تحلیل سازه (۱)

★ سرفصل های درس :

۱- پایداری و معینی

۲- تحلیل سازه های معین (تیرها، خرپاها، قوس ها، قاب ها و ...)

۳- تغییرشکل (تغییرمکان سازه)
- الف) روش سطح لنگر
- ب) بار الاستیک
- ج) تیر مزدوج

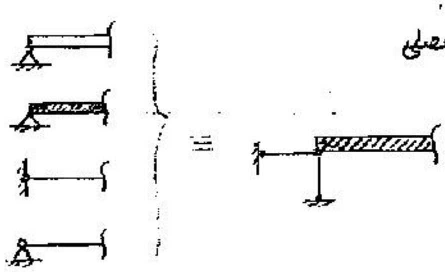
۴- روش های انرژی
- الف) کار مجازی (بار واحد)
- ب) روش کار حقیقی (حداکثر تغییرمکان در اثر ضربه)
- ج) قضیه اول کاستیلیانو (تحلیل سازه های نامعین با روش تغییرمکان)
- د) قضیه دوم کاستیلیانو
- هـ) قضیه کراتی ـ انگسر
- و) قضیه تقابل (کار یا تغییرمکان)

۵- تحلیل سازه های نامعین (روش نیرو)
- الف) روش بار واحد
- ب) روش حداقل کار
- ج) روش سه لنگری

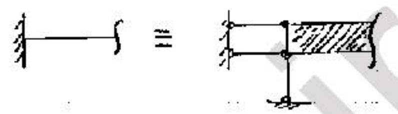
۶- خط تأثیر
- الف) سازه های معین
- ب) سازه های نامعین

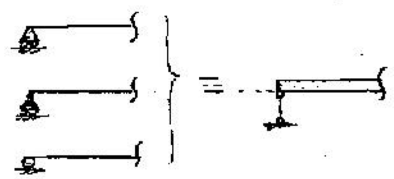
* شبیه سازی تکیه‌گاه‌ها :

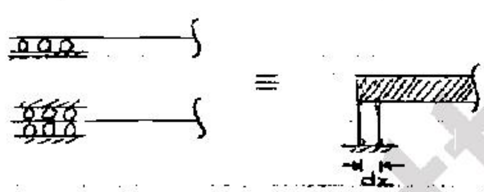
* تکیه‌گاه مفصلی



* گیردار کامل







* این فاصله کم جلوی θ را می‌گیرد.

$n = r - (c + 3)$

n ↓ درجه نامعینی ، $(c+3)$ ↓ تعداد معادلات شرط

★ $n<0$ ← سازه ناپایدار

★ $n=0$ ← سازه معین و پایدار (به شرط عدم ناپایداری هندسی)

★ $n>0$ ← سازه نامعین و پایدار (به شرط عدم ناپایداری هندسی)

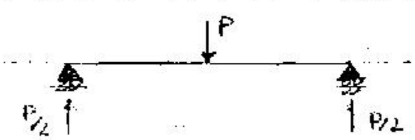
$n = 3 - 3 = 0$ معین و پایدار

$n = 3 - 3 = 0$

از نظر هندسی ناپایدار است . (نیروهای موازی)

$n = 4 - 3 = 1$

نامعین و ناپایدار

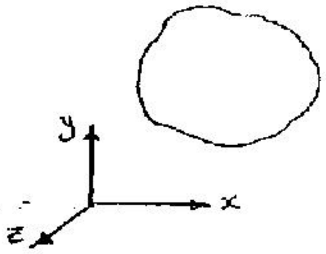


ناپایدار (چون تحت هر بارگذاری باید پایدار باشد)

سازه بالا تحت بارگذاری قائم پایدار است ولی تحت بارگذاری افقی ناپایدار می‌باشد .

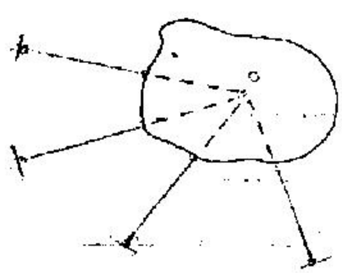
★ پایداری معینی :

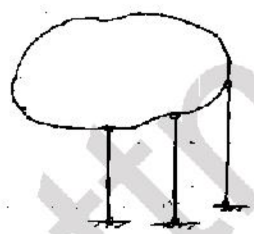
• برای اینکه جسم دارای حرکت نباشد حداقل سه قید نیاز داریم.



$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases}$$

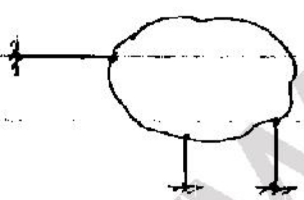
★ برای پایداری یک جسم، عکس العمل ها نباید موازی باشند و یا در یک نقطه همدیگر را قطع کنند. اگر این اتفاق رخ دهد ناپایداری هندسی خارجی ایجاد می شود.





★ اگر قیدها کمی حرکت کنند آنگاه سازه پایدار می شود.

• عکس العمل ها باید مستقل باشند تا پایداری برقرار شود.



• سازه پایدار

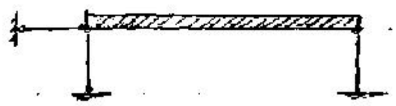
• تیرها :

یک بعد تیرها از دیگری خیلی کوچکتر است.

- $(\frac{h}{\ell})$ کوچک است در نتیجه از $(\frac{h}{\ell})^2$ در مقابل $(\frac{h}{\ell})$ صرف نظر می کنیم.
- $(\frac{b}{\ell})$ کوچک است در نتیجه از $(\frac{b}{\ell})^2$ در مقابل $(\frac{b}{\ell})$ صرف نظر می کنیم.

★ اگر تیر پیوسته باشد. از نظر داخلی پایدار است.

سازه پایدار، سازه ای است که هر باری روی آن بگذاریم تعادل داشته باشد.



▪ یک سازه پایدار داخلی و خارجی

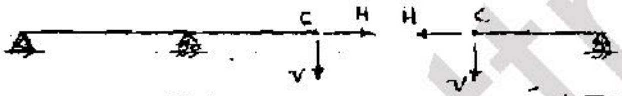
▪ ناپایداری هندسی:
- خارجی ← نوع قرارگرفتن قیدها (موازی یا متقارب)
- داخلی ← مثلاً در تیرها مفصل داشته باشیم.

▪ ناپایداری هندسی داخلی :

مفصل خمشی

★ لنگر در خود مفصل هم صفر است.

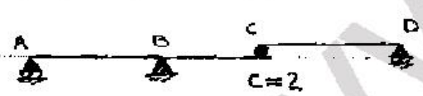
★ در این نوع مفصل شیب دو طرف می‌تواند متفاوت باشد اما اگر نقطهٔ عادی بود، نمی‌توانست متفاوت باشد.

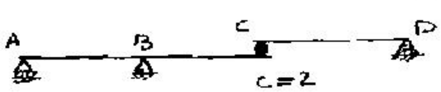


$c = 1$

$\Sigma M_c = 0$ چپ $\qquad$ $\Sigma M_c = 0$ راست

این دو معادله در حقیقت یک معادله هستند بنابراین C یکی اضافه می‌شود.





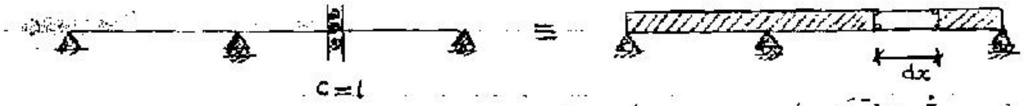
پایدار و معین $\quad n = 5 - (2+3) = 0$

AB پایدار و CD پایدار ⇐ کل سازه پایدار

▪ در این نوع مفصل نیروی افقی و لنگر خمشی صفر است.

ناپایدار $\quad n = 4 - (2+3) = -1$

 مفصل برشی ⇐ حرکت در جهت x داریم، ناپیوستگی θ ← نیروی برشی = 0



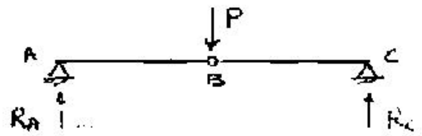
(پایدار)

$n = 4 - (1+3) = 0$

★ نیروی برشی را انتقال نمی‌دهد و θ دو طرف برابر.

$n = 4 - (1+3) = 0$ $\quad$ حول B دوران داریم ← ناپایداری هندسی داریم.

★ حالا با روش اعمال نیرو ، ناپایداری این سازه را ثابت می‌کنیم . به این ترتیب که در نقطه B یک نیروی P وارد می‌کنیم و داریم :

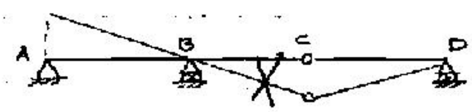


$\Sigma M_{BR} = 0 \rightarrow R_C = 0$

$\Sigma M_{BL} = 0 \Rightarrow R_A = 0$

$\Sigma F_y = P \neq 0 \rightarrow$ سازه ناپایدار است

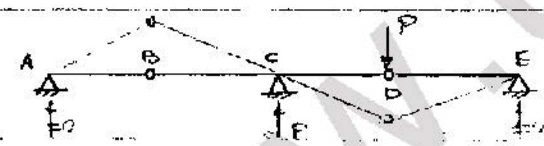
▶ ناپایدار آنی : به محض اینکه نیروی P وارد شود سازه ناپایدار می‌شود.



★ در سازه روبه‌رو اگر نقطه C پایین بیاید ، نقطه A باید بالا رود ولی امکان‌پذیر نیست .

★ پایداری قسمت ABC ، پایداری CD را در پی دارد .

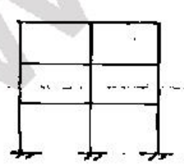
» اگر سازه تبدیل به مکانیسم شود (یعنی حرکت داشته باشد) ، ناپایدار است .



★ سازه تبدیل به مکانیسم می‌شود بنابراین سازه ناپایدار است .

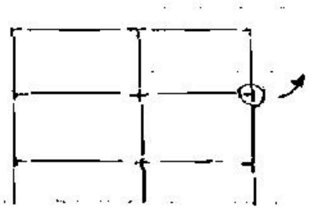
$\Sigma M_C = Pl \neq 0$ ناپایداری هندسی داخلی

▶ قاب‌ها :



تفاوت قاب و خرپا این است که اتصالات خرپا مفصلی است ولی اتصالات قاب ، صلب است یعنی زاویه اتصال بعد از تغییر شکل تغییر نمی‌کند . (قاب خمشی)

می‌توان گفت خرپا صورت خاصی از قاب است که تمامی اتصالاتش مفصلی است.



★ هر گره در حال تعادل است

راه اول) با هر برش ، سه مؤلفه مجهول بوجود می‌آید .

$n = 3m + r - (3j + c)$

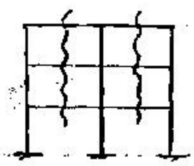
تعداد اتصالات — عکس العمل ها — تعداد اعضا

◄ درقاب بالا داریم : $n = 3(15) + 9 - 3(12) = 18$

18 درجه نامعین و پایدار

سازه‌ای که کاملاً پیوسته و یکپارچه باشد از لحاظ داخلی پایدار است .

راه دوم) قاب را تبدیل به چند درخت می‌کنیم که هر درخت باید در تعادل باشد .



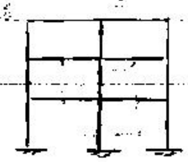
اگر مفصل را برش بزنیم ، دو مجهول ایجاد می‌شود .

$n = F - (3t + C)$

تعداد مجهولات — تعداد درخت‌ها

◄ هر درخت ، سه معادله تعادل دارد . $n = 27 - (3\times3) = 18$

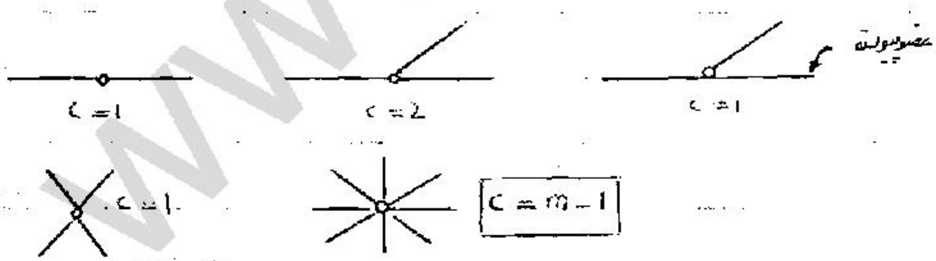
راه سوم) قاب را تبدیل به یک درخت می‌کنیم یعنی هر فضای بسته را با یک برش به فضای باز تبدیل می‌کنیم .



$\star\ n = 3k + r - (C+3)$

تعداد فضاهای بسته

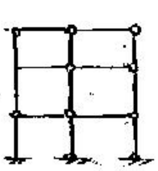
$n = 3(4) + 9 - 3 = 18$



◆ دو روش برای تعیین معین یا نامعینی سازه‌ها داریم :

۱- روش بررسی ← پایداری قطعه قطعه سازه را بررسی می‌کنیم

۲- روش اعمال بار ← نیرویی به سازه وارد می‌کنیم و تعادل سازه را بررسی می‌کنیم .



$n = 3(15) + 7 - (3\times12 + 16) = 0$

با روش بررسی مشخص می‌شود که سازه پایدار است و معین .

قوس‌ها :

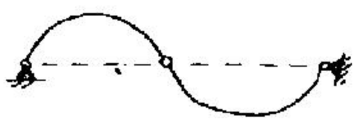
تفاوت آن با قاب این است که اعضایش خمیده هستند. (روابط همان روابط قاب است) .

$n = r - (C+3)$

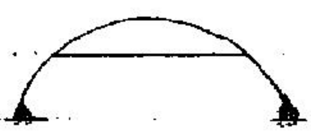
$n = 3 - 3 = 0$ معین و پایدار

$n = 4 - (3+1) = 0$ معین

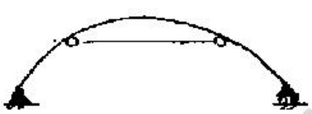
چون سه مفصل در یک راستا نیستند سازه پایدار است .



چون سه مفصل در یک راستا هستند سازه ناپایدار است.



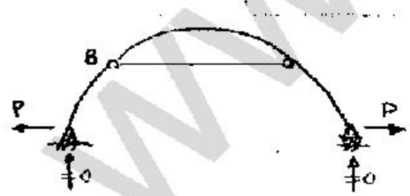
$n = 3 + 3 - 3 = 3$ نامعین



$n = 3 + 3 - (3+2) = 1$ نامعین

$n = 4 + 3 - (3+3) = 1$

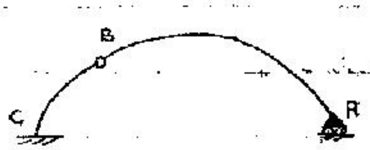
سازه پایدار و نامعین



$n = 3 + 3 - (3+3) = 0$

با استفاده از روش اعمال نیرو داریم :

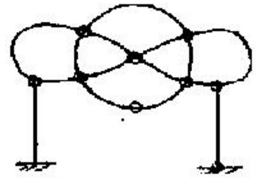
$\Sigma M_B = Py \neq 0 \Rightarrow$ سازه ناپایدار



$n = 4 - (3+1) = 0$ معین

قسمت AB یک غلتک و یک مفصل است پس پایدار می‌باشد .

قسمت BC هم پایدار است پس کل سازه پایدار است .



نامعین $n = 3(6) + 6 - 3 = 21$ ← بدون مفصل

معین $n = 3(6) + 5 - (3+20) = 0$ ← با مفصل

با استفاده از روش بررسی سازه پایدار است.

▸ خرپاها :

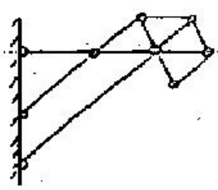
۱- خرپای ساده → الف) نوع اول ، ب) نوع دوم

۲- خرپای مرکب

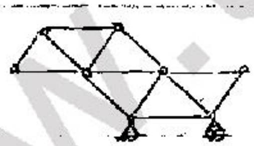
۳- خرپای مختلط

! اگر سه مفصل در یک راستا باشند و مفصل وسط رها باشد، مشکلی در پایداری سازه به وجود می‌آید.

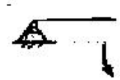
▸ خرپای نوع اول



▸ خرپای نوع دوم



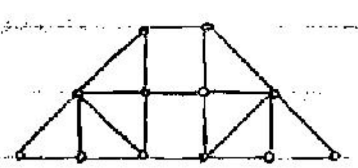
* هر مفصل کار دو میله را انجام می‌دهد.



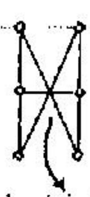
می‌تواند تغییر زاویه بدهد.

! خرپای نوع اول حتماً پایدار است و خرپای نوع دوم از نظر داخلی پایدار است ولی پایداری خارجی آن باید بررسی گردد.

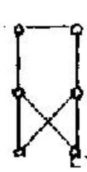
▸ از ترکیب چند خرپای ساده، خرپای مرکب تشکیل می‌شود به شرط آنکه به صورت پایدار به هم متصل شده باشند.



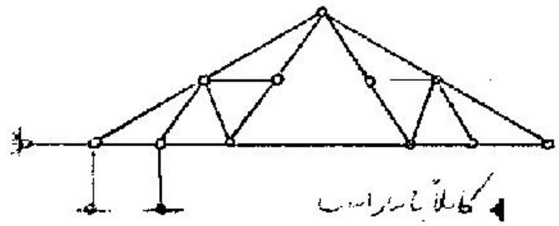
اتصال ناپایدار (میله‌های موازی)



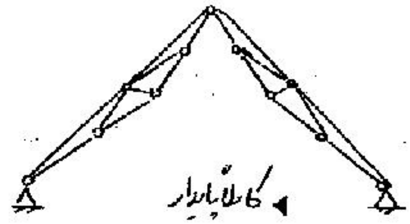
حول این نقطه دوران دارم



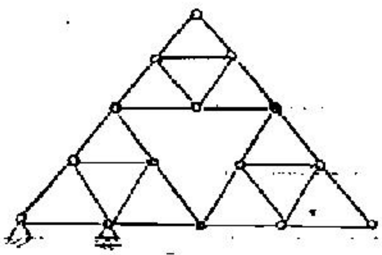
اتصال پایدار (سه میله مستقل)



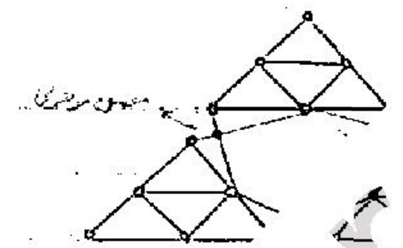
▲ کاملاً پایدار است



▲ کاملاً پایدار

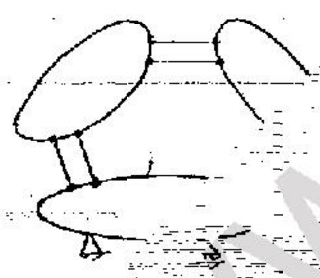


یک مثلث ← از نظر داخلی حتماً پایدار است

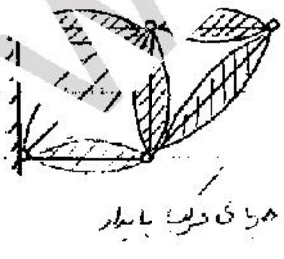


▲ زمانی سازه پایدار است که مفصل‌های مجازی ها روی یک خط قرار نگیرند.

