشخصه مدار بسته :

فیدبک منفی $1 + G(S)H(S) = 0$

" مثبت $1 - G(S)H(S) = 0$

معادله مشخصه $1 + \frac{1}{S+1} = 0 \rightarrow S+2=0 \Rightarrow S=-2$



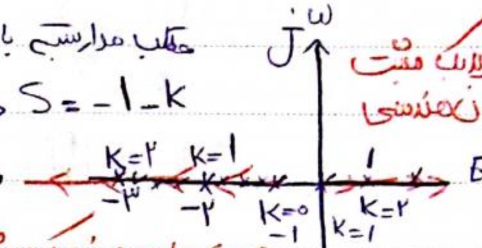
مکان هندسی در این معادله مشخصه معنا ندارد

حتماً باید در معادله مشخصه یک پارامتر ثابت ببینیم.

قطب مدار بسته با فیدبک منفی

$1 + \frac{K}{S+1} = 0 \rightarrow S+1+K=0 \Rightarrow S=-1-K$

ریشه وابسته به یک پارامتر مجهول است



K	S
0	-1
1	-2

پارامتر ثابت از صفر تا بی‌نهایت تغییر دهیم

تا به منحنی مکان هندسی برسیم

اگر K را به سمت بی‌نهایت بکشیم و تا بی‌نهایت ببریم

ریشه‌ها به سمت بی‌نهایت نزدیک می‌شوند.

فیدبک مثبت : $1 - \frac{K}{S+1} = 0$

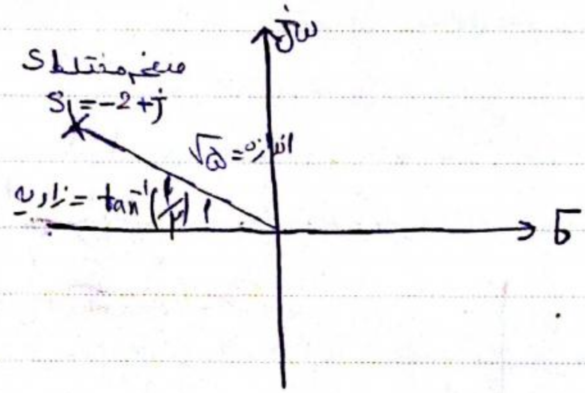
معادله مشخصه $S+1-K=0 \Rightarrow S=-1+K$ قطب مدار بسته با فیدبک مثبت

شرط اندازه – شرط زاویه :

معادله‌ی مشخصه مدار بسته : $1 \pm G(S)H(S) = 0$

$$1 \pm K \frac{(S+z_1)(S+z_2)}{(S+p_1)(S+p_2)(S+p_3)} = 0$$

$(0 \to \infty)$ K از صفر تا بی‌نهایت تغییر می‌کند



هر گاه می‌خواهیم بدون رسم کردن بفهمیم S_1 روی مکان هست یا خیر؟

هدف: چک کردن نقطه که آیا روی مکان قرار می‌گیرد یا خیر؟

S_1 باید در معادله صدق کند.

فیدبک منفی

$$1 \pm \frac{K(S_1+z_1)(S_1+z_2)}{(S_1+p_1)(S_1+p_2)(S_1+p_3)} = 0$$

فیدبک مثبت

از این معادله نمی‌توان چک کرد زیرا K معلوم نیست

فیدبک مثبت

$$\frac{K(S_1+z_1)(S_1+z_2)}{(S_1+p_1)(S_1+p_2)(S_1+p_3)} = \pm 1$$

یک کمیت مختلط است   یک کمیت حقیقی   فیدبک منفی

یک کمیت مختلط نمی تواند با یک کمیت حقیقی برابر شود مگر اینکه یک اتفاق بیفتد .

