فهرست فصول

فصل اول

مقدمه‌ای بر تحلیل ماتریسی سازه‌ها

Matrix Analysis of Structures

☑ فهرست مطالب

۱- روش سختی یا تغییر مکان

The Stiffness Method, The Displacement Method

در این روش مجهولات اصلی تغییر مکن‌ها می باشند. قبل از شروع به توضیح و جزئیات مناسب است تعاریف کلی و عمومی که در روشهای ماتریس کاربرد دارند مورد بررسی قرار گیرند.

۱-۱- تعاریف اولیه

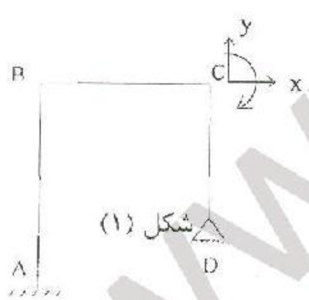
۱- گره (Node یا Joint): محل برخورد دو یا چند عضو می باشد.

۲- درجه آزادی (Degree of freedom) درجه آزادی در هر گره تعریف شده و بطور کلی امکان حرکت و تغییر مکان می باشد. بعنوان مثال در خرپای مسطح هر گره که تکیه گاه نباشد دارای امکان حرکت در دو جهت x و y بوده و درجه آزادی آن مساوی ۲ می باشد.

درجه آزادی کل سازه از مجموع درجات آزادی گره‌های آن سازه بدست می آید و نشان‌دهندهٔ ابعاد ماتریس سختی کل و بردارهای بار و تغییر مکان کل می باشد.

در تکیه‌گاهها تعدادی یا همهٔ درجات آزادی گرفته شده و پایداری سازه ها تأمین می گردد.

مثلاً در قاب شکل (۱) تعداد درجات ازادی هر گره مساوی ۳ است. (دو تغییر مکان x و y و یک چرخش حول محور z ، θ). در تکیه گاه A هر سه این تغییر مکانها گرفته شده اند، در تکیه گاه D درجات آزادی حرکت در جهات x و y گرفته شده ولی درجه آزادی حول محور zها (چرخش) موجود می باشد. درجه آزادی کل سازه برابر است با:



شکل (۱)

A B C D

$0+3+3+1=7$

۳- عضو: (Member-Element) عنصر واصل بین دو گره عضو نام دارد.

۴- بارها: (Loads) نیروهای خارجی اعمال شده به سازه بطور کلی بارهای وارده نامیده می شود.

۵- بردار نیرو و بردار تغییر مکان تعمیم یافته (Generalized Force Vector)

درجات آزادی یک گره و بارهای وارد شده بر آن را اگر چه از نظر ماهیت یکسان نیستند، برای راحتی تعبیر در یک بردار منظم می کنیم و آنرا بردار نیرو یا تغییر مکان تعمیم یافته می نامیم، بعنوان مثال تغییر مکان‌ها و چرخش در گره‌های یک قاب صلب ماهیتاً مشابه نیستند ولی ما آن‌ها را بصورت بردار تغییر مکان گرهی منظم می‌کنیم.

$\tilde{a} = (x, y, \theta)^T$

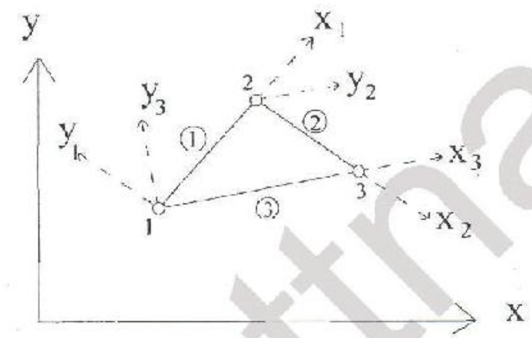
$\tilde{R} = (R_x, R_y, M_z)^T$

۶- مختصات عمومی و مختصات محلی (Global & Local Coordinate Systems)

مختصات محلی دستگاهی است که معمولاً امتداد محور عضو یکی از امتدادهای اصلی آنست (معمولاً محور x ها) در یک سازه ممکن است به تعداد اعضاء، نیاز به دستگاه مختصات منحنی داشته باشیم.

اما مختصات عمومی یا کلی دستگاه مختصاتی است که برای تمام سازه در نظر گرفته می شود، معمولاً بردارهای بار و تغییر مکان و ماتریس سختی کل سازه نسبت به این دستگاه تعریف می شود.

بعنوان مثال در شکل (۲) دستگاههای مختصات $x_1 y_1$ و $x_2 y_2$ و $x_3 y_3$ محلی و دستگاه XY عمومی می باشد.



شکل ۲

۱-۲- اصول کلی روش تغییرمکان

اصول کلی روش تغییر مکان را میتوان بصورت زیر خلاصه نمود:

رابطه ای بین تغییر مکانها و نیروها در هر عضو در مختصات محلی برقرار می کنیم (تئوری سازه ها، روابط شیب افت) $\tilde{K}.\tilde{a} = \tilde{f}$

- این ضرائب را به دستگاه مختصات عمومی منتقل می کنیم.
- اثر متقابل این ضرائب روی یکدیگر را با سوار کردن یا سر هم کردن ماتریس سختی کل در نظر می گیریم.
- دستگاه معادلات کلی را تشکیل می دهیم .
- بارهای خارجی و شرایط تکیه گاهی را اعمال می کنیم.
- دستگاه معادلات ساده شده را حل می کنیم و تغییر مکانها را بدست می آوریم.
- سایر مجهولات را با کمک روابط تحلیل سازه ها بدست می آوریم.