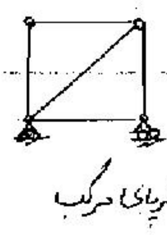
تمرین) ثابت کنید خرپای شکل زیر پایدار است.



★ می‌توان در یک خرپای ساده به جای هر عضو یک خرپا قرار دهیم. در این صورت یک خرپای پایدار مرکب به دست می‌آید.



▲ خرپای مرکب پایدار



▲ خرپای مرکب

$$n = m + r - 2j$$

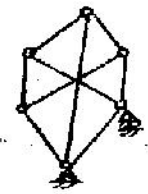
چون فرض کرده‌ایم هر گره دو معادله تعادل دارد.

★ $n<0$ ← ناپایدار

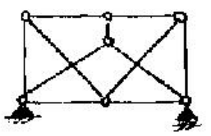
★ $n=0$ ← معین و پایدار (عدم ناپایداری هندسی)

★ $n>0$ ← نامعین و پایدار (عدم ناپایداری هندسی)

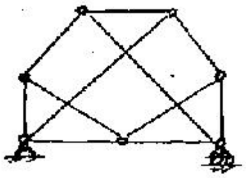
◄ خرپاهای زیر از کدام دسته‌اند ؟



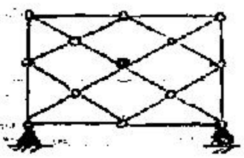
$n=9+3-2(6)=0$



$n=11+3-2(7)=0$



$n=11+3-2(7)=0$



$n = 3 + 24 - 2(13) = 1$ نامعین

◄ این خرپا، یک خرپای مختلط است یعنی نه ساده است و نه مرکب.

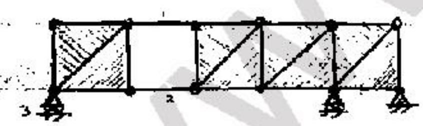
★ برای بررسی پایداری یک خرپا پنج روش داریم :

۱- روش برشی $n \geq 0$

۲- روش اعمال بار $n \geq 0$ ۴- روش دترمینان ماتریس $n=0$

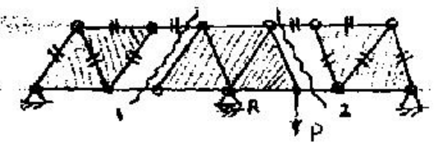
۳- روش آزمایش بار صفر $n=0$ ۵- روش هنبرگ $n=0$

◄ با ذکر چند مثال روش‌ها را به کار می‌بریم :



$n = 20+4-24=0$ معین

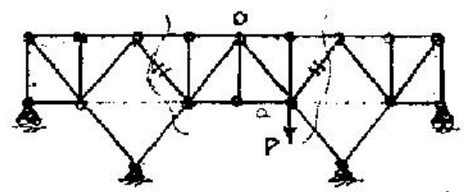
خرپا کاملاً پایدار است چون خرپای سمت راست هم از لحاظ داخلی و هم از لحاظ خارجی پایدار است و بیانگر این است که خرپای سمت چپ توسط سه میله مستقل 1، 2 و 3 به خرپای سمت راست متصل شده است. (روش برشی)



$n = 21+5-26=0$ معین

$\Sigma M_A = Pa \neq 0 \Rightarrow$ ناپایدار (روش اعمال بار)

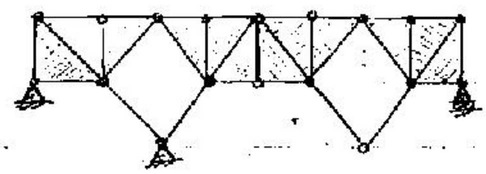
◄ خرپا را از خطوط 1 و 2 برش می‌زنیم و حول A لنگر می‌گیریم.



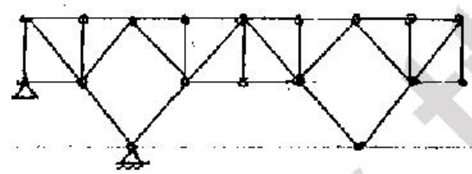
نامعین $n = 31 + 6 - 36 = 1$

★ با استفاده از روش اعمال بار نیروی P را به خرپا وارد می‌کنیم :

$\Sigma M_o = Pa \neq 0 \Rightarrow$ ناپایدار



◄ خرپای روبه‌رو کاملاً پایدار است چون خرپای سمت چپ سه عکس‌العمل مستقل دارد و همین طور در خرپای دیگر پس در کل خرپا پایدار است.

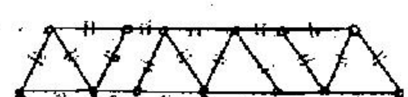


تمرین) پایداری و ناپایداری خرپای روبه‌رو را بررسی کنید.

روش آزمایش بار صفر :

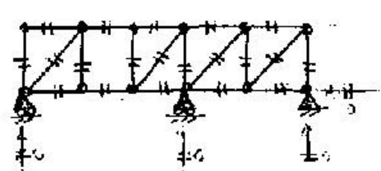
★ اصل جواب واحد : یعنی یک مسئله فیزیکی پایدار دارای یک جواب است. پس اگر در یک مسئله فیزیکی فقط یک جواب در معادلات صدق کند بیانگر جواب واحد است. ولی اگر در یک مسئله بی‌نهایت جواب داشته باشیم یعنی مسئله ناپایدار است.

◄ در این روش هیچ باری نباید روی سازه قرار بگیرد و n باید صفر باشد. پس برای تعادل باید تمامی میله‌ها و عکس‌العمل‌ها صفر باشند. بنابراین اگر میله‌ای غیرصفر شود سازه ناپایدار است.



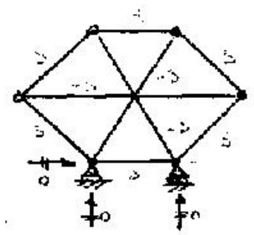
معین $n = 21 + 5 - 26 = 0$

چون عضوهای افقی صفر نمی‌شوند بی‌نهایت جواب داریم ← ناپایدار



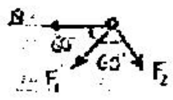
معین $n = 20 + 4 - 24 = 0$

با روش آزمایش بار صفر ← سازه پایدار



معین $n = 12 - 12 = 0$

با استفاده از روش بررسی داخلی بار نمی‌توانیم پایداری را تشخیص دهیم بنابراین از روش آزمایش بار صفر استفاده می‌کنیم. چون هیچ عضو صفری نمی‌توانیم پیدا کنیم بنابراین یکی از اعضا را S می‌نامیم، اگر S و همه اعضا صفر شد سازه پایدار است



$F_1 = S$

$F_2 = -S$

با استفاده از S نیروی سایر اعضا را بدست می‌آوریم که همگی S هستند بنابراین بی‌نهایت جواب داریم پس سازه ناپایدار است. (ناپایدار آنی)

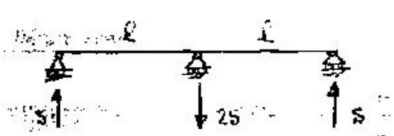
روش دترمینان ضرایب :

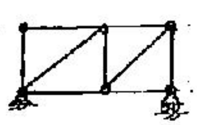
وقتی $n = 0$ است یعنی تعداد معادلات و مجهولات با هم برابر است.
در این حالت اگر دترمینان ضرایب معادلات تعادل استاتیکی مخالف صفر شد مسئله پایدار است.
اگر دترمینان ضرایب صفر شود یعنی حداقل یکی از معادلات ترکیبی از معادلات دیگر است درحالیکه باید تمامی معادلات مستقل باشند یعنی بی‌نهایت جواب داریم و مسئله ناپایدار است.

$n = 0$

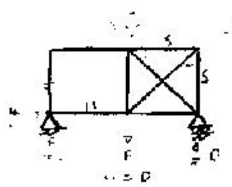
با استفاده از روش بار صفر، چون بی‌نهایت جواب برای S داریم پس سازه ناپایدار است.

تمرین) با استفاده از روش دترمینان ضرایب ناپایداری سازه بالا را بررسی کنید.



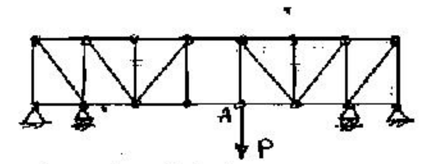


$n = 0$



– سازه ناپایدار

◄ پایداری و معینی خرپای زیر را بررسی کنید.

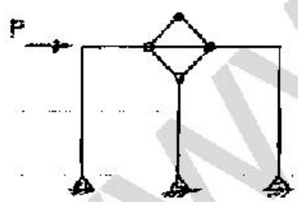


معین $n = 26 + 6 - 32 = 0$

سازه ناپایدار $\Rightarrow$ $\Sigma F_y = P \neq 0$ ← در مفصل A

★ با استفاده از روش [illegible] تمامی عضوها صفر می‌شوند فقط اعضای افقی پایینی که پس بی‌نهایت جواب داریم.

تمرین) پایداری و ناپایداری سازهٔ روبه‌رو را بررسی کنید. ناپایدار

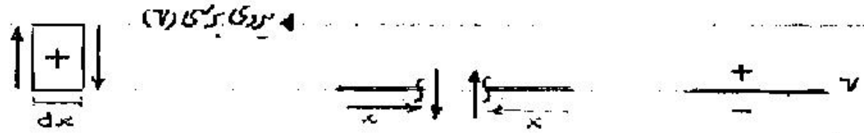


معین $n = 3(2) + 6 - (9+3) = 0$

◄ تحلیل سازه‌های معین

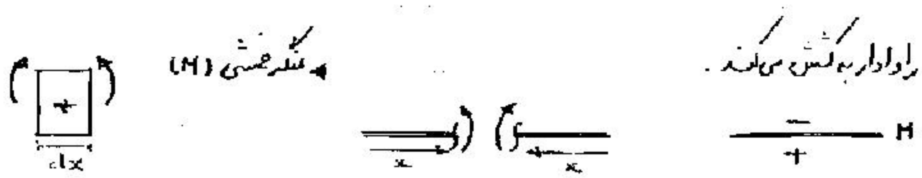
» نیروها و علامت‌ها:

◄ نیروی برشی (V)

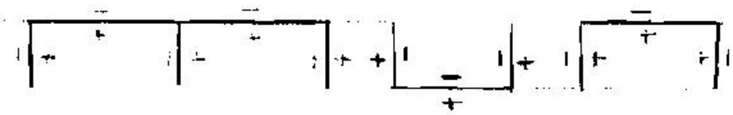


◄ لنگر خمشی (M)

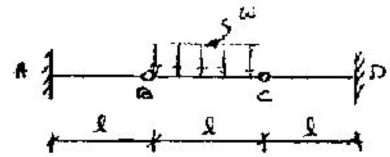
◄ لنگر مثبت سمت تار پایین را وادار به کشش می‌کند.



▲ لنگر خمشی را روی تار کششی رسم می کنیم.



مثال) عکس العمل های تکیه گاهی را بدست آورده و نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی را رسم کنید.



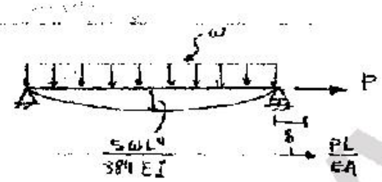
▲ قبل از حل کردن تیر مقابل که یک درجه نامعین است به حل تیرهای زیر می پردازیم:

$$V = \frac{\omega l}{2} - \omega x$$

$$M = \frac{\omega l}{2} x - \frac{\omega x^2}{2}$$

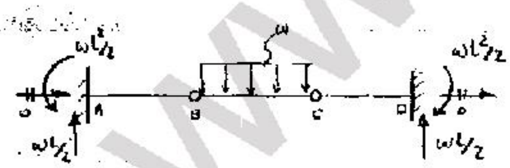
تیر مقابل هم یک درجه نامعین است ولی توانستیم آن را حل کنیم.

؟ وقتی اکسترا کنیم، تیر تغییر طول می دهد ولی از آن صرف نظر می کنیم. بنابراین عکس العمل های افقی صفرند.



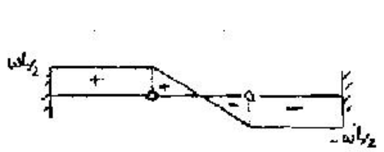
؟ تغییر شکل های خمشی خیلی بیشتر از تغییر شکل های محوری هستند. بنابراین می توانیم از تغییر شکل های محوری صرف نظر کنیم.

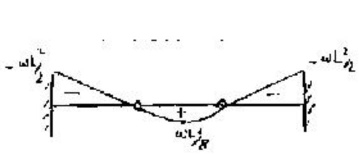
▲ حال تیر مربوط به مسئله را حل می کنیم:

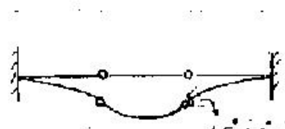


$$AB:\begin{cases} V = \omega l/2 \\ M = \omega l/2\, x - \omega l^2/2 \end{cases} \qquad BC:\begin{cases} V = \omega l/2 - \omega x \\ M = \omega l/2\,(l+x) - \omega l^2/2 - \omega x^2/2 \end{cases} \qquad CD:\begin{cases} V = -\omega l/2 \\ M = \omega l/2\, x - \omega x^2/2 \end{cases}$$

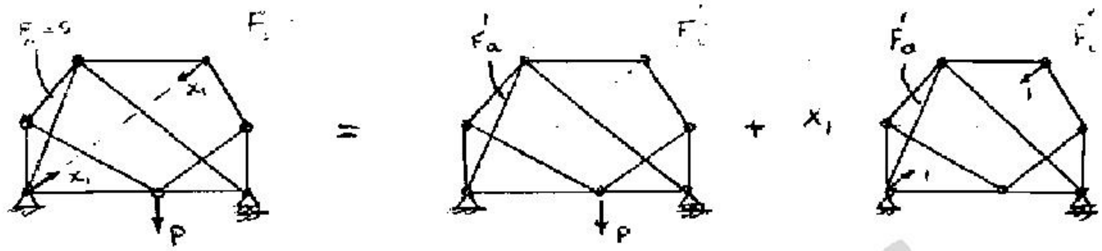
▲ از روی نمودار لنگر خمشی، تغییر شکل نسبی تیر را رسم می کنیم.







می‌توانیم با جابه‌جا کردن یک میله، خرپای مختلط را به خرپای ساده تبدیل کنیم:



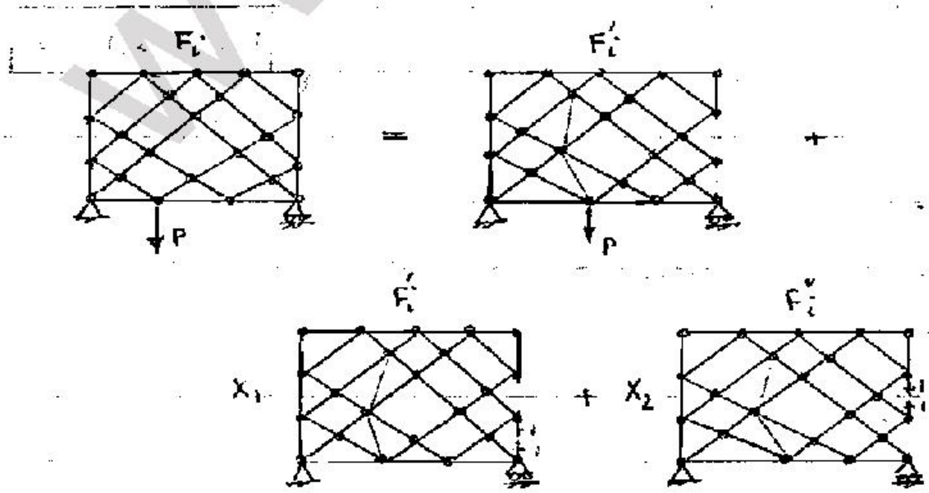
$$F_a = F'_a + X_1 F'_a = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{F'_a}{F'_a} \Rightarrow F_i = F'_i + X_1 F'_i$$

با بدست آوردن X_1 و رابطه (۲) از تمامی اعضای خرپا، نیروهایشان مشخص می‌شود. این روش را روش هنبرگ می‌نامند که بیشتر برای تحلیل خرپاهای مختلط به کار می‌رود.

نکته: اگر احیاناً F'_a صفر شود، مانند افزایش بار صفر، چون یکی از اعضا غیرصفر است، سازه اولیه ناپایدار می‌باشد. و به عبارت دیگر X_1 بی‌نهایت می‌شود و نشان می‌دهد یکی از اعضا باید نیروی بسیار بزرگ تحمل کند بنابراین سازه ناپایدار است.

► $F'_a = 0$ → سازه ناپایدار ► $F'_a \neq 0$ → سازه پایدار

★ اگر با جابه‌جا کردن یک میله، خرپا ساده نشود مجدداً یک میله دیگر را جابه‌جا می‌کنیم.



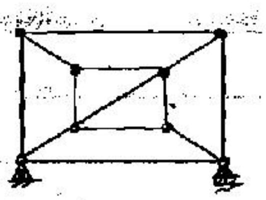
$$F_i = F_i' + x_1 F_i' + x_2 F_i''$$

$$\begin{cases} F_a = F_a' + x_1 f_a' + x_2 F_a'' = 0 \\ F_b = F_b' + x_1 F_b' + x_2 F_b'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{}{F_a' F_b'' - F_a'' F_b'} \\ x_2 = \dfrac{}{F_a' F_b'' - F_a'' F_b'} \end{cases}$$

$\Delta = f_a' f_b'' - f_a'' f_b' \neq 0 \longrightarrow$ سازه پایدار

$\Delta = f_a' f_b'' - f_a'' f_b' = 0 \longrightarrow$ سازه ناپایدار

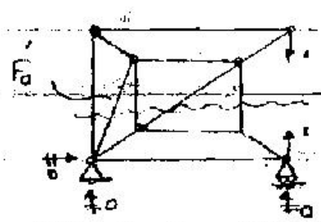
مثال) پایداری و ناپایداری خرپاهای زیر را بررسی کنید.



$n = m + r - 2j = 13 + 3 - 16 = 0$ معین

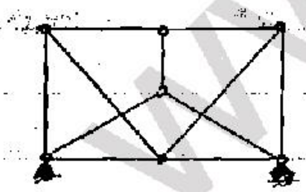
◄ چون چهار نیرو در خرپا، از یک نقطه می‌گذرند پس این خرپا ناپایدار است.

