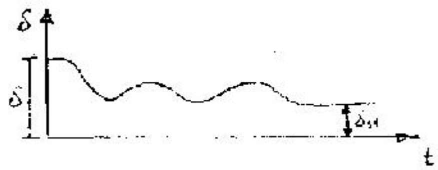
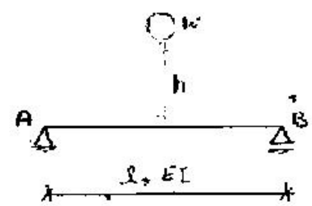
◄ اگر نیرو را یکدفعه بر روی سازه وارد کنیم ، h صفر خواهد شد در نتیجه :

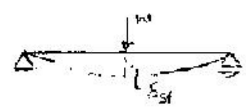
$$\beta = 2 \implies \delta = 2\delta_{st}$$

میرایی را لحاظ کرده‌ایم



مثال) اگر وزنه W از ارتفاع h رها شود و به وسط تیر برخورد کند ، تغییرمکان وسط تیر را بدست آورید .





$$\delta_{st} = \frac{W l^3}{48EI}$$

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI}$$

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2} P\delta \\ P = \frac{48EI\delta}{l^3} \end{cases}$$

$$\rightarrow U = \frac{24EI\delta^2}{l^3}$$

اصل بقای انرژی : $\quad W(h+\delta) = \frac{24EI\delta^2}{l^3} \rightarrow \frac{24EI}{l^3}\delta^2 - W\delta - Wh = 0$

$$\implies \delta^2 - \frac{Wl^3}{24EI}\delta - \frac{Wl^3}{24EI}h = 0 \implies \delta^2 - 2\delta_{st}\delta - 2\delta_{st}h = 0$$

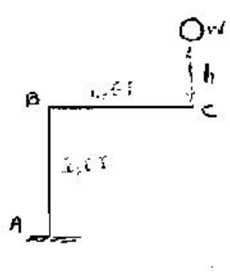
◄ در هر مسئله‌ای که رابطهٔ نیرو و تغییرمکان خطی باشد برای به دست آوردن تغییرمکان حداکثر در اثر ضربه از روابط زیر استفاده می‌کنیم :

$$\delta_{st} = \alpha W \quad , \quad \delta = \alpha P$$

$$W(h+\delta) = \frac{1}{2}P\delta = \frac{\delta^2}{2\alpha} \implies \frac{\delta^2}{2\alpha} - W\delta - Wh = 0$$

$$\rightarrow \delta^2 - 2\alpha W\delta - 2\alpha Wh = 0 \implies \delta^2 - 2\delta_{st}\delta - 2\delta_{st}h = 0$$

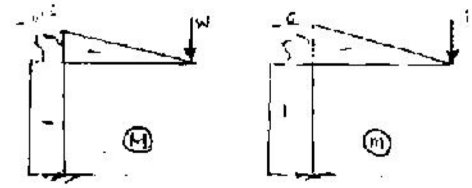
مثال) حداکثر تغییرمکان در اثر ضربه را بدست آورید . و همچنین δ_{HB} .



$$W = 3t \quad , \quad l = 2\,m \quad , \quad h = 5\,m$$

$$E = 2\times10^6\ kg/cm^2 \quad , \quad I = 10^4\ cm^4$$

$$\delta_{HB} = ?$$



$$1\times\delta_{st} = \int_l \frac{mMdx}{EI} = \frac{wl^2}{EI}\cdot l + \frac{wl^2}{2EI}\cdot\frac{2l}{3}$$

$$= \frac{4wl^3}{3EI} = \frac{4(3)(8)}{3(2000)} = 0.016\ m$$

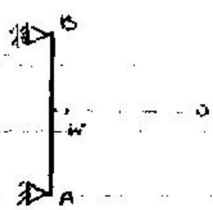
$$\delta = \beta\,\delta_{st} \quad , \quad \beta = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}} = 1+\sqrt{1+\frac{2(5)}{0.016}} \simeq 26$$

$$\Rightarrow \quad \delta_c = 26\,(0.016)$$

$$(\delta_{st})_{HB} = \int_l \frac{mMdx}{EI} = \frac{wl^2}{EI}\cdot\frac{l}{2} = \frac{wl^3}{2EI} = \frac{3\times 8}{2\times 2000} = 0.006\,m$$

$$\delta_{HB} = \beta(\delta_{st})_{HB} = 26\,(0.006) = 0.156\ m$$

◄ گلوله‌ای با سرعت V به یک تیر برخورد می‌کند. می‌خواهیم حداکثر تغییر مکان در این ضربه را بدست آوریم.
(فرض: رفتار مصالح خطی باقی می‌ماند.)

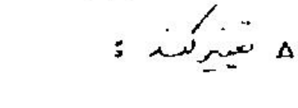


$$\frac{1}{2}mV^2 = W h_{eq} = mg\,h_{eq} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_{eq} = \frac{V^2}{2g}}$$

$$\beta = 1+\sqrt{1+\frac{V^2}{g\,\delta_{st}}}$$

◄ قضیه اول کاستیلیانو (Castigliano's Fist Theory)

فرض می‌کنیم نیروهای P_1 ، P_2 ، ..... ، P_n به سازه‌ای وارد می‌شود و تغییرمکان δ_1 ، δ_2 ، ... ، δ_n بوجود می‌آید.
می‌توانیم انرژی تغییرشکل را برحسب δها بیان کنیم.



$$U = U(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$$

$$\Delta\delta_1 = \Delta\delta_2 = \ldots = \Delta\delta_{n-1} = 0 \quad , \quad \Delta\delta_n \neq 0$$

برای سادگی مسئله فرض می‌کنیم که تنها یکی از تغییر مکان‌ها به اندازه Δ تغییر کند:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \delta_1}\Delta\delta_1 + \frac{\partial U}{\partial \delta_2}\Delta\delta_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \delta_n}\Delta\delta_n = \frac{\partial U}{\partial \delta_n}\Delta\delta_n$$

$$\Delta W = P_n(\Delta\delta_n)$$

• اگر اتلاف انرژی نداشته باشیم $\Delta U = \Delta W$ (اصل بقای انرژی) :

$$\Delta U = \Delta W \Rightarrow P_n(\Delta\delta_n) = (\Delta\delta_n)\left(\frac{\partial U}{\partial \delta_n}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial \delta_n} = P_n}$$

قضیه اول کاستیلیانو: اگر سازه‌ای داشته باشیم که انرژی تغییر شکل آن را بتوانیم برحسب تغییر مکان‌ها بنویسیم و از انرژی برحسب یکی از تغییر مکان‌ها مشتق بگیریم نیروی نظیر آن تغییر مکان بدست خواهد آمد.
(مشتق جزئی انرژی تغییر شکل نسبت به هریک از تغییر مکان‌ها برابر است با نیروی متناظر آن تغییر مکان)

$$\Delta U = \Delta W \Rightarrow \Delta U - \Delta W = 0 \Rightarrow \Delta(U - W) = 0$$

$U - W = \Pi$ انرژی پتانسیل کل $\Rightarrow \boxed{\Delta\Pi = 0}$

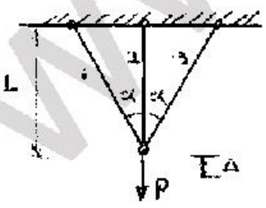
قضیه حداقل انرژی پتانسیل کل

$$\Delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1}\Delta\delta_1 + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_n}\Delta\delta_n \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1} = 0 \;,\; \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_2} = 0 \;,\; \cdots \;,\; \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_n} = 0$$

• قضیه حداقل انرژی پتانسیل کل متناظر است با قضیه اول کاستیلیانو.

مثال: نیروهای میله‌ها و Δ را بدست آورید.



$$\begin{cases} \delta_3 = \delta_1 = \Delta\cos\alpha & \Rightarrow U_1 = U_3 = \dfrac{\delta_1^2 EA}{2 l_1} \\ \delta_2 = \Delta & \Rightarrow U_2 = \dfrac{\delta_2^2 EA}{2 l_2} \end{cases}$$

$$U_1 = U_3 = \frac{(\Delta\cos\alpha)^2 EA}{2l/\cos\alpha} = \frac{\Delta^2\cos^3\alpha\, EA}{2l} \quad , \quad U_2 = \frac{\Delta^2 EA}{2l}$$

$$U = \sum U_i = \frac{\Delta^2 EA}{2l}(1 + 2\cos^3\alpha) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \Delta} = \frac{\Delta EA}{l}(1 + 2\cos^3\alpha) = P$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{P.l}{EA(1 + 2\cos^3\alpha)}$$

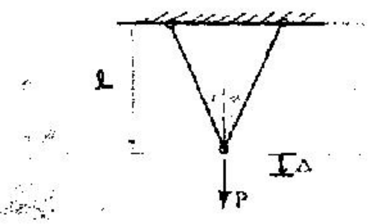
$$S_1 = S_3 = \frac{\delta_1 EA}{l_1} = \frac{\Delta \cos^2\alpha \, EA}{l} = \frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$$

$$S_2 = \frac{\delta_2 EA}{l_2} = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}$$

این نیروها در حال تعادل اند چون رابطهٔ $\frac{\partial U}{\partial \Delta} = P$

در حقیقت معادلهٔ تعادل است.

مثال ۲) نیروی میله‌ها و Δ را بدست آورید.



$$\delta_1 = \delta_2 = \Delta \cos\alpha$$

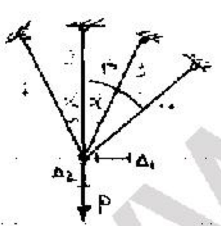
$$\Longrightarrow \quad U_1 = U_2 = \frac{(\Delta\cos\alpha)^2 EA\cos\alpha}{2l} = \frac{\Delta^2 EA\cos^3\alpha}{2l}$$

$$\Longrightarrow \quad U = \frac{\Delta^2 EA\cos^3\alpha}{l}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta} = \frac{2\Delta EA\cos^3\alpha}{l} = P \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \frac{Pl}{2EA\cos^3\alpha}$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{Pl}{2EA\cos^2\alpha} \quad \Longrightarrow \quad S_1 = S_2 = \frac{\delta_1 EA}{l_1} = \frac{Pl\,EA\cos\alpha}{2EA\cos^2\alpha\,(l)} = \frac{P}{2\cos\alpha}$$

مثال ۳) نیروی میله‌ها، Δ_1 و Δ_2 را بدست آورید.



$$EA = cte \quad , \quad l = cte$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \Delta_1 \sin\alpha + \Delta_2 \cos\alpha \\ \delta_2 = \Delta_2 \quad , \quad \delta_3 = \Delta_2\cos\alpha - \Delta_1\sin\alpha \\ \delta_4 = -\Delta_1 \sin\beta + \Delta_2\cos\beta \end{cases}$$

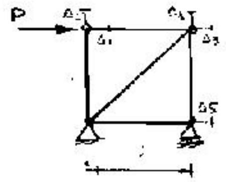
$$U_1 = \frac{(\Delta_1\sin\alpha + \Delta_2\cos\alpha)^2 EA}{2l} \quad , \quad U_2 = \frac{\Delta_2^2 EA}{2l}$$

$$U_3 = \frac{(\Delta_2\cos\alpha - \Delta_1\sin\alpha)^2 EA}{2l} \quad , \quad U_4 = \frac{(-\Delta_1\sin\beta + \Delta_2\cos\beta)^2 EA}{2l}$$

$$U = \frac{EA}{l}\left[2\Delta_1^2\sin^2\alpha + 2\Delta_2^2\sin^2\alpha + \Delta_2^2 + \Delta_1^2\sin^2\beta + \Delta_2^2\cos^2\beta - 2\Delta_1\Delta_2\sin\beta\cos\beta\right]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{EA}{2l}\left[4\Delta_1\sin^2\alpha + 2\Delta_1\sin^2\beta - 2\Delta_2\sin\beta\cos\beta\right] = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \frac{EA}{2l}\left[4\Delta_2\cos^2\alpha + 2\Delta_2 + 2\Delta_2\cos^2\beta - 2\Delta_1\sin\beta\cos\beta\right] = P \end{cases}$$

مثال 4) خرپای زیر را با روش تغییر مکان حل کنید.



$n_s = m + r - 2j = 5 + 3 - 8 = 0$ سازه معین

مجهولات اساسی برای حل تغییر مکانی را درجات آزادی یا درجه نامعینی سینماتیکی نامند.

$$\begin{cases} n_c = 2j - r & \text{خرپا} \\ n_c = 3j - r & \text{قاب‌ها} \end{cases}$$

$$\delta_1 = \Delta_2 \;,\quad \delta_2 = \Delta_3 - \Delta_1 \;,\quad \delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\Delta_3 + \Delta_4) \;,\quad \delta_4 = \Delta_5 \;,\quad \delta_5 = \Delta_4$$

$$U_1 = \frac{\Delta_2^2 EA}{2l} \;,\quad U_2 = \frac{(\Delta_3 - \Delta_1)^2 EA}{2l} \;,\quad U_3 = \frac{\frac{1}{2}(\Delta_3 + \Delta_4)^2 EA}{2l\sqrt{2}}$$

$$U_4 = \frac{\Delta_5^2 EA}{2l} \;,\quad U_5 = \frac{\Delta_4^2 EA}{2l}$$

$$U = \sum U_i = \frac{EA}{2l}\left[\Delta_2^2 + (\Delta_3 - \Delta_1)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\Delta_3 + \Delta_4)^2 + \Delta_5^2 + \Delta_4^2\right]$$

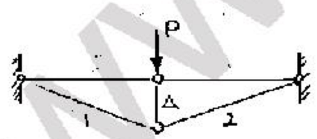
$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{EA}{2l}\left[-2(\Delta_3 - \Delta_1)\right] = P \;,\quad \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \frac{EA}{2l}\left[2\Delta_2\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta_2 = 0}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_3} = \frac{EA}{2l}\left[2(\Delta_3 - \Delta_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_3 + \Delta_4)\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_4} = \frac{EA}{2l}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_3 + \Delta_4) + 2\Delta_4\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_5} = \frac{EA}{2l}\left[2\Delta_5\right] = 0 \longrightarrow \boxed{\Delta_5 = 0}$$

مثال 5) مقدار Δ را به دست آورید.



$$\delta_1 = \delta_2 = \sqrt{l^2 + \Delta^2} - l = l\left[\left(1 + \left[\frac{\Delta}{l}\right]^2\right)^{1/2} - 1\right]$$

$$= l\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{l}\right)^2 - 1\right] = \frac{\Delta^2}{2l}$$

$$U_1 = U_2 = \frac{\delta_1^2 EA}{2l} = \frac{\Delta^4}{4l^2}\,\frac{EA}{2l} = \frac{\Delta^4 EA}{8l^3} \Rightarrow U = \sum U_i = \frac{\Delta^4 EA}{4l^3}$$

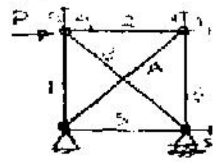
$$\frac{\partial U}{\partial \Delta} = \frac{\Delta^3 EA}{l^3} = P \Longrightarrow \Delta = \sqrt[3]{\frac{P}{EA}}$$

رابطه نیرو - تغییر مکان خطی نیست و در این حالت هم می‌توانیم از قضیه اول کاستیلیانو استفاده کنیم (غیر از دومی)

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{l}{2}\left(\frac{P}{EA}\right)^{2/3}$$

◀ در مثال قبل رفتار مصالح خطی است اما سازه دارای رفتار غیرخطی هندسی است. اگر رفتار مصالح هم غیرخطی باشند باز هم قضیه اول کاستیلیانو برقرار است. (غیرخطی مادی)

مثال) خرپای زیر را تحلیل کنید.

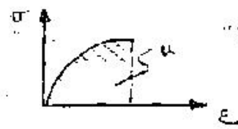


$$\begin{cases} \sigma = B\sqrt{\varepsilon} \\ -\sigma = B\sqrt{-\varepsilon} \end{cases}$$

$$\delta_1 = \Delta_2 \quad , \quad \delta_2 = \Delta_3 - \Delta_1$$

$$\delta_3 = (\Delta_2 + \Delta_5 - \Delta_1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\delta_4 = (\Delta_3 + \Delta_4)\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$u = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \qquad \delta_5 = \Delta_5 \quad , \quad \delta_6 = \Delta_4$$

$$U = \int_{V_0} u \, dV_0 \quad , \qquad u = \int_0^{\varepsilon} B\varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \frac{2B}{3}\varepsilon^{3/2}$$

کرنش یکنواخت $\varepsilon_i = \frac{\delta_i}{l_i} \Rightarrow u_i = \frac{2B}{3}\left(\frac{\delta_i}{l_i}\right)^{3/2} \Rightarrow U_i = \int_l \int_A \frac{2B}{3}\left(\frac{\delta_i}{l_i}\right)^{3/2} dA\, dx$

$$\Rightarrow U_i = \frac{2B}{3}\left(\frac{\delta_i}{l_i}\right)^{3/2} A\, l_i \longrightarrow U = \sum_i \frac{2BA\,|\delta_i|^{3/2}}{3\sqrt{l_i}}$$

(δ را باید مثبت قرار دهیم)

$$\Rightarrow U = \frac{2BA}{3}\left[\frac{\Delta_2^{3/2}}{\sqrt{l}} + \frac{(\Delta_3 - \Delta_1)^{3/2}}{\sqrt{l}} + \frac{(\Delta_2 + \Delta_5 - \Delta_1)^{3/2}}{2^{3/4}\, l^{1/2}\, 2^{1/4}} + \frac{(\Delta_3 + \Delta_4)^{3/2}}{2^{3/4}\, 2^{1/4}\, l^{1/2}}\right.$$

$$\left. + \frac{\Delta_5^{3/2}}{\sqrt{l}} + \frac{\Delta_4^{3/2}}{\sqrt{l}}\right] = \frac{2BA}{3\sqrt{l}}\Big[\Delta_2^{3/2} + \Delta_5^{3/2} + \Delta_4^{3/2} + (\Delta_3 - \Delta_1)^{3/2}$$

$$+ \frac{1}{2}(\Delta_2 + \Delta_5 - \Delta_1)^{3/2} + \frac{1}{2}(\Delta_3 + \Delta_4)^{3/2}\Big]$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{2BA}{3\sqrt{l}}\left[-\frac{3}{2}(\Delta_3 + \Delta_1)^{1/2} - \frac{3}{4}(\Delta_2 + \Delta_5 - \Delta_1)^{1/2}\right] = P$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \frac{2BA}{3\sqrt{l}}\left[\frac{3}{2}\Delta_2^{1/2} + \frac{3}{4}(\Delta_2 + \Delta_5 - \Delta_1)^{1/2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_3} = \frac{2BA}{3\sqrt{l}}\left[\frac{3}{2}(\Delta_3 - \Delta_1)^{1/2} + \frac{3}{4}(\Delta_3 + \Delta_4)^{1/2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_4} = \frac{2BA}{3\sqrt{l}}\left[\frac{3}{4}(\Delta_3 + \Delta_4)^{1/2} + \frac{3}{2}(\Delta_4)^{1/2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_5} = \frac{2BA}{3\sqrt{l}}\left[\frac{3}{4}(\Delta_2 + \Delta_5 - \Delta_1)^{1/2} + \frac{3}{2}\Delta_5^{1/2}\right] = 0$$

$$(2) \rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{\Delta_2} + \frac{3}{4}\sqrt{\Delta_2 + \Delta_5 - \Delta_1} = 0 \qquad (\Delta_2 > 0 \ , \ \Delta_2 + \Delta_5 - \Delta_1 < 0 \ ؟؟)$$

در روابط ۲ جای $\Delta_2+\Delta_5-\Delta_1$ ، معادلات $-\Delta_2-\Delta_5+\Delta_1$ را طرفین ضرب ، نتیجه :

$$(2) \longrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{\Delta_2} - \frac{3}{4}\sqrt{-\Delta_2-\Delta_5+\Delta_1} = 0$$
$$(5) \longrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{\Delta_5} - \frac{3}{4}\sqrt{-\Delta_2-\Delta_5+\Delta_1} = 0 \Longrightarrow \boxed{\Delta_2 = \Delta_5}$$

$$\Longrightarrow 4\sqrt{\Delta_2} = 2\sqrt{-2\Delta_2+\Delta_1} \Longrightarrow \boxed{\Delta_1 = 6\Delta_2}$$

$$(4) \longrightarrow \frac{3}{4}(\Delta_3+\Delta_4)^{1/2} - \frac{3}{2}(-\Delta_4)^{1/2} = 0 \qquad (\text{فرض :}\ \Delta_3+\Delta_4>0\ ,\ \Delta_4<0)$$
$$(3) \longrightarrow -\frac{3}{2}(-\Delta_3+\Delta_1)^{1/2} + \frac{3}{4}(\Delta_3+\Delta_4)^{1/2} = 0 \qquad (\text{فرض :}\ \Delta_3-\Delta_1<0)$$

$$\Longrightarrow (\Delta_3+\Delta_4)^{1/2} = 2(-\Delta_4)^{1/2} \Longrightarrow \Delta_3+\Delta_4 = -4\Delta_4 \Longrightarrow \Delta_3 = -5\Delta_4$$
$$\Longrightarrow (\Delta_3+\Delta_4)^{1/2} = 2(-\Delta_3+\Delta_1)^{1/2} \Longrightarrow 4(-\Delta_3+\Delta_1) = \Delta_3+\Delta_4$$
$$\Longrightarrow 4(5\Delta_4+\Delta_1) = -5\Delta_4+\Delta_4 \Longrightarrow \Delta_1 = -6\Delta_4$$

$$(1) \longrightarrow \frac{2BA}{3\sqrt{\ell}}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\Delta_1}{6}\right)^{1/2} + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{6}\Delta_1\right)^{1/2}\right] = P$$

$$\Longrightarrow \frac{2BA}{3\sqrt{\ell}}\left[3\left(\frac{1}{6}\Delta_1\right)^{1/2}\right] = P \Longrightarrow \Delta_1 = \frac{3P^2\ell}{2B^2A^2}$$

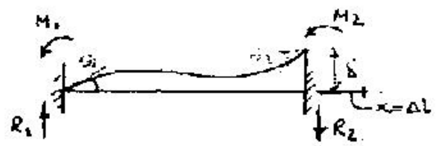
$$\Longrightarrow \Delta_2 = \frac{P^2\ell}{4B^2A^2}\ ,\quad \Delta_4 = -\frac{P^2\ell}{4B^2A^2}\ ,\quad \Delta_3 = \frac{5P^2\ell}{4B^2A^2}\ ,\quad \Delta_5 = \frac{P^2\ell}{4B^2A^2}$$

① میله‌ی : $\delta_1 = \Delta_2 = \dfrac{P^2\ell}{4B^2A^2} \Longrightarrow \varepsilon = \dfrac{\delta_1}{\ell} = \dfrac{P^2}{4B^2A^2}$

$$\sigma_1 = B\sqrt{\varepsilon_1} = B\,\frac{P}{2BA} = \frac{P}{2A}\ ,\quad F_1 = \sigma_1 A \Longrightarrow \boxed{F_1 = \frac{P}{2}}$$

$$|\sigma| = B\sqrt{|\varepsilon|} \Longrightarrow u = \int_0^{|\varepsilon|}|\sigma|\,d|\varepsilon| = \int_0^{|\varepsilon|} B|\varepsilon|^{1/2}\,d|\varepsilon| = \frac{2B}{3}|\varepsilon|^{3/2}$$

$$u_i = \frac{2B}{3}\left|\frac{\delta_i}{\ell_i}\right|^{3/2} \Longrightarrow U_i = \frac{2BA}{3}\,\frac{|\delta_i|^{3/2}}{\sqrt{\ell_i}} \qquad \begin{cases} U_i = \dfrac{2BA}{3}\,\dfrac{\delta_i^{3/2}}{\sqrt{\ell_i}} & \delta_i>0 \\ U_i = \dfrac{2BA}{3}\,\dfrac{(-\delta_i)^{3/2}}{\sqrt{\ell_i}} & \delta_i<0 \end{cases}$$

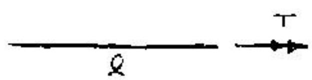


$$\begin{cases} M_1 = \dfrac{2EI}{l}\left(2\theta_1 + \theta_2 - 3\dfrac{\delta}{l}\right) \\ M_2 = \dfrac{2EI}{l}\left(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\dfrac{\delta}{l}\right) \end{cases}$$

$$R_1 = -R_2 = \frac{6EI}{l^2}\left(\theta_1 + \theta_2 - 2\frac{\delta}{l}\right)$$

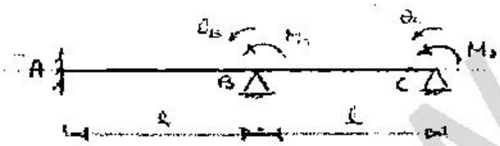
$$U = \frac{1}{2}M_1\theta_1 + \frac{1}{2}M_2\theta_2 + \frac{1}{2}R_2\delta = \frac{EI\theta_1}{l}\left(2\theta_1 + \theta_2 - \frac{3\delta}{l}\right)$$
$$+ \frac{EI\theta_2}{l}\left(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\frac{\delta}{l}\right) - \frac{3EI}{l^2}\left(\theta_1 + \theta_2 - 2\frac{\delta}{l}\right)\delta$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{2EI}{l}\left(\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2\right) - \frac{6EI\delta}{l^2}\left(\theta_1 + \theta_2\right) + \frac{6EI\delta^2}{l^3} + \frac{(\Delta l)^2 EA}{2l}$$



$$U = \frac{1}{2}T\varphi = \frac{\varphi^2 GJ}{2l}$$

تمرین) انرژی تغییرشکل را برحسب درجات آزادی بنویسید.