۱-۳- روابط سختی

بطور خیلی کلی سختی عبارتست از مقاومت یک عضو یا جسم در برابر اعمال تغییر مکان در صورتیکه جسمی دارای امکان حرکت در چند مؤلفه باشد بدیهی است که سختی آن بصورت ماتریس تعریف می شود که ضرایب یا مؤلفه های این ماتریس را با K_{ij} نشان داده و شرح زیر تعریف می کنیم:

یک ضریب سختی K_{ij} عبارتست از نیروی ایجاد شده در درجه آزادی i تحت اثر اعمال یک تغییر مکان واحد در درجه آزادی j وقتیکه تمامی سایر درجات آزادی گرفته شده اند. ابعاد ماتریس سختی مساوی تعداد درجات آزادی عضو می باشد. بعنوان مثال در مورد خرپای صفحه ای ماتریس سختی ۴×۴ می باشد زیرا یک عنصر خرپائی دارای ۲ گره بوده و در هر گروه ۲ درجه آزادی موجود است. در مورد قاب مسطح ماتریس سختی عضو ۶×۶ و در مورد خرپای فضائی نیز ۶×۶ می باشد.

۱-۴- بدست آوردن ماتریس سختی یک عنصر خرپای مسطح (میله)

فرض می کنیم که میله خرپائی $2'-1'$ که فقط تحت تأثیر نیرو تغییر مکان در امتداد محورش (محور xها) قرار دارد تغییر شکل داده و به وضعیت ۲ -۱ برسد (شکل ۳) تغییر مکان نهایی دو انتها را با a_1^e و a_2^e نیروهای حاصل را با R_1^e و R_2^e نشان می دهیم. اگر تنش در میله را با σ^e و سطح مقطع انرا با A و مدول یانگ را با E^e نشان دهیم داریم :

$$R_1^e = -R_2^e = \sigma A^e \quad (1)$$

$$\sigma = \varepsilon A \quad (2)$$

که در آن ε کرنش میله می باشد که طبق تعریف عبارتست از:

$$\varepsilon = \frac{a_1^e - a_2^e}{\ell^e} \quad (3)$$

از ترکیب روابط فوق بدست می آید:

$$R_1^e = -R_2^e = \frac{a_1^e - a_2^e}{\ell^e} E^e A^e \quad (4)$$

این روابط را می‌توان بصورت ماتریس مرتب نمود.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{EA}{\ell}\right)^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

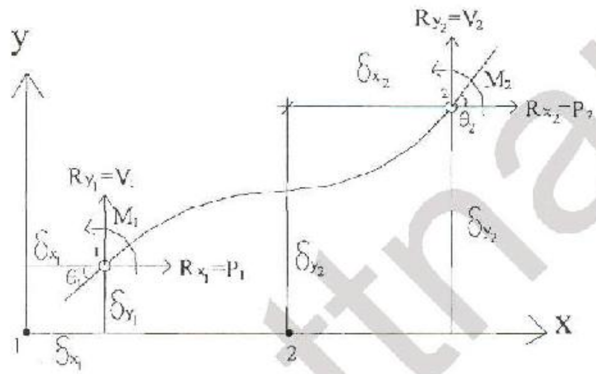
که در واقع معادله رابطه $\tilde{K}.\tilde{a} = \tilde{f}$ می باشد و از آنجا ماتریس سختی عضو میله‌ای در مختصات محلی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{\ell}\right)^e & \left(\frac{-EA}{\ell}\right)^e \\ \left(\frac{-EA}{\ell}\right)^e & \left(\frac{EA}{\ell}\right)^e \end{bmatrix} \quad (6)$$

۱-۵ ماتریس سختی عنصر تیری

یک عنصر تیری مطابق شکل (۴) دارای ۶ درجه آزادی می باشد، برای بدست آوردن ضرایب ماتریس سختی که درجات آزادی را به نیروهای گرهی مرتبط می سازد، از اصل اجتماع اثر قوا یا رویهم گذاری superposition و معادلات شیب افت و ماتریس میله استفاده می کنیم در واقع برای در جات آزادی ۱ و ۴ از روابط سختی برای میله و برای درجات آزادی ۲ و ۳ و ۵ و ۶ از روابط شیب افت استفاده می کنیم.

شکل ۴- الف



شکل ۴- ب

معادله شیب افت با صرفنظر کردن از جملهٔ مربوط به لنگرهای گیرداری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} M_{12} = \dfrac{2EI}{\ell}(2\theta_1 + \theta_2 - \dfrac{3\Delta}{\ell}) = \dfrac{2EI}{\ell}(2\theta_1 + \theta_2 - \dfrac{3(\Delta_1 - \Delta_2)}{\ell}) \\ M_{21} = \dfrac{2EI}{\ell}(\theta_1 + 2\theta_2 - \dfrac{3\Delta}{\ell}) \\ V_1 = \dfrac{M_{12} + M_{21}}{\ell} = V_2 = \dfrac{2EI}{\ell^2}(3\theta_1 + 3\theta_2 - \dfrac{6(\Delta_1 - \Delta_2)}{\ell}) \end{cases}$$

به عنوان مثال برای بدست آوردن K_{22}: طبق تعریف K_{22} عبارتست از نیروی ایجاد شده در درجه آزادی ۲ (یعنی V_1) تحت اثر اعمال تغییر مکان واحد در درجه آزادی ۲ $(\Delta_1 = 1)$ وقتی که سایر درجات آزادی گرفته شده باشند $(\theta_1 = \theta_2 = \Delta_2 = 0)$

$$\begin{cases} M_{12} = \dfrac{2EI}{\ell}(0 + 0 - \dfrac{3(-1)}{\ell}) = \dfrac{6EI}{\ell^2} = M_{21} \\ V_1 = \dfrac{\dfrac{6EI}{\ell^2} + \dfrac{6EI}{\ell^2}}{\ell} = \dfrac{12EI}{\ell^3} = K_{22} \quad (a) \end{cases}$$