مختلط $\equiv$ حقیقی

$$Re + j\,Im = Re + j0$$

$$1 \; 1\angle = 1 \; 1\angle$$

زاویه   اندازه   زاویه   اندازه

± 1 → اندازه $= 1$

± 1 → زاویه فاز → 1 ، -1

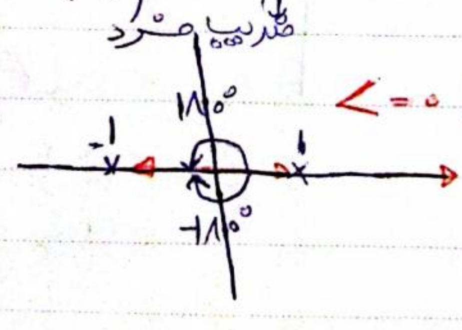
زاویه فاز :

$$\angle \text{زاویه فاز} = \tan^{-1}\left(\frac{\text{قسمت موهومی}}{\text{قسمت حقیقی}}\right)$$

$$\angle 1 + 0j = \tan^{-1}\left(\frac{0}{+1}\right) = 0 ,\; K'(360)$$

$$\angle -1 + 0j = \tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right) = \underbrace{(2K'+1)}_{\text{ضریب فرد}}(\pm 180)$$

tan در دو جا صفر است یکی صفر یکی π



$\angle = 0$ یا 360°

زاویه ای که با محور x ها می سازد

اگر هر نقطه ای مکان باستی دارای این شرایط باشد .

$-2+j$ باشد

$$\left| K \frac{(S_1+Z_1)(S_1+Z_2)}{(S_1+P_1)(S_1+P_2)(S_1+P_3)} \right| = 1$$ شرط اندازه

برای فیدبک مثبت یا منفی ، شرط اندازه باید برپا باشد.

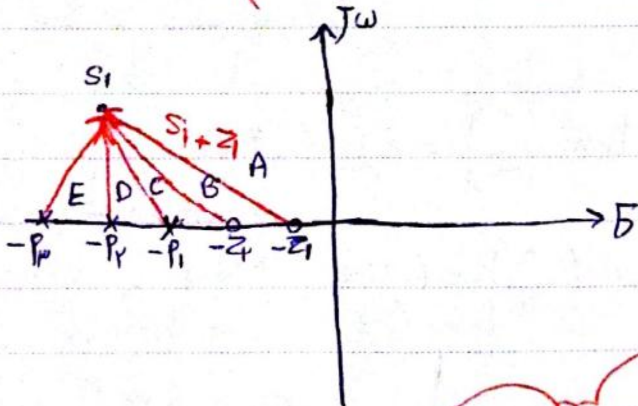
دو روش وجود دارد :

الف) تحلیلی : جایگذاری $S_1 = -2 + j$ در معادله فوق

$$K \frac{\overset{A}{|S_1+Z_1|}\,\overset{B}{|S_1+Z_2|}}{\underset{C}{|S_1+P_1|}\,\underset{D}{|S_1+P_2|}\,\underset{E}{|S_1+P_3|}} = 1$$

$$|R_e + j\,I_m| = \sqrt{Re^2 + I_m^2}$$

روش ترسیمی (در تست ها از این روش استفاده شود)



$$K \times \frac{A \times B}{CDE} = 1$$

$|S_1+Z_1|$

برداری که از Z_1 به S_1 وصل می‌شود و $|S_1+Z_1|$ برابر طول بردار است

اندازه بردار $= |S_1+Z_1|$

$$K = \frac{CDE}{AB}$$

هر دو شرط زاویه و اندازه را باید باهم چک کرد.

برای چک کردن شرط اندازه ابتدا از تمام صفرها و قطب های نقطه مورد نظر تا S_1 وصل کرده فواصل اندازه گیری

و در رابطه زیر قرار می دهیم:

$$\text{شرط اندازه} \quad \frac{\text{حاصل ضرب فواصل صفرها تا نقطه مورد نظر}}{\text{حاصل ضرب فواصل قطب ها تا نقطه } S_1} = 1$$

✓ شرط اندازه برای فیدبک مثبت و منفی یکسان است.