$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2$$

$$U_{BC} = \frac{2EI}{l}\left(\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2\right)$$

$$U = \sum U_i = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_B} = \frac{2EI}{l}\left(4\theta_B + \theta_C\right) = M_0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial\theta_C} = \frac{2EI}{l}\left(\theta_B + 2\theta_C\right) = M_0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_C} - \frac{\partial U}{\partial\theta_B} = 3\theta_B - \theta_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_C = 3\theta_B$$

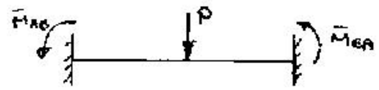
$$7\theta_B = \frac{M_0 l}{2EI} \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \frac{M_0 l}{14EI} \quad , \quad \theta_C = \frac{3M_0 l}{14EI}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\frac{\delta}{l}\right)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \theta_A - 3\frac{\delta}{l}\right)$$

۴- برای تغییرمکان‌ها و تغییرشکل‌های دو انتهای میله نیروهای داخلی از فرمول‌های بالا بدست می‌آید

اگر بارگذاری بر روی دهانه ها باشد باید به فرمول های شیب - افت ، عبارت $\bar{M}$ افزوده می‌شود که ناشی از بارگذاری روی دهانه است :



فرمول کلی شیب - افت عبارتست از :

$$M_{ij} = \left(\frac{2EI}{l}\right)_{ij}\left(2\theta_i + \theta_j - 3\varphi_{ij}\right) + \bar{M}_{ij} \qquad \left(\varphi_{ij} = \left(\frac{\delta}{l}\right)_{ij}\right)$$

در این مسئله داریم :

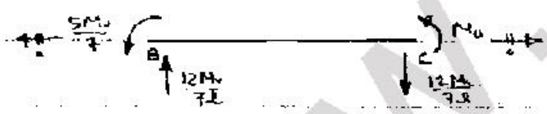
$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}\cdot\frac{M_0 l}{14EI} = \frac{M_0}{7}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}\cdot\frac{2M_0 l}{14EI} = \frac{2M_0}{7}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{2EI}{l}\cdot\frac{5M_0 l}{14EI} = \frac{5M_0}{7}$$

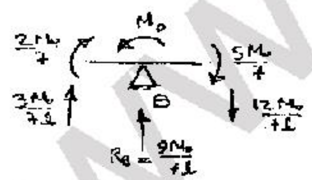
$$M_{CB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{2EI}{l}\cdot\frac{7M_0 l}{14EI} = M_0$$

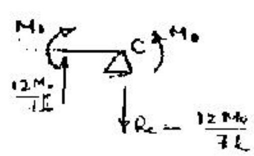
$$V_{AB} = V_{BA} = \frac{3M_0}{7l}$$

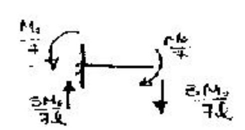


$$V_{BC} = V_{CB} = \frac{\frac{5M_0}{7} + M_0}{l} = \frac{12M_0}{7l}$$

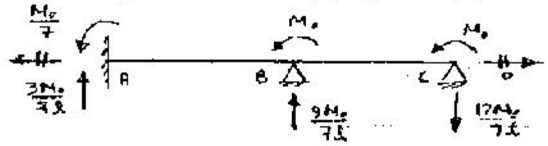
عکس العمل های تکیه گاهی :







اگر تکیه گاه در وسط دهانه قرار داشته باشد ، عکس العمل های تکیه گاهی معادل نیروی داخلی میله است .



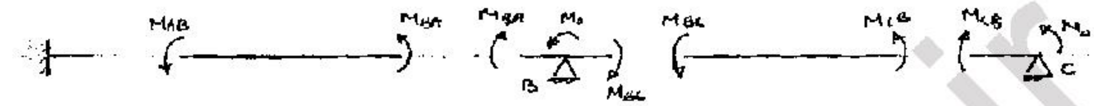
می‌توانیم تمرین بالا را بدون استفاده از روابط انرژی و با استفاده از معادلات تعادل در هر گره حل کنیم .
(استفاده از معادلات شیب - افت)

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{2EI}{l}\theta_B$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \theta_A - 3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{4EI}{l}\theta_B$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_C)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{2EI}{l}(2\theta_C + \theta_B)$$

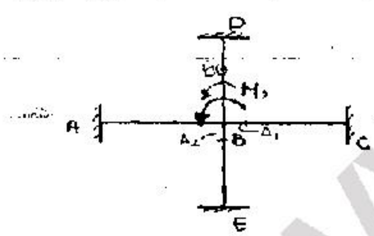


◄ تعادل لنگری را در گره‌های B و C می‌نویسیم :

$$M_{BA} + M_{BC} = M_0 \Rightarrow \frac{2EI}{l}(4\theta_B + \theta_C) = M_0$$

$$M_{CB} = M_0 \Rightarrow \frac{2EI}{l}(2\theta_C + \theta_B) = M_0$$

مثال) فرض کنید چهار میله در نقطهٔ B به هم متصل شده اند . عکس العمل های تکیه گاهی و نیروهای داخلی را بدست آورید .



◄ معادله ها می توان درجه آزادی را از روابط زیر بدست آورد :

$n_c = 3j + c - r$ قاب مسطح

$n_c = 6j + c - r$ قاب فضایی

حل مسأله

$$U_{BA} = \frac{2EI}{l}(\theta_B^2) - \frac{6EI(-\Delta_2)}{l^2}\theta_B + \frac{6EI(-\Delta_2)^2}{l^3} + \frac{EA(\Delta_1)^2}{2l}$$

$$U_{BC} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 - \frac{6EI(\Delta_2)}{l^2}\theta_B + \frac{6EI\Delta_2^2}{l^3} + \frac{EA(-\Delta_1)^2}{2l}$$

$$U_{BD} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 - \frac{6EI(\Delta_1)}{l^2}\theta_B + \frac{6EI\Delta_1^2}{l^3} + \frac{EA(\Delta_2)^2}{2l}$$

$$U_{BE} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 - \frac{6EI(-\Delta_1)}{l^2}\theta_B + \frac{6EI(-\Delta_1)^2}{l^3} + \frac{EA(-\Delta_2)^2}{2l}$$

$$U = \sum U_i = \frac{8EI}{l}\theta_B^2 + \left(\frac{12EI}{l^3} + \frac{EA}{l}\right)(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \left(\frac{12EI}{l^3} + \frac{EA}{l}\right)(2\Delta_1) = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 0$$

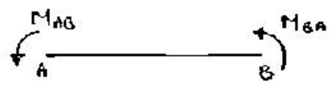
$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \left(\frac{12EI}{l^3} + \frac{EA}{l}\right)(2\Delta_2) = 0 \Rightarrow \Delta_2 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{16EI}{l}\theta_B = M_0 \Rightarrow \theta_B = \frac{M_0 l}{16EI}$$

در سازه‌ها از تغییرشکل محوری صرف نظر می‌کنیم. در حقیقت در مثال قبل از ابتدا $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ فرض می‌شود در نتیجه می‌توانیم از ابتدا θ_B را به راحتی به دست آوریم:

$$U = \Sigma U_i = \frac{8EI}{l}\theta_B^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{16EI}{l}\theta_B = M_0 \Rightarrow \theta_B = \frac{M_0 l}{16EI}$$

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی:

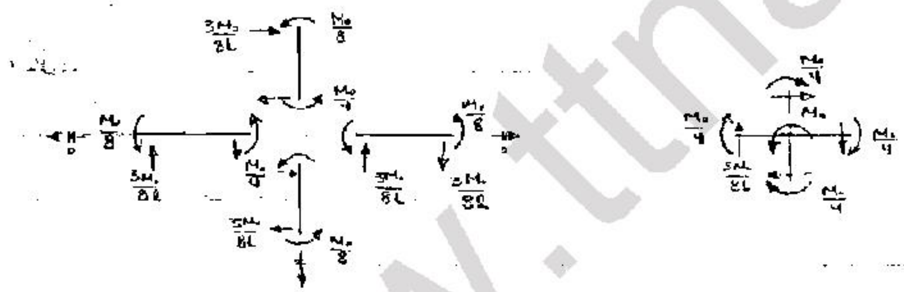


$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{M_0}{8}$$

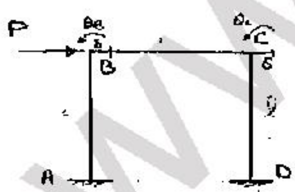
$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \theta_A - 3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{M_0}{4}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{M_0}{4} \qquad M_{BD} = \frac{M_0}{4} = M_{BE}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\frac{\delta}{l}\right) = \frac{M_0}{8} \qquad M_{DB} = \frac{M_0}{8} = M_{EB}$$



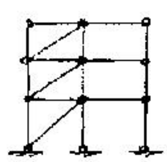
مثال 12: با استفاده از روش نیرو سازه را تحلیل کنید.



اگر از تغییرشکل‌های محوری صرف نظر کنیم، سازه سه درجه نامعین سینماتیکی است.

می‌توانیم از روش زیر برای تعیین درجه نامعینی سینماتیکی هر سازه‌ای استفاده کنیم:

همهٔ گره‌ها را به مفصل تبدیل می‌کنیم و تعداد میله‌هایی را که برای پایداری سازه مورد نیاز است بدست می‌آوریم.



درجه نامعینی سینماتیکی = تعداد میله‌های مورد نیاز

$n_c = 3$

با استفاده از این روش تعداد درجات آزادی تغییرشکل لازم بدست می‌آید و درجات آزادی دورانی باید تعیین گردد.

$$U_{AB} = \frac{2EI}{\ell}\,\theta_B^2 - \frac{6EI(-\delta)}{\ell^2}\,\theta_B + \frac{6EI(-\delta)^2}{\ell^3}$$

$$U_{BC} = \frac{2EI}{\ell}\,(\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2)$$

$$U_{CD} = \frac{2EI}{\ell}\,(\theta_C^2) - \frac{6EI(-\delta)}{\ell^2}\,\theta_C + \frac{6EI(-\delta)^2}{\ell^3}$$

$$U = \Sigma U_i = \frac{2EI}{\ell}(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + 2\theta_C^2) + \frac{6EI\delta}{\ell^2}(\theta_B + \theta_C) + \frac{12EI\delta^2}{\ell^3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta_B} &= \frac{2EI}{\ell}(4\theta_B + \theta_C) + \frac{6EI\delta}{\ell^2} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_C} &= \frac{2EI}{\ell}(\theta_B + 4\theta_C) + \frac{6EI\delta}{\ell^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_B = \theta_C$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{6EI}{\ell^2}(\theta_B + \theta_C) + \frac{24EI\delta}{\ell^3} = P$$

$$\Rightarrow \frac{10EI}{\ell}\theta_B = -\frac{6EI\delta}{\ell^2} \longrightarrow \theta_B = \theta_C = -\frac{3}{5}\,\frac{\delta}{\ell}$$

$$\frac{6EI}{\ell^2}\left(-\frac{6}{5}\,\frac{\delta}{\ell}\right) + \frac{24EI\delta}{\ell^3} = P \Rightarrow \delta = \frac{5P\ell^3}{84EI}, \quad \theta_B = \theta_C = -\frac{P\ell^2}{28EI}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\cancel{\theta_A} + \theta_B - 3\left(\frac{-\delta}{\ell}\right)\right) = \frac{2EI}{\ell}\left(-\frac{P\ell^2}{28EI} + \frac{5P\ell^2}{28EI}\right) = \frac{2P\ell}{7}$$

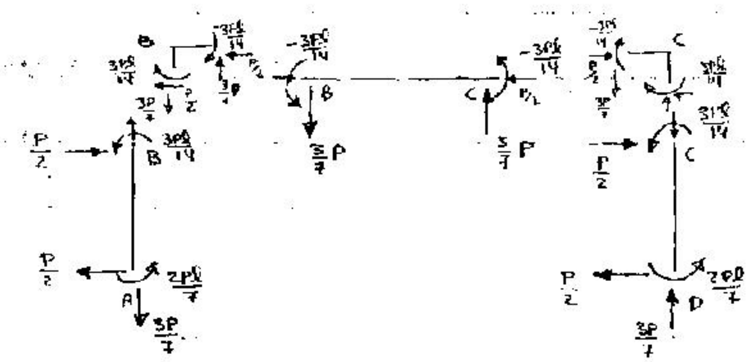
$$M_{BA} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_A} + 3\,\frac{\delta}{\ell}\right) = \frac{2EI}{\ell}\left(-\frac{2P\ell^2}{28EI} + \frac{5P\ell^2}{28EI}\right) = \frac{3P\ell}{14}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\,\frac{\cancel{\delta}}{\ell}\right) = \frac{2EI}{\ell}\left(-\frac{3P\ell^2}{28EI}\right) = -\frac{3P\ell}{14}$$

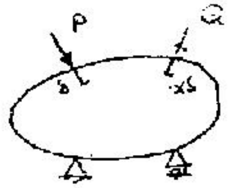
$$M_{CB} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\,\frac{\cancel{\delta}}{\ell}\right) = -\frac{3P\ell}{14}$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_C + \cancel{\theta_D} + 3\,\frac{\delta}{\ell}\right) = \frac{2EI}{\ell}\left(-\frac{2P\ell^2}{28EI} + \frac{5P\ell^2}{28EI}\right) = \frac{3P\ell}{14}$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\cancel{\theta_D} + \theta_C + 3\,\frac{\delta}{\ell}\right) = \frac{2EI}{\ell}\left(-\frac{P\ell^2}{28EI} + \frac{5P\ell^2}{28EI}\right) = \frac{2P\ell}{7}$$



در ادامه قضیه اول کاستیلیانو فرض می‌کنیم که تغییرمکان‌ها به هم وابسته باشند :

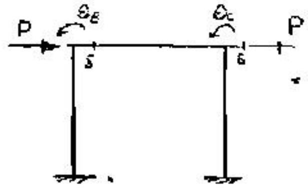


$$U = U(\delta)$$

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \delta}(\Delta \delta)$$

$$\Delta W = P(\Delta \delta) + \alpha Q(\Delta \delta)$$

$$\Delta U = \Delta W \Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial \delta} = P + \alpha Q}$$

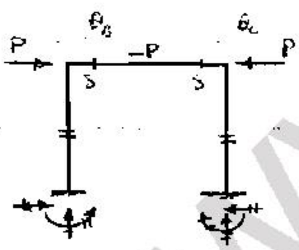


مثال) قضیه اول کاستیلیانو را به کار برید.

$$U = \frac{2EI}{l}(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + 2\theta_C^2) + \frac{6EI\delta^2}{l^2}(\theta_B + \theta_C) + \frac{12EI\delta^2}{l^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_C} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \delta} = 2P$$

اگر تغییرمکان‌ها به هم وابسته باشند $\frac{\partial U}{\partial \delta}$ برابر است با مجموع نیروها در امتداد آن تغییرمکان.



در مسئله روبرو از تغییر شکل‌های محوری صرف نظر می‌کنیم.

قضیه اول کاستیلیانو

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_C} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0$$

$$\Rightarrow \theta_B = \theta_C = \delta = 0$$

حل مسئله با استفاده از تقارن

$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 \quad , \quad U_{BC} = \frac{2EI}{l}\left[\theta_B^2 + (\theta_B)(-\theta_B) + (-\theta_B)^2\right]$$

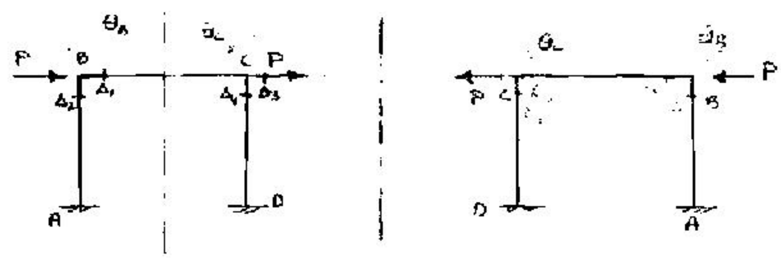
$$U_{CD} = \frac{2EI}{l}(-\theta_B)^2 \Rightarrow U = \frac{6EI}{l}\theta_B$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{12EI}{l}\theta_B = 0 \Rightarrow \theta_B = 0$$

چون مسئله متقارن است بنابراین اگر B به اندازه δ به سمت راست برود، گره C به اندازه δ به سمت چپ باید برود و چون میله صلب است امکان‌پذیر نیست درنتیجه $\delta = 0$.

در مسئله بالا به علت تقارن پس از صفر شدن δ یک درجه آزادی داریم که θ_B است.

۸. فرض ه از تغییرشکل های محوری صرف نظر می‌کنیم. خود سازه متقارن است اما بارگذاری متقارن معکوس می‌باشد.

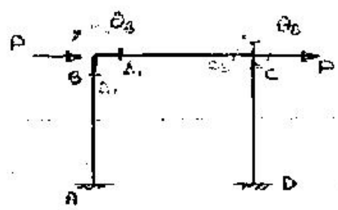


★ وقتی بارگذاری، متقارن معکوس (پادمتقارن) است که وقتی با بارگذاری متقارن نسبت به یک محور جمع می‌شود، بارگذاری صفر شود.

$\Delta_1 - \Delta_3 = 0 \rightarrow \Delta_1 = \Delta_3$

$\Delta_4 + \Delta_2 = 0 \Longrightarrow \Delta_2 = -\Delta_4$ از بارگذاری متقارن معکوس استفاده می‌کنیم و

$\theta_B - \theta_C = 0 \rightarrow \theta_B = \theta_C$ 6 درجه آزادی سازه را به 3 درجه آزادی کاهش می‌دهیم.

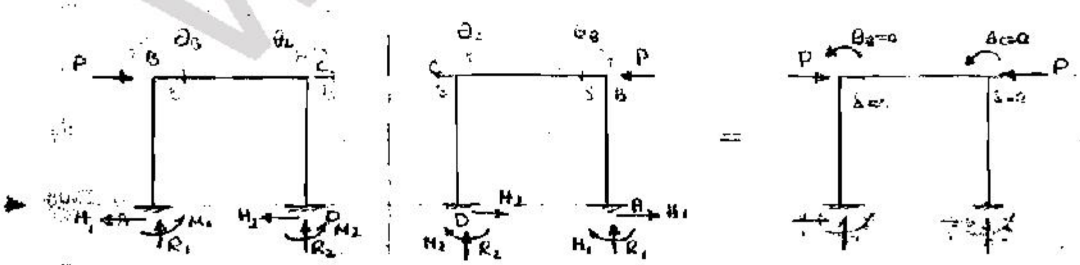


$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 - \frac{6EI}{l}(-\Delta_1)\theta_B + \frac{6EI}{l^3}(-\Delta_1)^2 + \frac{EA(-\Delta_2)^2}{2l}$$

$$U_{BC} = \frac{2EI}{l}(\theta_B^2 + \theta_B\theta_B + \theta_B^2) - \frac{6EI(2\Delta_2)}{l^2}(\theta_B + \theta_B) + \frac{6EI(2\Delta_2)^2}{2l}$$

$$U_{CD} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 - \frac{6EI(-\Delta_1)}{l^2}\theta_B + \frac{6EI(-\Delta_1)^2}{l^3} + \frac{EA(\Delta_2)^2}{2l}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = 2P \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_B} = 0$$



اگر از نیروهای محوری صرف نظر کنیم، مسئله متقارن معکوس خواهد شد.

$\theta_B - \theta_C = 0 \rightarrow \theta_B = \theta_C$

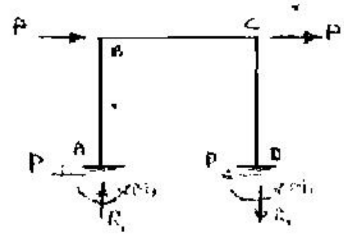
$M_1 - M_2 = 0 \rightarrow M_1 = M_2$

✓ استفاده از تقارن معکوس $R_1 + R_2 = 0 \quad , \quad H_1 - H_2 = 0 \Rightarrow H_1 = H_2$

$$\Rightarrow H_1 + H_1 = P \Rightarrow H_1 = H_2 = \frac{P}{2}$$

★ هر بارگذاری که نه متقارن باشد و نه متقارن معکوس می توانیم به دو سازه تبدیل کنیم که یکی متقارن است و دیگری متقارن معکوس.

▲ با توجه به مسئله بالا اگر مسئله متقارن معکوس باشد و عکس العمل های آن را بخواهند خواهیم داشت:



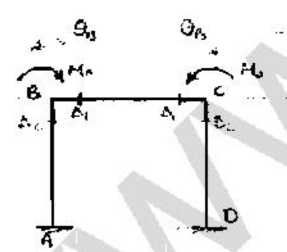
✓ تقارن معکوس در معادله تعادل صدق می کند.

$$2M_1 - R_1 l - 2Pl = 0$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{1}{2}R_1 l + Pl$$

(فقط R_1 مجهول است)

▲ از تغییر شکل های محوری در مسئله روبرو صرف نظر نمی کنیم. مسئله متقارن است.