یا برای بدست آوردن K_{25} طبق تعریف K_{25} عبارتست از نیروی ایجاد شده در درجه آزادی ۲ (یعنی V_1) تحت

اثر اعمال تغییر مکان واحد در درجه آزادی ۵ یعنی $(\Delta_2 = 1)$ وقتی که سایر درجات آزادی گرفته شده باشند $(\theta_1 = \theta_2 = \Delta_1 = 0)$.

$$\begin{cases} M_{12} = \dfrac{2EI}{\ell}\left(0+0-\dfrac{3(1)}{\ell}\right) = \dfrac{-6EI}{\ell^2} = M_{21} \\ V_1 = \dfrac{-\dfrac{6EI}{\ell^2} - \dfrac{6EI}{\ell^2}}{\ell} = \dfrac{-12EI}{\ell^3} = K_{25} \end{cases}$$

با مثلاً K_{13} عبارتست از نیروی ایجاد شده در درجه آزادی ۱ (یعنی P_1 شکل ۴- ب) تحت اثر اعمال تغییر مکان واحد در درجه آزادی ۳ یعنی $(\theta_1 = 1)$ وقتی که سایر درجات آزادی گرفته شده باشند، چون چرخشها و Δ ها نیروی محوری ایجاد نمی‌کند پس $K_{13} = 0$ با تجسس مشخص می‌شود که ضرائب ماتریس سختی K^e برای یک عنصر تیری در مختصات محلی به صورت زیر در می‌آید:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \dfrac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \dfrac{-EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{12EI}{\ell^3} & \dfrac{6EI}{\ell^2} & 0 & \dfrac{-12EI}{\ell^3} & \dfrac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \dfrac{6EI}{\ell^2} & \dfrac{4EI}{\ell} & 0 & \dfrac{-6EI}{\ell^2} & \dfrac{2EI}{\ell} \\ \hline \dfrac{-EA}{\ell} & 0 & 0 & \dfrac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-12EI}{\ell^3} & \dfrac{-6EI}{\ell^2} & 0 & \dfrac{12EI}{\ell^3} & \dfrac{-6EI}{\ell^2} \\ 0 & \dfrac{6EI}{\ell^2} & \dfrac{2EI}{\ell} & 0 & \dfrac{-6EI}{\ell^2} & \dfrac{4EI}{\ell} \end{array}\right] \qquad (9)$$

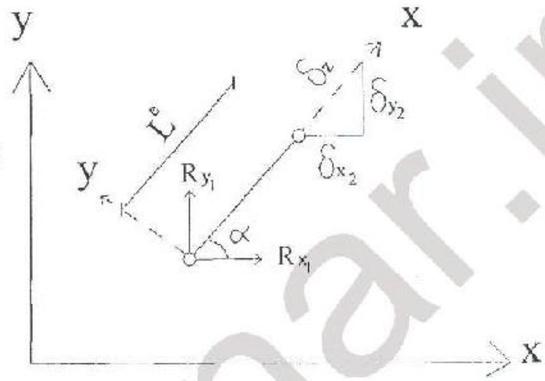
۱-۶- مختصات عمومی و تعمیم نتایج حاصل از عنصر میله‌ای برای سوار کردن یا سرهم کردن ماتریس سختی

در مورد یک عنصر خرپائی به طوریکه مشاهده کردیم وقتی در دستگاه مختصات محلی مورد مطالعه قرار گیرد (شکل ۳) دارای یک درجه آزادی در هر گره بوده و ماتریس سختی آن 2×2 و بردار بار و تغییر مکان 2×1 می‌باشد (معادله ۵). اگر همان عنصر میله ای در دستگاه مختصات عمومی مورد مطالعه قرار گیرد (شکل ۵) دارای ۲ درجه آزادی در هر گره بوده، ماتریس سختی آن 4×4 می باشد، در این حال نیرو در گره نیز دارای دو مؤلفه بوده و می توان از مفهوم « بردار نیروی گرهی» و « ماتریس سختی گره » به جای مولفه‌های نیرو ضرایب ماتریس در رابطه ۵ صحبت کرد در واقع می توان در معادله ۵

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^e \qquad (5)$$

که در آن $K_{11} = K_{22} = -K_{12} = -K_{21} = \frac{EA}{\ell}$ می‌باشد. هر یک از مؤلفه‌های بردار نیرو $(R_1 و R_2)$ را تبدیل به یک بردار و هر یک از مؤلفه‌های ماتریس سختی را تبدیل به یک زیر ماتریس نمود. در حالت کلی وقتی که در یک گره سازه درجه آزادی n باشد، هر یک از مؤلفه‌های بردارهای نیرو و تغییر مکان تبدیل به یک بردار $n\times 1$ و هر مؤلفه ماتریس تبدیل به یک زیر ماتریس $n\times n$ خواهد شد و رابطه ۵به صورت ماتریسی زیر همچنان صادق می باشد:

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{K}}_{11} & \tilde{\tilde{K}}_{12} \\ \tilde{\tilde{K}}_{21} & \tilde{\tilde{K}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{bmatrix}^e \quad (10)$$