حال با روش هنبرگ خرپا را بررسی می‌کنیم:



پس از برش، اگر تعادل را در نقطه بالای تیر بنویسیم داریم:

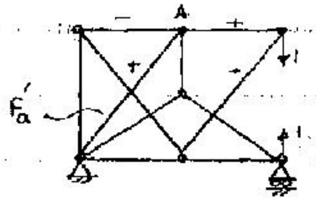
$F_a' = 0 \Rightarrow$ سازه ناپایدار

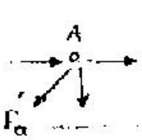


$n = 11 + 3 - 14 = 0$ معین

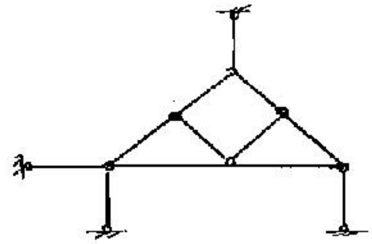
◄ با استفاده از روش آزمایش با صفر، سازه پایدار است. (همه اعضا صفر می‌شوند)

◄ روش هنبرگ:



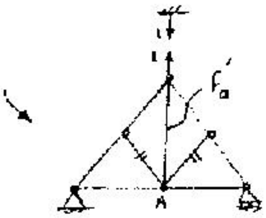


$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_a' > 0 \Rightarrow$ سازه پایدار

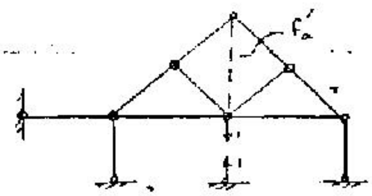


$n = 12 + 8 - 20 = 0$ معین

روش هنبرگ



گره A : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_a = 0 \rightarrow$ سازه ناپایدار



$n = 8 + 4 - 12 = 0$ معین

خرپای مقابل، خرپای نوع اول است $\Leftarrow$ سازه پایدار

با استفاده از روش هنبرگ $F'_a \neq 0 \Leftarrow$ سازه پایدار

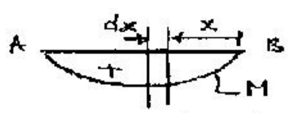
◄ تغییر شکل در سازه‌ها

الف- روش سطح لنگر: در این روش از لنگر خمشی استفاده می‌کنیم و کاری به موارد محوری و برشی نداریم. در حقیقت تغییر شکل را فقط تحت اثر لنگر خمشی به دست می‌آوریم.

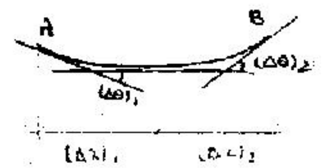
$$y'' = \frac{M}{EI} \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{M}{EI} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \theta$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \boxed{d\theta = \frac{M}{EI}\, dx}$$

◄ dθ تغییر زاویهٔ دو سر المان به طول dx است.



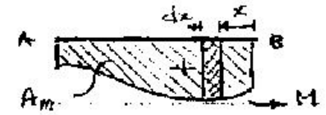
$$\theta_{A/B} = \int_0^l d\theta = \int_0^l \frac{M\,dx}{EI}$$



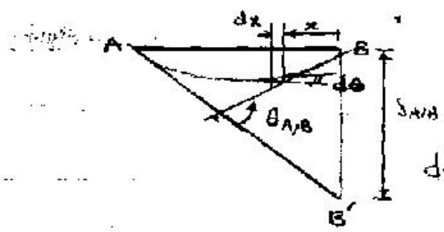
$$\theta_{A/B}=\sum_{i=1}^{n}(\Delta\theta)_i=\int_B^A d\theta$$

$$\boxed{\Delta\theta=\Delta\theta_{A/B}=\Delta\theta_{B/A}}$$

$$\theta_{A/B}=\int_0^l d\theta=\int_0^l \frac{M\,dx}{EI}$$



◄ $\theta_{A/B}$ برابر است با مساحت زیر منحنی $\frac{M}{EI}$.
(زاویهٔ بین مماس های رسم شده در نقاط ابتدا و انتها)
به این تعریف قضیه اول سطح لنگر می گویند.



$$d\theta=\frac{M}{EI}\,dx$$

◄ $\delta_{B/A}$ برابر است با فاصلهٔ B از مماس رسم شده بر A. که چون θ_A بسیار ناچیز و در حد ۰ متغیر است می توانیم $\delta_{A/B}$ را برابر فاصله بگیریم.

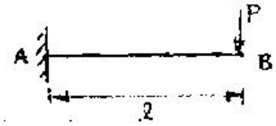
$$\delta_{B/A}=\int_0^l x\,d\theta=\int_0^l \frac{Mx}{EI}\,dx$$

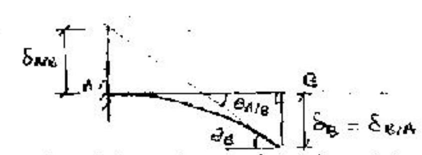
اگر EI ثابت باشد ⟵ $\delta_{B/A}=\frac{\bar{x}A_m}{EI}$

قضیه دوم سطح لنگر: فاصلهٔ نقطهٔ B از مماس رسم شده بر نقطهٔ A برابر است با لنگر اول مساحت زیر منحنی لنگر خمشی تقسیم بر EI.

★ با استفاده از این دو قضیه تغییر شکل ها را در تیرها و قاب ها به دست می آوریم.

مثال) δ و θ را در نقطهٔ B به دست آورید.



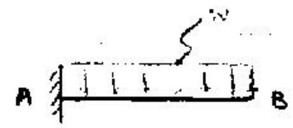


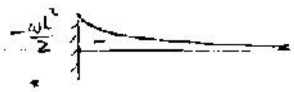
$\theta_B = \theta_{A/B} = \frac{P\ell^2}{2EI}$ $\delta_B = \delta_{B/A} = \frac{P\ell^2}{2EI} \cdot \frac{2\ell}{3} = \frac{P\ell^3}{3EI}$

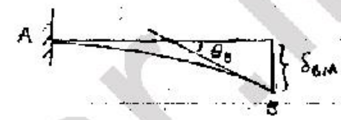
۵ اگر در مسئله مقابل A از مماس B را می‌خواستیم داشتیم:

$\delta_{A/B} = \frac{P\ell^2}{2EI} \cdot \frac{\ell}{3} = \frac{P\ell^3}{6EI}$

مثال 2) δ و θ را در نقطه B به دست آورید.



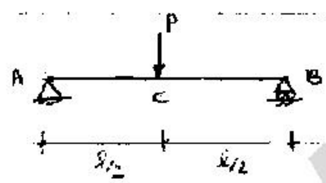


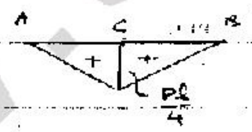


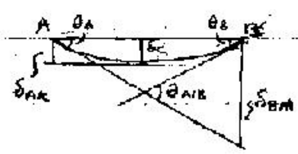
$\theta_B = \theta_{A/B} = \frac{wl^2}{2} \cdot \frac{\ell}{3} \cdot \frac{1}{EI} = \frac{wl^3}{6EI}$

$\delta_B = \delta_{B/A} = \frac{wl^3}{6EI} \cdot \frac{3\ell}{4} = \frac{wl^4}{8EI}$

مثال 3) در تیر مقابل δ_C ، θ_A و θ_B را به دست آورید.



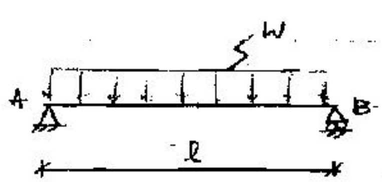




$$\begin{cases} \theta_A = \frac{1}{2}\,\theta_{A/B} = \frac{1}{2}\,\frac{P\ell}{4} \cdot \frac{\ell}{2EI} = \frac{P\ell^2}{16EI} = \theta_B \\ \theta_A = \theta_B = \frac{\delta_{B/A}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{P\ell^2}{8EI} \cdot \frac{\ell}{2}\right] = \frac{P\ell^2}{16EI} \\ \theta_A = \theta_{A/C} = \frac{P\ell^2}{16EI} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_C = \delta_{A/C} = \frac{P\ell^2}{16EI} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^3}{48EI} \\ \delta_C = \frac{\ell}{2}\,\theta_A - \delta_{C/A} = \frac{\ell}{2}\left(\frac{P\ell^2}{16EI}\right) - \frac{P\ell^2}{16EI} \cdot \frac{1}{3}\,\frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^3}{48EI} \end{cases}$$

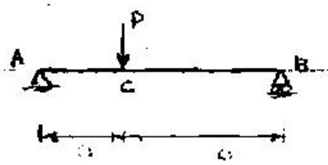
تمرین) در تیر مقابل δ_C ، θ_A و θ_B را به دست آورید.



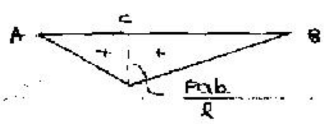
$\theta_A = \theta_{A/C} = \theta_B = \frac{wl^3}{24EI}$

$\delta_C = \delta_{A/C} = \frac{5wl^4}{384EI}$

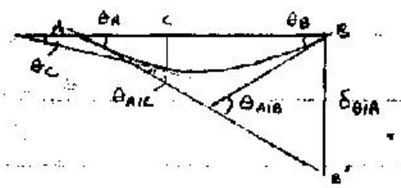
مثال 3) θ_A ، θ_B ، θ_C ، δ_C و δ_{max} و x مربوط به آن را بدست آورید.



$EI = Cte \quad , \quad a + b = \ell$



$$\theta_A = \frac{\delta_{B/A}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{Pab}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2EI} \cdot \frac{\ell+b}{3}\right] = \frac{Pab(\ell+b)}{6\ell EI}$$



$$\theta_B = \theta_{A/B} - \theta_A = \frac{Pab}{2EI} - \frac{Pab(\ell+b)}{6\ell EI} = \frac{Pab(\ell+a)}{6\ell EI}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{A/B}}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left[\frac{Pab}{2EI} \cdot \frac{\ell+a}{3}\right] = \frac{Pab(\ell+a)}{6\ell EI}$$

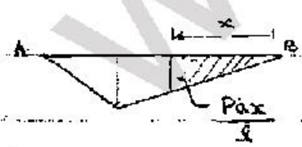
$$\theta_C = \theta_A - \theta_{A/C} = \frac{Pab(\ell+b)}{6\ell EI} - \frac{Pab}{\ell} \cdot \frac{a}{2EI} = \frac{Pab(b-a)}{3\ell EI}$$

$$\delta_C = a\,\theta_A - \delta_{C/A} = \frac{Pa^2b(\ell+b)}{6\ell EI} - \frac{Pa^2b}{2\ell EI} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa^2b^2}{3\ell EI}$$

در جایی که δ_{max} است، شیب افقی است.

$$\theta_B = \theta_{B/x}$$

$$\frac{Pab(\ell+a)}{6\ell EI} = \frac{Pax}{\ell} \cdot \frac{x}{2EI}$$



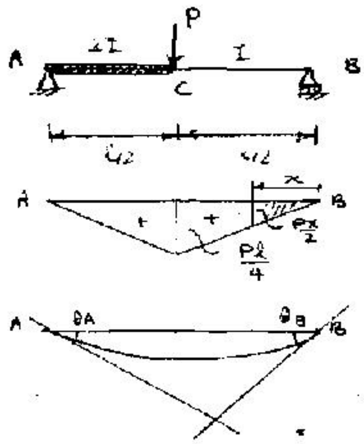
$$\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{b(\ell+a)}{3}}} \quad (x<b)$$

$$x<b \Rightarrow \frac{b(\ell+a)}{3} < b^2 \Rightarrow \ell+a < 3b \Rightarrow 2a<2b \Rightarrow a<b \checkmark$$

$$\delta_{max} = \delta_{B/x} = \frac{Pab(\ell+a)}{6\ell EI} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{Pab(\ell+a)}{9\ell EI}\,x$$

$$\rightarrow \delta_{max} = \frac{Pab(\ell+a)}{9\ell EI}\sqrt{\frac{b(\ell+a)}{3}}$$

مثال 14) θ_A ، θ_B ، θ_C ، δ_C ، δ_{max} و x مربوط به آن را بدست آورید.



$$\theta_A = \frac{\delta_{B/A}}{l} = \frac{1}{l}\left[\frac{Pl^2}{16EI}\cdot\frac{l}{3} + \frac{Pl^2}{32EI}\cdot\frac{2l}{3}\right] = \frac{Pl^2}{24EI}$$

$$\theta_B = \frac{\delta_{A/B}}{l} = \frac{1}{l}\left[\frac{Pl^2}{16EI}\cdot\frac{2l}{3} + \frac{Pl^2}{32EI}\cdot\frac{l}{3}\right] = \frac{5Pl^2}{96EI}$$

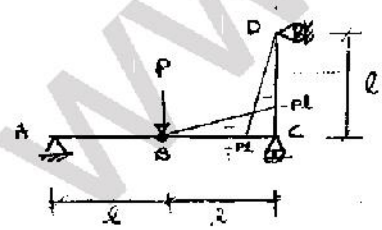
$$\theta_C = \theta_A - \theta_{A/C} = \frac{Pl^2}{24EI} - \frac{Pl^2}{32EI} = \frac{Pl^2}{96EI}$$

$$\delta_C = \frac{l}{2}\theta_A - \delta_{C/A} = \frac{Pl^3}{48EI} - \frac{Pl^2}{32EI}\cdot\frac{l}{6} = \frac{Pl^3}{64EI}$$

$$\theta_B = \theta_{B/x} \Rightarrow \frac{5Pl^2}{96EI} = \frac{Px}{2EI}\cdot\frac{x}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}}$$

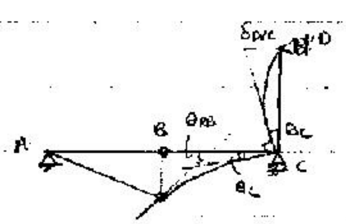
$$\delta_{max} = \delta_{B/x} = \frac{5Pl^2}{96EI}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2}\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{5Pl^3}{288EI}\sqrt{\frac{5}{6}}$$

مثال 5) θ_A ، θ_{LB} ، θ_{RB} ، θ_C ، θ_D و δ_{VB} را بدست آورید.



$$\theta_C = \frac{\delta_{D/C}}{l} = \frac{1}{l}\left[\frac{Pl^2}{2EI}\cdot\frac{2l}{3}\right] = \frac{Pl^2}{3EI}$$

$$\theta_D = \frac{\delta_{C/D}}{l} = \frac{1}{l}\left[\frac{Pl^2}{2EI}\cdot\frac{l}{3}\right] = \frac{Pl^2}{6EI}$$

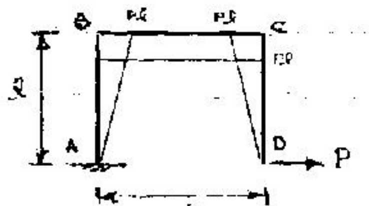


$$\delta_{VB} = \theta_C l + \delta_{B/C} = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl^2}{2EI}\cdot\frac{2l}{3} = \frac{2Pl^3}{3EI}$$

$$\theta_A = \frac{\delta_{VB}}{L} = \frac{2Pl^2}{3EI} = \theta_{LB}$$

$$\theta_{RB} = \theta_C + \theta_{B/C} = \frac{Pl^2}{3EI} + \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{5Pl^2}{6EI}$$

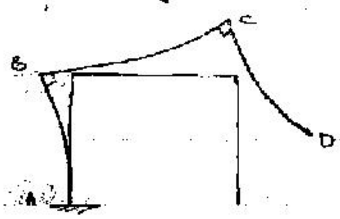
مثال 6) θ_B ، θ_C ، θ_D ، $\delta_{HB}=\delta_{HC}=?$ ، $\delta_{VC}=\delta_{VD}=?$ و δ_{HD} را بدست آورید.

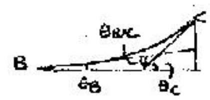


$$\theta_B=\theta_{A/B}=\frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\delta_{HB}=\delta_{B/A}=\frac{Pl^2}{2EI}\cdot\frac{l}{3}=\frac{Pl^3}{6EI}$$

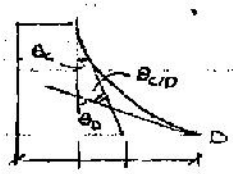
$$\theta_C=\theta_B+\theta_{B/C}=\frac{Pl^2}{2EI}+\frac{Pl^2}{EI}=\frac{3Pl^2}{2EI}$$





$\delta_{VC}=\theta_B l+\delta_{C/B}$

$$\delta_{VC}=\delta_{VD}=\theta_B l+\delta_{C/B}=\frac{Pl^3}{2EI}+\frac{Pl^2}{EI}\cdot\frac{l}{2}=\frac{Pl^3}{EI}$$

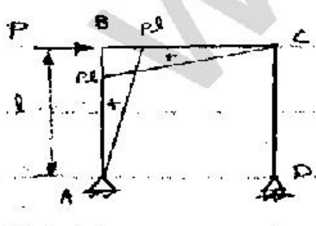


$$\theta_D=\theta_C+\theta_{C/D}=\frac{3Pl^2}{2EI}+\frac{Pl^2}{2EI}=\frac{2Pl^2}{EI}$$

⊲ چون $\theta_A=0$ است پس زاویه چرخش نقطه دلخواه برابر است با سطح زیر منحنی تا نقطه A. $(\delta_{HD}=-\delta_{HC}+\theta_C l+\delta_{D/C})$

$$\delta_{HD}=-\delta_{HC}+\theta_C l+\delta_{D/C}=\frac{-Pl^3}{6EI}+\frac{3Pl^3}{2EI}+\frac{Pl^3}{3EI}=\frac{5Pl^3}{3EI}$$

مثال 7) θ_A ، θ_B ، θ_C ، θ_D ، $\delta_{HB}=\delta_{HC}$ و δ_{HD} را بدست آورید.

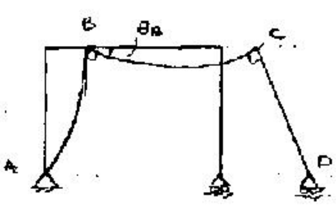


$$\theta_B=\frac{\delta_{C/B}}{l}=\frac{1}{l}\left[\frac{Pl^2}{2EI}\cdot\frac{2l}{3}\right]=\frac{Pl^2}{3EI}$$

$$\theta_D=\frac{\delta_{B/C}}{l}=\frac{1}{l}\left[\frac{Pl^2}{2EI}\cdot\frac{l}{3}\right]=\frac{Pl^2}{6EI}=\theta_C$$

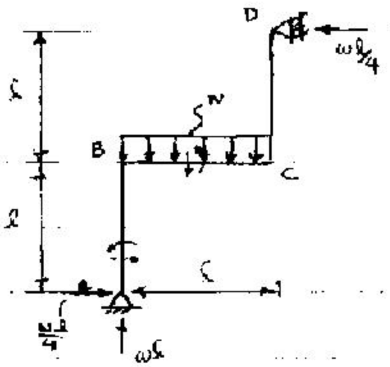
$$\theta_A=\theta_B+\theta_{A/B}=\frac{Pl^2}{3EI}+\frac{Pl^2}{2EI}=\frac{5Pl^2}{6EI}$$

$$\delta_{HB}=\delta_{HC}=l\theta_A-\delta_{B/A}=\frac{5Pl^3}{6EI}-\frac{Pl^2}{2EI}\cdot\frac{l}{3}=\frac{2Pl^3}{3EI}$$



$$\delta_{HD}=\delta_{HC}+l\theta_C=\frac{2Pl^3}{3EI}+\frac{Pl^3}{6EI}=\frac{5Pl^3}{6EI}$$

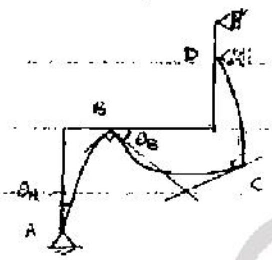
مثال ۸) θ_A ، θ_B ، θ_C ، θ_D ، $\delta_{HB}=\delta_{HC}$ ، $\delta_{VD}=\delta_{VC}$ را بدست آورید.