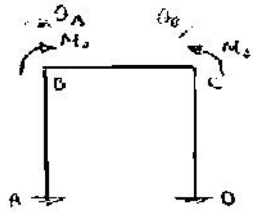
$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 - \frac{6EI(-\Delta_1)}{l^2}\theta_B + \frac{6EI(-\Delta_1)^2}{l^3} + \frac{EA(-\Delta_2)^2}{2l}$$

$$U_{BC} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 + \frac{EA(-2\Delta_1)^2}{2l}$$

$$U_{CD} = \frac{2EI}{l}(-\theta_B)^2 - \frac{6EI(\Delta_1)}{l^2}(-\theta_B) + \frac{6EI(\Delta_1)^2}{l^3} + \frac{EA(-\Delta_2)^2}{2l}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = -2M_0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = 0 \Rightarrow \Delta_2 = 0$$

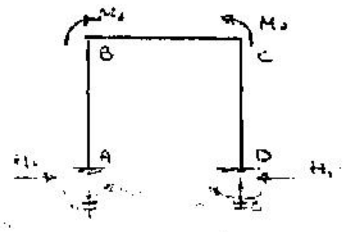
▲ از تغییر شکل های محوری در مسئله روبرو صرف نظر می کنیم.
(درجه آزادی سازه ۱ است)



$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CD} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{6EI}{l}\theta_B^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{12EI}{l}\theta_B = 2M_0 \Rightarrow \theta_B = \frac{M_0 l}{6EI}$$

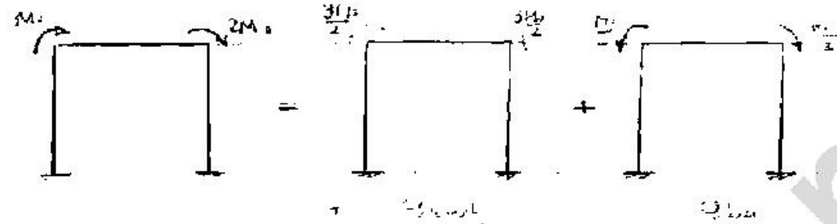


✓ استفاده از تقارن سازه

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2R_1 = 0 \Rightarrow R_1 = 0$$

(2 مجهول باقی می ماند)

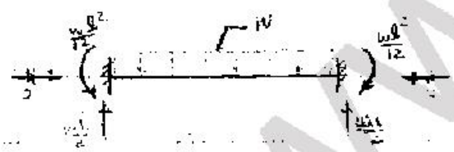
◄ هر سازه با بارگذاری نامشخص به یک بارگذاری متقارن و یک پادمتقارن قابل تبدیل است.

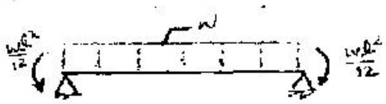


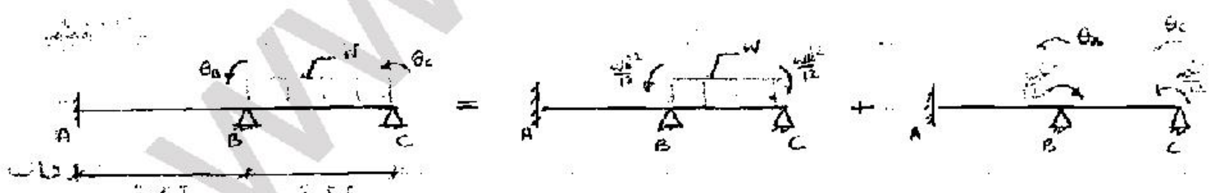
اگر از تغییر طول محوری صرفنظر کنیم : درجه آزادی $3 = 2 + 1$

" " " " " " " نکنیم : درجه آزادی $6 = 3 + 3$

◄ تا به حال قضیه اول کاستیلیانو را در سازه هایی بررسی می کردیم که در آنها نیرو و گشتاور وارد می شد. حال سازه هایی را بررسی می کنیم که در آنها بارگذاری بر روی عضو است.







✓ کافی است θ_B و θ_C را در این سازه بدست آوریم یعنی بارگذاری بر روی عضو را به بارگذاری در گره ها تبدیل کنیم. ......

$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 \quad , \quad U_{BC} = \frac{2EI}{l}(\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2)$$

$$\rightarrow U = \frac{2EI}{l}(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \theta_B} = \dfrac{2EI}{l}(4\theta_B + \theta_C) = -\dfrac{wl^2}{12} \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta_C} = \dfrac{2EI}{l}(\theta_B + 2\theta_C) = \dfrac{wl^2}{12} \end{cases}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\cancel{\theta_A} + \theta_B - 3\cancel{\frac{\delta}{\ell}}\right) + \cancel{\bar{M}_{AB}}$$

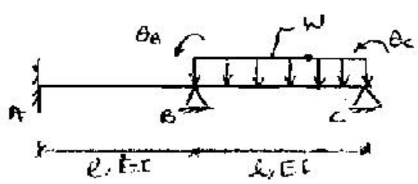
$$M_{BA} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_A} - 3\cancel{\frac{\delta}{\ell}}\right) + \cancel{\bar{M}_{BA}}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\cancel{\frac{\delta}{\ell}}\right) + \bar{M}_{BC} \qquad \begin{cases} \bar{M}_{BC} = \dfrac{w\ell^2}{12} \\ \bar{M}_{CB} = -\dfrac{w\ell^2}{12} \end{cases}$$

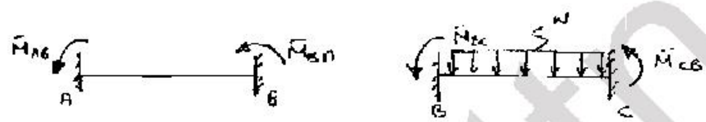
$$M_{CB} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\cancel{\frac{\delta}{\ell}}\right) + \bar{M}_{CB}$$

۶. عکس العمل های تکیه گاهی را از نوشتن تعادل در گره ها بدست می آوریم.

مثال ۳) عکس العمل های تکیه گاهی را بدست آورید.



$$U = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2\right)$$



$$\begin{cases} \bar{M}_{AB} = \bar{M}_{BA} = 0 \\ \bar{M}_{BC} = -\bar{M}_{CB} = \dfrac{w\ell^2}{12} \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_i} = -\sum_j \bar{M}_{ij} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \theta_B} = -\bar{M}_{BA} - \bar{M}_{BC} \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta_C} = -\bar{M}_{CB} \end{cases}$$

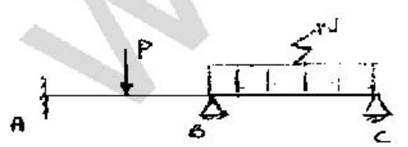
$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{2EI}{\ell}(4\theta_B + \theta_C) = -\dfrac{w\ell^2}{12} \\ \dfrac{2EI}{\ell}(\theta_B + 2\theta_C) = \dfrac{w\ell^2}{12} \end{cases}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\cancel{\theta_A} + \theta_B - 3\cancel{\frac{\delta}{\ell}}\right) + \cancel{\bar{M}_{AB}}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_A} - 3\cancel{\frac{\delta}{\ell}}\right) + \cancel{\bar{M}_{BA}}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\cancel{\frac{\delta}{\ell}}\right) + \bar{M}_{BC} \qquad M_{CB} = \frac{2EI}{\ell}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\cancel{\frac{\delta}{\ell}}\right) + \bar{M}_{CB}$$

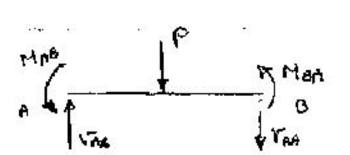
مثال ۴) مسئله زیر را حل کنید.

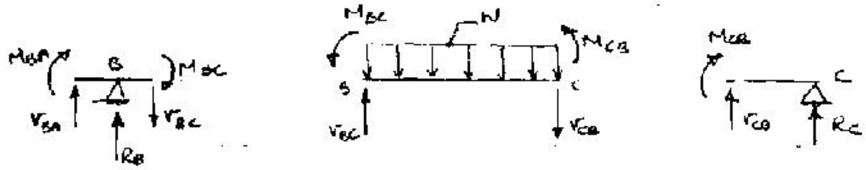


کلیه روابط مانند مثال قبل است و فقط $\bar{M}_{AB}$ و $\bar{M}_{BA}$ تغییر خواهند کرد:

$$\bar{M}_{AB} = -\bar{M}_{BA} = \frac{P\ell}{8}$$

$$\begin{cases} V_{AB} = \dfrac{P}{2} + \dfrac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell} \\ V_{BA} = -\dfrac{P}{2} + \dfrac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell} \end{cases}$$





$$V_{BC} = \frac{\omega l}{2} + \frac{M_{BC} + M_{CB}}{2} \quad , \quad V_{CB} = -\frac{\omega l}{2} + \frac{M_{BC} + M_{CB}}{2}$$

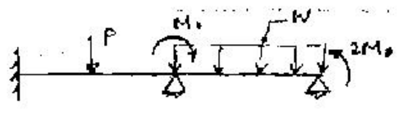
$$R_C = -V_{CB} \quad , \quad R_B = V_{BC} - V_{BA}$$

معادله تعادل گره B : $M_{BA} + M_{BC} = 0$

معادله تعادل گره C : $M_{CB} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2EI}{l}(4\theta_B + \theta_C) + \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} = 0 \\ \frac{2EI}{l}(\theta_B + 2\theta_C) + \bar{M}_{CB} = 0 \end{cases}$$

اگر لنگر متمرکز روی گره‌ها داشتیم :



$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta_B} = -\bar{M}_{BA} - \bar{M}_{BC} - M_0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_C} = -\bar{M}_{CB} + 2M_0 \end{cases}$$

◀ درحالت کلی اگر هم P و هم M داشتیم، رابطه زیر صادق بود :

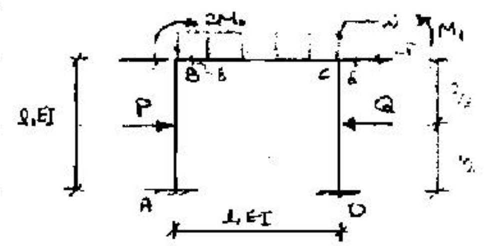
$$\frac{\partial U}{\partial \theta_i} = -\sum_j \bar{M}_{ij} + M_i$$

اگر معادله تعادل‌ها را در حالت بالا به صورت ماتریسی بنویسیم، خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} \frac{8EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M_0 \\ 2M_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} \\ \bar{M}_{BC} \end{Bmatrix} = \{JL\} - \{FEM\}$$

لنگرهای گیرداری : Fixed End Moment

مثال) با استفاده از قضیه اول کاستیلیانو مسئله را حل کنید.



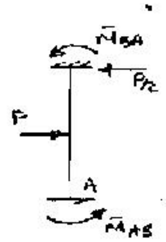
$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_B^2 - \frac{6EI(-\delta)}{l^2}\theta_B + \frac{6EI(-\delta)^2}{l^3}$$

$$U_{BC} = \frac{2EI}{l}(\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + \theta_C^2)$$

$$U_{CD} = \frac{2EI}{l}\theta_C^2 - \frac{6EI(-\delta)}{l^2}\theta_C + \frac{6EI(-\delta)^2}{l^3}$$

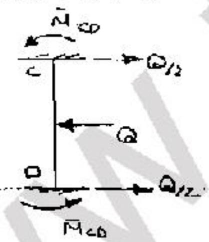
$$\rightarrow U = \frac{2EI}{l}(2\theta_B^2 + \theta_B\theta_C + 2\theta_C^2) + \frac{6EI\delta}{l^2}(\theta_B + \theta_C) + \frac{12EI\delta^2}{l^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{2EI}{l}(4\theta_B + \theta_C) + \frac{6EI\delta}{l^2} = -2M_0 - \bar{M}_{BA} - \bar{M}_{BC}$$



$$\bar{M}_{AB} = -\bar{M}_{BA} = \frac{Pl}{8}$$

$$\bar{M}_{BC} = -\bar{M}_{CB} = \frac{wl^2}{12}$$



$$\bar{M}_{CD} = -\bar{M}_{CD} = \frac{Ql}{8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_C} = \frac{2EI}{l}(\theta_B + 4\theta_C) + \frac{6EI\delta}{l^2} = M_1 - \bar{M}_{CB} - \bar{M}_{CD} = M_1 + \frac{wl^2}{12} - \frac{Ql}{8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{6EI}{l^2}(\theta_B + \theta_C) + \frac{24EI\delta}{l^3} - 2P + S + \frac{P}{2} - \frac{Q}{2}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\cancel{\theta_A} + \theta_B + 3\frac{\delta}{l}) + \bar{M}_{AB}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \cancel{\theta_A} + 3\frac{\delta}{l}) + \bar{M}_{BA}$$

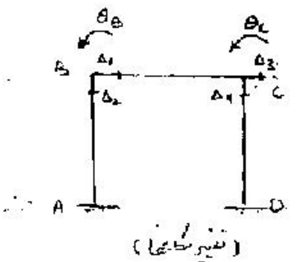
$$M_{BC} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_C) + \bar{M}_{BC}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{l}(2\theta_C + \theta_B) + \bar{M}_{CB}$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{l}(2\theta_C + \cancel{\theta_D} + 3\frac{\delta}{l}) + \bar{M}_{CD}$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{l}(2\cancel{\theta_D} + \theta_C + 3\frac{\delta}{l}) + \bar{M}_{DC}$$

- حال از تغییرشکل‌های محوری صرف‌نظر کنیم بنابراین 6 درجه آزادی داریم :



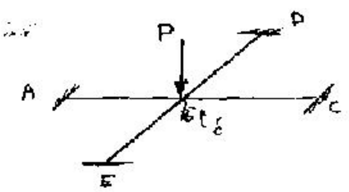
$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = -2M_0 - \bar{M}_{BA} - \bar{M}_{BC}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_C} = M_1 - \bar{M}_{CB} - \bar{M}_{CD}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = S + \frac{P}{2} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} = \frac{wl}{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_3} = 2P - \frac{Q}{2} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \Delta_4} = \frac{wl}{2}$$

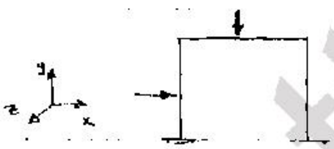
مثال) با استفاده از قضیه اول کاستیلیانو، مسئله زیر را حل کنید.



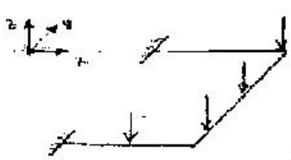
L , EI , GJ

- تعیین درجات آزادی سازه :

الف)



$$\begin{cases} \delta_x \\ \delta_y \\ \theta_z \end{cases} \qquad \begin{cases} V_x \\ V_y \\ M_z \end{cases}$$



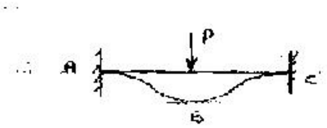
که به سازه دو بعدی شبکه گفته می‌شود که هر گره آن سه درجه آزادی دارد.

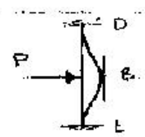
(سازه مسطح با بارگذاری عمود بر صفحه)

$$\begin{cases} \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{cases} \qquad \begin{cases} V_z \\ M_x \\ M_y \end{cases}$$

- سازه ذکر شده در این مسئله هم یک شبکه است بنابراین سه درجه آزادی دارد.

چون کلیه گره‌ها گیردارند بنابراین $\theta_x = \theta_y = 0$ فرض می‌شود. (اگر θ را حساب کنیم این مسئله متقارن نیست)

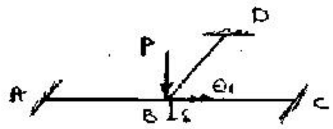


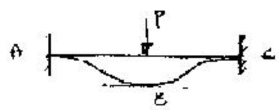


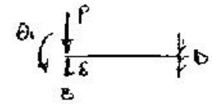
$$U_{AB} = \frac{6EI\delta^2}{l^3} \quad \Rightarrow \quad U = 4U_{AB} = \frac{24EI\delta^2}{l^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{48EI\delta}{l^3} = P \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{Pl^3}{48EI}$$

مثال) تغییرمکان‌های سازه روبه‌رو را بدست آورید.







$$U_{BD} = \frac{2EI}{l}\theta_1^2 - \frac{6EI(\delta)}{l^2}\theta_1 + \frac{6EI\delta^2}{l^3}$$

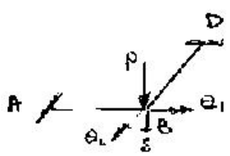
$$U_{AB} = U_{BC} = \frac{6EI\delta^2}{l^3} + \frac{GJ\theta_1^2}{2l}$$

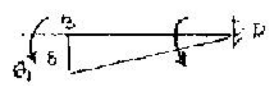
$$\Longrightarrow \quad U = \frac{2EI}{l}\theta_1^2 - \frac{6EI\delta}{l^2}\theta_1 + \frac{18EI\delta^2}{l^3} + \frac{GJ\theta_1^2}{l}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \frac{4EI}{l}\theta_1 - \frac{6EI\delta}{l^2} + \frac{2GJ\theta_1}{l} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = -\frac{6EI}{l^2}\theta_1 + \frac{36EI\delta}{l^3} = P$$

مثال) تغییرمکان‌های سازه زیر را به دست آورید.





$$U_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta_2^2 - \frac{6EI(-\delta)}{l^2}\theta_2 + \frac{6EI(-\delta)^2}{l^3} + \frac{GJ(\theta_1)^2}{2l}$$

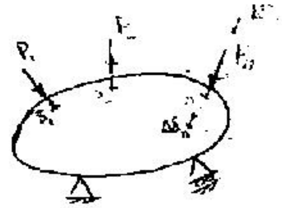
$$U_{BD} = \frac{2EI}{l}\theta_1^2 - \frac{6EI(\delta)}{l^2}\theta_1 + \frac{6EI(\delta)^2}{l^3} + \frac{GJ(\theta_2)^2}{2l}$$

$$\Longrightarrow \quad U = \left(\frac{2EI}{l} + \frac{GJ}{l}\right)(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{6EI\delta}{l^2}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{12EI\delta^2}{l^3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta_1} &= \left(\frac{2EI}{l} + \frac{GJ}{2l}\right)(2\theta_1) - \frac{6EI\delta}{l^2} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_2} &= \left(\frac{2EI}{l} + \frac{GJ}{2l}\right)(2\theta_2) + \frac{6EI\delta}{l^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \theta_1 = -\theta_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{6EI}{l^2}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{24EI\delta}{l^3} = P$$

◄ قضیه دوم کاستیلیانو



$$U = U(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

* قضیه دوم کاستیلیانو برای رفتار خطی کاربرد دارد.

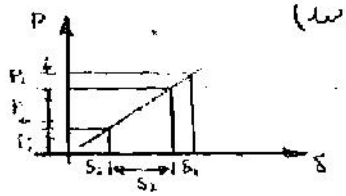
اگر رابطه نیرو و تغییر شکل را داشته باشیم می‌توانیم انرژی تغییر شکل را برحسب نیرو بنویسیم.

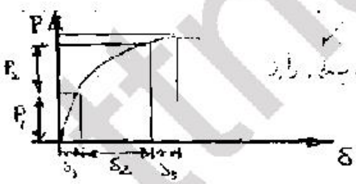
$$\Delta P_1 = \Delta P_2 = \cdots = \Delta P_{n-1} = 0 \quad , \quad \Delta P_n \neq 0$$

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial P_n} \Delta P_n$$

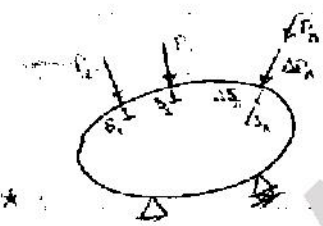
* با تغییر یکی از نیروها تمامی تغییر مکان‌ها در سازه تحت تأثیر قرار می‌گیرند.

δ به تاریخچه بارگذاری بستگی ندارد. (وقتی رابطه نیرو و تغییر مکان خطی باشد)





δ به تاریخچه بارگذاری بستگی دارد



$$\Delta W = \frac{1}{2}\cancel{(\Delta P_n)(\Delta\delta_n)} + (\Delta P_n)(\delta_n)$$

قابل صرف نظر کردن است

$$\Delta U = \Delta W \implies \frac{\partial U}{\partial P_n}(\Delta P_n) = \delta_n(\Delta P_n) \implies \frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n$$

* قضیه دوم کاستیلیانو: مشتق جزئی انرژی تغییر شکل نسبت به هر کدام از نیروها برابر است با تغییر مکان آن نیرو.

◄ اگر رابطه نیرو و تغییر مکان خطی باشند:

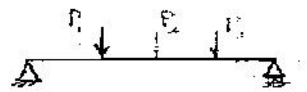
$$\delta_1 = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 + \cdots + \alpha_{1n} P_n$$

$$\delta_2 = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 + \cdots + \alpha_{2n} P_n$$

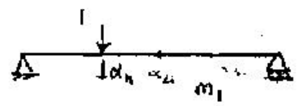
$$\vdots$$

$$\delta_n = \alpha_{n1} P_1 + \alpha_{n2} P_2 + \cdots + \alpha_{nn} P_n$$

◄ برای بدست آوردن ماتریس ضرایب (ماتریس نرمی) یکبار همهٔ نیروها را به جز P_1 صفر قرار می‌دهیم و P_1 را 1 قرار می‌دهیم و ستون اول ضرایب را به دست می‌آوریم و همین طور برای بقیهٔ ضرایب این کار را انجام می‌دهیم تا ماتریس ضرایب به دست آید.



$$\alpha_{11} = \int_l \frac{m_1^2\,dx}{EI}$$

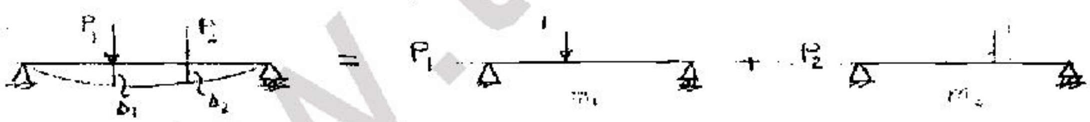


$$\alpha_{21} = \int_l \frac{m_1 m_2\,dx}{EI} \qquad \alpha_{31} = \int_l \frac{m_1 m_3\,dx}{EI}$$

$$\alpha_{ii} = \int_l \frac{m_i^2\,dx}{EI} \qquad \boxed{\alpha_{ij} = \int_l \frac{m_i m_j\,dx}{EI}}$$

$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ $\qquad$ α_{ij} ← بار روی نقطهٔ j و تغییرمکان در نقطهٔ i

★ نوع دیگری از بیان قضیهٔ دوم:

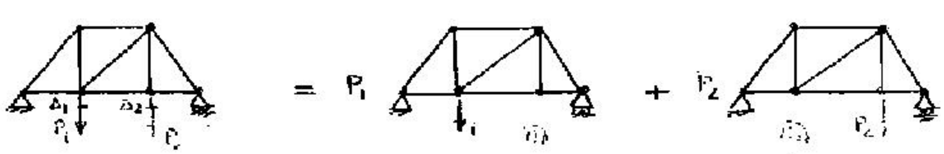


★ فرض می‌کنیم خمش در سازه غلبه دارد. $\qquad M = m_1P_1 + m_2P_2$

$$U = \int_l \frac{M^2dx}{2EI} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1}\int_l \frac{M^2dx}{2EI} = \int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial P_1}\right)dx}{EI}$$

$$= \int_l \frac{M m_1\,dx}{EI} = \Delta_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{\partial}{\partial P_2}\int_l \frac{M^2dx}{EI} = \int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial P_2}\right)dx}{EI} = \int_l \frac{M m_2\,dx}{EI} = \Delta_2$$

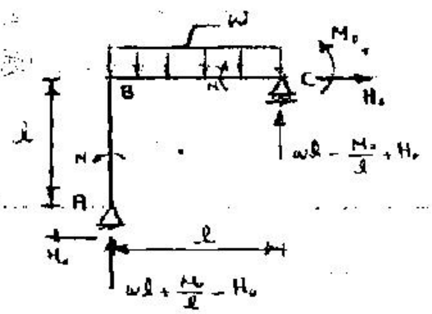


$$N = n_1 P_1 + n_2 P_2 \quad , \quad U = \sum_i \frac{N^2 l}{2EA}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1} \sum \frac{N^2 l}{2EA} = \sum \frac{N\left(\frac{\partial N}{\partial P_1}\right) l}{EA} = \sum_i \frac{N n_1 l}{EA} = \Delta_1$$

★ مشخص می‌شود که قضیهٔ دوم کاستیلیانو با روابط مشابهند اما قابلیت بار واحد بیشتر است.