شکل۵

به‌عنوان مثال برای یک خرپای صفحه‌ای داریم:

$$\tilde{R}_1^e = \begin{bmatrix} R_{x_1} \\ R_{y_1} \end{bmatrix}^e, \ \tilde{R}_2^e = \begin{bmatrix} R_{x_2} \\ R_{y_2} \end{bmatrix}^e, \ \tilde{a}_1 = \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{y_1} \end{bmatrix}^e, \ \tilde{a}_2 = \begin{bmatrix} \delta_{x_2} \\ \delta_{y_2} \end{bmatrix}^e \quad (b)$$

$$\tilde{\tilde{K}}_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (c)$$

برای بدست آوردن روابط بین معادلات ۵ و ۱۰ می‌توان گفت که دستگاه مختصات محلی (X) نسبت به دستگاه مختصات عمومی xy، به اندازه α دوران نموده است پس:

$$R_{x_1} = R_1 \cos\alpha, \quad R_{y_1} = R_1 \sin\alpha, \quad \delta_1 = \delta_{x_1}\cos\alpha + \delta_{y_1}\sin\alpha \quad (d)$$

یا به صورت ماتریس

$$\begin{bmatrix} R_{x_1} \\ R_{y_1} \end{bmatrix} = \tilde{\tilde{T}} R_1, \quad \tilde{a}_1 = \tilde{\tilde{T}}^T \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{y_1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

که در آن $\tilde{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$ می‌باشد.

با پیش ضرب کردن مؤلفه های رابطه ۱۰ در $\tilde{T}$ و جاگذاری در رابطه ۱۱ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}R_{x_1}\\ R_{y_1}\end{bmatrix} &= \tilde{\tilde{T}}k\tilde{\tilde{T}}^T\begin{bmatrix}\delta_{x_1}\\ \delta_{y_1}\end{bmatrix} - \tilde{\tilde{T}}k\tilde{\tilde{T}}^T\begin{bmatrix}\delta_{x_2}\\ \delta_{y_2}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}R_{x_2}\\ R_{y_2}\end{bmatrix} &= -\tilde{\tilde{T}}k\tilde{\tilde{T}}^T\begin{bmatrix}\delta_{x_1}\\ \delta_{y_1}\end{bmatrix} + \tilde{\tilde{T}}k\tilde{\tilde{T}}^T\begin{bmatrix}\delta_{x_2}\\ \delta_{y_2}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

که به صورت فشرده زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix}R_{x_1}\\ R_{y_1}\\ R_{x_2}\\ R_{y_1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{\tilde{K}}_{11} & \tilde{\tilde{K}}_{12}\\ \tilde{\tilde{K}}_{21} & \tilde{\tilde{K}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{x_1}\\ \delta_{y_1}\\ \delta_{x_2}\\ \delta_{y_2}\end{bmatrix} \quad (13)$$

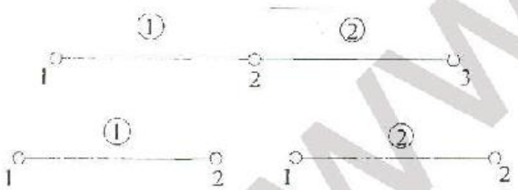
که در آن داریم:

$$\tilde{\tilde{K}}_{11} = \tilde{\tilde{K}}_{22} = -\tilde{\tilde{K}}_{12} = -\tilde{\tilde{K}}_{21} = \tilde{\tilde{T}}K\tilde{\tilde{T}}^T = K\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha\end{bmatrix}$$

$$= \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha\end{bmatrix} \quad (14)$$

۱-۷- سوار کردن یا سر هم کردن ماتریس سختی کل

مجدداً یک عنصر خرپای سطح (میله) را در نظر می گیریم این عنصر را در حالتیکه، عنصر دیگری در گره x متصل باشد مورد مطالعه قرار می دهیم (شکل ۶)



شکل۶

در این حال تعداد درجات آزادی کل سیستم مساوی $3 = 1\times3$می‌باشد، بنابراین بردار تغییر مکان یک بردار 1×3 بردار نیرو نیز یک بردار 1×3 و ماتریس سختی کل سیستم یک ماتریس1×3 3×1 می‌باشد، می‌توان گفت که تغییر مکان در نقطهٔ ۲ از ترکیب اثر در تغییر مکان دو عضو ۱ و ۲ بدست می‌آید، در واقع داریم:

$a_2 = a_2^1 + a_1^2$

اعداد بالای نمادها نشان‌دهندهٔ شمارهٔ عضو می‌باشد. از روابط قبلی داریم:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}^1 = \left(\frac{EA}{L}\right)^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^1 \qquad (15-a)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}^2 = \left(\frac{EA}{L}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^2 \qquad (15-b)$$

از ترکیب روابط (۱۵) حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2^1 + R_2^2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{L}\right)^1 & \left(\frac{-EA}{L}\right)^1 & 0 \\ -\left(\frac{EA}{L}\right)^1 & \left(\frac{EA}{L}\right)^1 + \left(\frac{EA}{L}\right)^2 & \left(\frac{-EA}{L}\right)^2 \\ 0 & \left(\frac{-EA}{L}\right)^2 & \left(\frac{EA}{L}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2^1 = a_2^2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

در اینجا قاعده ساده‌ای برای ترکیب سختی‌ها در نقاط مشترک گره‌ها بدست می آید:

« برای منظور کردن تأثیر سختی یک عضو i_m در ماتریس سختی کل سازه ضرایب سختی آن را بـه ترتیـب در سطر و ستون i و m ماتریس سختی کل قرار می‌دهیم.» توجه شود که اعداد i و m مربوط به شماره گذاری کلی سازه می باشد (شکل ۸ و ۷) در واقع هر عضو دارای یک شماره گذاری محلی بوده که همیشه ۲-۱ مـی باشـد و یک شماره‌گذاری کلی که بین i تا n تغییر می‌کند.