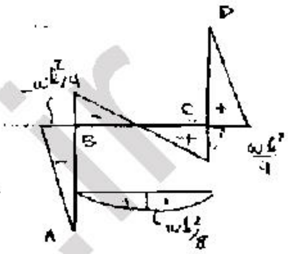


$$AB:\ M=-\frac{\omega l}{4}x$$

$$BC:\ M=-\frac{\omega l^2}{4}+\omega l x-\frac{\omega x^2}{2}$$

$$CD:\ M=\frac{\omega l}{4}x$$





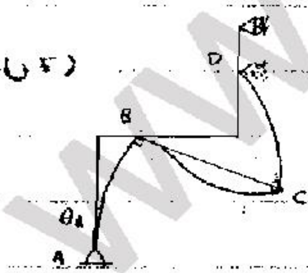
▷ بارهای منفی منحنی تغییر شکل را می‌آورند بالای محور و بارهای مثبت می‌آورند پایین محور.

▷ اگر $\delta_{C/B}$ مثبت شد یعنی منحنی آمده پایین محور و اگر منفی شد یعنی آمده بالای محور.

$$\delta_{C/B}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{\omega l^2}{4EI}\cdot\frac{5l}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{\omega l^2}{4EI}\cdot\frac{l}{6}+\frac{2l}{3}\cdot\frac{\omega l^2}{8EI}\cdot\frac{l}{2}=0$$

$\delta_{C/B}$ صفر شد بنابراین باید منحنی تغییر شکل را روی محور بکشیم.

حالت ۲)



$$\theta_B=\theta_A+\theta_{A/B}=\theta_A+\frac{\omega l^3}{8EI}$$

$$\delta_{HB}=\theta_A l+\delta_{B/A}=\theta_A l+\frac{\omega l^3}{8EI}\cdot\frac{l}{3}=\delta_{HC}$$

$$\theta_C=\theta_{B/C}-\theta_B=\frac{2}{3}l\cdot\frac{\omega l^2}{8EI}-\theta_A-\frac{\omega l^3}{8EI}$$

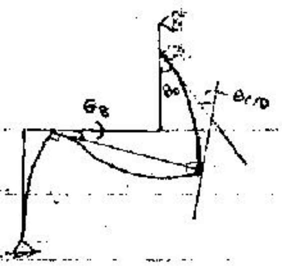
$$=-\theta_A-\frac{\omega l^3}{24EI}$$

$$\delta_{VC}=\delta_{VD}=\theta_D l-\delta_{D/C}=\theta_A l+\frac{\omega l^4}{8EI}$$

$$\theta_D=\theta_C+\theta_{C/D}=-\theta_A-\frac{\omega l^3}{24EI}+\frac{\omega l^3}{8EI}=-\theta_A-\frac{\omega l^3}{12EI}$$

$$\delta_{HD} = \delta_{HC} - \theta_C l - \delta_{DC} = \theta_A l + \frac{wl^4}{24EI} + \theta_A l + \frac{wl^4}{24EI} - \frac{wl^3}{8EI}\cdot\frac{2l}{3}$$

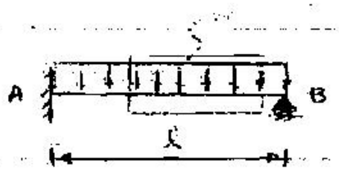
$$\delta_{HD} = 0 \Rightarrow \theta_A l = 0 \Rightarrow \theta_A = 0$$



$$\theta_C = \theta_B - \theta_{B/C} = \frac{wl^3}{8EI} - \frac{wl^3}{12EI} = \frac{wl^3}{24EI}$$

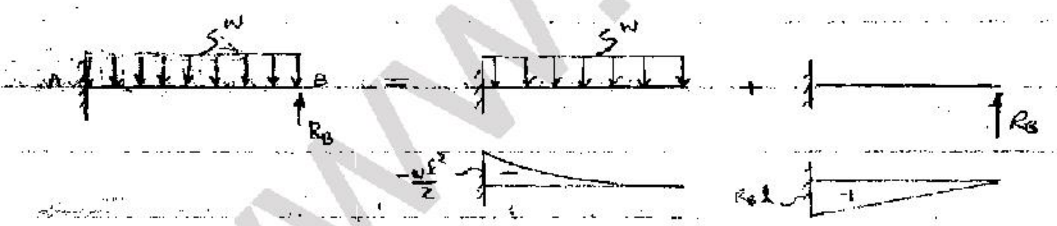
★ می‌توانیم روش سطح لنگر را برای یک تیر نامعین هم به کار ببریم.

مثال) تیر مقابل را حل کنید.



به تعداد درجه نامعینی، مجهول اضافی انتخاب می‌کنیم.

در این حالت معادله اضافه شده این است که تغییر مکان B صفر باشد.

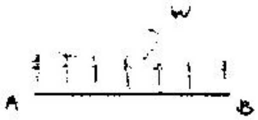


$$\delta_{B/A} = 0 \Rightarrow \delta_{B/A} = -\frac{l}{3}\cdot\frac{wl^2}{2EI}\cdot\frac{3l}{4} + \frac{R_B l^2}{2EI}\cdot\frac{2l}{3} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3wl}{8}$$

تمرین) در تیر مثال قبل، لنگر وسط دهانه را مجهول در نظر بگیرید.

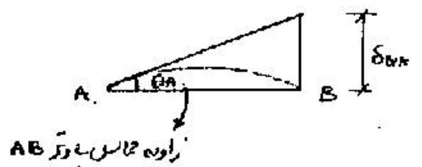
تمرین 2) در تیر مثال قبل، نیروی برشی وسط دهانه را مجهول بگیرید.

ب - روش بار الاستیک :

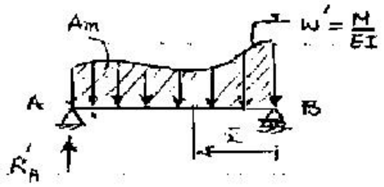


قطعه‌ای پیوسته‌ای از تیر

$$\theta_A = \frac{\delta_{B/A}}{l} = \frac{A_m \cdot \bar{x}}{l}$$



در این روش یک تیر فرضی در نظر می‌گیریم که دو سر آن تکیه‌گاه ساده باشد. به این تیر، تیر الاستیک گفته می‌شود. بارگذاری روی تیر همان منحنی $\frac{M}{EI}$ در تیر اصلی است.

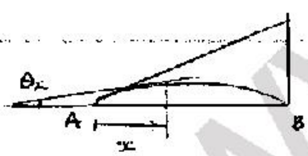


$$\Sigma M'_B = 0 \Rightarrow l R'_A = A_m \bar{x}$$

$$\Rightarrow R'_A = \frac{A_m \bar{x}}{l} \quad , \quad \boxed{\theta_A = R'_A}$$

عکس العمل در تکیه‌گاه تیر فرضی برابر است با زاویه مماس بر منحنی در آن نقطه با وتر AB.

قضیه اول بار الاستیک : θ در هر نقطه x از تیر اصلی برابر است با نیروی برشی در همان نقطه الاستیک.

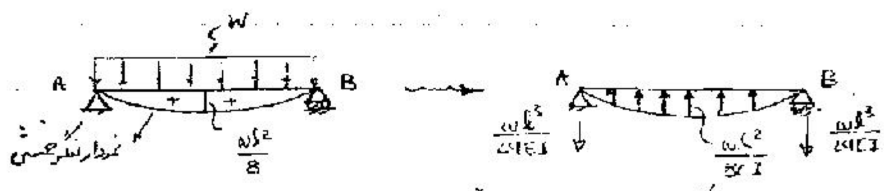


$$\theta_x = \theta_A - \theta_{x/A} = R'_A - A_1 = V'_x$$

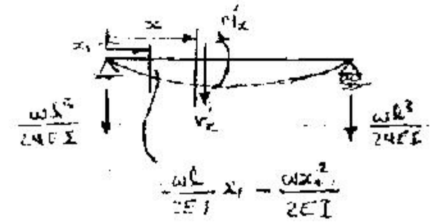
قضیه دوم بار الاستیک : δ در هر نقطه x از تیر اصلی برابر است با لنگر خمشی در همان نقطه الاستیک.

$$\delta_x = x\theta_A - \delta_{x/A} = x R'_A - A_1 \bar{x}_1 = M'_x$$

مثال) با استفاده از روش بار الاستیک تیر زیر را حل کنید و θ_x و δ_x را در هر نقطه بدست آورید.

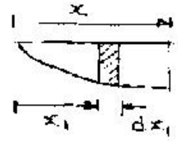


چون لنگر خمشی مثبت است، بارگذاری به سمت بالاست.



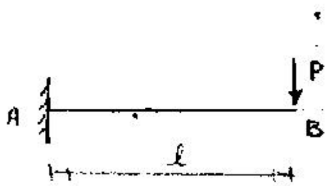
$$\theta_x = v'_x = -\frac{wl^3}{24EI} + \int_0^x \left(\frac{wl}{2EI}x_1 - \frac{wx_1^2}{2EI}\right) dx_1$$

$$\delta_x = M'_x = -\frac{wl^3}{24EI}x + \int_0^x \left(\frac{wl}{2EI}x_1 - \frac{wx_1^2}{2EI}\right)(x-x_1)\, dx_1$$

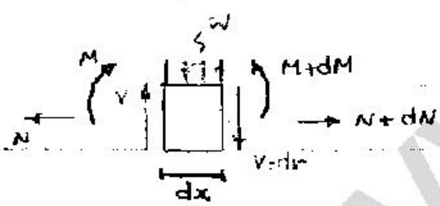


$$\int_0^x \left(\frac{wl}{2EI}x_1 - \frac{wx_1^2}{2EI}\right) dx_1$$

مثال) با استفاده از روش بار الاستیک تیر زیر را حل کنید.



ج- روش تیر مزدوج (Conjugate Beam Method) :



$$dV = w\,dx \quad , \quad dM = V\,dx$$

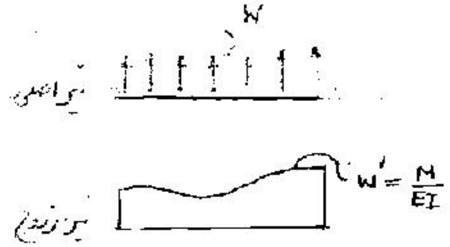
$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \quad , \quad dy = \theta\, dx$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow dV = w\,dx$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow (M+dM) - M - V\,dx - \underbrace{\cancel{(w\,dx)\frac{dx}{2}}}_{0} = 0 \Rightarrow dM = V\,dx$$

با یکسان قرار دادن روابط بالا، روش تیر مزدوج را مطرح می کنیم.

در این روش یک تیر مزدوج در نظر می گیریم که بارگذاری بر روی آن $W' = \frac{M}{EI}$ می باشد.

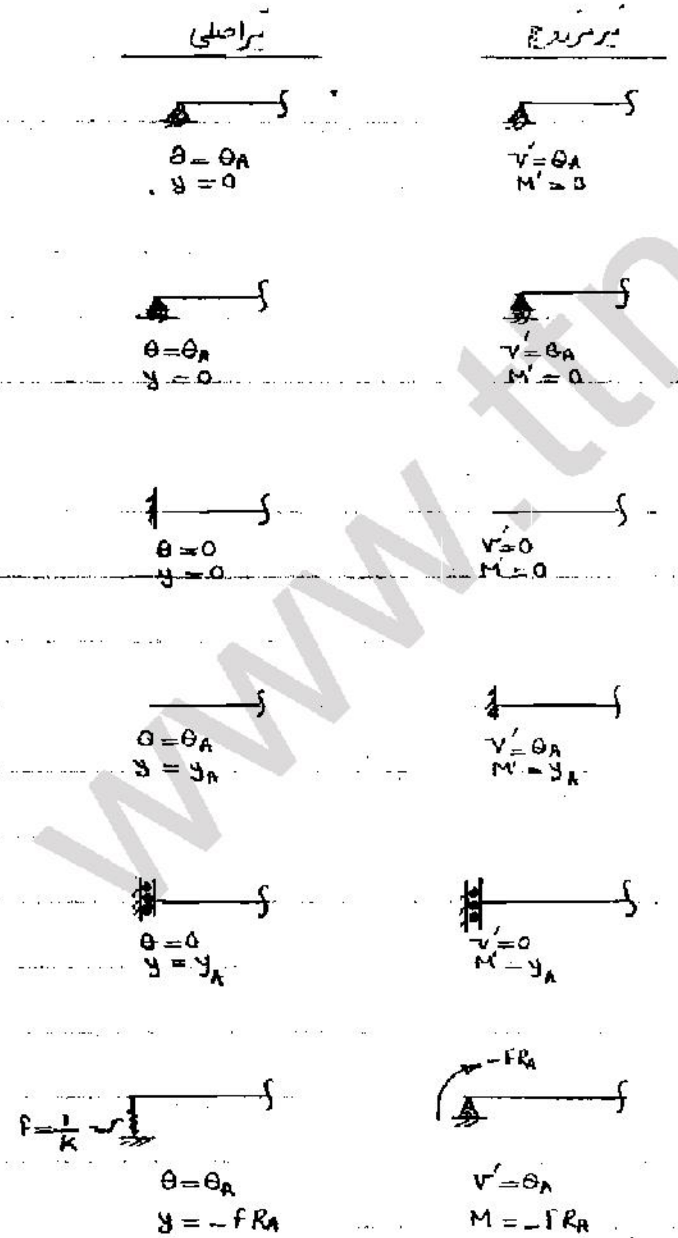


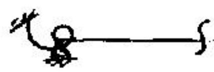
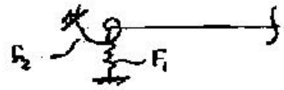
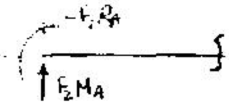
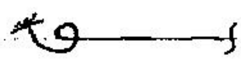
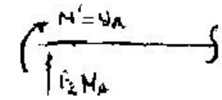
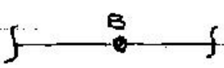
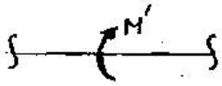
$$V' = \int w'\,dx = \int \frac{M}{EI}\,dx = \theta$$

✓ قضیه اول تیر مزدوج : نیروی برشی در تیر مزدوج برابر است با θ در هر نقطه از تیر اصلی .

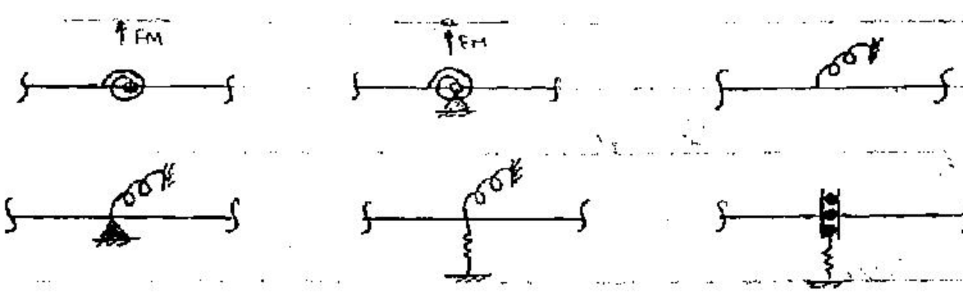
✓ قضیه دوم تیر مزدوج : لنگر خمشی در تیر مزدوج برابر است با خیز در همان نقطه از تیر اصلی . به شرط آنکه خیز در نقاط مرزی در تیر اصلی با لنگر خمشی در تیر مزدوج برابر شود.

$$M' = \int V' dx = \int \theta \, dx = y \quad \Rightarrow \quad M' = y$$



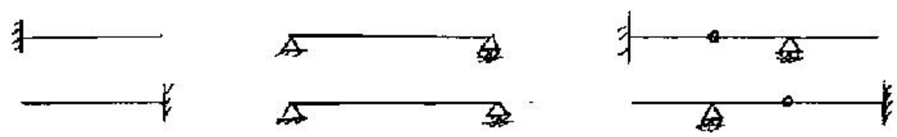
تیر اصلی	تیر مزدوج
	
$\theta = FM_A$ $y = 0$	$V' = FM_A$ $M' = 0$
 	
$\theta = F_2 M_A$ $y = -F_1 R_A$	$V' = F_2 M_A$ $M' = -F_1 R_A$
	
$\theta = F_2 M_A$ $y = y_A$	
	
$\theta_L = \theta_R$ $y = 0$	$V'_L = V'_R$ $M' = 0$
 	
$\Delta\theta_B = \theta_R - \theta_L = \theta_A$ $y = y_B$	$V'_R - V'_L = \Delta\theta_B$ $M' = y_B$
 	
$\theta_L = \theta_R$ $y_R - y_L = \Delta y_B$	$V'_L = V'_R$ $M'_R - M'_L = \Delta y_B$

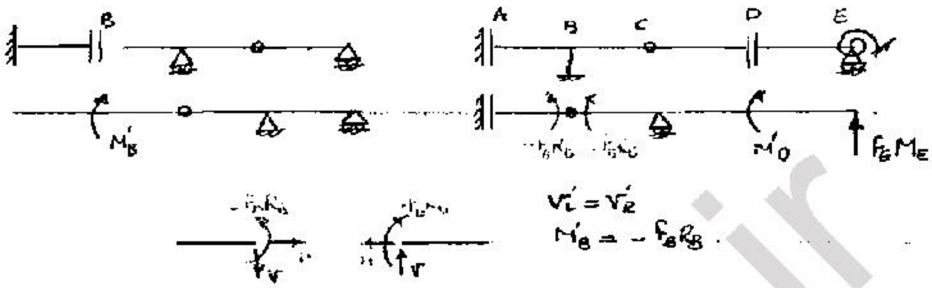
تمرین: تیر مزدوج مربوط به تیرهای زیر را ترسیم کنید.



تیر اصلی

تیر مزدوج





$V'_L = V'_R$

$M'_B = -f_B R_B$

▲ لنگر متمرکز در تیر مزدوج نشان داده شده با پیوستگی در تیر اصلی است.

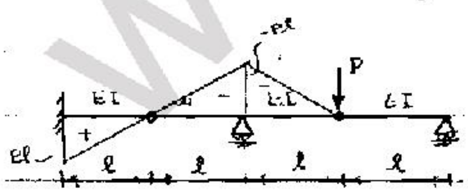
▲ اگر نیروی برشی در تیر مزدوج مقدار مشخصی داشته باشد آن را با —||— نمایش می‌دهیم.

مثال) θ_B و δ_B را در تیر مقابل بدست آورید.

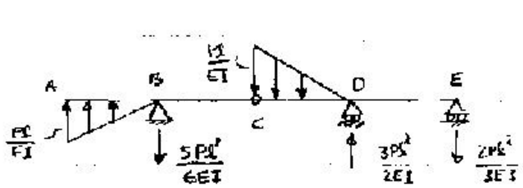
$\theta_B = V'_B = -\frac{Pl^2}{2EI}$, $\delta_B = M'_B = -\frac{Pl^3}{3EI}$

✓ در این روش مقدار و جهت θ و δ برای ما مشخص می‌شود.

مثال 2) δ و θ را در نقاط A، B، C، D و E بدست آورید.



✓ EI بی‌نهایت است به این معناست که تیر تغییر شکل خمشی نخواهد داشت.