مثال ۱) با استفاده از قضیهٔ دوم δ_{HC} و θ_C را بدست آورید.



★ برای بدست آوردن تغییر مکان افقی و دوران C یک نیروی افقی و یک لنگر فرضی بروی C قرار می‌دهیم. فقط باید توجه کنیم که $M_0 = H_0 = 0$.

حل ۱)

$$AB: M = H_0 x \quad , \quad BC: M = \left(\frac{wl}{2} - \frac{M_0}{l} + H_0\right)x - \frac{wx^2}{2} + M_0$$

$$U = \int_l \frac{M^2 dx}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial M_0}\right) dx}{EI} = \int_0^l \frac{(H_0 x)(0)\, dx}{EI} + \int_0^l \left[\left(\frac{wl}{2} - \frac{M_0}{l} + H_0\right)x - \frac{wx^2}{2} + M_0\right]\left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{dx}{EI}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_C = \int_0^l \frac{\left(\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right)}{EI}\, dx$$

حل ۲)

$$\delta_{HC} = \frac{\partial U}{\partial H_0} = \int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial H_0}\right) dx}{EI} = \int_0^l \frac{(H_0 x)(x)\, dx}{EI} + \int_0^l \left[\left(\frac{wl}{2} - \frac{M_0}{l} + H_0\right)x - \frac{wx^2}{2} + M_0\right](x)\frac{dx}{EI}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{HC} = \int_0^l \frac{\left(\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)(x)}{EI}\, dx$$

۵ اگر نیروی محوری و برش را هم در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$AB: \quad V = H_0 \quad , \quad N = -\left(\frac{wl}{2} + \frac{M_0}{l} - H_0\right)$$

$$BC: \quad V = -\left(\frac{wl}{2} - \frac{M_0}{l} + H_0\right) + wx \quad , \quad N = H_0$$

$$U = \int_l \frac{M^2dx}{2EI} + \int_l \frac{f_s V^2dx}{2GA} + \int_l \frac{N^2dx}{2EA}$$

$$* \ \theta_c = \frac{\partial U}{\partial M_\circ} = \int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial M_\circ}\right)dx}{EI} + \int_l \frac{f_s V\left(\frac{\partial V}{\partial M_\circ}\right)dx}{GA} + \int_l \frac{N\left(\frac{\partial N}{\partial M_\circ}\right)dx}{EA}$$

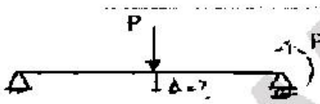
$$= \int_0^l \frac{\left(\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right)dx}{EI} + \int_0^l \frac{f_s\left[-\left(\frac{wl}{2} - \frac{M_\circ}{l} + H_\circ\right) + wx\right]\left(\frac{1}{l}\right)dx}{GA}$$

$$+ \int_0^l \frac{\left[-\left(\frac{wl}{2} + \frac{M_\circ}{l} - H_\circ\right)\right]\left(-\frac{1}{l}\right)dx}{EA} = \ '' + \int_0^l \frac{f_s\left(-wx - \frac{wl}{2}\right)\left(\frac{1}{l}\right)dx}{GA} + \int_0^l \frac{\left(\frac{w}{2}\right)dx}{EA}$$

$$* \ \delta_{HC} = \frac{\partial U}{\partial H_\circ} = \int_l \frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial H_\circ}\right)dx}{EI} + \int_l \frac{f_s V\left(\frac{\partial V}{\partial H_\circ}\right)dx}{GA} + \int_l \frac{N\left(\frac{\partial N}{\partial H_\circ}\right)dx}{EA}$$

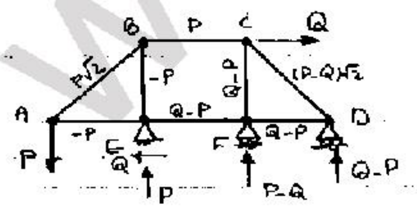
$$= \int_0^l \frac{\left(\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)(x)dx}{EI} + \int_0^l \frac{f_s\left[\left(\frac{wl}{2} - \frac{M_\circ}{l} + H_\circ\right) + wx\right](-1)dx}{GA} + \int_0^l \frac{-\left(\frac{wl}{2} + \frac{M_\circ}{l} - H_\circ\right)(1)dx}{EA}$$

مثال) با استفاده از قضیه دوم ، Δ را بدست آورید .



* چون مشتق نسبت به P با وجود لنگر Pl ممکن است اشتباه ایجاد کند به جای P، نیروی Q را می‌گذاریم و پس از مشتق گرفتن $Q = P$ قرار می‌دهیم .

مثال) تغییر مکان افقی c را بدست آورید .



۱) بدست آوردن نیروهای داخلی

$$U = \sum \frac{N^2 l}{2EA}$$

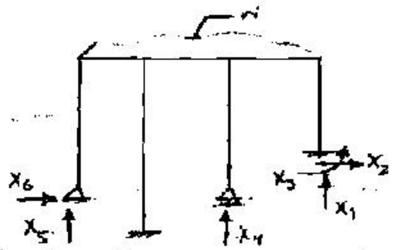
$$\delta_{HC} = \frac{\partial U}{\partial Q} = \sum \frac{N \frac{\partial N}{\partial Q} l}{EA} = \frac{(\cancel{Q}-P)(1)l}{EA} + \frac{(\cancel{Q}-P)(1)l}{EA} + \frac{(\cancel{Q}-P)(1)l}{EA}$$

$$+ \frac{(P-\cancel{Q})\sqrt{2}(-\sqrt{2})\,l\sqrt{2}}{EA} = -\frac{3Pl}{EA} - \frac{2\sqrt{2}\,Pl}{EA}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{HC} = -\frac{Pl}{EA}(3 + 2\sqrt{2})$$

قضیه حداقل کار

همان قضیه دوم کاستیلیانو درمورد سازه‌های نامعین است یعنی می‌خواهیم انرژی را نسبت به مجهولات، min کنیم.



قدم اول این است که ببینیم سازه چند درجه نامعینی استاتیکی دارد. قدم دوم: مجهول اضافی درنظر می‌گیریم.

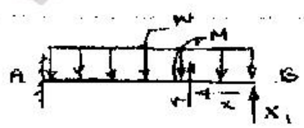
درجه نامعینی استاتیکی $= 6$

قدم سوم: انرژی را برحسب مجهولات اضافی می‌نویسیم و انرژی را نسبت به مجهولات اضافی min می‌کنیم. (چون انرژی max، بی‌نهایت است بنابراین نمی‌توانیم انرژی را max کنیم)

$$U = U(w, X_1, \ldots, X_6) \qquad \left[\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial U}{\partial X_6} = 0\right]$$

قضیه حداقل کار: مجهولات اضافی طوری تعیین می‌شوند که انرژی نسبت به مجهولات اضافی (نیروهای مقاوم) min شود.

مثال) قضیه حداقل کار را به کار ببرید.



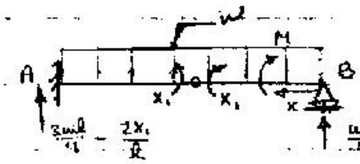
$$AB: \quad M = X_1 x - w\frac{x^2}{2} \quad , \quad V = wx - X_1$$

$$U = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_l \frac{f_s V^2 dx}{2GA} \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_l \frac{M \frac{\partial M}{\partial X_1} dx}{EI} + \int_l \frac{f_s V \frac{\partial V}{\partial X_1} dx}{GA}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_0^l \frac{(X_1 x - \frac{wx^2}{2})(x)\,dx}{EI} + \int_0^l \frac{f_s (wx - X_1)(-1)\,dx}{GA}$$

$$\Rightarrow \frac{X_1 l^3}{3EI} - \frac{wl^4}{8EI} - \frac{f_s w l^2}{2GA} + \frac{X_1 l}{GA} = 0 \longrightarrow X_1 = \frac{\frac{wl^4}{8EI} + \frac{f_s w l^2}{2GA}}{\frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{GA}} = \frac{3wl}{8}$$

مثال) لنگر خمشی وسط دهانه را مجهول گرفته و مسئله را حل کنید.



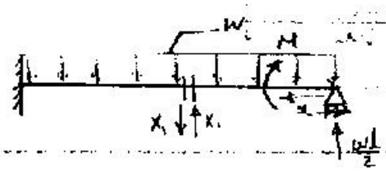
$$M=\left(\frac{wl}{4}+\frac{2X_1}{l}\right)x-\frac{wx^2}{2}$$

$$U=\int_L\frac{M^2dx}{2EI}$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=\int_0^l\frac{\left[\left(\frac{wl}{4}+\frac{2X_1}{l}\right)x-\frac{wx^2}{2}\right]\left(\frac{2x}{l}\right)dx}{EI}=\frac{wl^3}{6EI}+\frac{4X_1l}{3EI}-\frac{wl^3}{4EI}=0$$

$$\Longrightarrow\quad\frac{4X_1l}{3EI}=\frac{wl^3}{12EI}\quad\longrightarrow\quad X_1=\frac{wl^2}{16}$$

مثال) نیروی برشی وسط دهانه را مجهول گرفته و مسئله را حل کنید.



$$M=\left(\frac{wl}{2}-X_1\right)x-\frac{wx^2}{2}$$

در مسئله قبل از $\frac{\partial U}{\partial X_1}$ منظور تغییرات شیب دو طرف نقطه مورد نظر داریم که نادرست است چون θ دو طرف با هم برابر است و $\frac{\partial U}{\partial X_1}=0$. در این مسئله هم چون در دو طرف نقطه، تغییر ارتفاع نداریم $\frac{\partial U}{\partial X_1}=0$ است یعنی $\frac{\partial U}{\partial X_1}$ معادله پیوستگی است.

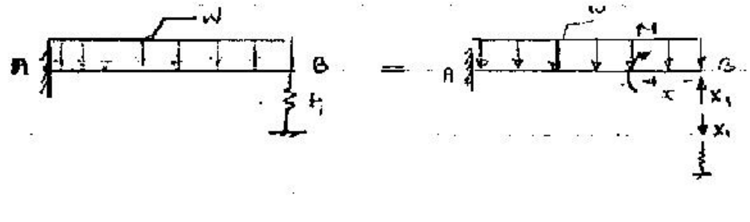
$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=\int_L\frac{M\frac{\partial M}{\partial X_1}dx}{EI}=\int_0^l\frac{\left[\left(\frac{wl}{2}-X_1\right)x-\frac{wx^2}{2}\right](-x)dx}{EI}$$

$$\Longrightarrow\quad-\frac{wl^4}{6EI}+\frac{X_1l^3}{3EI}+\frac{wl^4}{8EI}=0\quad\Longrightarrow\quad X_1=\frac{wl}{8}$$

می توانیم انرژی را در نصف تیر به علت چپ به دست آوریم U_1 و سپس انرژی را در نصف دیگر تیر برای U_2 قرار دهیم.

$$\frac{\partial U_1}{\partial X_1}=-\frac{\partial U_2}{\partial X_1}\quad\Longrightarrow\quad\frac{\partial U_1}{\partial X_1}+\frac{\partial U_2}{\partial X_1}=0$$

مثال) سازه زیر را حل کنید.



3.

$$AB: M = X_1 x - \frac{\omega x^2}{2} \qquad U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} + U_s = U_1 + U_2$$

$$U_s = \frac{1}{2} K\delta^2 = \frac{1}{2} K\left(\frac{X_1}{K}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{X_1^2}{K} = \frac{1}{2} f_1 X_1^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_l \frac{M \frac{\partial M}{\partial X_1} dx}{EI} + f_1 X_1 = \int_l \frac{(X_1 x - \frac{\omega x^2}{2})(x)\, dx}{EI} + f_1 X_1 = 0$$

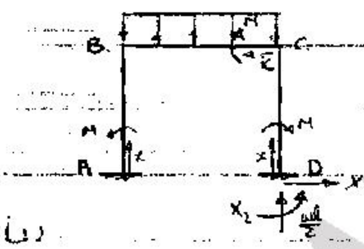
$$\Rightarrow \frac{X_1 l^3}{3EI} - \frac{\omega l^4}{8EI} + f_1 X_1 = 0 \Longrightarrow X_1 = \frac{\frac{\omega l^4}{8EI}}{\frac{l^3}{3EI} + f_1}$$

◁ روش دوم

$$U_1 = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI} \Rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = \int_0^l \frac{(X_1 x - \frac{\omega x^2}{2})(x)\, dx}{EI} = \frac{X_1 l^3}{3EI} - \frac{\omega l^4}{8EI}$$

$$\frac{X_1 l^3}{3EI} - \frac{\omega l^4}{8EI} = -f_1 X_1 \Rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = -\frac{\partial U_2}{\partial X_1} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0$$

مثال) قاب روبه رو را حل کنید.



$$AB, CD: M = X_1 x + X_2$$

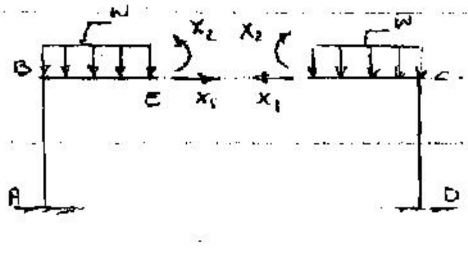
$$BC: M = X_1 l + X_2 + \frac{\omega l}{2} x - \frac{\omega x^2}{2}$$

(ب

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_l \frac{M \frac{\partial M}{\partial X_1} dx}{EI} = 2\int_0^l \frac{(X_1 x + X_2)(x)\, dx}{EI} + \int_0^l \frac{(X_1 l + X_2 + \frac{\omega l}{2}x - \frac{\omega x^2}{2})(l)\, dx}{EI} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_2} = \int_l \frac{M \frac{\partial M}{\partial X_2} dx}{EI} = 2\int_0^l \frac{(X_1 x + X_2)(1)\, dx}{EI} + \int_0^l \frac{(X_1 l + X_2 + \frac{\omega l}{2}x - \frac{\omega x^2}{2})(1)\, dx}{EI} = 0$$

◁ مجهولات را در وسط دهانه BC در نظر بگیریم



$$BE: M = X_2 - \frac{\omega x^2}{2}$$

$$AB: M = X_2 - X_1 x - \frac{\omega l^2}{8}$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

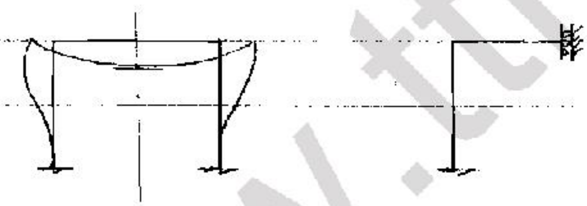
$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=\int\frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial X_1}\right)dx}{EI}=2\int_0^{l/2}\frac{\left(X_2-\frac{\omega x^2}{2}\right)(0)\,dx}{EI}+2\int_0^{l}\frac{\left(X_2-X_1x-\frac{\omega l^2}{8}\right)(-x)\,dx}{EI}=0$$

$\frac{\partial U}{\partial X_1}$ در حقیقت رابطه پیوستگی است یعنی می‌خواهیم میزان نزدیک شدن یک نقطه که بریده‌ایم به هم را بدست آوریم بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\frac{\partial U}{\partial X_1}=0$.

$$\frac{\partial U}{\partial X_2}=\int\frac{M\left(\frac{\partial M}{\partial X_2}\right)dx}{EI}=2\int_0^{l/2}\frac{\left(X_2-\frac{\omega x^2}{2}\right)(1)\,dx}{EI}+2\int_0^{l}\frac{\left(X_2-X_1x-\frac{\omega l^2}{8}\right)(1)\,dx}{EI}$$

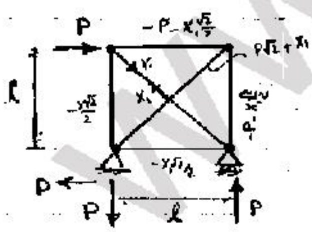
چون دو طرف نقطه‌ای که بریده‌ایم تغییر شیب نداریم بنابراین $\frac{\partial U}{\partial X_2}=0$.

* این مسئله $\frac{\partial U_1}{\partial X_1}=\frac{\partial U_1}{\partial X_2}=0$ برقرار است. نشان دهنده این است که تغییر مکان افقی و دوران در وسط دهانه صفر است. تمامی این روابط به دلیل تقارن سازه برقرار است.



چون تغییر مکان افقی و دوران صفر است بنابراین تکیه‌گاه برشی باید قرار گیرد.

مثال) با استفاده از قضیه حداقل کار مسئله را حل کنید.



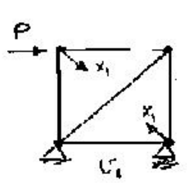
$$U=\sum\frac{N^2l}{2EA}\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial X_1}=\sum\frac{N\left(\frac{\partial N}{\partial X_1}\right)l}{EA}$$

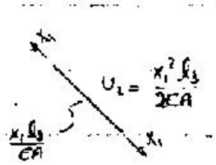
$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=2\,\frac{\left(-\frac{X_1\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l}{EA}+2\,\frac{\left(-P-\frac{X_1\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l}{EA}$$

(باید یک قطعه را ببریم و نیروی X_1 را به آن وارد کنیم تا $\frac{\partial U}{\partial X_1}$ برابر صفر شود)

$$+\frac{\left(P\sqrt{2}+X_1\right)(1)\,l\sqrt{2}}{EA}+\frac{(X_1)(1)\,l\sqrt{2}}{EA}=0$$

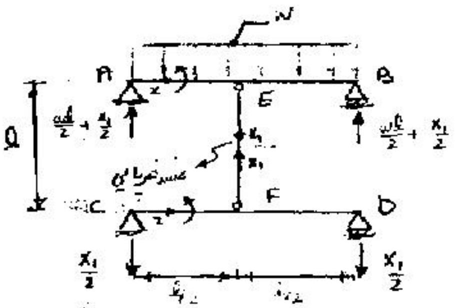
$$\Rightarrow\boxed{X_1=-\frac{P\sqrt{2}}{2}}$$





$$\frac{\partial U_1}{\partial X_1}=-\frac{X_1l_3}{EA}=-\frac{\partial U_2}{\partial X_1}\Rightarrow\frac{\partial U_1}{\partial X_1}+\frac{\partial U_2}{\partial X_1}=0$$

مثال) با استفاده از قضیهٔ حداقل کار مسئله را حل کنید.



$$AB: \quad M = \left(\frac{wl}{2} + \frac{X_1}{2}\right)x - \frac{wx^2}{2}$$

$$CD: \quad M = -\frac{X_1}{2}x$$

$$EF: \quad N = X_1$$

$$U = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum \frac{N^2 l}{2EA}$$

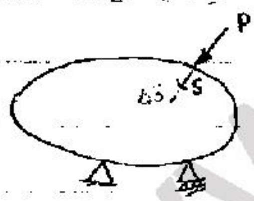
$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 2\int_0^{l/2} \frac{\left[\left(\frac{wl}{2}+\frac{X_1}{2}\right)x - \frac{wx^2}{2}\right]\left(\frac{x}{2}\right)dx}{EI} + 2\int_0^{l/2}\frac{\left(-\frac{X_1}{2}x\right)\left(-\frac{x}{2}\right)dx}{EI} + \frac{(X_1)(1)l}{EA} = 0$$

△ این سازه یک سازهٔ مرکب است. ترکیبی از عضو خمشی و عضو محوری.

◀ قضیهٔ کراتی - انگسر

✗ این قضیه در واقع تعمیمی از قضیهٔ دوم کاستیلیانو است.

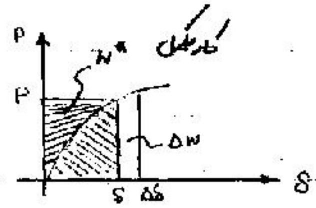
✗ اثبات قضیهٔ اول کاستیلیانو برای رفتار غیرخطی بررسی می کنیم



$$U = U(\delta)$$

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \delta}\Delta\delta$$

$$\Delta W = P(\Delta\delta)$$



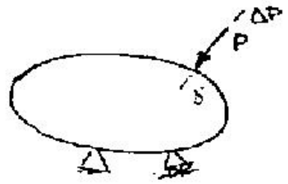
$$\Delta U = \Delta W \implies \boxed{\frac{\partial U}{\partial \delta} = P}$$

$$W = \int_0^{\delta} P\,d\delta \quad , \quad W^* = \int_0^{P} \delta\,dP$$

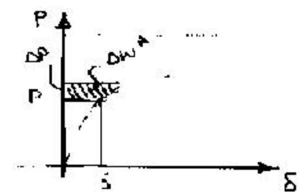
چگالی انرژی کرنشی

$$u = \int_0^{\varepsilon} \sigma\,d\varepsilon \implies U = \int_{V_0} u\,dV_0$$

چگالی انرژی مکمل $\quad u^* = \int_0^{\sigma} \varepsilon\,d\sigma \implies U^* = \int_{V_0} u^*\,dV_0$



$$U^* = U^*(P)$$
$$\Delta U^* = \frac{\partial U^*}{\partial P}(\Delta P)$$
$$\Delta W^* = \delta(\Delta P)$$



چون انرژی ثابت است نتیجه می گیریم که تغییر در انرژی مکمل برابر است با تغییر در کار مکمل.

$$\Delta U^* = \Delta W^* \Rightarrow \boxed{\frac{\partial U^*}{\partial P} = \delta}$$

★ قضیه کراتی انگسر: مشتق جزئی انرژی مکمل نسبت به هریک از نیروها برابر است با تغییر مکان نظیر آن نیرو

$$\Delta U = \Delta W \Rightarrow \Delta U - \Delta W = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta(U - W) = 0 \Rightarrow \Delta\pi = 0 \\ U - W = \pi \quad \text{انرژی پتانسیل کل} \end{cases}$$
$$U = U(\delta_1, \ldots, \delta_n), \quad W = W(\delta_1, \ldots, \delta_n)$$

★ قضیه حداقل انرژی پتانسیل کل

$$\Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial \delta_1} = 0, \ \ldots\ldots, \ \frac{\partial \pi}{\partial \delta_n} = 0$$

قضیه حداقل انرژی پتانسیل کل $\Leftrightarrow$ قضیه اول کاستیلیانو (روش تغییر مکان)

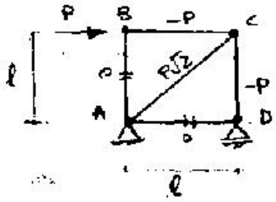
روش نیرو

$$\Delta U^* = \Delta W^* \Rightarrow \Delta U^* - \Delta W^* = 0$$
$$U^* = U^*(P_1, \ldots, P_n), \quad W^* = W^*(P_1, \ldots, P_n)$$

$$\begin{cases} \Delta(U^* - W^*) = 0 \Rightarrow \Delta\pi^* = 0 \\ U^* - W^* = \pi^* \quad \text{انرژی مکمل کل} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \pi^*}{\partial P_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi^*}{\partial P_n} = 0 \end{cases}$$
$$\pi^* = \pi^*(P_1, \ldots, P_n)$$

قضیه حداقل انرژی مکمل $\Leftrightarrow$ قضیه کراتی ـ انگسر (قضیه دوم کاستیلیانو)

مثال ۱) δ_{HB} را به دست آورید.