شکل۷- الف- شماره‌گذاری محلی و عمومی

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

شکل ۷ ب – رابطه ماتریس سختی عضو ۲ در مختصات محلی

ماتریس سختی کل سازه ماتریس است به ابعاد $n \times n$ که در آن n تعداد گره ها در کل سازه است. بردار نیـرو و بردار تغییر مکان نیز بردارهای به بعد $n \times 1$ می باشند.

$$\begin{array}{c|c} & 1 \quad 2 \quad \ldots\ldots\ i \quad \ldots\ldots\ m \quad \ldots \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & K_{11}^{2} & K_{12}^{2} & \\ & & & \\ & K_{21}^{2} & K_{22}^{2} & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

شکل۸- سوار کردن ماتریس سختی کل برای عناصر میله‌ای یک بعدی

به‌عنوان مثال می توان این مرحله را برای مجموعه سیستم میله ای شکل ۹ نشان داد، مختصات هر عضو و نیز شماره گذاری کلی در شکل مشخص است.

E=300	E=200	E=300
A=3	A=4	A=2
L=75	L=50	L=150

شکل ۹- مثال

به‌طوریکه ملاحظه می‌شود درجات آزادی کل سازه ۴ می باشد. ماتریس سختی هر یک از اعضاء را به دست می‌آوریم و مطابق شکل (۸) ترکیب می‌کنیم . ماتریس کل سازه۴×۴ می‌باشد.

$$\left(\frac{EA}{L}\right)^1=\frac{300\times 3}{75}=12 \quad ; \quad \tilde{\tilde{K}}^1=\begin{bmatrix}12 & -12\\ -12 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K^1_{11} & K^1_{12}\\ K^1_{21} & K^1_{22}\end{bmatrix}$$

عضو ۱

$$\left(\frac{EA}{L}\right)^2=\frac{200\times 4}{50}=16 \quad ; \quad \tilde{\tilde{K}}^2=\begin{bmatrix}16 & -16\\ -16 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K^2_{11} & K^2_{12}\\ K^2_{21} & K^2_{22}\end{bmatrix}$$

عضو ۲

$$\left(\frac{EA}{L}\right)^3=\frac{300\times 2}{150}=4 \quad ; \quad \tilde{\tilde{K}}^3=\begin{bmatrix}4 & -4\\ -4 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K^3_{11} & K^3_{12}\\ K^3_{21} & K^3_{22}\end{bmatrix}$$

عضو ۳

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}(12) & (-12)^1 & 0 & 0\\ (-12)^1 & (12)^1+(16)^2 & (-16)^2 & 0\\ 0 & (-16)^2 & (16)^2+(4)^3 & (-4)^3\\ 0 & 0 & (-4)^3 & (4)^3\end{bmatrix}
\end{array}$$

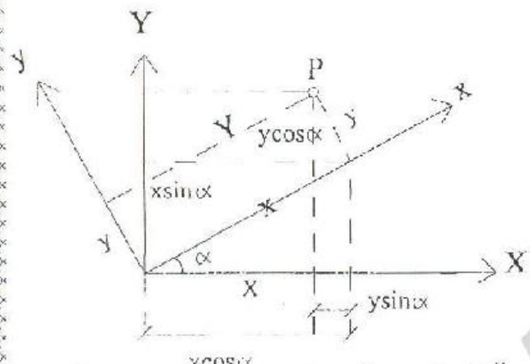
اعداد بالای ضرایب سختی نشان‌دهنده شماره عضو می‌باشند و از اینجا ماتریس سختی کل به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix}12 & -12 & 0 & 0\\ -12 & 28 & -16 & 0\\ 0 & -16 & 20 & -4\\ 0 & 0 & -4 & 4\end{bmatrix}$$

ماتریس سختی کل سازه شکل(۹)

- توجه شود که عضو ۱ بین گره های ۱ و ۲ قرار دارد پس ضرایب سختی آن در سطرها و ستونهای ۱ و ۲ نوشته می‌شود.
- عضو ۲ بین گره های ۲ و ۳ قرار دارد پس ضرایب سختی آن در سطرها و ستونهای ۲ و ۳ نوشته می‌شود.
- عضو ۳ بین گره های ۳ و ۴ قرار دارد پس ضرایب سختی آن در سطرها و ستونهای ۳ و ۴ نوشته می‌شود.

این مطلب را می‌توان برای حالتی که در هر گره به جای ۱ درجه آزادی ، nd درجه آزادی داشته باشیم تعمیم داد. بدین معنی که در شکل ۸ بجای ضرائب سختی میله یک بعدی که ماتریسهای 1×1هستند، زیر ماتریس گرهی مربوطه به ابعاد $nd\times nd$ را قرار داد و در بردارهای تغییر مکان و نیرو نیز بجای هر مولفه یک بردار $1\times nd$ قرار می گیرد و بقیه مطالب کاملاً مثل حالت $nd=1$ می باشد. بعنوان مثال در یک خرپای مسطح در مختصات عمومی تمامی ضرائب K_{ij} در رابطه شکل (۷- ب) تبدیل به زیر ماتریسهای 2×2و تمامی a_iها و R_iها تبدیل به بردارهای 2×1 می شوند و در حالت قاب مسطح K_{ij} ها تبدیل به زیر ماتریسهائی به ابعاد 3×3 و بردارهای a_i و R_iها نیز به ابعاد 3×1 خواهند بود. توجه شود که تمامی این ضرایب و یا زیر ماتریس‌ها بایستی در مختصات عمومی محاسبه شوند، یعنی پس از تعیین ماتریسهای سختی و بردارهای مربوط در دستگاه مختصات محلی می بایستی همهٔ آنها به مختصات عمومی سازه انتقال داده شوند.