شرط زاویه:

$$\angle \frac{K(S_1+Z_1)(S_1+Z_2)}{(S_1+P_1)(S_2+P_2)(S_3+P_3)} = \begin{cases} K'(360) & \text{فیدبک مثبت} \\ (2K'+1)(\pm 180) & \text{فیدبک منفی} \end{cases}$$

در فیدبک مثبت زاویه فاز مضرب زوجی از π باشد.

فیدبک مثبت) زاویه فاز: $= K'(360)$

فیدبک منفی) زاویه فاز: $= (2K'+1)(\pm 180)$

در فیدبک منفی مضرب فردی از π باشد
زاویه فاز

$\angle$ مثبت هرعدد حقیقی $= 0 = K'(360)$

$\angle$ منفی هرعدد حقیقی $= (2K'+1)(\pm 180)$

محاسبه‌ی شرط زاویه:

روش تشوری: عملگر فاز همانند عملگر لگاریتم است

$$\underbrace{\cancel{\angle K}}_{K>0 \;\to\; 0} + \Big(\underbrace{\angle (S_1+Z_1)}_{\theta_1} + \underbrace{\angle (S_1+Z_2)}_{\theta_2}\Big)$$

$$-\Big[\underbrace{\angle(S_1+P_1)}_{\phi_1} + \underbrace{\angle (S_1+P_1)}_{\phi_2} + \underbrace{\angle (S_1+P_3)}_{\phi_3}\Big]$$

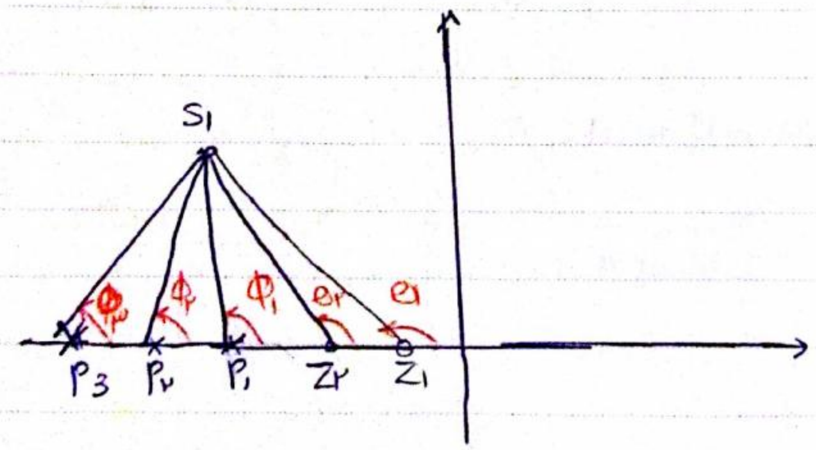
$$\tan^{-1}\frac{\text{موهومی}}{\text{حقیقی}} \qquad = \underbrace{(2K'+1)(\pm 180^\circ)}_{\text{فیدبک منفی}} \;,\; K'=0,1$$

$$\underbrace{K'(360)}_{\text{فیدبک مثبت}} ; \; K'=0,1,\ldots$$

چون شرط زاویه مستقل از K است لذا ابتدا شرط زاویه را چک می‌کنیم اگر معتبر بود

از نتیجه شرط اندازه استفاده کرده و K را بدست می‌آوریم.