چپ $\sum M'_C = 0 \Rightarrow lR'_B + \frac{Pl^2}{2EI}\cdot\frac{5l}{3} = 0$

$\Rightarrow -R'_B = \frac{5Pl^2}{6EI}$

راست $\sum M'_C = 0 \Rightarrow lR'_D + 2lR'_E - \frac{Pl^2}{2EI}\cdot\frac{l}{3} \Rightarrow R'_D + 2R'_E = \frac{Pl^2}{6EI}$

$$\Sigma F_y' = 0 \implies R_D' + R_E' = \frac{5P\ell^2}{6EI} \implies R_E' = -\frac{2P\ell^2}{3EI} \;,\; R_D' = \frac{3P\ell^2}{2EI}$$

$$\theta_{LB} = V_{LB}' = \frac{P\ell^2}{2EI} \;,\; \theta_{RB} = V_{RB}' = \frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{5P\ell^2}{6EI} = -\frac{P\ell^2}{3EI}$$

$$y_B = M_B' = \frac{P\ell^2}{2EI}\cdot\frac{2\ell}{3} = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

$$\theta_C = V_C' = V_{RB}' = -\frac{P\ell^2}{3EI} \longrightarrow \theta_C = \theta_{RB}$$ بنابراین چون EI قسمت BC ، ∞ است ◄

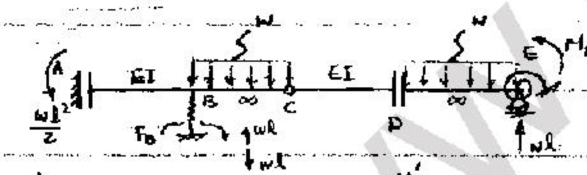
$$\theta_{LD} = V_{LD}' = \frac{2P\ell^2}{3EI} - \frac{3P\ell^2}{2EI} = -\frac{5P\ell^2}{6EI} \;,\; \theta_{RD} = V_{RD}' = \frac{2P\ell^2}{3EI}$$

$$\delta_D = M_D' = -\frac{2P\ell^3}{3EI}$$

$$\theta_E = V_E' = \frac{2P\ell^2}{3EI} \;,\; \delta_E = 0 \longrightarrow$$ نقطه E تکیه‌گاه است

مثال 3) δ و θ را در نقاط A، B، C و D بدست آورید.

$$f_B = \frac{\ell^3}{2EI} \;,\; f_E = \frac{\ell}{2EI}$$



$$\Sigma M_C = 0 \implies$$ چپ

$$M_A + w\ell^2 - w\ell\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$$

$$\implies -M_A = \frac{w\ell^2}{2}$$

$$AB:\; M = -\frac{w\ell^2}{2} \;,\quad CD:\; M = -\frac{w\ell^2}{2} + w\ell(\ell + x) - w\ell\left(\frac{\ell}{2} + x\right) = 0$$

$$\text{چپ}\;\Sigma M_B' = 0 \implies M_A' + w\ell f_B - \frac{w\ell^3}{3EI}\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \implies M_A' = -\frac{w\ell^4}{4EI}$$

$$\text{راست}\;\Sigma M_C = 0 \implies M_E + w\ell(2\ell) - w\ell\left(\frac{3\ell}{2}\right) = 0 \implies M_E = -\frac{w\ell^2}{2}$$

$$\text{راست}\;\Sigma M_B' = 0 \implies R_C'\ell - M_D' + \frac{w\ell^4}{2EI} - \frac{3w\ell^4}{4EI} = 0 \implies R_C'\ell - M_D' = \frac{w\ell^4}{4EI}$$

$$\Sigma F_y' = 0 \implies R_C' = \frac{w\ell^3}{2EI} + \frac{w\ell^3}{4EI} = \frac{3w\ell^3}{4EI} \implies M_D' = \frac{w\ell^4}{2EI}$$

$\theta_A = 0 \quad , \quad \delta_A = M'_A = -\dfrac{wl^4}{4EI}$

اگر داده‌های زیر در مسئله داده شده باشد :

$w = 3\ t/m \quad , \quad l = 2\ m \quad , \quad E = 2\times10^6\ kg/cm^2 \quad , \quad I = 10^4\ cm^4$

$\longrightarrow \quad EI = 2\times10^{10}\ kg.cm^2 = 2000\ t.m^2$

$$\delta_A = M'_A = -\frac{wl^4}{4EI} = -\frac{(3)(2)^4}{4(2000)} = -0.006\ m = -6\ mm$$

$$\theta_B = V'_B = -\frac{wl^3}{2EI} = -\frac{3(2)^3}{2(2000)} = -0.006\ R$$

$$\delta_B = M'_B = -\frac{wl^4}{2EI} = -\frac{3(2)^4}{2(2000)} = -0.012\ m = -12\ mm$$

$$\theta_{LC} = V'_{LC} = -\frac{wl^3}{2EI} = -0.006\ R \quad , \quad \theta_{RC} = V'_{RC} = -\frac{wl^3}{2EI} + \frac{3wl^3}{4EI} = 0.003\ R$$

$$\delta_C = M'_C = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} = -\frac{wl^4}{EI} = -\frac{3(16)}{2000} = -0.024\ m = -24\ mm$$

$$\theta_D = V'_D = \frac{wl^3}{4EI} = \frac{3(8)}{4(2000)} = 0.003\ R$$

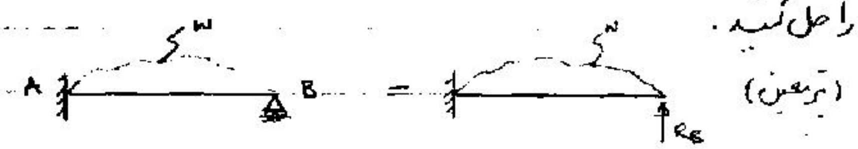
$$\delta_{LD} = M'_{LD} = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3wl^4}{4EI} = -\frac{3(3)(16)}{4(2000)} = -0.018\ m$$

$$\delta_{RD} = M'_{RD} = -\frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3(16)}{4(2000)} = -0.006\ m$$

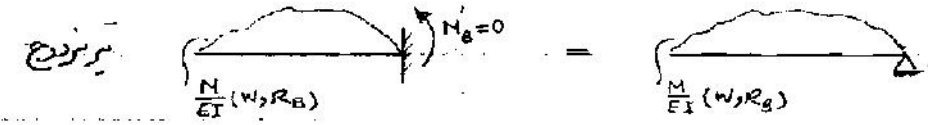
نیرو در تیر مزدوج بی‌تعادل است و تکیه‌گاه در تیر حقیقی مفصل است.

$\theta_E = V'_E = \dfrac{wl^3}{3EI} = \dfrac{3(8)}{3(2000)} = 0.003\ R \longrightarrow$ دوران در جهت مثلثاتی

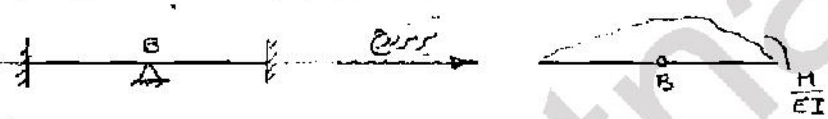
مثال 4) تیر نامعین زیر را حل کنید.



۱- تعیین درجه نامعینی   ۲- به تعداد درجه نامعینی، مجهول اضافی درنظر می‌گیریم.



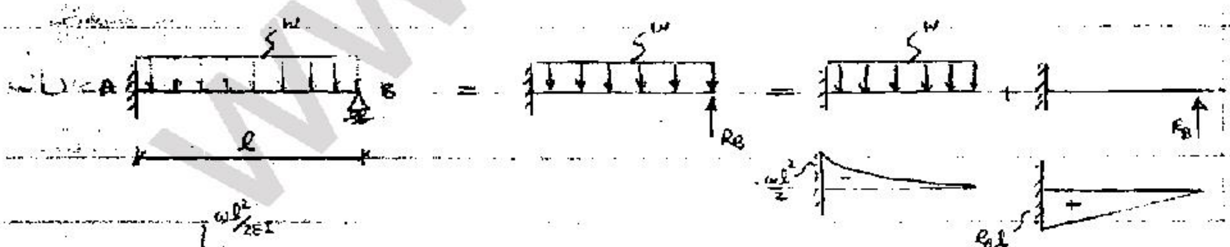
اگر سازه‌ای یک درجه نامعین باشد، یک درجه ناپایداری شود (در تیر مزدوج) بنابراین یک معادله اضافی برای تعادل می‌نویسیم و شرایطی برای تعادل تیر قرار می‌دهیم.

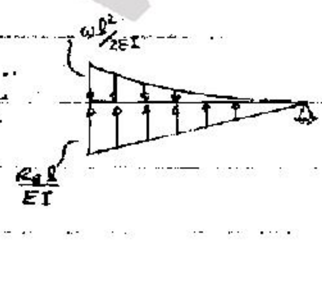


شرایط تعادل ← $\Sigma M'_B=0$ چپ ، $\Sigma M'_B=0$ راست ، $\Sigma F'_y=0$

با نوشتن شرط‌های تعادل، مجهول اضافی به دست می‌آید. (هرچند مجهول اضافی داشته باشیم)

مثال) سازه زیر را با روش تیر مزدوج حل کنید.

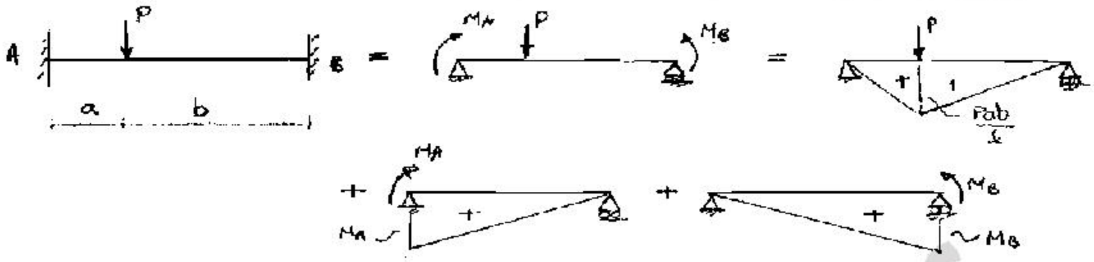




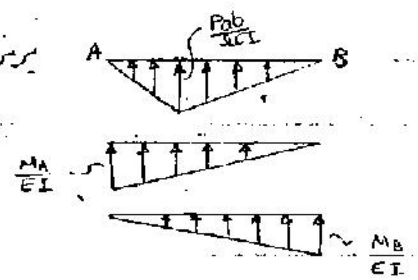
$$\Sigma M'_B=0 \Rightarrow \frac{R_B l^2}{2EI}\cdot\frac{2l}{3}=\frac{l}{3}\cdot\frac{wl^2}{2EI}\cdot\frac{3l}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_B=\frac{3wl}{8}}$$

مثال 2) با استفاده از روش تیر مزدوج ، تیر زیر را حل کنید.



تیر مزدوج



$$\sum F_y' = 0 \Rightarrow \frac{M_A l}{2EI} + \frac{M_B l}{2EI} + \frac{Pab}{2EI} = 0$$

$$\Rightarrow M_A + M_B = -\frac{Pab}{l}$$

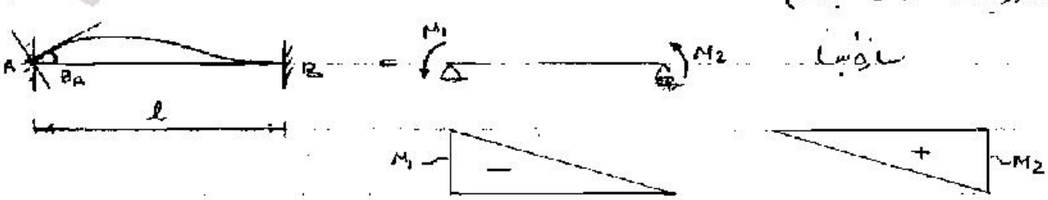
$$\sum M_A' = 0 \Rightarrow \frac{M_A l}{2EI} \cdot \frac{l}{3} + \frac{M_B l}{2EI} \cdot \frac{2l}{3} + \frac{Pab}{2EI} \cdot \frac{l+a}{3} = 0$$

$$\Rightarrow M_A + 2M_B = -\frac{Pab(l+a)}{l^2}$$

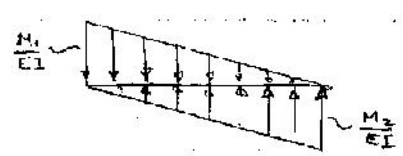
$$M_B = -\frac{Pab(l+a)}{l^2} + \frac{Pab}{l} = \frac{Pab}{l}\left(1 - 1 - \frac{a}{l}\right) = -\frac{Pa^2 b}{l^2}$$

$$M_A = -\frac{Pab}{l} + \frac{Pa^2 b}{l^2} = \frac{Pab}{l}\left(-1 + \frac{a}{l}\right) = -\frac{Pab^2}{l^2}$$

مثال 3) اگر یک تیر دو سر گیردار را تحت یک دوران تکیه گاهی قرار دهیم در آن نیرو ایجاد می شود.
با استفاده از روش تیر مزدوج این تیر را حل کنید.
(θ در جهت ساعتگرد مثبت)



تیر مزدوج



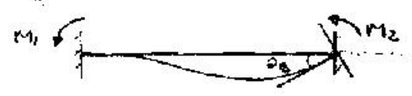
$$\sum M_A' = 0 \Rightarrow \frac{M_1 l}{2EI} \cdot \frac{l}{3} = \frac{M_2 l}{2EI} \cdot \frac{2l}{3}$$

$$\rightarrow M_1 = 2M_2$$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_A + \frac{M_2 l}{2EI} - \frac{M_1 l}{2EI} = 0 \rightarrow \theta_A - \frac{M_2 l}{2EI} = 0$

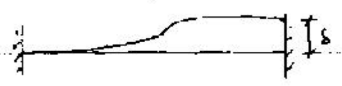
$\Rightarrow M_2 = \frac{2EI}{l}\theta_A \quad , \quad M_1 = \frac{4EI}{l}\theta_A$

▲ اگر تکیه گاه B را تحت دوران قرار دهیم ، داریم :



$M_1 = \frac{2EI}{l}\theta_B \quad , \quad M_2 = \frac{4EI}{l}\theta_B$

▲ حال اگر تکیه‌گاه ها به اندازه δ جابجا شود داریم : (δ در جهت ساعتی مثبت)



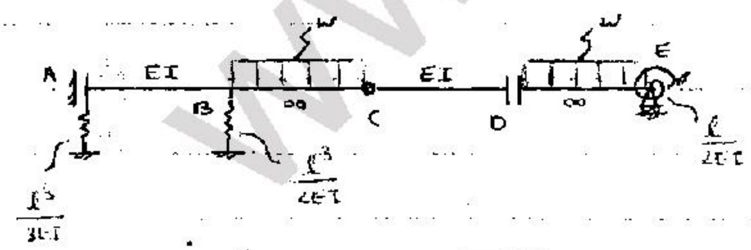
$M_1 = M_2 = -\frac{6EI\delta}{l^2}$

★ به طور کلی اگر تکیه گاه ها تحت دوران و یا جابجایی قرار گیرند فرمول های زیر برای لنگرها بدست می آید :

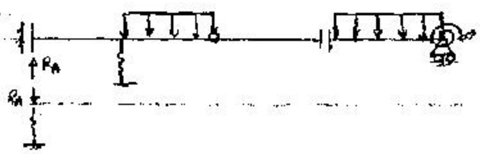
$M_1 = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_1 + \theta_2 - 3\frac{\delta}{l}\right)$

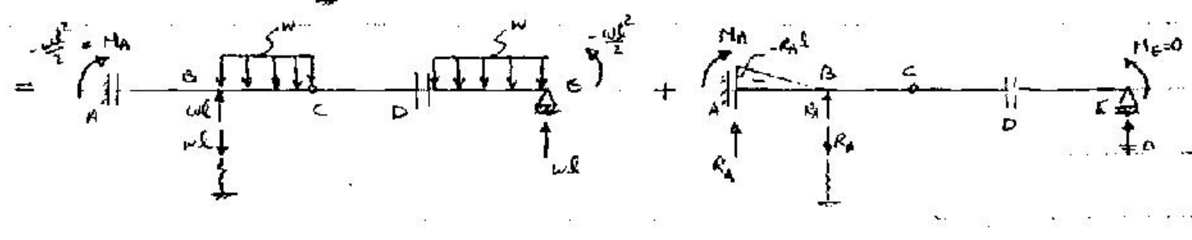
$M_2 = \frac{2EI}{l}\left(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\frac{\delta}{l}\right)$ ⟵ معادلات شیب - افت

مثال 4) تیر زیر را با استفاده از روش تیر مزدوج حل کنید



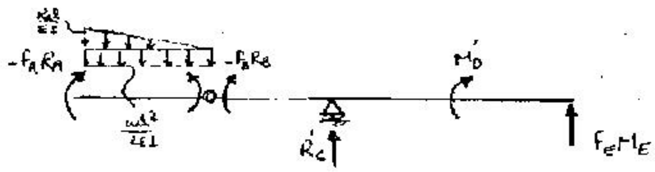
ترسیم :





چپ $\sum M_C = 0 \Rightarrow M_A - R_A l + 2R_A l = 0 \Rightarrow M_A = -R_A l$

تیر مزدوج :



$-f_B R_B = -\frac{l^3}{2EI}(wl - R_A)$, $f_E M_E = \frac{l}{2EI}\left(-\frac{wl^2}{2}\right) = -\frac{wl^3}{4EI}$

چپ $\sum M'_B = 0 \Rightarrow \frac{R_A l^3}{3EI} - \frac{l^3}{2EI}(wl - R_A) + \frac{wl^3}{2EI}\cdot\frac{l}{2} + \frac{R_A l^2}{2EI}\cdot\frac{2l}{3} = 0$

$\Rightarrow \frac{2R_A l^3}{3EI} + \frac{R_A l^3}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} + \frac{wl^4}{4EI} = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{3wl}{14}}$

$\sum F'_y = 0 \Rightarrow R'_C = \frac{wl^3}{2EI} + \frac{R_A l^2}{2EI} + \frac{wl^3}{4EI} \Rightarrow R'_C = \frac{6wl^3}{7EI}$

راست $\sum M'_B = 0 \Rightarrow R'_C l - M'_D - \frac{wl^3}{4EI}(3l) + \frac{l^3}{2EI}(wl - R_A) = 0$

$\Rightarrow \frac{6wl^3}{7EI}(l) - M'_D - \frac{3wl^4}{4EI} + \frac{l^3}{2EI}\left(\frac{11wl}{14}\right) = 0 \Rightarrow M'_D = \frac{wl^4}{2EI}$

$\delta_A = M'_A = -\frac{wl^4}{14EI}$, $\theta_B = V'_B = -\frac{6wl^3}{7EI} + \frac{wl^3}{4EI} = \frac{-17wl^3}{28EI}$

$\delta_B = M'_B = -\frac{11wl^4}{28EI}$, $\theta_{LC} = V'_{LC} = V'_B = -\frac{17wl^3}{28EI}$

$\theta_{RC} = V'_{RC} = \frac{wl^3}{4EI}$, $\delta_C = M'_C = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} = -\frac{wl^4}{EI}$

$\theta_D = V'_D = \frac{wl^3}{4EI}$, $\delta_{LD} = M'_{LD} = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3wl^4}{4EI}$

$\delta_{RD} = -\frac{wl^4}{4EI}$, $\theta_E = V'_E = \frac{wl^3}{4EI}$

$-f_A R_A = \ominus \frac{R_A l^3}{3EI}$ جهت انتخابی

چپ $\sum M'_B = 0 \Rightarrow \frac{R_A l^3}{3EI} - \frac{l^3}{2EI}(wl - R_A) + \frac{wl^3}{2EI} \times \frac{l}{2} + \frac{R_A l^2}{2EI} + \frac{2l}{3} = 0$

$\frac{2R_A l^3}{3EI} + \frac{R_A l^3}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} + \frac{wl^4}{4EI} = 0 \Rightarrow \frac{7R_A l^3}{6EI} = \frac{wl^4}{4EI} \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{3wl}{14}}$