۱-۸- تبدیل مختصات

۱-۸-۱- خرپای مسطح

فرض می‌کنیم که دستگاه مختصات محلی xy نسبت به دستگاه عمومی XY به‌اندازه α در جهت خلاف عقربه‌های ساعت چرخیده باشد (شکل ۱۰) در این‌حال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} X = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ Y = y\cos\alpha + x\sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}^{G} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{L} \quad (17)$$

یا به صورت ماتریسی:

$$\tilde{X} = \tilde{\tilde{T}}_0\, \tilde{x} \quad (18)$$

این رابطه برای انتقال بردارها به کار می‌رود. در مورد ماتریس سختی عضو که 4×4 می‌باشد رابطه انتقال به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{\tilde{K}}G = \tilde{\tilde{T}}^{T} K_L \tilde{\tilde{T}} \quad (19)$$

که در آن (20) $\tilde{\tilde{T}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{T}}_0 & \tilde{\tilde{O}}^{2\times2} \\ \tilde{\tilde{O}}^{2\times2} & \tilde{\tilde{T}}_0 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

۱-۸-۲- قاب مسطح

در قاب مسطح علاوه بر تغییر مکان های x و y چرخش θ حول محور Z نیز جزء درجات آزادی است و بردار تغییر مکان بصورت :

$$\tilde{\alpha}_i = \begin{bmatrix}\delta_{xi} & \delta_{yi} & \theta_{zi}\end{bmatrix}^T \quad (21)$$

می باشد. همان‌طور که از شکل ۱۰پیداست دوران محورها تأثیری در چرخش θ ندارد بنابراین ، ماتریس انتقال در این حالت بصورت زیر می باشد:

$$\tilde{\tilde{T}}_0 = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (22)$$

بنابراین می توان روش سختی را در قدم‌های زیر خلاصه نمود:

۱-محاسبه ماتریس سختی هر عضو (رابطه ۶ برای خرپا و رابطه ۴ برای قاب)

۲-محاسبه بردار بارهای گرهی

۳-محاسبه ماتریسهای انتقال برای هر عضو (رابطه ۱۷ برای خرپا و رابطه ۲۲ برای قاب)

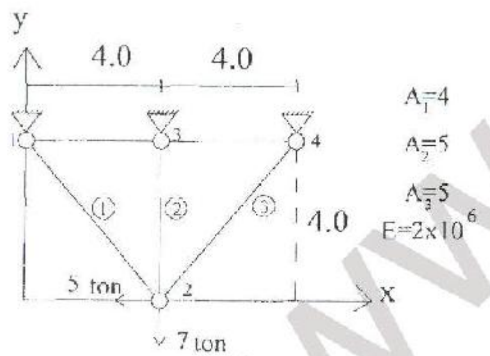
۴-انتقال ماتریسهای سختی و بردار نیروهای گرهی هر عضو به مختصات عمومی (رابطه ۱۸ و رابطه ۱۹)

۵-سوار کردن یا سر هم کردن ماتریس سختی کل طبق شمای شکل (۸)

۶-حل سیستم معادلات حاصل و به‌دست آوردن تغییر مکانها

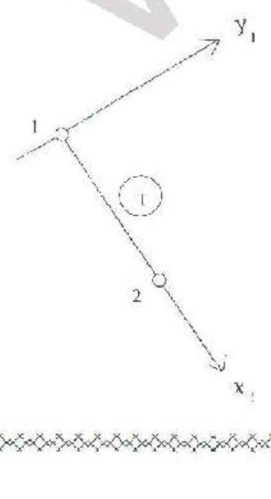
۷-بدست اورشن سایر مجهولات از روابط تحلیل (رابطه ۶ و رابطه ۹)

مثال- مطلوبست حل خرپای زیر به روش ماتریس سختی



حل:

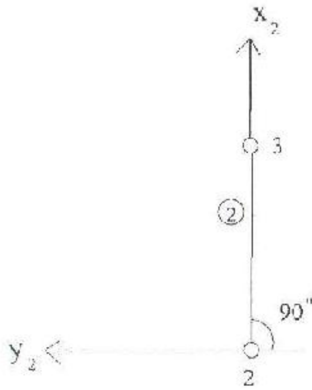
الف- انتخاب محورهای محلی و تشکیل ماتریس های سختی در مختصات محلی. همان‌طور که به یاد داریم امتداد محور xها امتداد میله می باشد و برای جلوگیری از اشتباه در مسایل دیگر بهتر است طوری جهت محور x ها را انتخاب کنیم که شماره گره بزرگتر در جهت مثبت محور xها قرار گیرد پس اولین دستگاه محلی دستگاه x_1y_1 می باشد.



$$\tilde{K}_{11}^{1} = \left(\frac{EA}{L}\right)^{1} \begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2\times10^6\times4}{4\sqrt{2}\times100} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

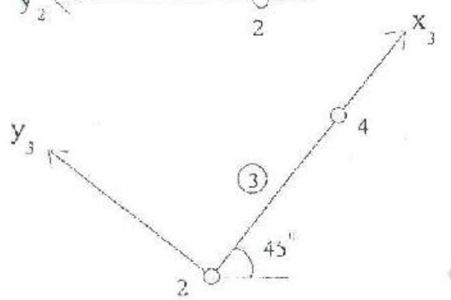
$$\tilde{k}_{11}^{1} = 10^4 \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{bmatrix} = \tilde{k}_{22}^{1} = -\tilde{k}_{12}^{1} = -\tilde{k}_{21}^{1}$$