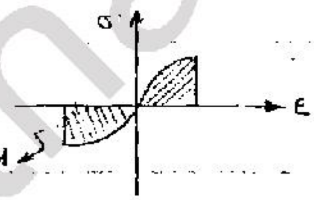
$$\begin{cases} \sigma = B\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma > 0 \\ \sigma = -B\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon < 0 \Rightarrow \sigma < 0 \end{cases}$$

$$u^* = \int_0^{\sigma} \varepsilon \, d\sigma = \int_0^{\sigma} \frac{\sigma^2}{B^2} \, d\sigma = \frac{\sigma^3}{3B^2}$$

$$u_i^* = \frac{\sigma_i^3}{3B^2} = \frac{N_i^3}{3A_i^3 B^2} \Rightarrow U_i^* = \frac{N_i^3}{3B^2 A_i^3}(A_i l_i) = \frac{N_i^3 l_i}{3A_i^2 B^2}$$

$$U^* = \Sigma \frac{|N_i|^3 l_i}{3A_i^2 B^2} = 2 \cdot \frac{P^3 l}{3A^2 B^2} + \frac{2\sqrt{2} P^3 l \sqrt{2}}{3A^2 B^2} = \frac{2P^3 l}{A^2 B^2}$$

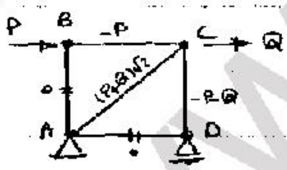
$$\delta_{HB} = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{6P^2 l}{A^2 B^2}$$



این مساحت‌ها مثبت اند. میزان انرژی باید همواره مثبت باشد

در نتیجه N_i را در روابط به صورت مثبت قرار دهیم

مثال ۲) δ_{HC} را به دست آورید.



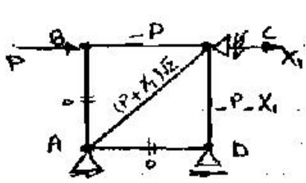
نیروی موهومی Q را قرار می‌دهیم

$$U_i^* = \frac{N_i^3 l_i}{3A_i^2 B^2} \Rightarrow U^* = \Sigma U_i^*$$

$$U^* = \frac{P^3 l}{3A^2 B^2} + \frac{5(P+Q)^3 l}{3A^2 B^2} \Rightarrow \delta_{HC} = \frac{\partial U^*}{\partial Q} = \frac{5(P+Q)^2 l}{A^2 B^2} = \frac{5P^2 l}{A^2 B^2}$$

◁ برای به دست آوردن تغییر مکانی که نیرویی به آن وارد نمی‌شود، یک نیروی فرضی قرار می‌دهیم.

مثال ۳) خرپای روبرو را حل کنید.

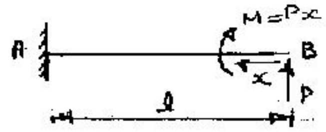


X_1: مجهول اضافی

$$U^* = \frac{P^3 \ell}{3A^2B^2} + \frac{2\sqrt{2}(P+X_1)^3 \ell\sqrt{2}}{3A^2B^2} + \frac{(P+X_1)^3 \ell}{3A^2B^2}$$

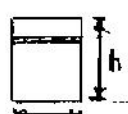
$$\frac{\partial U^*}{\partial X_1} = \frac{5(P+X_1)^2 \ell}{B^2A^2} = 0 \Rightarrow \boxed{X_1 = -P}$$

مثال 4) δ_{vB} را بدست آورید.



$$\begin{cases} \sigma = B\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon > 0 \\ \sigma = -B\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon < 0 \end{cases}$$

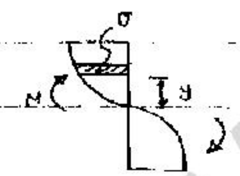
$$u^* = \int_0^{\sigma} \varepsilon \, d\sigma = \int_0^{\sigma} \frac{\sigma^2}{B^2} d\sigma = \frac{\sigma^3}{3B^2}$$



مقطع تیر

★ رابطه M را با شعاع انحنا بدست می آوریم

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{y} \Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{\rho}$$



$$M = 2\int_0^{h/2} (\sigma b dy)\, y = 2b\int_0^{h/2} B\varepsilon^{1/2} y \, dy$$

داریم

$$M = 2bB\int_0^{h/2} \frac{y^{3/2}}{\sqrt{\rho}} dy = \frac{2bB}{\sqrt{\rho}} \frac{h^{5/2}}{10\sqrt{2}} = \frac{bBh^{5/2}}{5\sqrt{2\rho}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{5\sqrt{2}M}{bBh^{5/2}} \Rightarrow u^* = \frac{1}{3B^2}(B^3\varepsilon^{3/2}) = \frac{B\varepsilon^{3/2}}{3} = \frac{By^{3/2}}{3\rho^{3/2}}$$

$$u^* = \frac{By^{3/2}}{3} \frac{250\sqrt{2}M^3}{b^3B^3h^{15/2}} = \frac{250\sqrt{2}P^3x^3y^{3/2}}{3b^3B^2h^{15/2}}$$ (u^* را برحسب x و y نوشتیم)

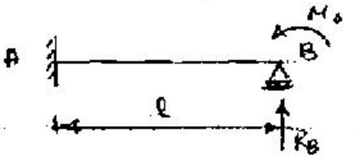
$$U^* = \int_V u^* dV = \int_\ell \int_A \left[\frac{250\sqrt{2}P^3x^3y^{3/2}}{3b^3B^2h^{15/2}} dA\right] dx = \frac{250\sqrt{2}P^3}{3b^3B^2h^{15/2}} \int_0^\ell x^3 \int_{-h/2}^{h/2} y^{3/2} b\,dy$$

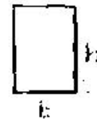
$$U^* = \frac{500\sqrt{2}P^3}{3b^2B^2h^{15/2}} \int_0^\ell x^3 \left(\frac{h^{5/2}}{10\sqrt{2}}\right) dx = \frac{50P^3}{3b^2B^2h^5} \times \frac{\ell^4}{4} = \frac{25P^3\ell^4}{6b^2B^2h^5}$$

ε) ثابت

$$\delta_{vB} = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{25P^2\ell^4}{2b^2B^2h^5}$$

تمرین) R_B و θ_B را به دست آورید.

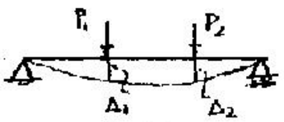




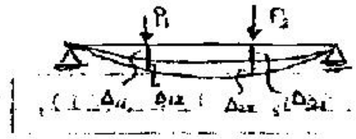
$$\begin{cases} \sigma = B\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon > 0 \\ \sigma = -B\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon < 0 \end{cases}$$

در یک نقطه تیر کُرنش صفر بود و از مثبت، منفی می‌شود بنابراین ε منفی می‌شود. در نتیجه باید مکان صفر شدن کرنش را پیدا کنیم و مقدار ε منفی را در روابط، مثبت قرار دهیم.

◄ قضیهٔ تقابل کار (بتی)

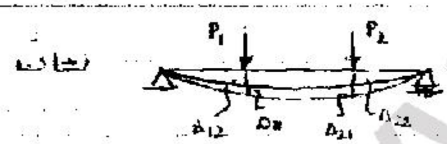


فرض: رفتار سازه، رفتار خطی باشد.



$$W_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_1 \Delta_{12}$$

(اول بار P_1 را قرار می‌دهیم و سپس بار P_2 را)



$$W_2 = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_2 \Delta_{21}$$

(اول بار P_2 را قرار می‌دهیم و سپس بار P_1 را)

$$W_1 = W_2 \Rightarrow \boxed{P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}}$$

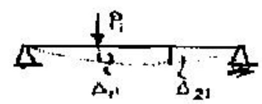
★ قضیه تقابل کار: اگر دو سیستم بارگذاری داشته باشیم، بارگذاری اولی در تغییر مکان‌های دومی برابر است با بارگذاری دومی در تغییر مکان‌های اولی.

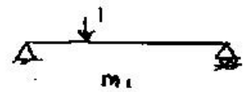
★ قضیهٔ تقابل تغییر مکان (ماکسول)

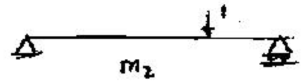
اگر در قضیهٔ تقابل کار $P_1 = P_2$ باشد، قضیه ماکسول حاصل می‌شود.

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \boxed{\Delta_{12} = \Delta_{21}}$$

◄ تغییر مکان در نقطهٔ اولی در اثر بارگذاری روی نقطهٔ دوم برابر است با تغییر مکان در نقطهٔ 2 در اثر بارگذاری در نقطهٔ اول.



$= P_1$


$= P_2$


$$\Delta_{21} = \int \frac{P_1 m_1 m_2 dx}{EI} \qquad \Delta_{12} = \int \frac{P_2 m_2 m_1 dx}{EI}$$

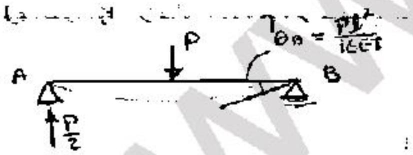
$$\frac{\Delta_{21}}{P_1} = \frac{\Delta_{12}}{P_2} \implies \boxed{P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}}$$

• فرض می‌کنیم صلبیت خمشی تیر (1) به $(EI)_1$ و صلبیت خمشی تیر (2) به $(EI)_2$ باشد:

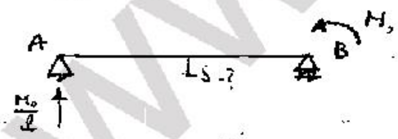
$$\Delta_{21} = \int \frac{P_1 m_1 m_2 dx}{(EI)_1} \qquad \Delta_{12} = \int \frac{P_2 m_1 m_2 dx}{(EI)_2}$$

$$\frac{\Delta_{21}}{P_1}(EI)_1 = \frac{\Delta_{12}}{P_2}(EI)_2 \implies \boxed{P_1 \Delta_{12} (EI)_2 = P_2 \Delta_{21} (EI)_1}$$

مثال) تغییر مکان وسط دهانه در سازه (2) چقدر است؟



$$P\delta = M_0 \frac{Pl^2}{16EI}$$



$$\implies \boxed{\delta = \frac{M_0 l^2}{16EI}}$$

اگر سختی سازه (2) 3EI باشد: $(P)(\delta)(3EI) = M_0\left(\frac{Pl^2}{16EI}\right)(EI) \implies \boxed{\delta = \frac{M_0 l^2}{48EI}}$

• فرض می‌کنیم تکیه‌گاه A در سازه (2) به اندازه $0.01\,m \downarrow$ نشست کند:

$$P(\delta)(3EI) - \frac{P}{2}(0.01)(3EI) = M_0\left(\frac{Pl^2}{16EI}\right)(EI)$$

$$\implies \boxed{\delta = 0.005 + \frac{M_0 l^2}{48EI}}$$

◁ حال فرض می‌کنیم که تکیه‌گاه A در سازه (1) هم به اندازه 0.01m ↓ نشست کند:

$$\theta_A = \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{0.01}{l}$$

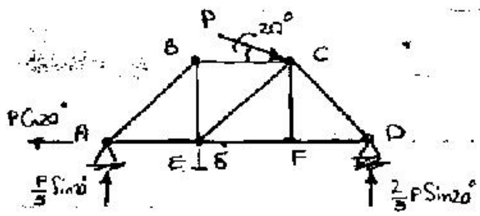
چون در سازه (2) تغییری نداریم پس باید همان جواب قبلی بدست آید.

$$P(\delta)(3EI) - \frac{P}{2}(0.01)(3EI) = M_0\left(\frac{Pl^2}{16EI} + \frac{0.01}{l}\right)(EI) - \frac{M_0}{l}(0.01)EI$$

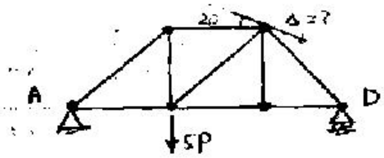
$$\Rightarrow \boxed{\delta = 0.005 + \frac{M_0 l^2}{48EI}}$$

مثال 2) تغییر مکان قائم E، δ است. (در سازه (1))

مقدار Δ را در سازه 2 بدست آورید.



$$P\Delta = 5P\delta \Rightarrow \boxed{\Delta = 5\delta}$$



◁ اگر صلبیت محوری (1) ← 3EA و (2) ← 5EA باشند:

$$P(\Delta)(5EA) = (5P)(\delta)(3EA)$$

$$\boxed{\Delta = 3\delta}$$

◁ اگر تکیه‌گاه D در سازه (2)، 0.01m ↓ و تکیه‌گاه A، 0.01m ↓ و 0.01m ← نشست کند:

$$\left[P\Delta - \frac{2}{3}P\sin 20°(0.02) - \frac{1}{3}P\sin 20°(0.01) + P\cos 20°(0.01)\right](5EA)$$

$$= 5P(\delta)(3EA)$$

$$\boxed{\Delta = \frac{0.05}{3}\sin 20° - 0.01\cos 20° + 3\delta}$$

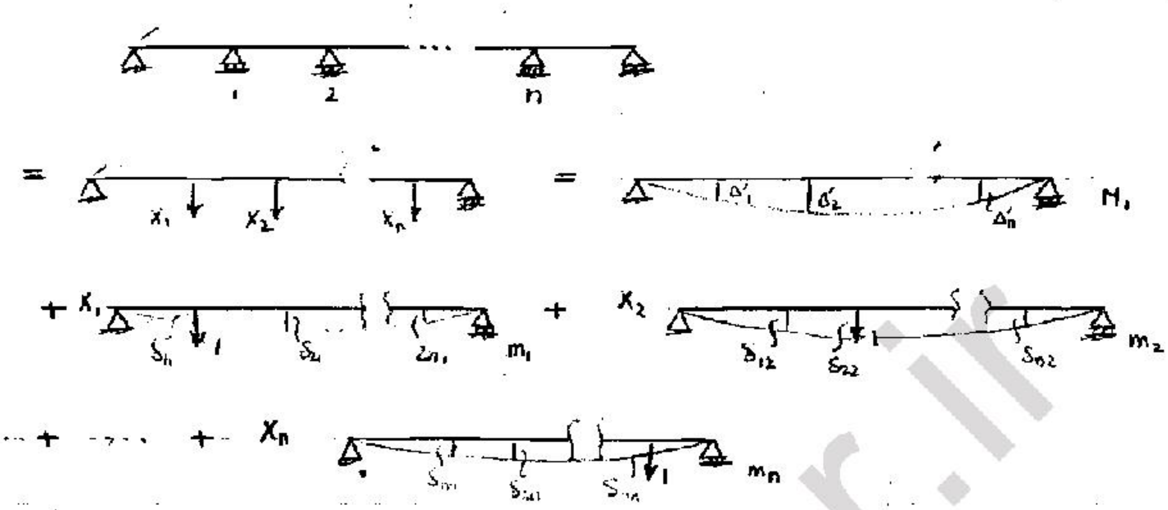
◀ تحلیل سازه‌های نامعین (روش نیرو)

۱- روش حداقل کار

۲- روش بار واحد

۳- روش سه لنگری

◀ روش بار واحد :



δ_{ij} : تغییر مکان در امتداد X_i وقتی به جای $X_j = 1$ قرار می‌دهیم .

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \cdots + \delta_{1n} X_n = 0$$
$$\Delta'_2 + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \cdots + \delta_{2n} X_n = 0$$
$$\vdots$$
$$\Delta'_n + \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \cdots + \delta_{nn} X_n = 0$$

$$\{\Delta'\} = \begin{Bmatrix} \Delta'_1 \\ \vdots \\ \Delta'_n \end{Bmatrix} \qquad \{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \qquad [F] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

ماتریس نرمی ، عکس ماتریس سختی است .

$$[F]\{X\} = \{\Delta'\} \longrightarrow \boxed{\{X\} = [F]^{-1}\{\Delta'\}}$$

◀ فرض می‌کنیم که تکیه‌گاه 1 به اندازه Δ_1 ، تا تکیه‌گاه n به اندازه Δ_n نشست کند .

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \cdots + \delta_{1n} X_n = \Delta_1$$
$$\Delta'_2 + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \cdots + \delta_{2n} X_n = \Delta_2 \qquad \{X\} = [F]^{-1}\left\{\{\Delta\} - \{\Delta'\}\right\}$$
$$\vdots$$
$$\Delta'_n + \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \cdots + \delta_{nn} X_n = \Delta_n$$

فرض می کنیم که تکیه گاه ها قابل نشست باشند. همه تکیه گاه ها را یک فنر مدلسازی می کنیم:

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n = -F_1 X_1$$

$$\Delta'_2 + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n = -F_2 X_2$$

$$\vdots$$

$$\Delta'_n + \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n = -F_n X_n$$

$$\Delta'_1 = \int_l \frac{M_0 m_1 dx}{EI} \quad , \quad \Delta'_2 = \int_l \frac{M_0 m_2 dx}{EI} \quad , \quad \dots \quad , \quad \Delta'_n = \int_l \frac{M_0 m_n dx}{EI}$$

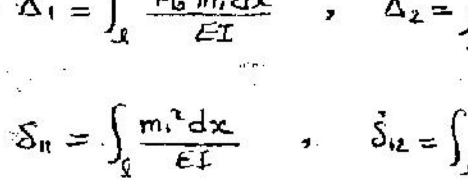
$$\delta_{11} = \int_l \frac{m_1^2 dx}{EI} \quad , \quad \delta_{12} = \int_l \frac{m_1 m_2 dx}{EI} \quad \Rightarrow \quad \delta_{ij} = \int_l \frac{m_i m_j dx}{EI}$$

اگر اثرات نیروی برشی و محوری و پیچش را هم در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\Delta'_i = \int_l \frac{M_0 m_i dx}{EI} + \int_l \frac{N_0 n_i dx}{EA} + \int_l \frac{f_s V_0 v_i dx}{GA} + \int_l \frac{T_0 t_i dx}{GJ}$$

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{m_i m_j dx}{EI} + \int_l \frac{n_i n_j dx}{EA} + \int_l \frac{f_s v_i v_j dx}{GA} + \int_l \frac{t_i t_j dx}{GJ}$$

اگر تغییر درجه حرارت هم در سازه داشته باشیم:



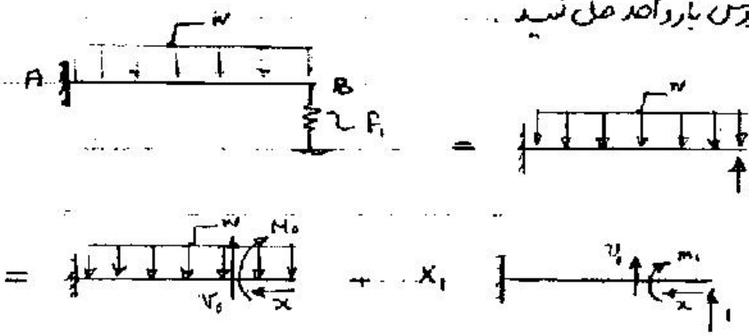
اگر تغییر درجه حرارت یکنواخت باشد دو جمله زیر به طرف راست رابطه Δ'_i اضافه می شوند:

$$\int_l n_i \alpha \left(\frac{T_1+T_2}{2} - T_0\right) dx + \int_l \frac{m_i \alpha (T_2 - T_1) dx}{h}$$

* اگر نشست تکیه گاهی هم داشته باشیم جمله $(W_R)_i$ به سمت چپ رابطه Δ'_i اضافه می شود.

* در δ_{ij} فقط بار واحد تاثیر می گذارد بنابراین تغییر درجه حرارت و نشست تکیه گاهی تاثیری بر این رابطه ندارند.

مثال ۱) مسئله را با استفاده از روش بار واحد حل کنید.



$$\begin{cases} M_0 = -\dfrac{\omega x^2}{2} \; , \; V_0 = \omega x \; , \; N_0 = 0 \\ m_1 = x \; , \; v_1 = -1 \; , \; n_1 = 0 \end{cases} \qquad \Delta'_1 + \delta_{11} X_1 = -F_1 X_1$$

$$\Delta'_1 = \int_l \frac{M_0 m_1 dx}{EI} + \int_l \frac{f_s V_0 v_1 dx}{GA} = \int_0^l \frac{(-\omega x^2/2)(x)dx}{EI} + \int_0^l \frac{f_s(\omega x)(-1)dx}{GA}$$

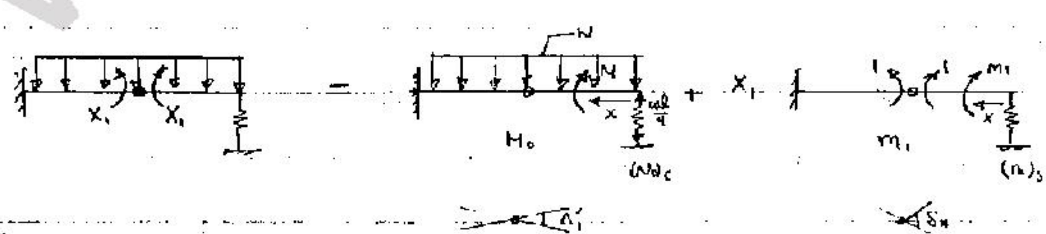
$$\Rightarrow \Delta'_1 = -\frac{\omega l^4}{8EI} - \frac{f_s \omega l^2}{2GA}$$

$$\delta_{11} = \int_l \frac{m_1^2 dx}{EI} + \int_l \frac{f_s v_1^2 dx}{GA} = \int_0^l \frac{x^2 dx}{EI} + \int_0^l \frac{f_s dx}{GA} = \frac{l^3}{3EI} + \frac{f_s l}{GA}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{\dfrac{\omega l^4}{8EI} + \dfrac{f_s \omega l^2}{2GA}}{\dfrac{l^3}{3EI} + \dfrac{f_s l}{GA} + F_1}$$

۵ اگر F_1 بی نهایت باشد و از اثرات برش صرف نظر کنیم ⇐ $X_1 = \frac{3\omega l}{8}$

★ بار دیگر مسئله را با مجهول گرفتن لنگر وسط دهانه حل می کنیم:



$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\Delta'_1 = \int \frac{M_0 m_1 dx}{EI} + F_1 (N_0)_s (n_1)_s$$

5-

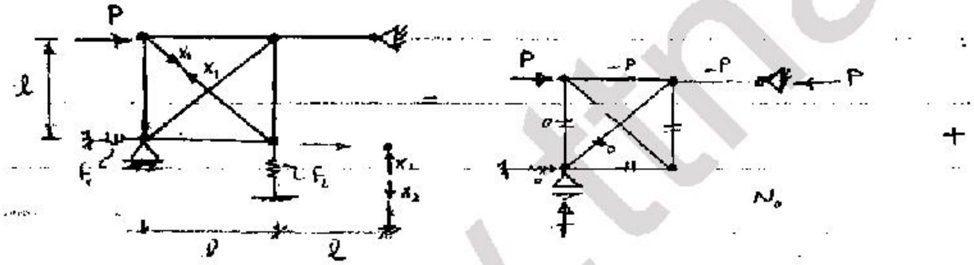
$$\begin{cases} M_0 = \frac{3\omega l}{4}x - \frac{\omega x^2}{2} \quad , \quad (N_0)_s = -\frac{\omega l}{4} \\ m_1 = \frac{2x}{l} \quad , \quad (n_1)_s = -\frac{2}{l} \end{cases}$$