$\sum F'_y = 0 \Rightarrow R'_C = \frac{wl^3}{2EI} + \frac{R_A l^2}{2EI} + \frac{wl^3}{4EI} \xrightarrow[\text{با جایگذاری}]{R_A} R'_C = \frac{24}{28}\frac{wl^3}{EI} = \frac{6wl^3}{7EI}$

سمت راست $\sum M'_B = 0 \Rightarrow \underbrace{R'_C}_{\frac{6wl^3}{7EI}} l - M'_D - \frac{wl^3}{4EI}(3l) + \frac{l^3}{2EI} \times \underbrace{(wl - R_A)}_{\frac{11wl}{14}} = 0$

$\Rightarrow \boxed{M'_D = \frac{wl^4}{2EI}}$

$\delta_A = M'_A = -\frac{wl^4}{14EI}$ $\theta_A = 0$ $\theta_B = V'_B = \ominus \frac{6wl^3}{7EI} + \frac{wl^3}{4EI} = \frac{-17wl^3}{28EI}$ چرخش تکیه گاه

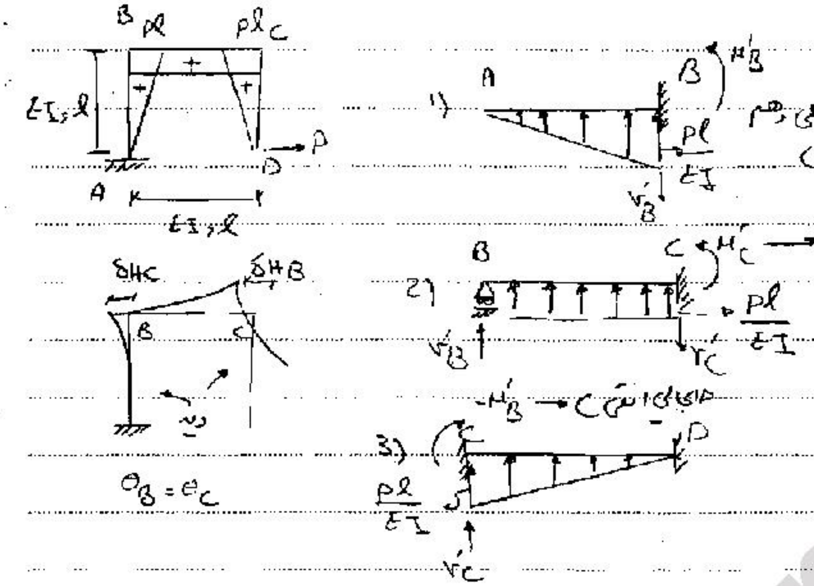
$\delta_B = M'_B = -\frac{11w^4}{28EI}$

$\theta_{LC} = V'_{LC} = V'_B = \frac{-17wl^3}{28EI}$, $\theta_{RC} = V'_{RC} = \frac{wl^3}{4EI}$
چپ

$\delta_C = M'_C = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{2EI} = -\frac{wl^4}{EI}$

$\theta_D = V'_D = \frac{wl^3}{4EI}$ $\delta_{LD} = M'_{LD} = -\frac{wl^4}{2EI} - \frac{wl^4}{4EI} = -\frac{3wl^4}{4EI}$

$\delta_{RD} = M'_{RD} = -\frac{wl^4}{4EI}$, $\theta_E = V'_E = \frac{wl^3}{4EI}$



تیر مزدوج: تغییر مکان عمودی در امتداد اصلی
هم تغییر مکان عمودی در امتداد اصلی هم
(ندارد)

$M'_C \longrightarrow$ های ماکزیمم

در ۱ داریم: $\sum F'_y = 0 \Rightarrow V'_B = \frac{Pl^2}{2EI}$ $\quad \sum M'_B = 0 \Rightarrow M'_B = \frac{Pl^2}{2EI} \times \frac{l}{3} = \frac{Pl^3}{6EI}$

در ۲ داریم: $\sum F'_y = 0 \Rightarrow V'_C = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Pl^2}{EI} = \frac{3Pl^2}{2EI}$

$$\sum M'_C = 0 \Rightarrow M'_C = \frac{Pl^3}{2EI} + \frac{Pl^3}{2EI} = \frac{Pl^3}{EI}$$

در ۳ داریم: $\sum F'_y = 0 \Rightarrow V'_D = \frac{3Pl^2}{2EI} + \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{2Pl^2}{EI}$

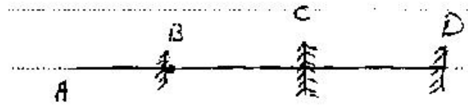
$$\sum M'_D = 0 \Rightarrow M'_D = \frac{3Pl^3}{2EI} + \frac{Pl^2}{2EI} \times \frac{2l}{3} - \frac{Pl^3}{6EI} = \frac{5Pl^3}{3EI}$$

$\theta_B = V'_B = \frac{Pl^2}{2EI}$ $\quad \delta_{HB} = M'_B = \frac{Pl^3}{6EI}$ $\quad \delta_{HC} = M'_C\big|_{CD} = -M'_B = -\frac{Pl^3}{6EI}$
(در عضو CD)

$\theta_C = V'_C = \frac{3Pl^2}{2EI}$ $\quad \delta_{VC} = M'_C\big|_{BC} = \frac{Pl^3}{EI}$

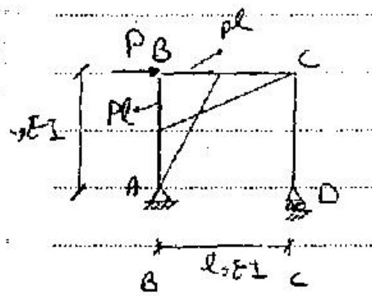
$\delta_{HD} = M'_D\big|_{CD} = \frac{5Pl^3}{3EI}$ $\quad \theta_D = V'_D = \frac{2Pl^2}{EI}$

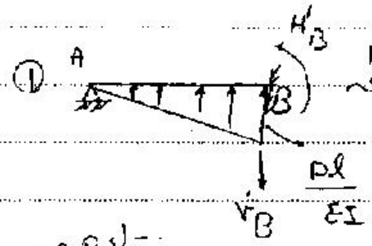
$$\delta_{VD} = M'_D\big|_{CD} = M'_C\big|_{BC} = \frac{Pl^3}{EI}$$



سیستم تیر بصورت مستقل

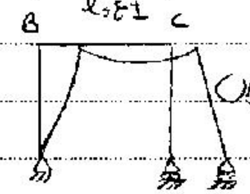
حل:



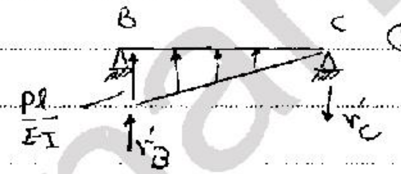


تغییر مکان نقطه
نیروی برشی داریم ← θ_A داریم

A



نقطه B هم
تغییر مکان هم دوران
دارد



جابجایی افقی B و C باهم برابرند اما مطلقا
الحالات متفاوت چون DB مفصلی بوده
در حالیکه C مفصل است

در ② داریم : $\sum M'_C = 0 \Rightarrow l V'_B = -\frac{Pl^2}{2EI} \times \frac{2l}{3} \Rightarrow V'_B = -\frac{Pl^2}{3EI}$

$\sum M'_B = 0 \Rightarrow l V'_C = \frac{Pl^2}{2EI} \times l/3 \Rightarrow V'_C = \frac{Pl^2}{6EI}$

در ① داریم : $\sum F'_y = 0 \Rightarrow V'_A = V'_B - \frac{Pl^2}{2EI} \Rightarrow V'_A = -\frac{Pl^2}{3EI} - \frac{Pl^2}{2EI} = -\frac{5Pl^2}{6EI}$

$\sum M'_B = 0 \Rightarrow M'_B = l V'_A + \frac{Pl^3}{6EI} \Rightarrow M'_B = -\frac{5Pl^3}{6EI} + \frac{Pl^3}{6EI} = -\frac{2Pl^3}{3EI}$

در ③ داریم : $V'_D = V'_C = \frac{Pl^2}{6EI}$ $\quad M'_D = -M'_B + l V'_C \quad M'_D = \frac{2Pl^3}{3EI} + \frac{Pl^3}{6EI} = \frac{5Pl^3}{6EI}$

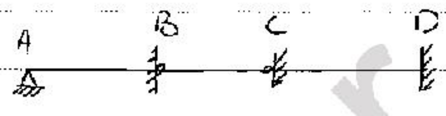
$$\theta_A = v'_A = -\frac{5Pl^2}{6EI} \qquad \theta_B = v'_B = -\frac{Pl^2}{3EI}$$

$$\theta_C = v'_C = \frac{Pl^2}{6EI} \qquad \theta_D = v'_D = \frac{Pl^2}{6EI}$$

$$\delta_{HB} = M'_B\Big|_{AB} = -\frac{2Pl^3}{3EI} \qquad \delta_{HC} = M'_C\Big|_{CD} = -M'_B\Big|_{AB} = \frac{2Pl^3}{3EI}$$

$$\delta_{HD} = M'_D = \frac{5Pl^3}{6EI}$$

سیستم تیر معادل مزدوج $\Longrightarrow$



روشهای انرژی : الف) اصل کار مجازی (روش بار واحد)

اگر یک نقطه مادی داشته باشیم تحت اثر بارهای P_1 و P_2 و ... و P_n اگر در حال تعادل باشد برای

یک تغییر مکان Δ به نقطه مادی دهیم که در انجام این کار شرایط برجا محفوظ شود چون نیروها در حال تعادلند

این تغییر مکان را تغییر مکان مجازی می گویند یعنی این تغییر مکان آنقدر کوچک است که امکان ندارد نیروها را تغییر

می دهد چون اگر تغییر دهد نیروها از حالت تعادل خارج می شوند و کل کار صفر خواهد شد

$\Sigma W = 0$

پس وقتی اصل کار مجازی برقرار باشد نیروها در حال تعادل هستند

حال اگر فرض کنیم یک جسم صلب تحت اثر نیروهای P_1 و P_2 و H_1 و M_2 و ... قرار گرفته حال

اگر این نیروها و گشتاورها در حال تعادل باشند و یک تغییر مکان Δ انتقالی کوچک به جسم دهیم و یا اندازه زاویه

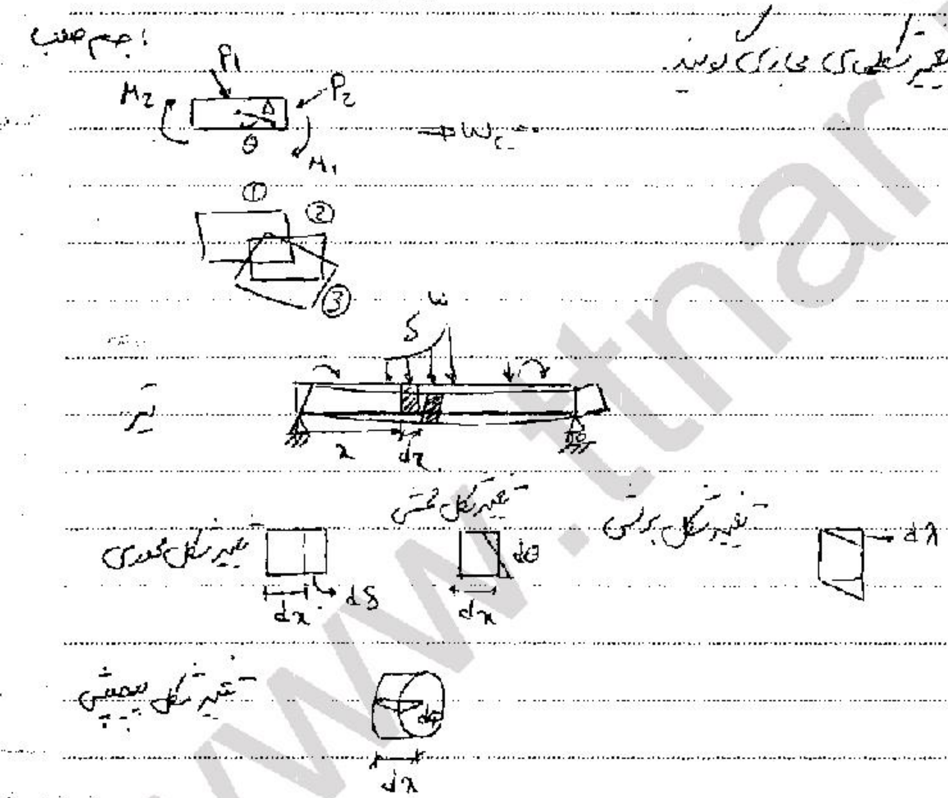
به جسم دوران دهیم (دوران جسم صلب) کار انجام شده در این حالت هم برابر صفر است چون نیروها در حال

تعادلند و لی Δ و θ آنقدر کوچکند که امتداد نیروها را تغییر نمی دهند. کار ناشی از جسم صلب صفر است

فرض کنیم تیر (جسم تغییر شکل پذیر) داریم تحت اثر بارها و نیروهای مختلف. این تیر را یک تغییر شکل

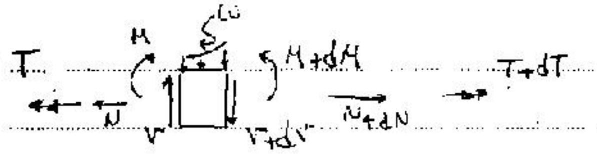
مجازی می دهیم مثلاً آن را خم می کنیم. منتها این تغییر شکل آنقدر کوچک است که امتداد نیروها تغییر نکند

پس به این تغییر شکلها هم تغییر شکلهای مجازی گویند.

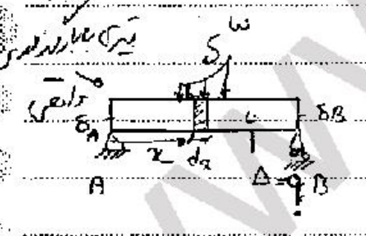


$$dW_e = dW_r^{\,0} + dW_d$$

Subject:
Year Month Date

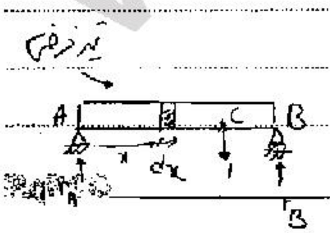


از اصل کار مجازی استفاده می کنیم. دو روش بار واحد را استفاده می کنیم. روش بار واحد برای محاسبه تغییر مکان هاست.



ابتدا سازه ای را در نظر می گیریم. این تیر را تحت تعادل در نظر می گیریم

نقطه ای از این تیر متعلق C را در نظر می گیریم. تغییر مکان نقطه C را بدست می آوریم



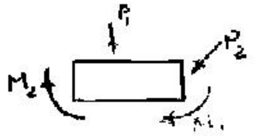
برای این کار با استفاده از اصل کار مجازی عمل می کنیم. در نقطه C بار واحدی

▶ روش های انرژی

الف ـ اصل کار مجازی (روش بار واحد) :

▲ اگر یک نقطه مادی تحت اثر نیروهای P_1 و P_2 و ... و P_n قرار داشته باشد و در حال تعادل باشد آنگاه اگر یک تغییرمکان Δ به این نقطه مادی بدهیم کار انجام شده توسط نیروها صفر است چون نیروها در حال تعادل اند. به این تغییرمکان، تغییرمکان مجازی گفته می شود. تغییرمکان مجازی یعنی آنکه تغییرمکان آنقدر کوچک است که راستای نیروها را تغییر نمی دهد.

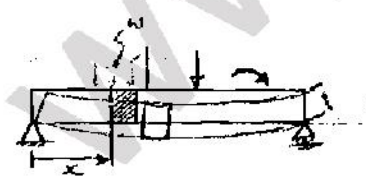
▶ اگر یک جسم صلب را هم که تحت اثر نیروهایی باشد که در حال تعادل اند به اندازه Δ جابجا کنیم و به اندازه θ دوران دهیم، کار انجام شده توسط نیروها صفر است. بنابراین این Δ و θ تغییرمکان‌های مجازی هستند یعنی آنقدر کوچکند که امتداد نیروها را تغییر نمی دهند.

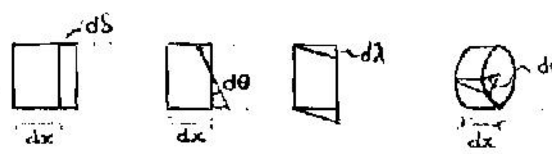


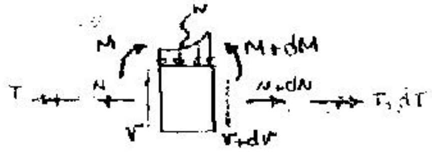
$W_e = 0$

تغییرمکان‌های مجازی

▶ اگر یک جسم غیرصلب را که تغییرشکل دارد تحت تغییرمکان مجازی قرار دهیم، جسم تغییرشکل پیدا می کند





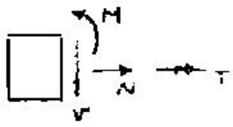


$$dW_e = \underbrace{dW_r}_{0} + dW_d$$

کار ناشی از جسم صلب   کار ناشی از تغییرشکل

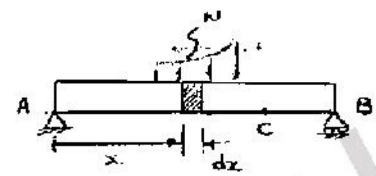
$$dW_d = N\,d\delta + M\,d\theta + V\,d\lambda + T\,d\varphi \Rightarrow \boxed{\int_L dW_e = W_{int}}$$ کار داخلی مجازی

◀ در کنار المانی که گفتیم در فاصله‌ی dx المان دیگری قرار دارد و به همین ترتیب تا آخر. حال فرض می‌کنیم که در فاصله‌ی x یک تغییر مکان افقی δ_1 و یک تغییر مکان قائم δ_2 و دوران θ داشته باشیم :



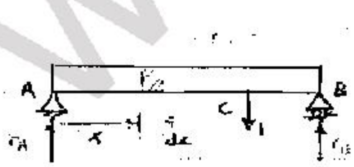
$$W = N\delta_1 + V\delta_2 + M\theta + T\varphi$$

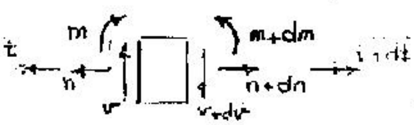
◀ روش بار واحد برای محاسبه‌ی تغییر مکان‌ها :

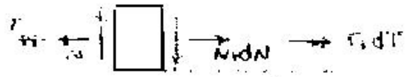


فرض می‌کنیم تیرک بارگذاری قرار گرفته و در حال تعادل است. می‌خواهیم تغییر مکان نقطه‌ی C را پیدا کنیم.

در روش بار واحد : اگر تغییر مکان قائم را به سمت پایین بخواهیم یک بار واحد در آن نقطه به سمت پایین وارد می‌کنیم ، اگر تغییر مکان را به سمت بالا بخواهیم ، بار واحد را به سمت بالا وارد می‌کنیم. اگر تغییر مکان θ را بخواهیم لنگر واحد را در جهت θ به تیر وارد می‌کنیم که به این بار ، بار واحد متناظر با تغییر مکان مجهول می‌نامیم.