برای عضو ۲، دستگاه x_2y_2

$$\tilde{k}_{11}^{2} = \frac{5\times2\times10^6}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{11}^{2} = 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} = \tilde{k}_{22}^{2} = \tilde{k}_{12}^{2} = \tilde{k}_{21}^{2}$$



برای عضو ۳، دستگاه x_3y_3

$$\tilde{k}_{11}^{3} = \frac{5\times2\times10^6}{4\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{11}^{3} = 10^4 \begin{bmatrix} 0.884 & 0.884 \\ 0.884 & 0.884 \end{bmatrix} = \tilde{k}_{22}^{3} = -\tilde{k}_{12}^{3} = -\tilde{k}_{21}^{3}$$

ب- سوار کردن ماتریس سختی کل (روش گرهی)

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^{1} & \tilde{k}_{12}^{1} & & \\ \tilde{k}_{21}^{1} & \tilde{k}_{22}^{1} + \tilde{k}_{11}^{2} + \tilde{k}_{11}^{3} & \tilde{k}_{12}^{2} & \tilde{k}_{12}^{3} \\ & \tilde{k}_{21}^{2} & \tilde{k}_{22}^{2} & \\ & \tilde{k}_{21}^{3} & & \tilde{k}_{22}^{3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \\ \tilde{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \\ \tilde{R}_3 \\ \tilde{R}_4 \end{bmatrix}$$

مطابق الگوی فوق ماتریس سختی کل و بردارهای تغییر مکان و نیرو را تشکیل می‌دهیم، در مرحلهٔ قرار دادن اعضاء ماتریس سختی کل توجه می‌کنیم که مثلاً عضو ۲ بین گره‌های ۲ و ۳ قرار دارد پس مؤلفه‌های ماتریس سختی آن در خانه‌های مربوط به سطر و ستون ۲ و ۳ قرار خواهد گرفت و یا عضو ۳ بین گره‌های ۲ و ۴ قرار دارد، پس مؤلفه‌های مربوطه در تقاطع سطر و ستون ۲ و ۴ قرار می‌گیرد و... .

در این مرحله توجه می‌کنیم که در هر خانه ماتریس سختی گرهی بایستی یک زیر ماتریس 2×2 که خود مؤلفهٔ ماتریس سختی یک عنصر می‌باشد قرار داده شود و نیز بردار تغییرمکان‌های گرهی در هر نقطـه دارای دو

مؤلفهٔ δ_{X_i} و δ_{Y_i}و بردار بارهای گرهی نیز دارای دو مؤلفه R_{X_i} و R_{Y_i} می‌باشد، با توجه به این نکات ماتریس سختی کل و بردارهای بار و تغییر مکان، رابطه ماتریس زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & -0.707 & 0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.707 & 0.707 & 0.707 & -.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.707 & 0.707 & 0.707\,0+0.884 & -0.707\,0+0.884 & 0 & 0 & -0.884 & -0.884 \\ 0.707 & -0.707 & -0.707\,0+0.884 & 0.707\,2.5+0.884 & 0 & -2.5 & -0.884 & -0.884 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.884 & -0.884 & 0 & 0 & 0.884 & 0.884 \\ 0 & 0 & -0.884 & -0.884 & 0 & 0 & 0.884 & 0.884 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{X_1} \\ \delta_{Y_1} \\ \delta_{X_2} \\ \delta_{Y_2} \\ \delta_{X_3} \\ \delta_{Y_3} \\ \delta_{X_4} \\ \delta_{Y_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{X_1} \\ R_{Y_1} \\ R_{X_2} \\ R_{Y_2} \\ R_{X_3} \\ R_{Y_3} \\ R_{X_4} \\ R_{Y_4} \end{bmatrix}$$

ج- مرحله حل: این مرحله در محاسبات دستی با ستفاده از روش زیر که منجر به کوچک شدن ماتریس سختی کل می‌شود حل می‌شود ولی در برنامه‌های کامپیوتری به جهت سیستماتیک کردن برنامه روش‌های مناسبی جهت حل دستگاه وجود دارد که توضیح داده خواهد شد. در این روش سطرها و ستون‌ها مربوط به تغییر مکان‌های صفر حذف می‌شوند، ماتریس سختی کاهش یافته برای حل مجهولات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$10^4 \begin{bmatrix} 1.591 & 0.177 \\ 0.177 & 4.091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{X_2} \\ \delta_{Y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & R_{X_2} \\ & \delta_{Y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$10^4 \begin{bmatrix} 1.591 & 0.177 \\ 0 & 4.091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{X_2} \\ \delta_{Y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -6.444 \end{bmatrix}$$

$\delta_{Y_2} = -1.583 \times 10^{-4}$ m

$\delta_{X_2} = -2.467 \times 10^{-4}$ m

د- به‌دست آوردن سایر مجهولات: با توجه به این‌که تمامی تغییر مکان‌ها غیر از δ_{X_2} و δ_{Y_2} صفر هستند، مقادیر R_{X_i} از ضرب عناصر ستون‌های ۳ و ۴ در تغییر مکان‌های δ_{X_2}و δ_{Y_2} به‌دست می‌آیند.