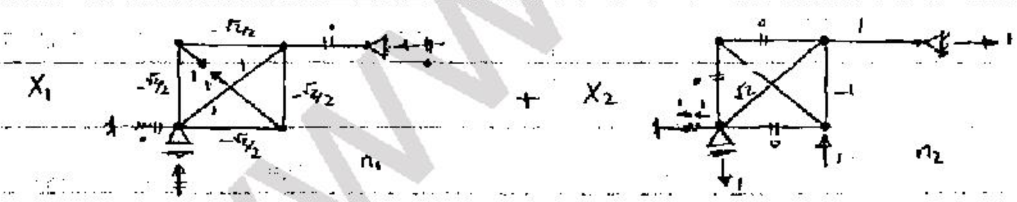
$$\Rightarrow \quad \Delta'_1 = \int_0^l \frac{(\frac{\omega l}{4}x - \frac{\omega x^2}{2})(\frac{2x}{l})dx}{EI} + f_1(-\frac{\omega l}{4})(-\frac{2}{l}) = -\frac{\omega l^3}{12EI} + \frac{1}{2}f_1 w$$

$$\delta_{11} = \int_l \frac{m_1^2 dx}{EI} + f_1 (n_1)_s^2 = \int_l \frac{4x^2/l^2}{EI}dx + f_1(-\frac{2}{l})^2 = \frac{4l}{3EI} + \frac{4f_1}{l^2}$$

$$\Rightarrow \quad X_1 = \frac{-\frac{\omega l^3}{12EI} + \frac{1}{2}f_1 w}{\frac{4l}{3EI} + \frac{4f_1}{l^2}}$$

مثال 2) مسئله زیر را با استفاده از روش بار واحد حل کنید.





$$\Delta'_1 + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \quad , \quad \Delta'_2 + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = -f_2 X_2$$

$$\Delta'_1 = \Sigma \frac{N_0 n_1 l}{EA} + f_1 (N_0)_s (n_1)_s = \frac{(-P)(-\sqrt{2}/2)l}{EA} = \frac{Pl\sqrt{2}}{2EA}$$

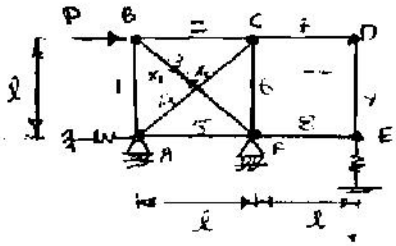
$$\Delta'_2 = \Sigma \frac{N_0 n_2 l}{EA} + f_1 (N_0)_s (n_2)_s = \frac{(-P)(1)l}{EA} = -\frac{Pl}{EA}$$

$$\delta_{11} = \Sigma \frac{n_1^2 l}{EA} + f_1 (n_1)_s^2 = \frac{(-\sqrt{2}/2)^2 l}{EA} \times 4 + \frac{(1)^2 l\sqrt{2}}{EA} \times 2 =$$

$$\delta_{22} = \Sigma \frac{n_2^2 l}{EA} + f_1 (n_2)_s^2 = \frac{(\sqrt{2})^2 l\sqrt{2}}{EA} + 2\frac{(1)^2 l}{EA} + f_1 (1)^2 =$$

$$\delta_{12} = \Sigma \frac{n_1 n_2 l}{EA} + f_1 (n_1)_s (n_2)_s = \frac{(1)(\sqrt{2})\, l\sqrt{2}}{EA} + \frac{(-1)(-\sqrt{2}/2)\, l}{EA}$$

مثال ۵) با استفاده از روش بار واحد خرپا را تحلیل کنید.



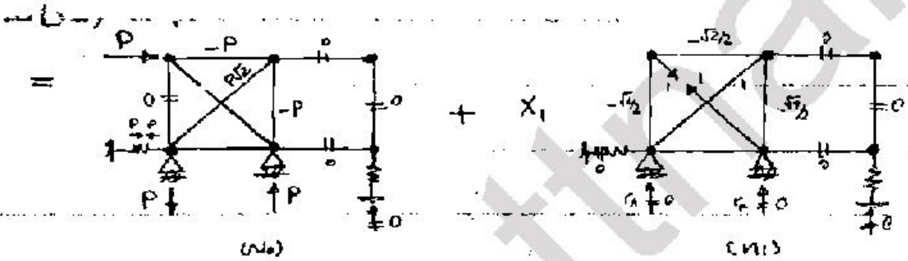
$$(\Delta T)_1 = (\Delta T)_3 = (\Delta T)_5 = 50^\circ C$$

$$-(\Delta T)_2 = (\Delta T)_4 = (\Delta T)_6 = -50^\circ C$$

$$(\Delta T)_7 = (\Delta T)_8 = (\Delta T)_9 = 100^\circ C$$

خطای ساخت $\delta = \pm 1\,mm$, $\Delta_F = 1cm \downarrow$, $\Delta_A = 0.5cm \uparrow$

حل)



$$\Delta'_1 + (W_R)_1 = \Sigma \frac{N_0 n_1}{EA} l + \Sigma \alpha (\Delta T) l (n_1) \pm \Sigma |n_1 \delta| + \Sigma F(N_0)_s (n_1)_s$$

$$\Delta'_1 + (r_A)(0.005) - (r_F)(0.01) = \frac{(-P)(-\sqrt{2}/2)\, l}{EA} + \frac{(P\sqrt{2})(1)\, l\sqrt{2}}{EA} + \frac{(-P)(-\frac{\sqrt{2}}{2})\, l}{EA}$$

$$+ (-\tfrac{\sqrt{2}}{2})(50)\alpha l + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2})(-50)\alpha l + (1)(50)\alpha l\sqrt{2} + (1)(-50)\alpha l\sqrt{2}$$

$$+ (-\tfrac{\sqrt{2}}{2})(50)\alpha l + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2})(-50)\alpha l \pm (0.001)\left[2\sqrt{2} + 2\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta'_1 = \frac{Pl}{EA}(2+\sqrt{2}) - 50\sqrt{2}\,\alpha l \pm 0.002(1+\sqrt{2})$$

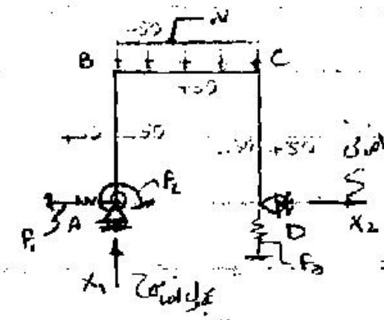
$$\delta_{11} = \Sigma \frac{n_1^2 l}{EA} + \Sigma f_i (n_1)_s^2 = 4\frac{(-\sqrt{2}/2)^2 l}{EA} + 2\frac{(1)^2 l\sqrt{2}}{EA} = \frac{2l}{EA}(1+\sqrt{2})$$

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_1 = -\frac{\frac{Pl}{EA}(2+\sqrt{2}) - 50\sqrt{2}\,\alpha l \pm 0.002(1+\sqrt{2})}{\frac{2l}{EA}(1+\sqrt{2})}$$

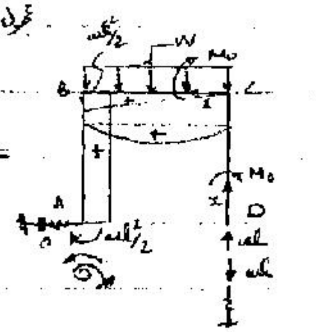
۵ اگر مقدار نیروها مشخص باشد و بخواهیم آنها را به عنوان مجهول اضافی بگیریم، سازه ناپایدار خواهد شد.

مثال 4) قاب زیر را با استفاده از روش بار واحد تحلیل کنید.

$\Delta_A \downarrow = 1cm \quad , \quad \Delta_D \rightarrow = 1cm$



=

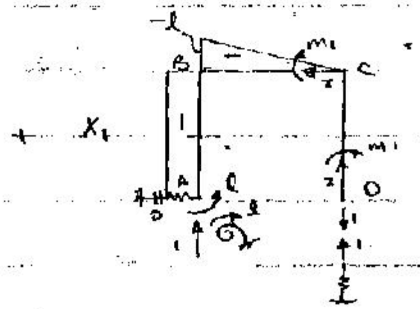


$CD: \; M_0 = 0$

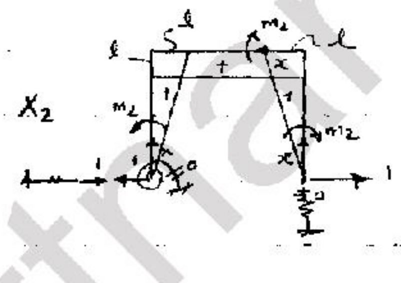
$BC: \; M_0 = \omega l x - \frac{\omega x^2}{2}$

$AB: \; M_0 = \frac{\omega l^2}{2}$

$+ \; X_1$



$+ \; X_2$



$CD: \; m_1 = 0 \quad , \quad BC: \; m_1 = -x \qquad CD: \; m_2 = x \quad , \quad BC: \; m_2 = l$

$AB: \; m_1 = l \qquad AB: \; m_2 = x$

$$\Delta'_1 + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = -0.01 \quad , \quad \Delta'_2 + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0.01$$

$$\Delta'_1 + \cancel{(W_R)_1} = \int_l \frac{M_0 m_1 dx}{EI} + \int_l \frac{m_1 \alpha (T_2 - T_1) dx}{h} + \Sigma F(N_0)(n_1)_s + \Sigma F(M_0)(m_1)_s$$

چون نشست تکیه گاهی را در معادلات به کار برده‌ایم بنابراین W_R در اینجا صفر است
اگر می‌خواستیم در اینجا W_R را بنویسیم باید در معادلات بالا طرف راست را صفر می‌گذاشتیم

$$\Delta'_1 = -\frac{\omega l^4}{2EI} - \frac{\omega l^3}{4EI} \times \frac{2l}{3} - \frac{\omega l^3}{12EI} \times \frac{l}{2} + \frac{\alpha(-100)}{h}(-l^2) + \frac{\alpha(100)}{h}\left(-\frac{l^2}{2}\right) + F_3(-\omega l)(1) + F_2\left(\frac{\omega l^2}{2}\right)(-l)$$

$$\Delta'_2 + \cancel{(W_R)_2} = \int_l \frac{M_0 m_2 dx}{EI} + \int_l \frac{m_2 \alpha (T_2 - T_1) dx}{h} + \Sigma F(N_0)(n_2)_s + \Sigma F(M_0)(m_2)_s$$

$$\Delta'_2 = \frac{\omega l^3}{2EI}\times\frac{l}{2} + \frac{\omega l^3}{9EI}\times l + \frac{\omega l^3}{12EI}\times l + \frac{\alpha(-100)}{h}\left(\frac{l^2}{2}\right) + \frac{\alpha(100)}{h}(l^2)$$
$$+ \frac{\alpha(-100)}{h}\left(\frac{l^2}{2}\right) + F_2\left(\frac{\omega l^2}{2}\right)(0) + F_3(-\omega l)(0) = \frac{7\omega l^4}{12EI}$$

$$\delta_{11} = \int_l \frac{m_1^2\,dx}{EI} + \sum F(m_1)_s^2 + \sum F(n_1)_s^2 = \frac{l^3}{EI} + \frac{l^2}{2EI}\times\frac{2l}{3} + F_2 l^2 + F_3(1)^2$$

$$\delta_{22} = \int_l \frac{m_2^2\,dx}{EI} + \sum F(m_2)_s^2 + \sum F(n_2)_s^2 = 2\,\frac{l^2}{2EI}\times\frac{2l}{3} + \frac{l^3}{EI} + F_1(1)^2$$

$$\delta_{12}=\delta_{21} = \int_l \frac{m_1 m_2\,dx}{EI} + \sum F(m_1)_s(m_2)_s + \sum F(n_1)_s(n_2)_s = -\frac{l^3}{2EI} - \frac{l^3}{2EI} = -\frac{l^3}{EI}$$

اگر میله‌ای به صورت بادبند (مهاربند) داشتیم فقط یک مجهول X_3 به سازه اضافه می‌شد :

$$CD:\ m_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x\ ,\quad BC:\ m_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(l-x)\ ,\quad AB:\ m_3 = 0$$

$$\Delta'_3 + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$

$$\Delta'_3 + \cancel{(W_R)_3} = \int_l \frac{M_0 m_3\,dx}{EI} + \sum F(M_0)_s(m_3)_s + \sum (N_0)_s(n_3)_s + \int_l \frac{m_3\,\alpha(T_2-T_1)\,dx}{h}$$

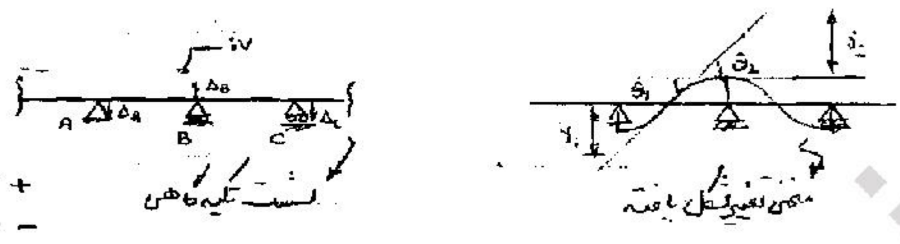
$$\Delta'_3 = -\frac{\omega l^2}{9EI}\left(\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2}l\right) - \frac{\omega l^3}{12}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}l\right) + \frac{\alpha(100)}{h}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}l^2\right) + \frac{\alpha(-100)}{h}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}l^2\right)$$
$$= -\frac{\omega l^3\sqrt{2}}{16EI}$$

اگر میله دارای تغییر درجه حرارت $50^\circ C$ باشد عبارت زیر به سمت راست Δ'_3 اضافه می‌شود :

$$\sum n_3\,\alpha(\Delta T)\,l = (1)\,\alpha(50)\,l\sqrt{2}$$

▶ روش سه لنگری :

* اغلب برای تحلیل تیرهای سراسری به کار می رود. در این روش لنگر تکیه گاه ها را مجهول درنظر می گیریم و رابطه ای بین لنگرها بدست می آوریم .



$$\begin{cases}\Delta\uparrow + \\ \Delta\downarrow -\end{cases}$$

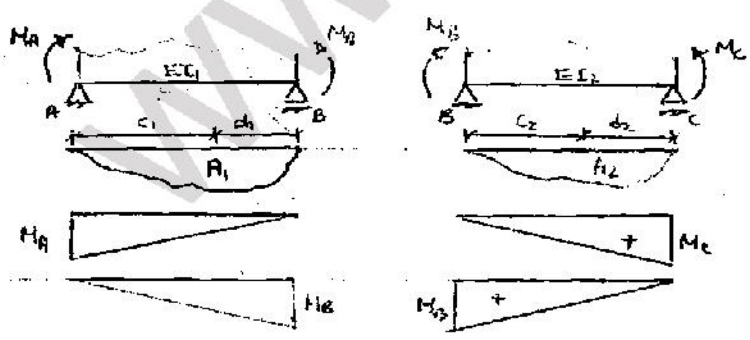
$$tg\theta_1 = tg\theta_2 \Rightarrow \frac{y_1}{l_1} = \frac{y_2}{l_2}$$

$$y_1 = \Delta_B - \Delta_A + \delta_{A/B} \quad , \quad y_2 = -\delta_{C/B} - \Delta_B + \Delta_C$$

* وقتی نقطه A بالای مماس است $\delta_{A/B}>0$ و وقتی پایین مماس است $\delta_{A/B}<0$.
که لنگر خمشی مثبت　　　که لنگر خمشی منفی

$$\frac{y_1}{l_1} = \frac{y_2}{l_2} \Rightarrow \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l_1} + \frac{\delta_{A/B}}{l_1} = -\frac{\delta_{C/B}}{l_2} + \frac{-\Delta_B + \Delta_C}{l_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta_{A/B}}{l_1} + \frac{\delta_{C/B}}{l_2} = \frac{\Delta_A}{l_1} - \Delta_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) + \frac{\Delta_C}{l_2} \qquad (1)$$



$$\delta_{A/B} = \frac{A_1 c_1}{EI_1} + \frac{M_A l_1}{2EI_1}\cdot\frac{l_1}{3} + \frac{M_B l_1}{2EI_1}\cdot\frac{2l_1}{3}$$

$$\delta_{C/B} = \frac{A_2 d_2}{EI_2} + \frac{M_C l_2}{2EI_2}\cdot\frac{l_2}{3} + \frac{M_B l_2}{2EI_2}\cdot\frac{2l_2}{3}$$

معادلات بدست آمده را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم :

$$\frac{A_1 c_1}{E I_1 l_1} + \frac{M_A l_1}{6EI_1} + \frac{M_B l_1}{3EI_1} + \frac{A_2 d_2}{E I_2 l_2} + \frac{M_C l_2}{6EI_2} + \frac{M_B l_2}{3EI_2} = \frac{\Delta_A}{l_1} - \Delta_B\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) + \frac{\Delta_C}{l_1}$$

$$\Longrightarrow \quad M_A\left(\frac{l_1}{I_1}\right) + 2M_B\left(\frac{l_1}{I_1}+\frac{l_2}{I_2}\right) + M_C\left(\frac{l_2}{I_2}\right) = -6\,\frac{A_1 c_1}{I_1 l_1} - \frac{6A_2 d_2}{I_2 l_2}$$

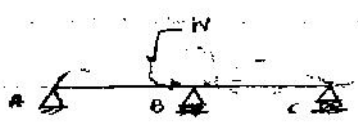
$$+6E\left[\frac{\Delta_A}{l_1} - \Delta_B\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) + \frac{\Delta_C}{l_2}\right]$$

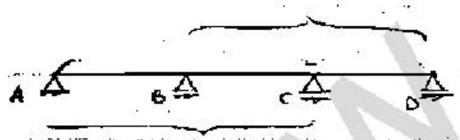
رابطه سه لنگری

اگر $I_1 = I_2$ باشد :

$$M_A l_1 + 2M_B(l_1+l_2) + M_C l_2 = -6\,\frac{A_1 c_1}{l_1} - 6\,\frac{A_2 d_2}{l_2} + 6EI\left[\frac{\Delta_A}{l_1} - \Delta_B\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) + \frac{\Delta_C}{l_2}\right]$$

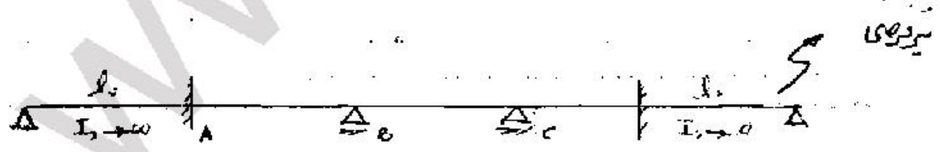
★ اگر تیری مانند شکل روبرو داشته باشد ، تیر یک درجه نامعین است ، $(M_A = M_C = 0)$ با یک معادله از رابطه سه لنگری بدست می‌آوریم در نتیجه مسئله حل خواهد شد.





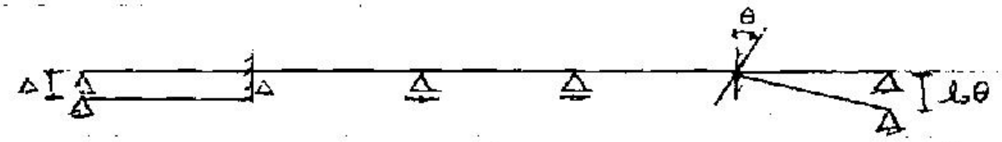
$n=2$ درجه نامعینی

★ معادلات سه لنگری را برای تیرهای مشخص شده می‌نویسیم و مسئله را حل می‌کنیم.



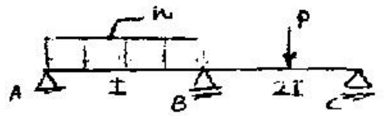
★ برای حل مسئله بالا چون فقط یک معادله سه لنگری می‌توانیم بنویسیم یک تیر فرضی با I_0 بی‌نهایت درنظر می‌گیریم که تغییر شکل ندارد و به طول هم بستگی ندارد و معادله سه لنگری دیگری هم می‌نویسیم .

◀ شیب تکیه گاهی در تیر فرضی با $I_0 \to \infty$ باید برابر با شیب تکیه‌گاهی تکیه‌گاه گیردار باشد .



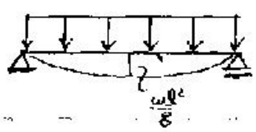
۸ اگر نشست تکیه‌گاهی و دوران را با هم داشته باشیم باید تکیه‌گاه فرضی را به اندازهٔ $\Delta + l_0\theta$ تغییر مکان دهیم.

مثال) نیروهای تکیه‌گاهی را به دست آورید.

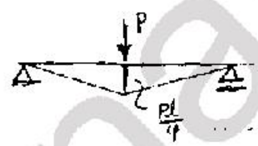


$\Delta_A = 0.01\ m \quad , \quad \Delta_B = -0.01\ m$

$\Delta_C = 0.005\ m$



$\begin{cases} A_1 = \frac{wl^3}{12} \\ c_1 = d_1 = \frac{l}{2} \end{cases}$



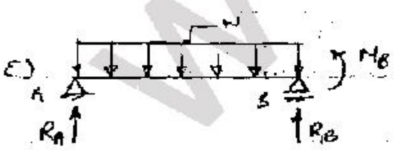
$\begin{cases} A_2 = \frac{Pl^2}{8} \\ c_2 = d_2 = \frac{l}{2} \end{cases}$

$$M_A\left(\frac{l}{I}\right) + 2M_B\left(\frac{l}{I} + \frac{l}{2I}\right) + M_C\left(\frac{l}{2I}\right) = -6\,\frac{\frac{wl^3}{12}\cdot\frac{l}{2}}{I\,l} - 6\,\frac{\frac{Pl^2}{8}\cdot\frac{l}{2}}{(2I)\,l}$$

$$+ 6E\left[\frac{0.01}{l} + 0.01\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l}\right) + \frac{0.005}{l}\right]$$

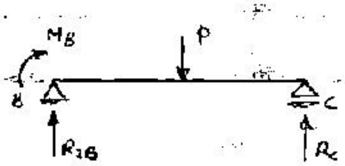
$$\Longrightarrow \frac{3M_B l}{I} = -\frac{wl^3}{4I} - \frac{3Pl^2}{16I} + 6E\left[\frac{0.035}{l}\right]$$

$$\Longrightarrow M_B = -\frac{wl^2}{12} - \frac{Pl}{16} + \frac{0.07EI}{l^2}$$



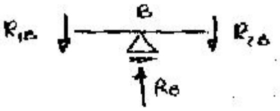
$R_A = \frac{wl}{2} + \frac{M_B}{l}$

$R_{1B} = \frac{wl}{2} - \frac{M_B}{l}$



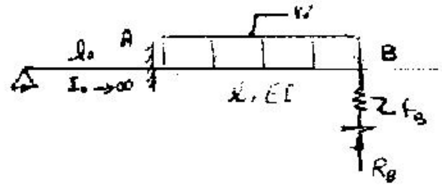
$R_C = \frac{P}{2} + \frac{M_B}{l}$

$R_{2B} = \frac{P}{2} - \frac{M_B}{l}$

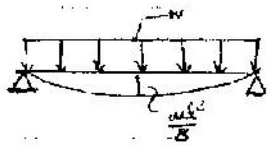


$R_B = R_{1B} + R_{2B} = \frac{wl}{2} + \frac{P}{2} - \frac{2M_B}{l}$

مثال ۲) مسئله را با روش سه لنگری حل کنید.