ترسیمی:



برای چک کردن شرط زاویه :

ابتدا از تمام صفرها و قطب‌ها به s_1 وصل می‌کنیم و زاویه بردار حاصل که مساوی به سمت s_1 است را نسبت به محور حقیقی اندازه گیری و در رابطه زیر قرار می‌دهیم :

شرط زاویه : (مجموع زوایای صفرها تا نقطه مورد نظر) - (مجموع زوایای قطب‌ها تا نقطه مورد نظر)

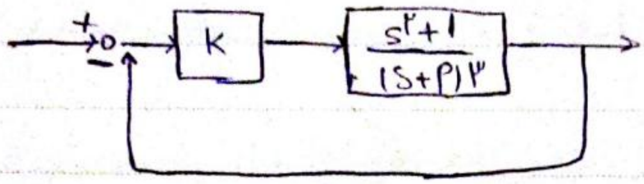
$$= \begin{cases} K'(360) & \text{ضریب مثبت} \\ (2K'+1)(\pm 180) & \text{ضریب منفی} \end{cases}$$

$$(\theta_1+\theta_2) - (\phi_1+\phi_2+\phi_3) =$$

برخلاف شرط اندازه که برای هر دو ضریب مثبت و منفی یکسان بود شرط زاویه متفاوت است .

تست : مقدار P چقدر باشد تا نقطه $-2+j$ روی مکان قرار گیرد (قطب غالب باشد)

یعنی نقطه روی مکان قرار بگیرد ≡ قطب مسلط یا غالب



1) ✓ $P=3$

2) $P=-3$

3) $P=2$

4) $P=-2$

از گزینه ها می توان فهمید P باید حقیقی باشد.

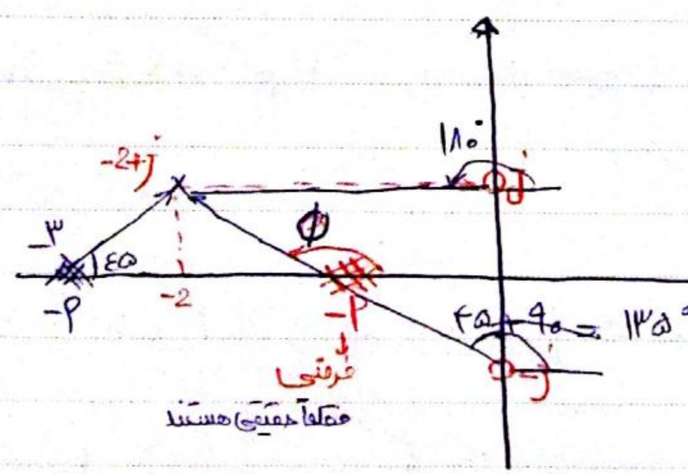
مقدم بر دو شرط، شرط زاویه است.

چک کردن شرط زاویه:

فیدبک منفی: $1 + K\frac{s^2+1}{(s+p)^3} = 0$

$$\angle K\frac{s^2+1}{(s+p)^3} = \underbrace{\angle -1}_{\text{فیدبک منفی}} = \underbrace{(2K'+1)}_{\text{ضریب فرد}}(\pm 180)$$

ترسیمی:



$$45 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right)$$

Subject
Date

شرط زاویه : $\cancel{(180} + 135) - (3\phi) = \cancel{\pm 180}$

مجموع زوایای صفرها

چون ۳ قطب داریم که ترکیب جا قرار گرفته اند و زوایای مساوی دارند

$\rightarrow 3\phi = 135 \Rightarrow \phi = 45^\circ$

از نقطه -P- بالا وصل کنیم به نقطه مورد نظر، نقطه P- را باید جایی قرار دهیم تا زاویه آن نسبت به نقطه ۴۵ درجه شود پس بهترین جا ۳- است.

مراحل رسم مکان هندسی :

۱) مرتب کردن معادله مشخصه به فرم زیر :

$$1 \pm K\frac{Q(s)}{P(s)} = 0$$

فیدبک مثبت

یا

$$P(s) \pm KQ(s) = 0$$

فیدبک مثبت

K: پارامتر مجهولی که از صفر تا بی نهایت تغییر می کند.