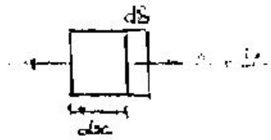




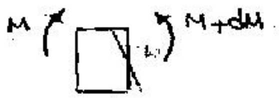
المان از بار اصلی : 

▲ رابطه کلی

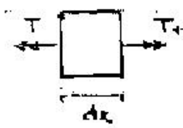
$$1\times\Delta + W_R = \int_l n\, d\delta + \int_l m\, d\theta + \int_l v\, dl + \int_l t\, d\varphi$$



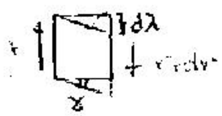
$$d\delta = \frac{(N+dN)\,dx}{EA} = \frac{N\,dx}{EA}$$



$$d\theta = \frac{M\,dx}{EA}$$



$$d\varphi = \frac{T\,dx}{GJ}$$



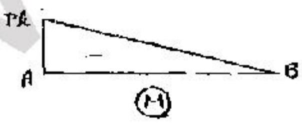
$$(d\lambda)_{max} = \gamma_{max}\, dx = \frac{\tau_{max}}{G}\, dx = \frac{\alpha_s V}{GA}\, dx$$

ضریب برش $\alpha_s = \dfrac{\tau_{max}}{\tau_m} \Rightarrow \tau_{max} = \alpha_s \tau_m = \alpha_s \dfrac{V}{A}$

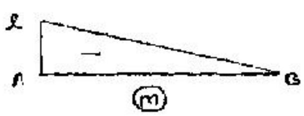
▲ رابطه با روابط برای سازه‌هایی که خطی هستند:

$$1\times\Delta + W_R = \int_l \frac{nN}{EA}\, dx + \int_l \frac{mM}{EA}\, dx + \int \frac{\alpha_s V v}{GA}\, dx + \int \frac{tT}{GJ}\, dx$$

مثال) تیر طره‌ای به طول l تحت بارگذاری P قرار گرفته است. δ_{vB} و θ_B را بدست آورید.



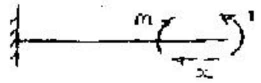
$M = -Px \quad ; \quad 0 \le x \le l$



$M = -x \quad ; \quad 0 \le x \le l$

$$1\times\delta_{vB} = \int_0^l \frac{(-x)(-Px)}{EI}\, dx = \frac{Pl^3}{3EI} \Rightarrow \delta_{vB} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

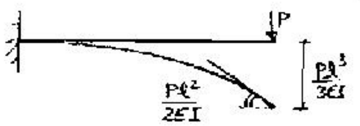
✗ مثبت بودن δ_{vB} نشان دهنده این است که تغییر مکان هم جهت با بار واحد است.



$m = 1 \quad ; \quad 0 \le x \le l$

$$1\times\theta_B = \int_0^l \frac{(1)(-Px)}{EI}\, dx = \frac{-Pl^2}{2EI}$$

* منفی بودن θ_B نشان دهنده این است که چرخش در خلاف جهت فرض شده است.



منحنی تغییر شکل

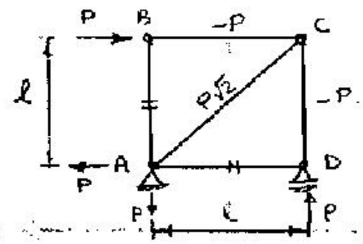
◀ رابطه بار واحد برای خرپاها به صورت زیر است:

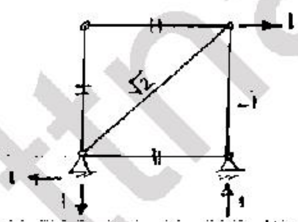
$$1\times\Delta + W_R = \int_l \frac{nN}{EA}\,dx = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i N_i l_i}{E_i A_i}$$

در صورتی برقرار است که اعضا منشوری و یکپارچه باشند.

مثال) در خرپای زیر δ_{HC} را به دست آورید.

E : مدول الاستیسیته   A : سطح مقطع اعضاء

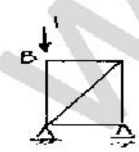




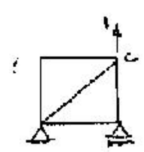
$$1\times\delta_{HC} = \sum \frac{nNl}{EA} = \frac{l}{EA}\left[(-1)(-P) + \sqrt{2}\,(P\sqrt{2})(\sqrt{2})\right] = \frac{Pl}{EA}\,(1+2\sqrt{2})$$

* می‌خواهیم دوران عضو BC را به دست آوریم:

$$\theta_{BC} = \frac{\delta_{VB}\downarrow + \delta_{VC}\uparrow}{l_{BC}}$$ در جهت ساعتی



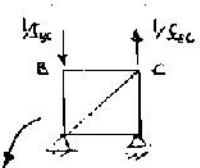
$$\delta_{VB} = \sum \frac{n_1 N l}{EA}$$



$$\delta_{VC} = \sum \frac{n_2 N l}{EA}$$

$$\theta_{BC} = \frac{1}{l_{BC}}\sum \frac{n_1 N l}{EA} + \frac{1}{l_{BC}}\sum \frac{n_2 N l}{EA} = \sum\left[\frac{\left(\frac{n_1}{l_{BC}}\right) N l}{EA} + \frac{\left(\frac{n_2}{l_{BC}}\right) N l}{EA}\right]$$

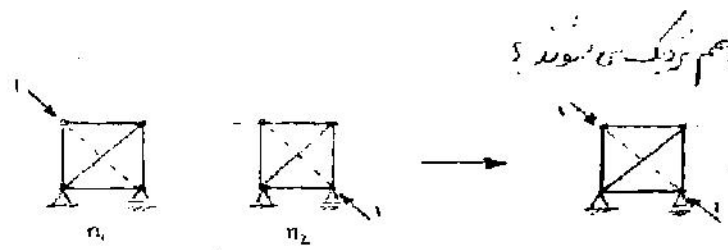
$$\Rightarrow \quad \theta_{BC} = \sum \frac{\left(\frac{n_1}{l_{BC}} + \frac{n_2}{l_{BC}}\right) N l}{EA}$$



$$n = \frac{n_1}{l_{BC}} + \frac{n_2}{l_{BC}}$$

برای به دست آوردن θ در یک عضو کافی است یک کوپل $\frac{1}{l}$ در دو طرف قرار دهیم...

* مفصل‌های B و D چقدر به هم نزدیک می‌شوند؟

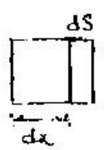


$$\therefore \delta_{B/D} = \delta_{B\to D} + \delta_{D\to B} = \sum \frac{n_1 N l}{EA} + \sum \frac{n_2 N l}{EA} = \sum \frac{(n_1+n_2) N l}{EA} = \sum \frac{n N l}{EA}$$

* برای به‌دست دوران نسبی دو نقطه نسبت به هم از دو لنگر واحد مختلف العلامه استفاده می‌کنیم.

* فرض می‌کنیم خرپایی داشته باشیم که در بعضی از اعضای آن تغییر درجه حرارت رخ داده باشد، اثر این تغییر درجه حرارت را بررسی می‌کنیم:

ΔT تغییر درجه حرارت و α ضریب انبساط حرارتی

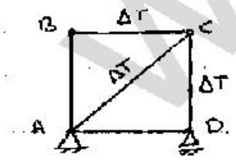


$$d\delta = \alpha(\Delta T)\,dx$$

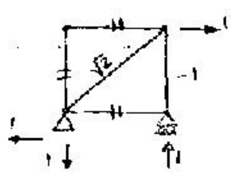
برای یک عضو: $\int_l n\,d\delta = \int_{l_i} n\alpha(\Delta T)\,dx = n_i l_i \alpha_i (\Delta T)_i$

$$\Rightarrow 1\times\Delta + W_R = \sum \frac{nNl}{EA} + \sum nl\alpha(\Delta T)$$

مثال) اگر اعضای BC و CD دارای تغییر حرارت ΔT باشند، δ_{HC} را به دست آورید.

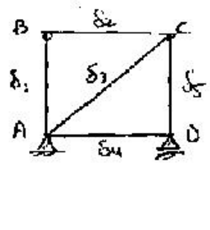


* چون بارگذاری خارجی نداریم $N=0$.



$$\delta_{HC} = l\alpha(\Delta T)\,[-1+2] = l\alpha(\Delta T)$$

مثال) فرض می‌کنیم تمامی اعضا خطای ساخت دارند. δ_{HC} را به دست آورید.



برای یک عضو $\int n\,d\delta = \pm n_i \delta_i$

برای همه اعضا $\sum n_i \delta_i$

• رابطهٔ کلی بار واحد برای خرپاها :

$$1\times\Delta + W_R = \frac{\Sigma nNl}{EA} + \Sigma nl\alpha(\Delta T) + \Sigma n\delta$$

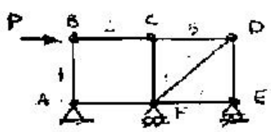
خطا $\delta \rightarrow \pm$ اشتباه δ $\rightarrow$ $+$ اگر عضو بلندتر باشد

$\rightarrow$ $-$ اگر عضو کوتاهتر باشد

اگر خطا داشته باشیم : $1\times\Delta + W_R = \Sigma nl\alpha(\Delta T) \pm \Sigma|n\delta| + \frac{\Sigma nNl}{EA}$

★ اگر در سازهٔ نامعین تغییر درجه حرارت و یا خطای در ساخت داشته باشیم نیروهای داخلی به وجود می‌آید
و اگر سازه معین باشد نیرویی به وجود نمی‌آید.

مثال) δ_{HD} را در خرپای روبه‌رو به دست آورید.

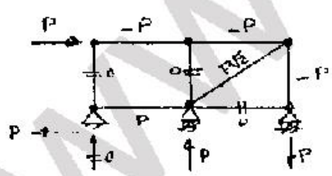


نشست تکیه‌گاهی $\Delta F\downarrow = 1\,cm$, $\delta_8 = 1\,cm$

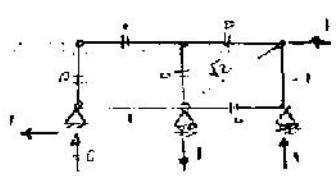
$\delta_5 = 2\,cm$, $\delta_4 = -2\,cm$, $\delta = \pm 1\,mm$

$(\Delta T)_1 = (\Delta T)_3 = (\Delta T)_5 = (\Delta T)_7 = 50^\circ C$

$(\Delta T)_2 = (\Delta T)_4 = (\Delta T)_6 = (\Delta T)_8 = -50^\circ C$



(N)



(n)

i = شماره عضو	l_i	n_i	N_i	$n_iN_il_i$	$(\Delta T)_i$	$n_i(\Delta T)_i l_i$	Δ_i	$n_i\Delta_i$	$\lvert n_i\delta_i\rvert$
1	l	0	0	0	50	0			
2	l	0	$-P$	0	-50	0			
3	l	1	P	Pl	50	$50l$			0.001
4	l	0	0	0	-50	0	-0.02		
5	l	0	$-P$	0	50	0	0.02		
6	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}$	$P\sqrt{2}$	$2Pl\sqrt{2}$	-50	$-100l$			$0.001\sqrt{2}$
7	l	0	0	0	50	0			
8	l	-1	$-P$	Pl	50	$-50l$	0.01	-0.01	0.001
				$2Pl(1+\sqrt{2})$		$-100l$		-0.01	0.0034

$W_R =$ عکس‌العمل سازه با بار واحد × نشست تکیه‌گاه

$$1\times\delta_{HD} + (0.01)(1) = \frac{2P\ell(1+\sqrt{2})}{EA} - 100\alpha\ell - 0.01 \pm 0.0034$$

$$P = 2t\ ,\quad \ell = 3m\ ,\quad \begin{cases} E = 2\times10^{6}\ kg/cm^2 \\ A = 1\ cm^2 \end{cases} \Rightarrow EA = 2\times10^{6}\ kg = 2000\,t$$

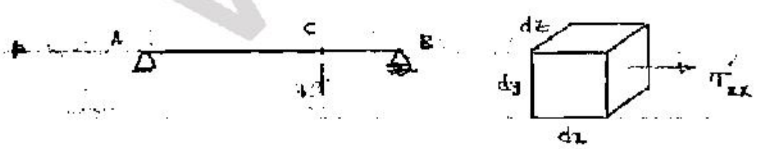
$$\delta_{HD} = -0.01 + \frac{2(2)(3)(2.41)}{2000} - 10^{-3}(3) - 0.01 \pm 0.0034$$

$$\delta_{HD} = -0.023 + 0.0144 \pm 0.0034 \Rightarrow \delta_{HD} = 0.0086 \pm 0.0034$$

◄ فرمول کلی که برای روش بار واحد به دست آوردیم عبارت بود از :

$$1\times\Delta + W_R = \int_{\ell}\frac{nN\,dx}{EA} + \int_{\ell}\frac{mM\,dx}{EI} + \int_{\ell}\frac{\alpha_s vV\,dx}{GA} + \int_{\ell}\frac{tT\,dx}{GJ}$$

سومین عبارت سمت راست دقیق نیست و با فرض به دست آوردن max برش به دست آمده است بنابراین با روش دیگری عبارت دقیق را برای آن به دست می‌آوریم .



$$(\sigma'_{xx}\,dy\,dz)(\varepsilon_{xx}\,dx) = \sigma'_{xx}\,\varepsilon_{xx}\,dV_0 \qquad (\ \ : V_0)$$

$$1\times\Delta + W_R = \int_{V_0}(\sigma'_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma'_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma'_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma'_{xy}\gamma_{xy} + \sigma'_{yz}\gamma_{yz} + \sigma'_{zx}\gamma_{zx})\,dV_0$$

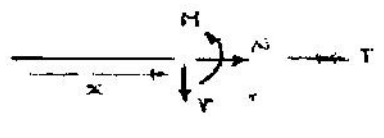
$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

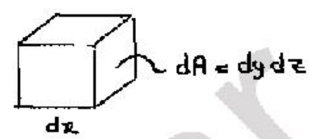
$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_{V_0} \sigma' \varepsilon \, dV_0 + \int_{V_0} \tau' \gamma \, dV_0$$

◀ در سازه‌هایی مانند خرپا که فقط نیروی محوری داریم خواهیم داشت :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{N}{EA} \quad , \quad \sigma'_{xx} = \frac{n}{A}$$

$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_l \left[\int_A \frac{nN}{EA^2} \, dA \right] dx$$





◀ چون سطح مقطع در هر مقطعی ثابت است می‌توانیم آن را از انتگرال خارج کنیم حتی اگر در طول عضو متغیر باشد :

$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_l \frac{nN}{EA} \, dx$$

◀ حال فرمول را برای سازه‌هایی می‌نویسیم که فقط لنگر خمشی دارند :

$$1\times\Delta + W_R = \int_l \left[\int_A \frac{mMy^2}{EI^2} \, dA \right] dx = \int_l \frac{mM}{EI} \, dx$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{My}{EI} \quad , \quad \sigma'_{xx} = \frac{My}{I} \quad , \quad \int y^2 \, dA = I$$

◀ فرمول برای سازه‌هایی که فقط نیروی برشی دارند :

$$\gamma = \frac{VQ}{GIb} \quad , \quad \tau' = \frac{vQ}{Ib}$$

$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_{V_0} \frac{vVQ^2}{GI^2b^2} \, dV_0 = \int_l \left[\int_A \frac{vVQ^2}{GI^2b^2} \, dA \right] dx$$

$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_l \frac{vV}{GI^2} \left[\int_A \frac{Q^2}{b^2} \, dA \right] dx = \int_l \frac{vV}{GA} \left[\frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{b^2} \, dA \right] dx$$

ضریب شکل مقطع برای برش : $f_s = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{Q^2}{b^2}\, dA \qquad (1 \leq f_s \leq \alpha_s)$

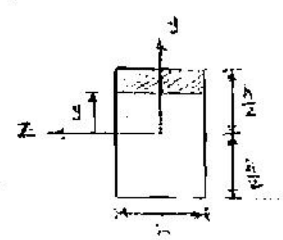
$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_l \frac{f_s v V dx}{GA}$$

● فرمول برای سازه‌هایی که تحت تنش پیچشی دارند :

$$\gamma = \frac{T\rho}{GJ} \quad , \quad \tau' = \frac{t\rho}{J}$$

$$\Rightarrow \quad 1\times\Delta + W_R = \int_l \left[\iint_A \frac{tT\rho^2}{GJ^2}\, dA\right] dx = \int_l \frac{tT}{GJ}\, dx$$

مثال) f_s را برای یک مقطع مستطیل به دست آورید.



$$A = bh \quad , \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

$$Q = b\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{h}{2} - \frac{h/2 - y}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

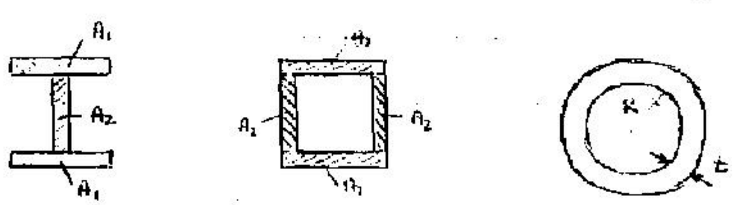
$$dA = dydz \leadsto dA = bdy$$

$$f_s = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{Q^2}{b^2}\, dA = \frac{bh(144)}{b^2h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\frac{b^2}{4}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)^2}{b^2}\, b\, dy = 1.2$$

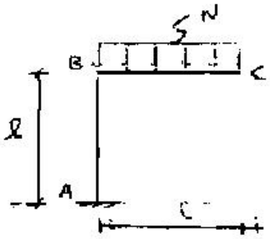
$$\alpha_s = \frac{\tau_{max}}{\tau_m} \quad , \quad \tau_{max} = \frac{VQ_{max}}{Ib} = \frac{V\left(\frac{bh^2}{8}\right)}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)(b)} = 1.5\frac{V}{A} = 1.5\,\tau_m$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_s = \frac{1.5\,\tau_m}{\tau_m} = 1.5 \quad \Rightarrow \quad f_s < \alpha_s$$

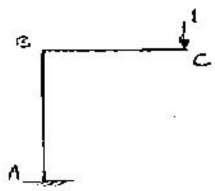
تمرین) f_s را برای مقاطع زیر به دست آورید.



مثال) اثرات خمش، برش و کشش فشار را در سازه زیر بررسی کرده و δ_{vc} را بدست آورید.



$$BC: \begin{cases} M = -\dfrac{wx^2}{2} \\ V = wx \\ N = 0 \end{cases} \qquad AB: \begin{cases} M = -\dfrac{wl^2}{2} \\ V = 0 \\ N = -wl \end{cases}$$



$$BC: \begin{cases} m = -x \\ v = 1 \\ n = 0 \end{cases} \qquad AB: \begin{cases} m = -l \\ v = 0 \\ n = -1 \end{cases}$$

$$1 \times \delta_{vc} = \int_0^l \frac{(-x)(-\frac{wx^2}{2})\,dx}{EI} + \int_0^l \frac{f_s (1)(wx)\,dx}{GA}$$

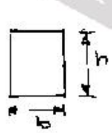
$$+ \int_0^l \frac{(-l)(\frac{wl^2}{2})\,dx}{EI} + \int_0^l \frac{(-1)(-wl)\,dx}{EA}$$

$$\delta_{vc} = \frac{wl^4}{8EI} + \frac{wl^4}{2EI} + \frac{f_s wl^2}{2GA} + \frac{wl^2}{EA} = \frac{5wl^4}{8EI}(1+\alpha+\beta)$$

* معمولاً در قاب‌ها، از اثرات نیروی برشی و محوری صرف نظر می‌کنیم چون تغییر شکل برشی و محوری به خمش ناچیز است.

$$\alpha = \frac{\frac{f_s wl^2}{2GA}}{\frac{5wl^4}{8EI}} = \frac{4EI f_s}{5GA l^2} = \frac{4EI f_s}{5\frac{E}{2(1+\nu)}Al^2} = \frac{8(1+\nu) I f_s}{5Al^2}$$

فرض



$f_s = 1.2$, $\nu = 0.25$

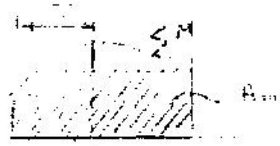
$I = \frac{bh^3}{12}$, $(\frac{h}{l})^2 = 0.01$ $\Rightarrow \alpha = \frac{h^2}{5l^2} = 0.2(\frac{h}{l})^2$

$$\beta = \frac{\frac{wl^2}{EA}}{\frac{5wl^4}{8EI}} = \frac{8I}{5Al^2} = \frac{8\,bh^3/12}{5(bh)l^2} = \frac{2}{15}(\frac{h}{l})^2$$

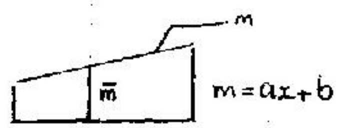
* α و β در حدود 0.01 است که در مثال ۱ قابل صرف نظر است. بنابراین در قاب‌ها معمولاً اثرات خمش را به تنهایی در نظر می‌گیرند.