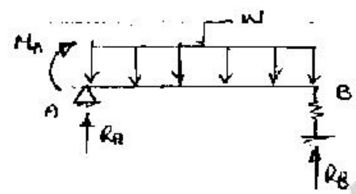
$$M_0\left(\frac{l_0}{I_0}\right) + 2M_A\left(\frac{l_0}{I_0}+\frac{l}{I}\right) + M_B\left(\frac{l}{I}\right)$$
$$= -6\frac{A_0 c_0}{I_0 l_0} - 6\frac{A_1 d_1}{I l} + 6E\left[\frac{\Delta_0}{l_0} - \Delta_A\left(\frac{1}{l_0}+\frac{1}{l}\right) + \frac{\Delta_B}{l}\right]$$



$$A_1 = \frac{wl^3}{12}, \quad c = d_1 = \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow 2M_A l = -6\frac{\frac{wl^3}{12}\cdot\frac{l}{2}}{l} + 6EI\left(\frac{-f_B R_B}{l}\right)$$
$$\Rightarrow 2M_A l = -\frac{wl^3}{4} - 6\frac{EI}{l}(f_B R_B)$$
$$\Rightarrow M_A = -\frac{wl^2}{8} - \frac{3EI}{l^2}(f_B R_B)$$

با این رابطه θ_B را صفر می‌کنند.

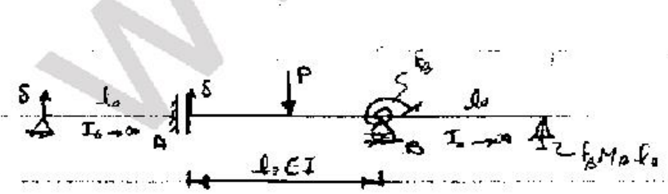


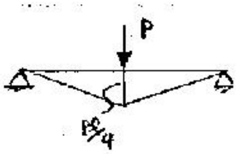
$$R_A = \frac{wl}{2} - \frac{M_A}{l}$$
$$R_B = \frac{wl}{2} + \frac{M_A}{l}$$

$$R_B = \frac{wl}{2} - \frac{wl}{8} - \frac{3EI f_B R_B}{l^3} = \frac{3wl}{8} - \frac{3EI}{l^3}(f_B R_B)$$

$$\rightarrow R_B = \frac{\frac{3wl}{8}}{1+\frac{3EI f_B}{l^3}}$$

مثال ۳) مسئله را با روش سه لنگری حل کنید.





$$\begin{cases} A = \frac{Pl^2}{8} \\ c = d = l/2 \end{cases}$$

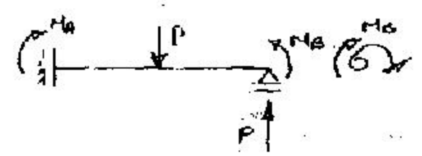
$$M_0\left(\frac{l_0}{I_0}\right) + 2M_A\left(\frac{l_0}{I_0}+\frac{l}{I}\right) + M_B\left(\frac{l}{I}\right)$$
$$= -6\frac{A_0 c_0}{l_0 I_0} - 6\frac{Pl^2/8 \cdot l/2}{l I}$$
$$+ 6E\left[\frac{\delta}{l_0} - \delta\left(\frac{1}{l_0}+\frac{1}{l}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 2M_A l + M_B l = -\frac{3Pl^2}{8} - \frac{6EI\delta}{l} \quad (1)$$

$$\theta_B = F_B M_B \Rightarrow \Delta_0 = -F_B M_B l_0$$

$$M_A\left(\frac{l}{I}\right) + 2M_B\left(\frac{l}{I} + \frac{l_0}{I_0}\right) + M_0\left(\frac{l_0}{I_0}\right) = -6\,\frac{Pl^2/8 \cdot l/2}{l} - 6\,\frac{A_0 d_0}{I_0 l_0} + 6E\left[\frac{\delta}{l} - \delta\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l}\right) + \frac{\Delta_0}{l_0}\right]$$

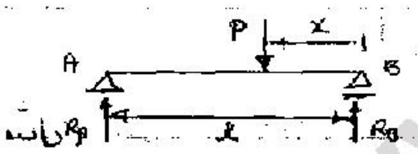
$$\Longrightarrow\; M_A l + 2M_B l = -\frac{3Pl^2}{8} + \frac{6EI\delta}{l} - 6EI F_B M_B \qquad (2)$$



$$M_B + \frac{Pl}{2} = M_A \qquad (3)$$

◄ خط تاثیر

✓ تغییرات یکی از عوامل (لنگر خمشی، نیروی برشی، نیروی محوری، شیب، خیز، عکس العمل تکیه‌گاه) وقتی که تک بار واحد روی سازه حرکت کند را خط تاثیر گویند.



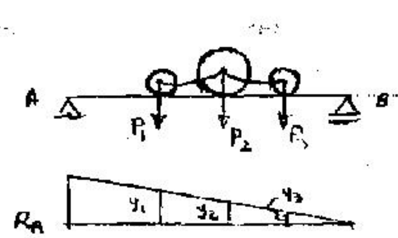
$$R_A = \frac{Px}{l} \qquad \text{ضریب تاثیر}: \; y = \frac{x}{l}$$

$$R_B = \frac{P(l-x)}{l} \qquad y = \frac{l-x}{l}$$

$$R_A = Py$$

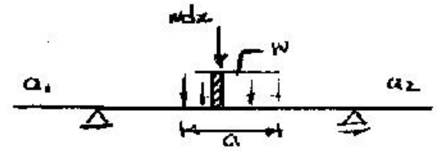
◄ برای طراحی پل‌ها و تیرهای جرثقیل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

★ نکته: خط تاثیر با بارگذاری ارتباطی ندارد.

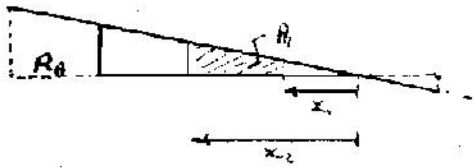


$$R_A = \sum_{i=1}^{3} P_i y_i$$

★ اصل اجتماع قوا (جمع آثار) برقرار است.



$$R_A=\int_{x_1}^{x_2}(w\,dx)\,y = w\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = w A_1$$



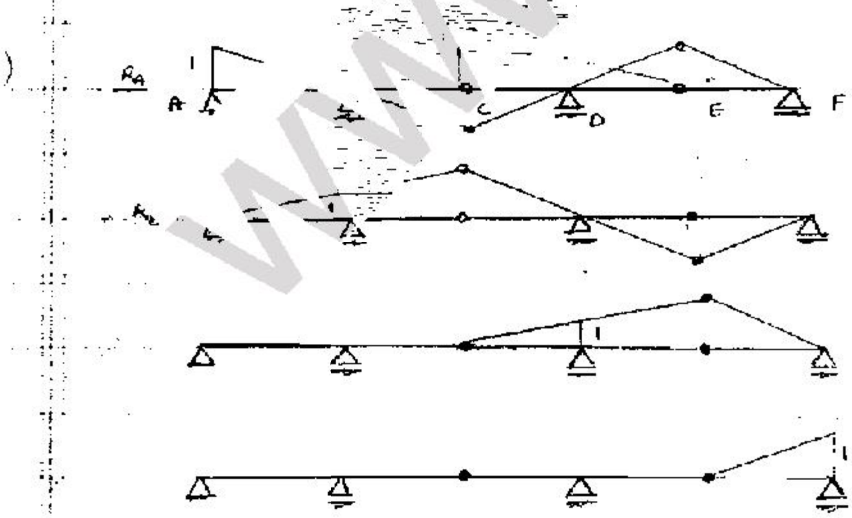
▶ اگر تیر از دو طرف ادامه پیدا کند R_A و R_B همچنان معادلات خطی هستند بنابراین خط تاثیر آنها از دوطرف ادامه می کند.

▶ تکیه گاه B را برمی داریم بجای آن را قرار می دهیم

تعیین یک دوران جسم صلب ... تغییر مکان مجازی) . چون نیروها در حال تعادل اند بنابراین کار ناشی از تغییر مکان ... است

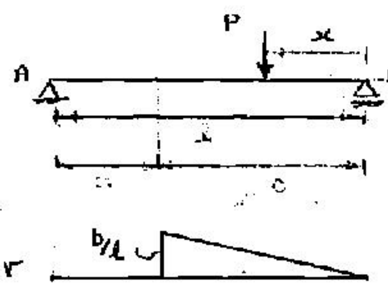
$$R_B(\overline{BB'}) - Py = 0 \qquad \boxed{\;P\,\frac{y}{\overline{BB'}}}$$

مثال) خط تاثیر R_A را بدست آورید.

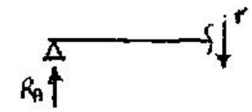


▶ از روی خط تاثیر می توانیم نحوه بارگذاری برای max شدن عکس العمل تکیه گاهی را بدست آوریم.

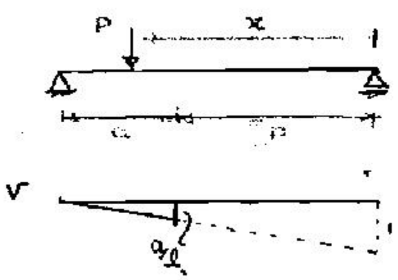
★ خط تاثیر نیروی برشی :



$0 < x < b$



$V = R_A$



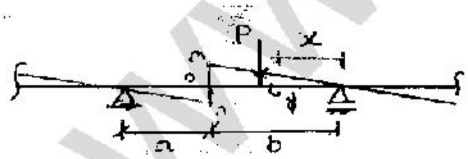
$b < x < l$

$V = -R_B$

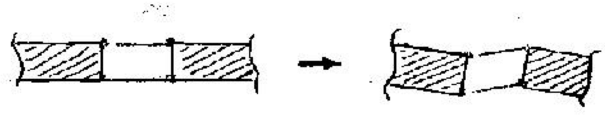
خط تاثیر نیروی برشی

◄ در تیرهای ساده برای رسم خط تاثیر نیروی برشی کافی است خط تاثیر R_A و R_B را رسم کنیم و در نقطه مورد نظر یک ناپیوستگی به ارتفاع داریم ولی شیب سمت چپ و راست برابرند.

★ رسم خط تاثیر نیروی برشی با استفاده از روش کار مجازی :



★ مقطعی که برش می‌خواهیم را تبدیل به مکانیسم می‌کنیم :



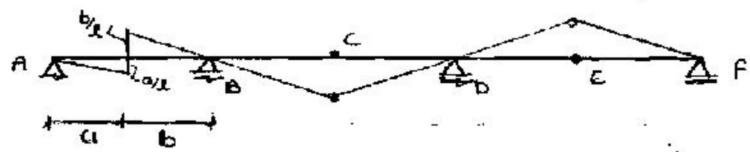
شیب دو طرف یکسان است.

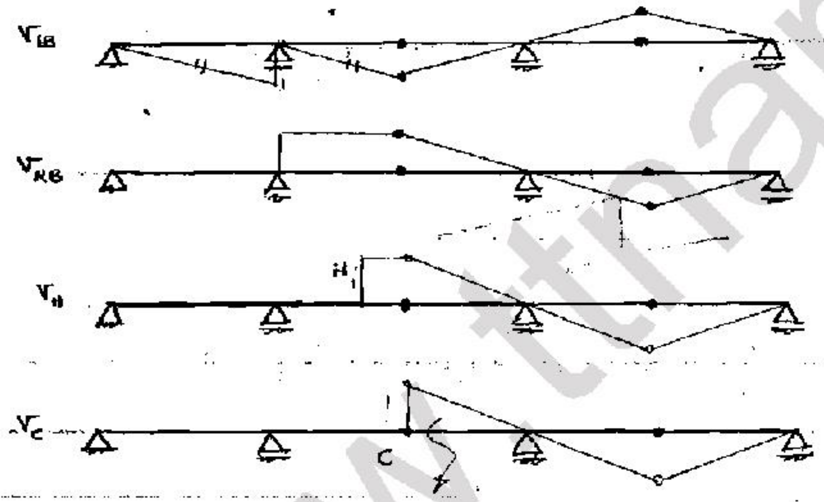
$$V(\bar{on}) + V(\bar{om}) - Py = 0 \Rightarrow V(\bar{nm}) = Py$$

$$\Rightarrow V = P\frac{y}{\bar{nm}}$$

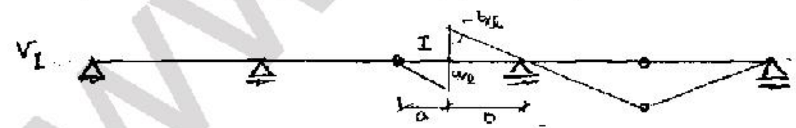
$$\frac{\overline{on}}{a} = \frac{\overline{om}}{b} = \frac{\overline{nm}}{l} = \frac{1}{l} \Rightarrow \begin{cases} \overline{on} = \frac{a}{l} \\ \overline{om} = \frac{b}{l} \end{cases}$$

مثال) خط تأثیر نیروی برشی را در نقاط مشخص شده رسم کنید.

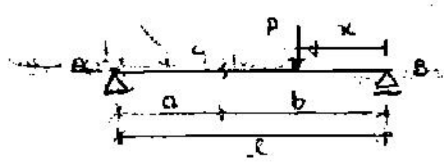




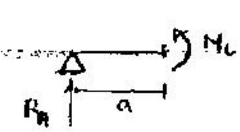
چون مفصل داریم هم شیب سمت چپ و راست برابر شود



◄ خط تأثیر لنگر خمشی

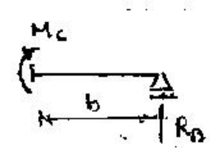


$0<x<b$



$M_c = R_A(a)$

$b<x<l$

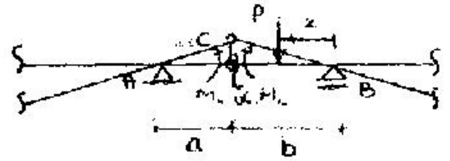


$M_c = R_B(b)$

$$\tan\theta_1 = \frac{b_1}{b} = \frac{b}{l} \quad , \quad \tan\theta_2 = \frac{b_2}{b} = \frac{a}{l}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta_1 + \tan\theta_2 = 1$$

۸. رسم خط تأثیر لنگر خمشی با استفاده از روش کار مجازی :



باید مقدار α را طوری بدست آوریم تا شیب سمت چپ و راست مشخص شود.

$$M_c(\theta_1) + M_c(\theta_2) - Py = 0$$

$$M_c(\theta_1 + \theta_2) = Py$$

$$M_c(\theta) = Py \Rightarrow M_c = P\left(\frac{y}{\theta}\right)$$

* اگر $\theta = 1$ باشد ، y خط تأثیر لنگر خمشی خواهد شد.

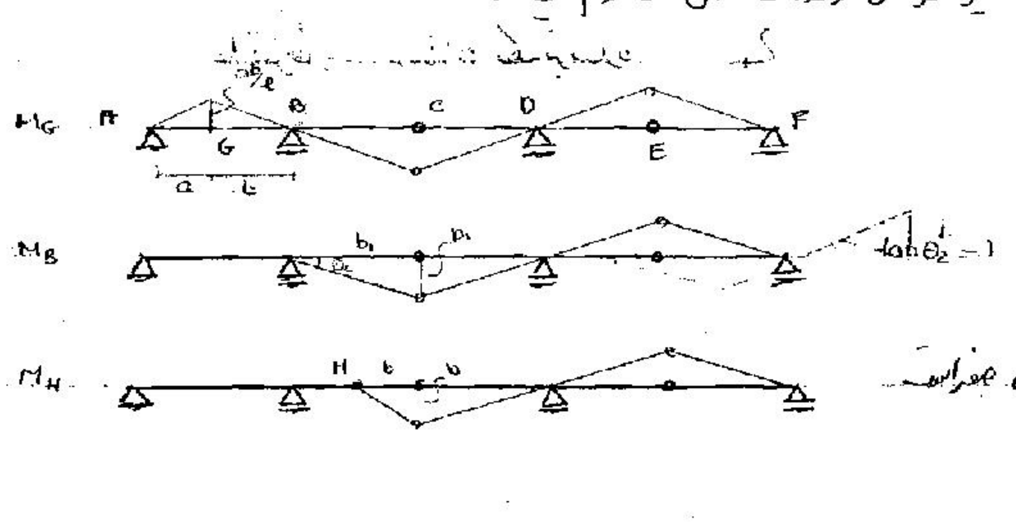
$$\theta_1 = \frac{\alpha}{a} \quad , \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{b} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{b} = \alpha\frac{l}{ab}$$

$$\Rightarrow \quad M_c = \frac{Py}{\alpha\frac{l}{ab}} \quad , \quad \alpha\frac{l}{ab} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{ab}{l} \quad \Rightarrow$$ y خط تأثیر

$$\Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{b}{l} \quad , \quad \theta_2 = \frac{a}{l}$$

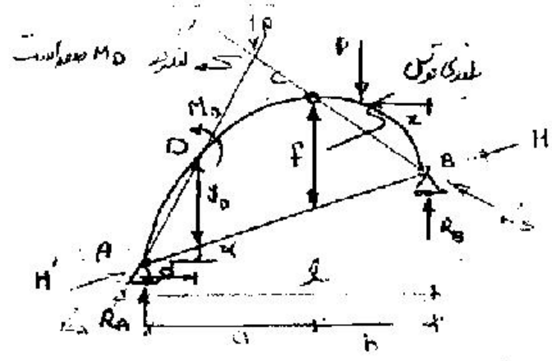
* شیب ها را باید طوری قرار دهیم که لنگر مثبت ، کار مثبت انجام دهد.

مثال) خط تأثیر لنگر خمشی را در نقاط مشخص شده رسم کنید.



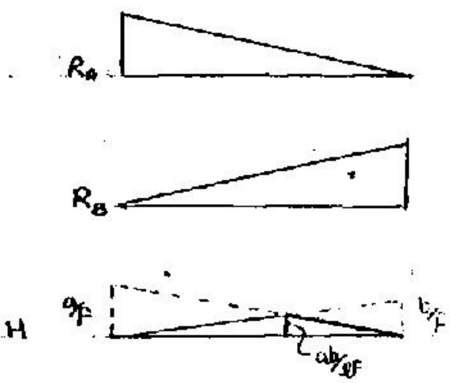
خط تأثیر مفصل خمشی صفر است

◄ خط تأثیر قوس ها



$H = H'\cos\alpha$ اینس اس

$R_A = \frac{Px}{l}$, $R_B = \frac{P(l-x)}{l}$



$0 < x < b$

$R_A(a) - H'f\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow Hf = R_A(a) \Rightarrow H = R_A(\frac{a}{f})$

$b < x < l \Rightarrow R_B(b) - H'f\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow Hf = R_B(b) \Rightarrow H = R_B(\frac{b}{f})$

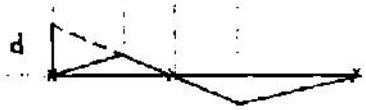
* خط تأثیر رانش افقی در یک قوس مانند خط تأثیر لنگر خمشی در تیرهای ساده است.

* می خواهیم خط تأثیر لنگر خمشی در نقطه D را رسم کنیم.

$0 < x < l-d \qquad M_D = R_A(d) - Hy_D$

$l-d < x < l \qquad M_D = R_B(l-d) - Hy_D$

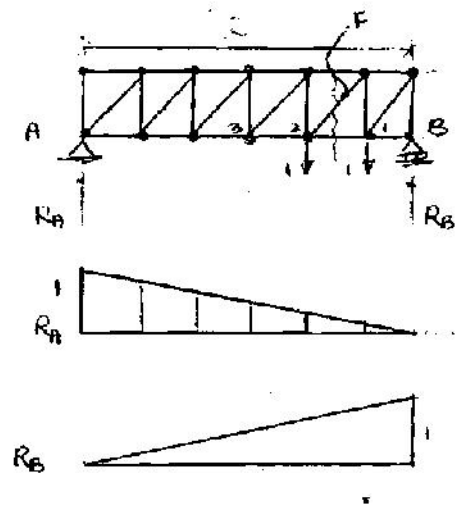
خط تأثیر لنگر خمشی در نقطه D یک تیر ساده



◄ اگر تکیه گاه B را به مفصل C وصل کنیم و خط را امتداد دهیم و تکیه گاه A را به نقطه D وصل کنیم و خط حاصل بین آنها را امتداد دهیم محل برخورد این دو خط محل اثر P است که در آن صورت M_D صفر می شود.

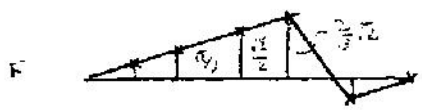
★ خط تأثیر در خرپاهای معین

* در مسئله فرض می‌شود که بار بر روی تار بالا حرکت می‌کند یا تار پایین.



◀ کلی‌ترین روش این است که بار واحد را بر روی هر گره قرار می‌دهیم و عکس‌العمل تکیه‌گاه را به‌دست می‌آوریم و نقاط به‌دست آمده را به‌هم وصل می‌کنیم تا خط تأثیر به‌دست آید.

◀ حال می‌خواهیم خط تأثیر عضو F را رسم کنیم. پس بار واحد را بر روی گره‌ها قرار می‌دهیم:



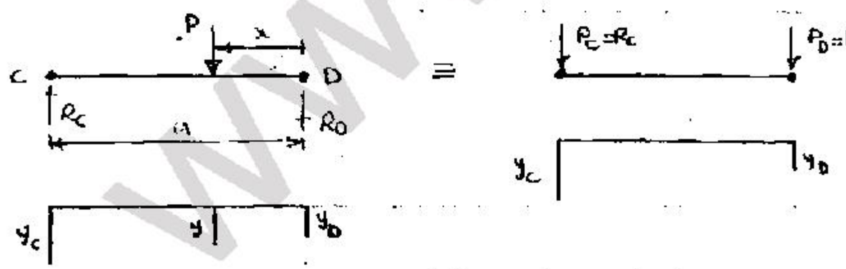
• گره اول: $R_A + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

• گره دوم: $\frac{1}{3} - 1 + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$$\Longrightarrow F = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

• گره سوم: $\frac{1}{2} - 1 + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

• گره چهارم: $\frac{2}{3} - 1 + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F = \frac{\sqrt{2}}{6}$



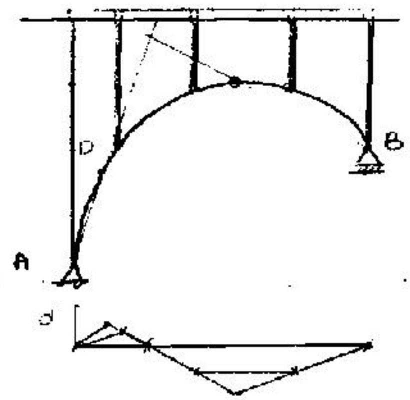
$$P_C = R_C = \frac{Px}{a}, \quad P_D = R_D = \frac{P(a-x)}{a}$$

$$Py = P_C y_C + P_D y_D = \frac{Px}{a} y_C + \frac{P(a-x)}{a} y_D \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{a} y_C + \frac{a-x}{a} y_D}$$

★ ثابت می‌شود که بین دو نقطه، خط تأثیر، خطی است.