فرم مرتب شده : $1 + K\frac{s+1}{(s+2)^2} = 0$

$Q(s) = s+1$

$P(s) = (s+2)^2$

تعریف : $\frac{Q(s)}{P(s)}$ = تابع تبدیل مدار باز

$Q(s)=0$ ریشه‌های این معادله صفرهای مدار باز نامیده می‌شوند و در صفحه با علامت دایره O مشخص می‌شوند. $z_1, z_2, z_3, \ldots$

$P(s)=0$ ریشه‌هایش قطب‌های مدار باز نامیده شده و با ضربدر مشخص می‌شود

$p_1, p_2, p_3, \ldots$

معادله مشخصه مدار بسته:

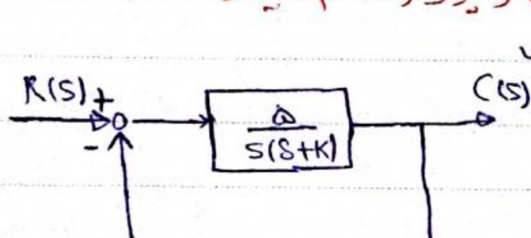
$$\underbrace{(s^2+2s+2)}_{P(s)} + \alpha\underbrace{(s+3)}_{Q(s)} = 0$$

صفر مدار باز $Q(s)=0 \Rightarrow s+3=0 \Rightarrow s=-3=z_1$

قطب‌های مدار باز
$$P(s)=s^2+2s+2=0 \rightarrow \begin{cases} p_1=-1+j \\ p_2=-1-j \end{cases}$$

مکان هندسی سیستم مدار بسته زیر را رسم کنید.

به ازای تغییرات K از صفر تا بی‌نهایت



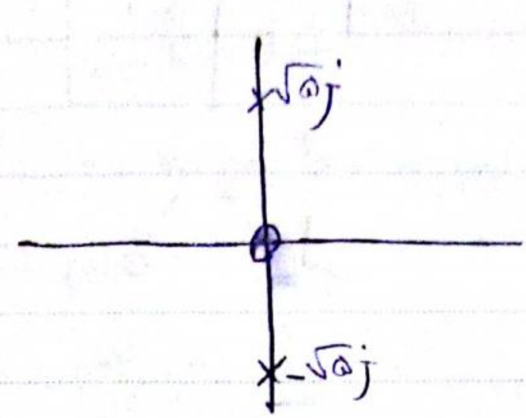
معادله مشخصه مدار بسته $1+G(s)H(s)=0 \Rightarrow 1+\frac{5}{s(s+K)}=0$

$$\Rightarrow \frac{s^2+Ks+5}{s^2+Ks}=0 \Rightarrow s(s+K)+5=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{s^2+5}_{P(s)}+K\underbrace{s}_{Q(s)}=0$$

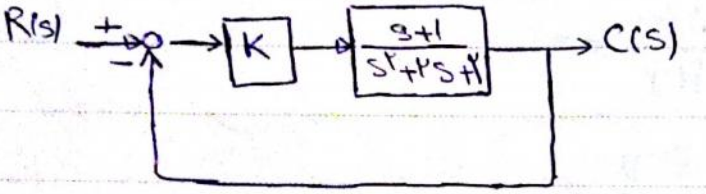
$Q(s) = s = 0 \Rightarrow z_1 = 0$

$P(s) = s^2 + 5 = 0 \Rightarrow P_1, P_2 = \pm\sqrt{5}j$



قطب و صفرهای مدار باز را در صفحه s مشخص می‌کنیم.