◀ روش مور برای افزایش سرعت بدست آوردن انتگرال ها :

$$1\times\Delta + W_R = \int_\ell \frac{nN\,dx}{EA} + \int_\ell \frac{mM\,dx}{EI} + \int_\ell \frac{f_s v V\,dx}{GA} + \int_\ell \frac{tT\,dx}{GJ}$$



$$\int_0^\ell mM\,dx = \int_0^\ell (ax+b)M\,dx$$

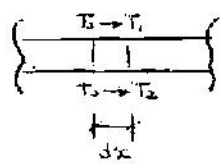


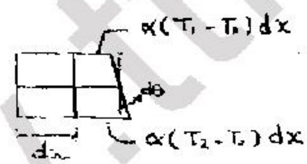
$$= a\int_0^\ell xM\,dx + b\int_0^\ell M\,dx$$

چون بارگذاری را مداست m معلوم است.

$$= a\bar{x}A_m + bA_m = A_m(a\bar{x}+b) = A_m\bar{m}$$

◀ اگر دمای تار بالا در یک عضو T_1 و دمای تار پایین T_2 باشد : روابط بصورت زیر خواهد بود :





* تغییر درجه حرارت در سازه معین ایجاد نیروهای داخلی نمی کند .

$$1\times\Delta + W_R = \int n\,d\delta + \int m\,d\theta + \int v\,d\lambda + \int t\,d\varphi$$

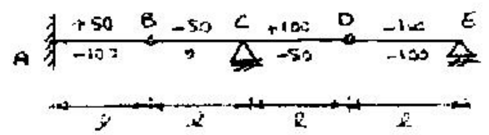
$$d\delta = \alpha\left(\frac{T_1+T_2}{2} - T_0\right)dx$$

$$d\theta = \frac{\alpha(T_2-T_0)dx - \alpha(T_1-T_0)dx}{h} = \frac{\alpha(T_2-T_1)dx}{h}$$

$$1\times\Delta + W_R = \int_\ell \frac{nN\,dx}{EA} + \int_\ell \frac{mM\,dx}{EI} + \int_\ell \frac{f_s v V\,dx}{GA} + \int_\ell \frac{tT\,d\varphi}{GJ}$$

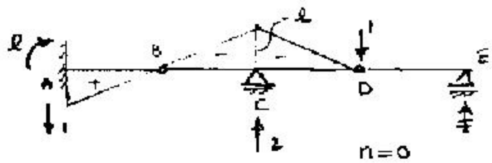
$$+ \int_\ell n\alpha\left(\frac{T_1+T_2}{2} - T_0\right)dx + \int_\ell m\,\frac{\alpha(T_2-T_1)dx}{h}$$

مثال) تغییرمکان قائم D را بدست آورید.



$$\alpha = 10^{-5}/^{\circ}C \quad , \quad l = 2m$$

$$h = 0.2\ m$$

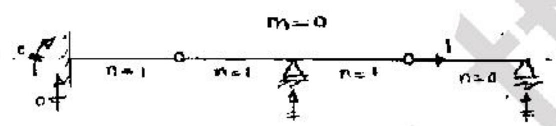


$$1 \times \delta_{VD} = \sum_i \left[\frac{\alpha (T_2 - T_1)}{h} \int_l m\,dx \right]_i$$

$$\Rightarrow \quad 1 \times \delta_{VD} = \frac{\alpha(-150)l^2}{2h} - \frac{\alpha(50)l^2}{2h} - \frac{\alpha(-150)l^2}{2h} = -25\frac{\alpha l^2}{h}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \times \delta_{VD} = -25\,\frac{10^{-5} \times 4}{0.2} \quad \Rightarrow \quad \delta_{VD} = -0.005\ m \uparrow$$

△ تغییرمکان افقی D را بدست آورید.

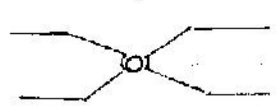


$$1 \times \delta_{HD} = \sum_i \left[\alpha \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 \right) n\,l \right]_i = \alpha(-25)l + \alpha(-25)l + \alpha(25)l$$

$$\Rightarrow \quad 1 \times \delta_{HD} = -25\alpha l = -25 \times 10^{-5} \times 2 \quad \Rightarrow \quad \delta_{HD} = -5 \times 10^{-4}\ m \leftarrow$$

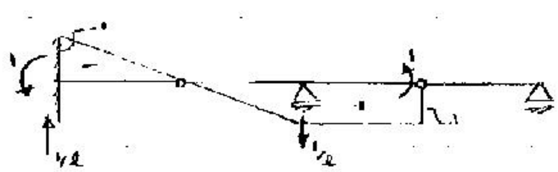
این مقدار تغییرمکان افقی میان تار است

برای بدست آوردن تغییرمکان افقی تار بالا و پایین باید مقدار دوران (θ) مقطع را بدست آوریم.



دوران سمت چپ و راست متفاوت است

△ دوران سمت چپ نقطه D را بدست آورید.



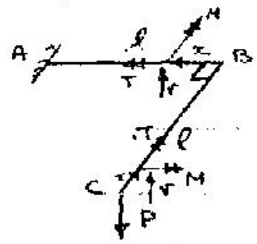
$$1\times\theta_{10} = -\frac{\alpha(-150)\ell}{2h} + \frac{\alpha(50)\ell}{2h} + \frac{\alpha(-150)\ell}{h} = -\frac{50\alpha\ell}{h}$$

$$\Longrightarrow \quad 1\times\theta_{10} = -\frac{50(10^{-5})(2)}{0.2} = -5\times10^{-3}\ R$$

تغییرمکان افقی تار بالا در سمت چپ : $\delta_1 = -5\times10^{-4} + 5\times10^{-3}\times 0.1 = 0$

" " تار پایین " " " : $\delta_2 = -5\times10^{-4} - 5\times10^{-3}\times 0.1 = -10^{-3}\ m$

مثال ۲) تغییرمکان نقطه C را بدست آورید.



$EI\ ,\ GA/f_s\ ,\ GJ$

$$BC: \begin{cases} M = -Px\ , & m = -x \\ V = P\ , & v = 1 \\ T = 0\ , & t = 0 \end{cases}$$

$$AB: \begin{cases} M = -Px\ , & m = -x \\ V = P\ , & v = 1 \\ T = P\ell\ , & t = \ell \end{cases}$$

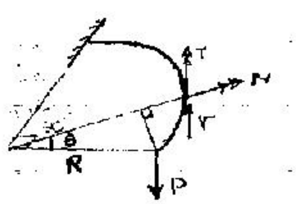
$$1\times\delta_c = \int_\ell \frac{mM\,dx}{EI} + \int_\ell \frac{f_s vV\,dx}{GA} + \int_\ell \frac{tT\,dx}{GJ}$$

$$1\times\delta_c = 2\int_0^\ell \frac{(-x)(-Px)\,dx}{EI} + 2\int_0^\ell \frac{f_s(1)(P)\,dx}{GA} + \int_0^\ell \frac{(\ell)(P\ell)\,dx}{GJ}$$

$$= \frac{2P\ell^3}{3EI} + \frac{2f_sP\ell}{GA} + \frac{P\ell^3}{GJ}$$

مثال ۳) تغییرمکان نقطه B را بدست آورید.

$EI\ ,\ GA/f_s\ ,\ GJ$



$M = -PR\sin\theta \quad , \quad m = -R\sin\theta$

$V = P \quad , \quad v = 1$

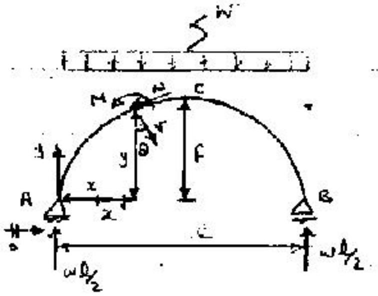
$T = PR(1-\cos\theta) \quad , \quad t = R(1-\cos\theta)$

$$\delta_B = \int \frac{mM\,ds}{EI} + \int \frac{f_s v V\,ds}{GA} + \int \frac{tT\,ds}{GJ}$$

$$\delta_B = \int_0^{\pi/2} \frac{PR^3 \sin^2\theta \, d\theta}{EI} + \int_0^{\pi/2} \frac{f_s (1)(R)\, d\theta}{GA} + \int_0^{\pi/2} \frac{PR^3 (1-\cos\theta)^2 d\theta}{GJ}$$

$$= \frac{\pi R^3 P}{4EI} + \frac{f_s P R \pi}{2GA} + \frac{PR^3}{GJ}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)$$

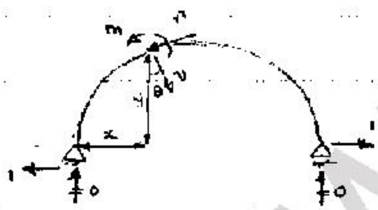
مثال ۴) تغییر مکان افقی B را بدست آورید.



معادله قوس : $y = \frac{4f}{l^2}\, x(l-x)$

$$AC: \begin{cases} M = \frac{wl}{2}x - w\frac{x^2}{2} & , \ m = y \\ V = \left(\frac{wl}{2} - wx\right)\cos\theta & , \ v = \sin\theta \\ N = \left(\frac{wl}{2} - wx\right)\sin\theta & , \ n = -\cos\theta \end{cases}$$

$dx = ds(\cos\theta)$



$$1 \times \delta_{HB} = \int_l \frac{mM\,ds}{EI} + \int_l \frac{f_s v V\,ds}{GA} + \int_l \frac{nN\,ds}{EA}$$

$$\delta_{HB} = \int_0^l \frac{4f}{l^2}\, x(l-x)\left(\frac{wl}{2}x - w\frac{x^2}{2}\right) \times \frac{1}{EI} \times \frac{dx}{\cos\theta}$$

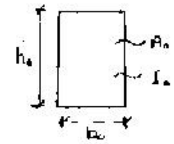
$$+ \int_0^l f_s \left(\frac{wl}{2} - wx\right) \sin\theta \times \frac{dx}{GA} + \int_0^l -\left(\frac{wl}{2} - wx\right)\sin\theta \times \frac{dx}{EA}$$

$$\tan\theta = y' = \frac{4f}{l^2}(l-2x) \quad , \quad \begin{cases} I_0 = I\cos\theta \\ A = A_0 \cos\theta \end{cases}$$

با قرار دادن این روابط در انتگرال های بالا ، آنها را محاسبه می کنیم.

۵) در مقطع C ، θ صفر است در نتیجه :

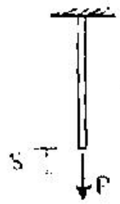
$A = A_0 \quad , \quad I = I_0$



$$I_0 = \frac{b_0 h_0^3}{12} \quad , \quad A = b_0 h_0$$

$$\begin{cases} bh = b_0 h_0 \cos\theta \\ b_0 h_0^3 = b h^3 \cos\theta \end{cases} \Rightarrow h_0 = h\cos\theta \quad , \quad b = b_0 \cos^2\theta$$

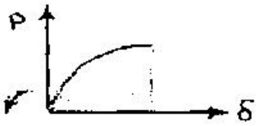
ب - اصل کار حقیقی :



اگر در میله روبرو رابطهٔ نیرو و تغییر مکان خطی باشد انرژی ذخیره شده در آن برابر است با :

$$W = \frac{1}{2} P\delta$$

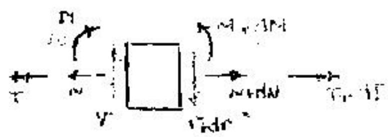
رابطه نیرو و تغییر مکان غیر خطی است



$$dW = P\,d\delta$$

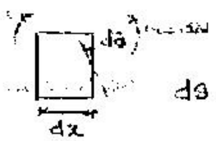
$$W = \int P\,d\delta$$

حال انرژی داخلی ناشی از تغییر شکل را بدست می آوریم :



$$d\delta = \frac{N\,dx}{EA}$$

$$dU_a = \frac{1}{2} N\,d\delta = \frac{N^2 dx}{2EA} \Rightarrow U_a = \int_l \frac{N^2 dx}{2EA}$$

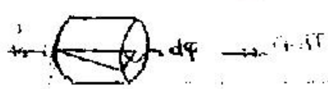


$$d\theta = \frac{M\,dx}{EI} \qquad dU_b = \frac{1}{2} M\,d\theta = \frac{M^2 dx}{2EI} \Rightarrow U_b = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$d\lambda = \gamma\,dx \simeq \gamma_{max}\,dx = \frac{\tau_{max}}{G}\,dx = \frac{\alpha_s V\,dx}{GA}$$

$$dU_s = \frac{1}{2} V\,d\lambda = \frac{\alpha_s V^2 dx}{GA}$$

$$\Rightarrow U_s = \int_l \frac{\alpha_s V^2 dx}{GA}$$

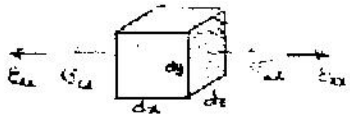


$$dU_T = \frac{1}{2} T\,d\varphi = \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

$$d\varphi = \frac{T\,dx}{GJ} \qquad \Rightarrow U_T = \int_l \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

انرژی کل ذخیره شده در یک سازه برابر است با :

$$U = \int_l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_l \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_l \frac{\alpha_s V^2 dx}{2GA} + \int_l \frac{T^2 dx}{2GJ}$$



$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\, dy\, dz)\, \varepsilon_{xx}\, dx = \frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}\, dV_0$$

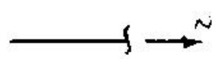
$$dU = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_{xz}\gamma_{xz}\right) dV_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dU}{dV_0} = u \qquad \text{چگالی انرژی}$$

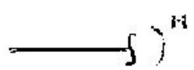
• انرژی کرنشی جسم حجم به وجود آورده است :

$$U = \Sigma \int_{V_0} \sigma\varepsilon\, dV_0 + \Sigma \int_{V_0} \tau\gamma\, dV_0$$

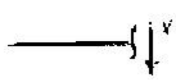
• انرژی نیروی محوری، برشی، خمشی و پیچشی را به طور جداگانه در یک تیر بررسی می کنیم :



$$\begin{cases} \sigma = \frac{N}{A} \\ \varepsilon = \frac{N}{EA} \end{cases} \Rightarrow U_a = \int_l \frac{N^2 dx}{2EA}$$



$$\begin{cases} \sigma = \frac{My}{I} \\ \varepsilon = \frac{My}{EI} \end{cases} \Rightarrow U_b = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI}$$



$$\begin{cases} \tau = \frac{QV}{Ib} \\ \gamma = \frac{QV}{GIb} \end{cases} \Rightarrow U_s = \int_l \left[\int_A \frac{Q^2V^2}{2GI^2b^2}\, dA\right] dx$$

$$\Rightarrow \quad U_s = \int_l \frac{V^2}{2GA}\underbrace{\left[\frac{A}{I^2}\int \frac{Q^2}{b^2}\, dA\right]}_{F_s} dx = \int_l \frac{F_s V^2}{2GA}\, dx$$

$$\begin{cases} \tau = \frac{T\rho}{J} \\ \gamma = \frac{T\rho}{GJ} \end{cases} \Rightarrow U_T = \int_l \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

$$\int dU_T = \int_l \left[\int_A \frac{T^2\rho^2}{2GJ^2}\, dA\right] dx = \int_l \frac{T^2}{2GJ^2}\left[\int \rho^2 dA\right] dx = \int_l \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

انرژی کل ذخیره شده :

$$U = \int_l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_l \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_l \frac{F_s V^2 dx}{2GA} + \int_l \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

مثال) انرژی ذخیره شده در سازه زیر را بدست آورید.

$$V = \frac{wl}{2} - wx \quad , \quad M = \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2} \quad , \quad N = T = 0$$

اصل کار حقیقی : اگر انرژی تلف شده نداشته باشیم ، کار نیروی خارجی P فقط سبب تغییرشکل می شود.

(اصل بقای انرژی هم گفته می شود.) $W = \frac{1}{2} P\delta \rightarrow U = W$

مثال 2) با استفاده از اصل کار حقیقی تغییرمکان نقطهٔ c را بدست آورید.

$$U = 2\int_0^{l/2} \frac{\frac{P^2x^2}{4}dx}{2EI} + 2\int_0^{l/2} \frac{f_s \frac{P^2}{4} dx}{GA}$$

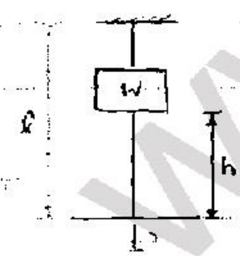
$$\Rightarrow U = \frac{P^2 l^3}{96EI} + \frac{f_s P^2 l}{8GA}$$

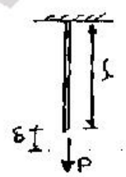
$$U = W \Rightarrow \frac{1}{2} P\delta = \frac{P^2 l^3}{96EI} + \frac{f_s P^2 l}{8GA} \Rightarrow \delta = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{f_s P l}{4GA}$$

▵ اصل کار حقیقی را فقط می توان برای بدست آوردن تغییرمکان در راستای یک بار نقطه ای و در جهت همان نیرو به کار برد.

★ تغییرمکان حداکثر بر اثر ضربه

اگر وزنهٔ W را از فاصلهٔ h رها کنیم ، تغییرمکان حداکثر بر اثر ضربه را بدست آورید.





$$\delta = \frac{Pl}{EA} \Rightarrow P = \frac{EA\delta}{l}$$

$$U = \frac{1}{2} P\delta = \frac{P^2 l}{2EA} = \frac{EA\delta^2}{2l}$$

$$W(h+\delta) = \frac{EA\delta^2}{2l} \Rightarrow \frac{EA\delta^2}{2l} - W\delta - Wh = 0 \Rightarrow \delta^2 - \frac{2Wl}{EA}\delta - \frac{2Wl}{EA}h = 0$$

▵ اگر وزنهٔ W به طور استاتیکی (تدریجی) به صفحه وارد شود ، تغییرمکان برابر است با : $\delta_{st} = \frac{Wl}{EA}$

$$\Rightarrow \delta^2 - 2\delta_{st}\delta - 2\delta_{st}h = 0 \Rightarrow \delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + 2\delta_{st}h}$$

$$\Rightarrow \delta = \delta_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}\right) = \beta\delta_{st} \quad (\beta: \text{ضریب ضربه})$$