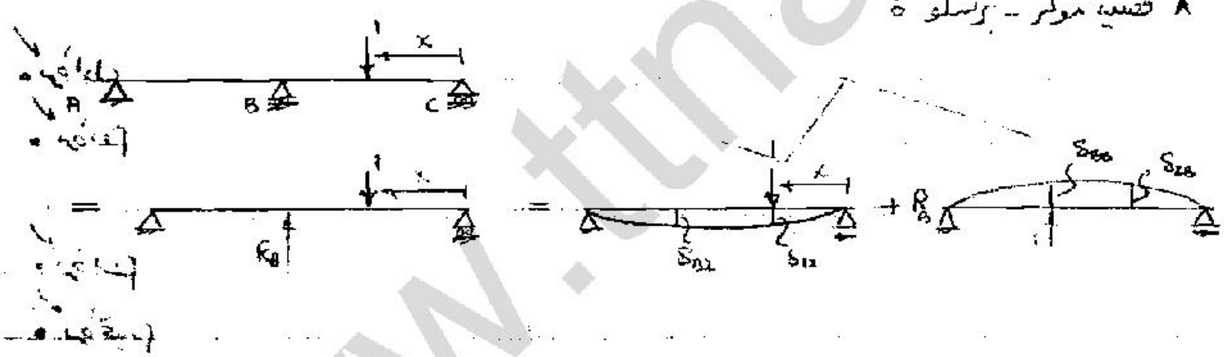
★ باید توجه داشته باشیم که اگر بار واحد بر روی تار بالا حرکت کند باید نیرو را در گره‌های بالایی قرار دهیم و خط تأثیر را رسم کنیم.

◀ اگر یک سری میله‌هایی داشتیم که بار را به قوس منتقل می‌کنند باید برای رسم خط تأثیر تکیه‌گاهی در یک نقطه



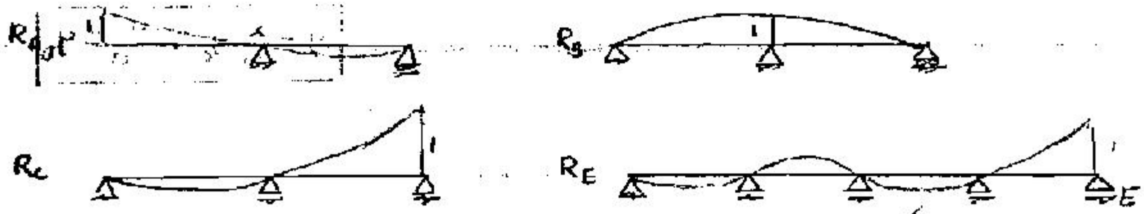
◀ خط تأثیر سازه‌های نامعین

A تکیه‌گاه مولر - برسلو

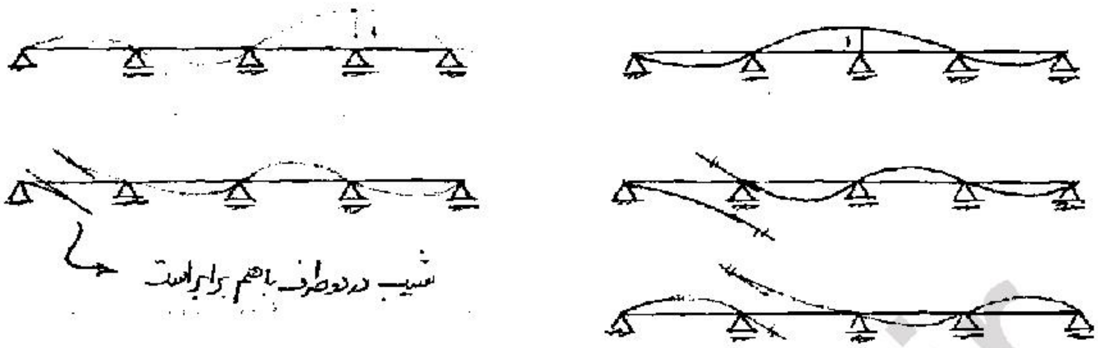


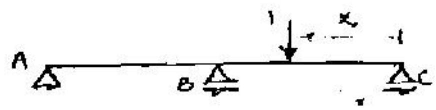
$$\delta_{BB} R_B = \delta_{Bx} \Rightarrow R_B = \frac{\delta_{Bx}}{\delta_{BB}} = \frac{\delta_{xB}}{\delta_{BB}}$$

◀ برای بدست آوردن خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی، تکیه‌گاه را برمی‌داریم و به جای آن یک بار واحد قرار می‌دهیم. تیر شکلی به خود می‌گیرد (منحنی الاستیک). اگر تمامی تغییرمکان‌ها را بر تغییرمکان نقطه تکیه‌گاه تقسیم کنیم خط تأثیر آن عکس‌العمل بدست می‌آید. بنابراین در خود تکیه‌گاه مقدار یک است.



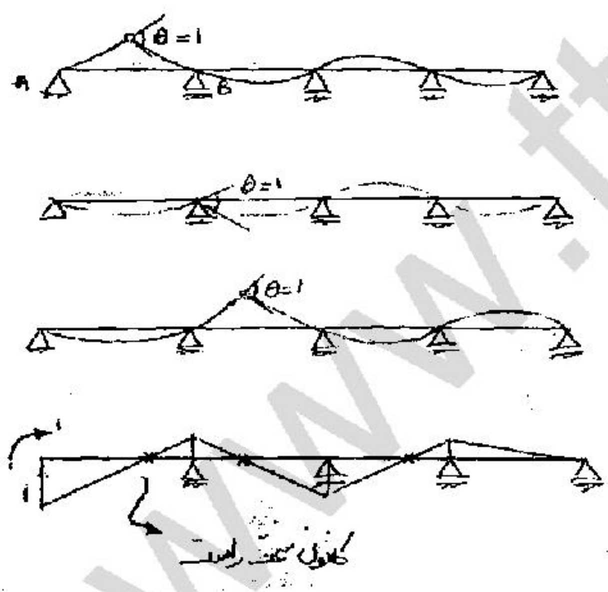
شمای خط تأثیر ← به طور تقریبی رسم می‌شود



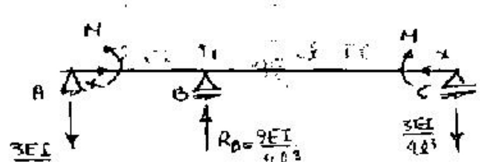


◄ برای رسم خط تأثیر θ_A باید یک بار، بار واحد را در فاصلهٔ BC قرار دهیم و θ_A را برحسب x بدست آوریم و بار دیگر بار واحد را در فاصلهٔ AB قرار دهیم و خط تأثیر θ_A را بدست می‌آوریم.

★ برای رسم خط تأثیر تلارچشی در یک نقطه باید توجه داشته باشیم که اختلاف شیب بین دو مماس سمت چپ و راست ۱ است.



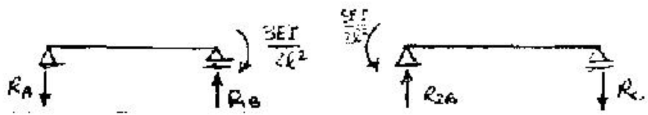
مثال: خط تأثیر R_B را رسم کنید.



$$M_A(l) + 2M_B(l+2l) + M_C(2l) = 6EI\left[-\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\right)\right]$$

$$\rightarrow 6M_B l = 6EI\cdot\left(-\frac{3}{2l}\right)$$

$$\rightarrow M_B = -\frac{3EI}{2l^2}$$



$$R_A = R_{1B} = \frac{3EI}{2l^3} \quad , \quad R_C = R_{2B} = \frac{3EI}{4l^3} \quad \Rightarrow \quad R_B = R_{1B} + R_{2B} = \frac{9EI}{4l^3}$$

$$AB: \quad M = -\frac{3EI}{2l^3}x = EIy'' \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{3x}{2l^3} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{3x^2}{4l^3} + A$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{x^3}{4l^3} + Ax \quad (\mathrm{I})$$

$$BC: \quad M = -\frac{3EI}{4l^3}x = EIy'' \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{3x}{4l^3} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{3x^2}{8l^3} + B$$

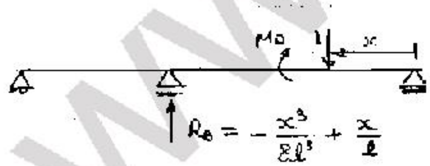
$$\Rightarrow \quad y = -\frac{x^3}{8l^3} + Bx \quad (\mathrm{II})$$

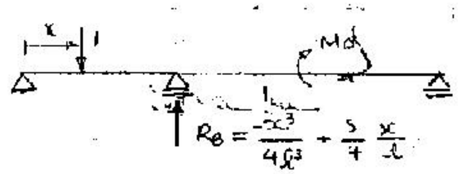
$$y_{\mathrm{I}}(x=l) = y_{\mathrm{II}}(x=2l) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4} + Al = -1 + 2Bl$$

$$y'_{\mathrm{I}}(x=l) = -y'_{\mathrm{II}}(x=2l) \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{4l} + A = \left(\frac{3}{2l} - B\right)$$

$$\begin{cases} A - 2B = -\frac{3}{4l} \\ A + B = \frac{9}{4l} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{5}{4l} \\ B = \frac{1}{l} \end{cases}$$

$$y_{\mathrm{I}} = -\frac{x^3}{4l^3} + \frac{5}{4}\frac{x}{l} \quad , \quad y_{\mathrm{II}} = -\frac{x^3}{8l^3} + \frac{x}{l}$$





$$\mathrm{II} \begin{cases} 0 < x < l & M_D = R_C l - (1)(l - x) \\ l < x < 2l & M_D = R_C l \end{cases}$$

⊲ اختلاف شیب دو طرف ۱ است. $\Rightarrow$

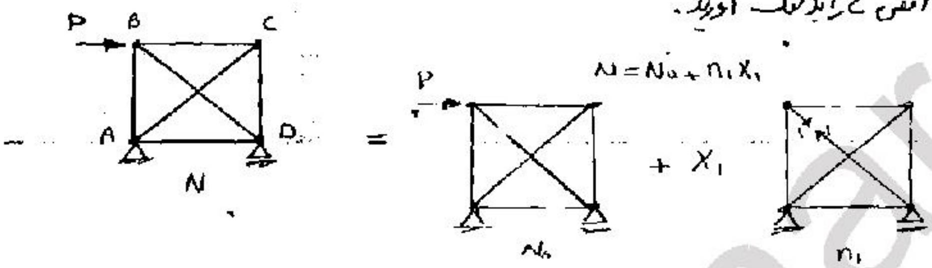
$$\mathrm{I} \; \{ \; 0 < x < l \quad M_D = R_C l$$

⊲ بقیه خط تأثیرها را می‌توانیم با استفاده از تعادل
بدست آوریم.

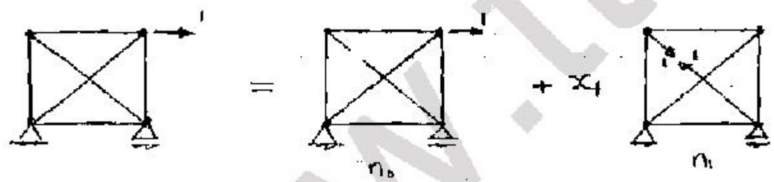
۵ اگر خط تأثیر R_B را داشتیم و می‌خواستیم خط تأثیر لنگر خمشی را در وسط دهانه BC رسم کنیم.

۱. در دو طرف نقطه مورد نظر شکاف قرار می‌دهیم
و سپس منحنی تغییر شکل (جمع انحناها) را تقسیم
بر اساس شیب سمت چپ و راست نقطه مورد نظر می‌کنیم ⇐ منحنی خط تأثیر بدست می‌آید.

مثال) تغییر مکان افقی c را بدست آورید.



$$\Delta_1' + \delta_{11} X_1 = 0 \implies \sum \frac{N_0 n_1 l}{EA} + X_1 \sum \frac{n_1^2 l}{EA} = 0$$



$n = n_0 + n_1 X_1$

$$\Delta_1' + \delta_{11} x_1 = 0 \implies \sum \frac{n_0 n_1 l}{EA} + x_1 \sum \frac{n_1^2 l}{EA} = 0$$

$$1 \times \delta_{HC} = \sum \frac{N n l}{EA} = \sum \frac{(n_0 + n_1 x_1) N l}{EA} = \sum \frac{n_0 N l}{EA} + x_1 \sum \frac{n_1 N l}{EA}$$

$$= \sum \frac{n_0 N l}{EA} + x_1 \sum \frac{n_1 (N_0 + n_1 X_1) l}{EA} = \sum \frac{n_0 N l}{EA} + x_1 \left[\underbrace{\sum \frac{n_1 N_0 l}{EA} + X_1 \sum \frac{n_1^2 l}{EA}}_{0} \right]$$

$$\implies 1 \times \delta_{HC} = \sum \frac{n_0 N l}{EA}$$

۵ نتیجه می‌شود که برای بدست آوردن تغییر مکان در یک سازه نامعین کافی است سازه با بار واحد را معین کنیم و
تغییر مکان‌ها را طبق رابطه بالا بدست آوریم.

$$1\times\delta_{HC} = \sum \frac{Nn\ell}{EA} = \sum \frac{n(N_0+n_1X_1)\ell}{EA} = \sum \frac{N_0 n\ell}{EA} + X_1\sum\frac{n n_1\ell}{EA}$$

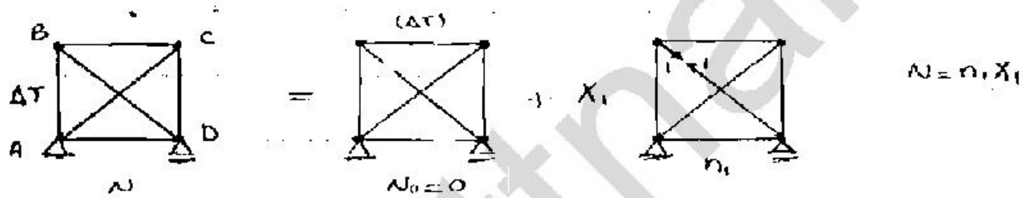
$$= \sum \frac{N_0 n\ell}{EA} + X_1 \sum \frac{(n_0+n_1X_1)n_1\ell}{EA} = \sum \frac{N_0 n\ell}{EA} + X_1\Big[\underbrace{\sum\frac{n_0n_1\ell}{EA} + X_1\sum\frac{n_1^2\ell}{EA}}_{0}\Big]$$

$$\Rightarrow \quad 1\times\delta_{HC} = \sum \frac{N_0 n\ell}{EA}$$

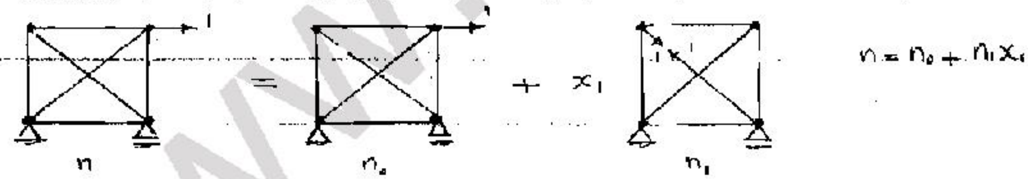
ه کافی است سازه با بارگذاری خارجی را معین حل کنیم

و سازه با بار واحد را معین و تغییر مکان ها را بدست آوریم. نهایتاً

◄ درصورتی که هریک از اعضا به اندازه ΔT تغییر درجه حرارت داشته باشند، δ_{HC} را بدست آورید.



$$\Delta'_1 + \delta_{11}X_1 = 0 \Rightarrow \sum n_1\alpha(\Delta T)\ell + X_1\sum\frac{n_1^2\ell}{EA} = 0$$



$$\Delta'_1 + \delta_{11}x_1 = 0 \Rightarrow \sum\frac{n_0n_1\ell}{EA} + x_1\sum\frac{n_1^2\ell}{EA} = 0$$

$$1\times\delta_{HC} = \sum\frac{nN\ell}{EA} + \sum n\alpha(\Delta T)\ell = \sum\frac{(n_0+n_1x_1)N\ell}{EA} + \sum(n_0+n_1X_1)\alpha(\Delta T)\ell$$

$$= \sum\frac{n_0N\ell}{EA} + \sum n_0\alpha(\Delta T)\ell + x_1\sum\frac{n_1n_1x_1\ell}{EA} + \sum n_1x_1\alpha(\Delta T)\ell$$

$$= \sum\frac{n_0N\ell}{EA} + \sum n_0\alpha(\Delta T)\ell + x_1\Big[\underbrace{\sum n_1\alpha(\Delta T)\ell + X_1\sum\frac{n_1^2\ell}{EA}}_{0}\Big]$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{HC} = \sum n_0\alpha(\Delta T)\ell$$

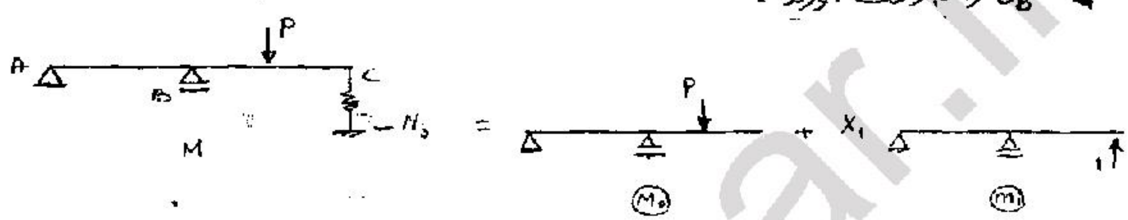
ه کافی است سازه با بار واحد را معین حل کنیم.

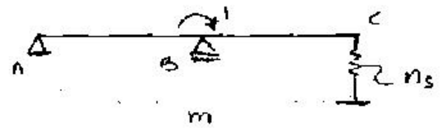
$$1 \times \delta_{HC} = \sum \frac{nN\ell}{EA} + \sum n\alpha(\Delta T)\ell = \sum \frac{(n_0 + n_1X_1)(n_1X_1)}{EA} + \sum n\alpha(\Delta T)\ell$$

$$= X_1 \left[\cancel{\sum \frac{n_0 n_1 \ell}{EA}} + X_1 \sum \frac{n_1^2 \ell}{EA} \right]$$

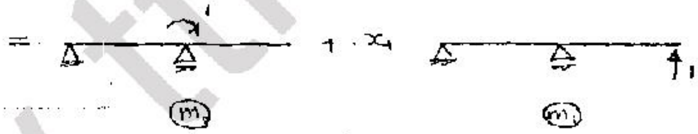
$$\Rightarrow \quad \delta_{HC} = \sum \frac{nN\ell}{EA} + \sum n\alpha(\Delta T)\ell = \sum n\alpha(\Delta T)\ell = \sum \frac{n_0 N\ell}{EA} + \sum n_0\alpha(\Delta T)\ell$$

◄ θ_B را بدست آورید.





$$M = M_0 + m_1X_1 \quad , \quad N_s = X_1$$



$$m = m_0 + m_1X_1 \quad , \quad n_s = X_1$$

سیستم اصلی : $\Delta_1 + \delta_{11}X_1 = -f_sX_1 \Rightarrow \int_\ell \frac{m_1M_0\,dx}{EI} + X_1\int_\ell \frac{m_1^2\,dx}{EI} = -f_sX_1$

سیستم بار واحد : $\Delta'_1 + \delta_{11}X_1 = -f_sX_1 \Rightarrow \int_\ell \frac{m_1m_0\,dx}{EI} + X_1\int_\ell \frac{m_1^2\,dx}{EI} = -f_sX_1$

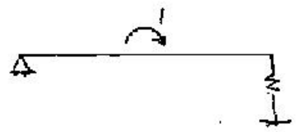
$$\star \quad \theta_B = \int \frac{Mm\,dx}{EI} + f_s n_s N_s = \int_\ell \frac{(m_0 + m_1X_1)M\,dx}{EI} + f_s X_1 X_1$$

$$= \int_\ell \frac{m_0M\,dx}{EI} + X_1 \left[\underbrace{\int_\ell \frac{m_1M\,dx}{EI} + f_sX_1}_{} \right]$$

$$\left[\cancel{\int_\ell \frac{m_1M_0\,dx}{EI} + X_1\int_\ell \frac{m_1^2\,dx}{EI} + f_sX_1} \right] = 0$$

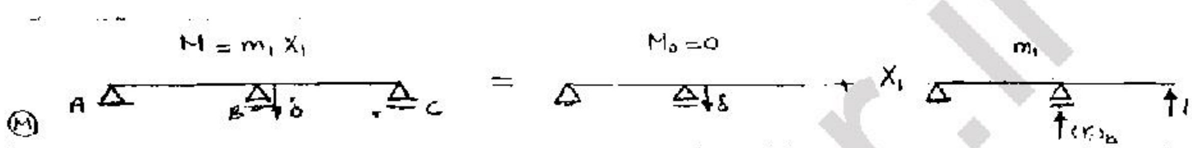
$$\Rightarrow \quad \theta_B = \int_\ell \frac{m_0M\,dx}{EI} = \int_\ell \frac{mM_0\,dx}{EI}$$

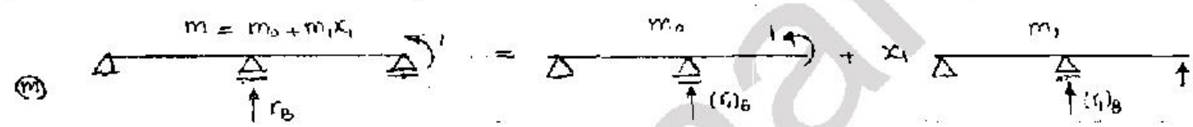
▫ اگر به جای فنر تکیه‌گاه را برداریم :



$$\theta_B = \int \frac{m_0 M\,dx}{EI} + f_s (n_0) N_s$$
$$= \int \frac{m_0 M_0\,dx}{EI} + f_s n_s (N_0)_s$$

◀ اگر تکیه‌گاه B به اندازهٔ δ نشست کند، θ_c را به دست آورید.





درسازهٔ اصلی : $\Delta_1' + \delta_{11} X_1 = 0 \Rightarrow (r_1)_B \delta + X_1 \int_l \frac{m_1^2 dx}{EI} = 0$

$\left(\Delta_1' + (W_R)_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1' - (r_1)_B \delta = 0 \Rightarrow \Delta_1' = (r_1)_B \delta \right)$

درسازه با بار واحد : $\Delta_1' + \delta_{11} X_1 = 0 \Rightarrow \int_l \frac{m_0 m_1 dx}{EI} + X_1 \int_l \frac{m_1^2 dx}{EI} = 0$

$$\star \quad 1 \times \theta_c + W_R = \int_l \frac{M m\,dx}{EI} \Rightarrow 1 \times \theta_c - (r_B)\delta = \int_l \frac{m M dx}{EI}$$

$$\Rightarrow 1 \times \theta_c - \left[(r_0)_B + X_1 (r_1)_B \right] \delta = \int_l \frac{(m_0 + m_1 X_1) M dx}{EI}$$

$$\Rightarrow 1 \times \theta_c - (r_0)_B \delta = \int_l \frac{m_0 M dx}{EI} + X_1 \Big[\underbrace{\int_l \frac{m_1 (m_1 X_1) dx}{EI} + (r_1)_B \delta}_{0} \Big]$$

$$\rightarrow 1 \times \theta_c - (r_0)_B \delta = \int_l \frac{m_0 M dx}{EI}$$ ▫ کافی است سازه با بار واحد را نیز حل کنیم.

$\star \; : \; 1 \times \theta_c - (r_B)\delta = 0$ ▫ کافی است سازه با بار واحد را نامعین حل کنیم.

حال معادل کار است ← این راه ساده‌تر است