مثال ۱)



فرم مرتب شده است $1 + K\frac{s+1}{s^2+2s+2} = 0$

$Q(s) = s+1 = 0 \Rightarrow s = -1 \Rightarrow z_1 = -1$

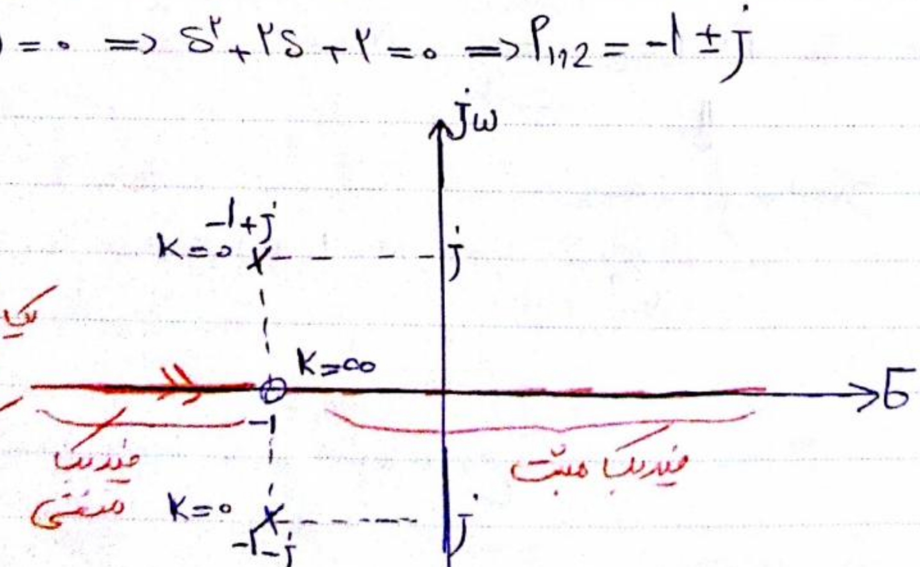
$P(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 2s + 2 = 0 \Rightarrow P_{1,2} = -1 \pm j$

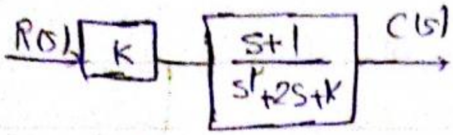
$n = 2$

$m = 1$ یک صفر محدود

$n - m = 2 - 1 = 1$

یک صفر نامحدود





نکته: هر معادله مشخصه که پارامتر مجهول داشته باشد می توان براساس مکان هندسی رسم کرد و به بسته و باز بودن ارتباط ندارد.

معادله مشخصه $\underbrace{s^2+2s}_{P(s)} + \underbrace{K}_{Q(s)} = 0$

۲- شروع منحنی:

معیار شروع $K=0$ است

منفی: $1+K\frac{Q(s)}{P(s)}=0$

مثبت: $1-K\frac{Q(s)}{P(s)}=0$

فیدبک مثبت

$$K = \pm \frac{P(s)}{Q(s)}$$

فیدبک منفی

$$P(s)=0 \xRightarrow[\text{یا منفی}]{\text{فیدبک مثبت}} K=0$$

$\Downarrow$

قطب های مدار باز

مکان هندسی از قطب های مدار باز (×) به ازای $K=0$ شروع می شود.

$\times \rightarrow K=0 \rightarrow$ نقطه شروع

منحنی Start می تواند از چه جا باشد.

۳- پایان منحنی

معیار پایان $K=\infty$ است.

$$\underset{\text{فیدبک} \oplus \text{یا} \ominus}{Q(s)=0} \Longrightarrow K=\infty$$

مکان هندسی در محل صفرهای مدار باز (O) ختم می شود.

نقطه پایان $\longleftarrow K=\infty \longleftarrow$ O

نکته: انواع صفره:

صفرهای مدار باز:
- محدود: ریشه‌های $Q(s)=0$
- نامحدود

مطلقاً تعداد صفرها و قطب ها برابر است.

n: تعداد قطب‌های مدار باز

m: تعداد صفرهای محدود مدار باز (ریشه‌های $Q(s)=0$)

$n \geq m$:
- $m=n$ همه صفرها محدودند
- $m \neq n$: m تعداد صفرهای محدود

$n-m$: تعداد صفرهای نامحدود