$R_{X_1} = 0.978$ t

$R_{Y} = -0.978$ t

$R_{X_3} = 0.0$

$R_{Y3} = 3.958$ t

$R_{X_4} = 4.02$

$R_{Y_4} = 4.02$ $\qquad \sum F_X = -5.0 \;;\; \sum F_Y = -7.0$

۲- روش نرمی یا نیروها Force Method , Flexibility Method

در این روش مجهولات اصلی نیروها هستند و برای فرمول‌سازی از روش‌های انرژی و قضایای کاستیلیانو استفاده می‌شود. انرژی ذخیره شده در یک میله منشوری که تحت اثر نیروهای محوری F، نیروهای برشی V و لنگرهای خمشی M قرار دارد X به صورت زیر بیان می شود.

$$\Pi = \int_0^L \frac{F^2}{2EA}dx + \int_0^L \frac{V^2}{2GA}dx + \int_0^L \frac{(M+V_x)^2}{2EI}dx$$

اگر از اثر تغییر شکل‌های برشی صرفنظر کنیم (معمولاً این‌طور است) فرمول انرژی ذخیره شده در یک میله به صورت زیر ساده می شود.

$$\Pi = \int_0^L \frac{F^2}{2EA}dx + \int_0^L \frac{(M+Vx)^2}{2EI}dx$$

در این رابطه Π انرژی تغییر شکل، F نیروی محوری، M لنگر خمشی، V نیروی برشی بوده و I, A, E به ترتیب مدول ارتجاعی مصالح و سطح مقطع و لنگر اینرسی می باشند. با استفاده از قضیه دوم کاستیلیانو داریم:

$$u = \frac{\partial \Pi}{\partial F} \;,\; U = \frac{\partial \Pi}{\partial V} \;,\; \theta = \frac{\partial \Pi}{\partial M}$$

برای تعیین رابطه بین نیروها و تغییر مکان‌ها (تنش و کرنش) ضرایب نرمی را تعریف می‌کنیم.

ضریب نرمی f_{ij} برابر است با تغییر مکان حاصل در درجه آزادی i، تحت اثر اعمال یک نیروی واحد در درجه آزادی j وقتی‌که تمام سایر درجات آزادی بدون بار هستند.

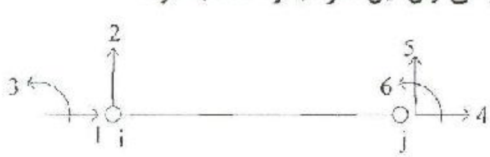
با استفاده از قضیه کاستیلیانو و رابطه انرژی خواهیم داشت:

$$u = \int_0^L \frac{2F}{2EA}\frac{\partial F}{\partial F}dx = \frac{FL}{EA}$$

$$v = \int_0^L \frac{2(M+Vx)}{2EI}x\,dx = \frac{VL^3}{2EI} + \frac{ML^2}{2EI}$$

$$\theta = \int_0^L \frac{2(M+Vx)}{2EI}dx = \frac{ML}{EI} + \frac{VL^2}{2EI}$$

با توجه به تعریف ضرائب f_{ij} و جهات مثبت مطابق شکل زیر می‌توان این ضرائب را حساب کرد.



$$f_{11} = \left\{ \begin{array}{c} \underbrace{\text{تغییر مکان حاصل در درجهٔ آزادی ۱}}_{u} \quad \underbrace{\text{تحت اثر اعمال بار واحد در درجهٔ آزادی۱}}_{F=1} \\ \text{(وقتی که سایر درجات آزادی بدون بار هستند } M=0, V=0\text{)} \end{array} \right\} = \frac{L}{EA}$$

$$f_{12} = \left\{ \begin{array}{c} \underbrace{\text{تغییر مکان حاصل در درجهٔ ازادی ۱}}_{u} \quad \underbrace{\text{تحت اثر اعمال بار واحد در درجهٔ آزادی۲}}_{V=1} \\ \text{(وقتی که سایر درجات آزدی بدون با هستند } F=0 \text{ و } M=0\text{)} \end{array} \right\} = 0$$

$$f_{13} = \left\{ \begin{array}{c} \underbrace{\text{تغییر مکان حاصل در درجهٔ آزادی ۱}}_{u} \quad \underbrace{\text{تحت اثر اعمال بار واحد در درجهٔ آزادی۳}}_{M=1} \\ \text{(وقتی که سایر درجات آزادی بدون با هستند } F=0 \text{ و } V=0\text{)} \end{array} \right\} = 0$$

$$f_{23} = \left\{ \begin{array}{c} \underbrace{\text{تغییر مکان حاصل در درجهٔ آزادی ۱}}_{V} \quad \underbrace{\text{تحت اثر اعمال بار واحد در درجهٔ آزدی۲}}_{M=1} \\ \text{(وقتی که سایر درجات آزادی بدون با هستند } F=0 \text{ و } V=0\text{)} \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{VL^3}{3EI}}_{0} + \frac{\overbrace{M}^{1}L^2}{2EI} = \frac{L^2}{2EI}$$

$$f_{33} = \frac{L}{EI}$$

به نکات زیر توجه شود:

ماتریس نرمی یک عضو یعنی ضرائبی که اگر در نیروهای اعمال شده ضرب شود تغییر مکان حاصل را به‌دست می دهد.

$\tilde{\tilde{F}}.\tilde{f} = \tilde{a}$

روش‌های نرمی به علت نیاز به تعریف هر مسئله و عدم یکسان بودن روش حل، روش‌های مناسبی جهت برنامه نویسی عمومی نمی‌باشد، ولی در ترکیب با روش سختی نتایج بسیار ارزنده ای به‌دست می‌دهند. مثل کاربرد در تیرهای خمیده یا تیرهای با مقطع متغیر.

فصل دوم

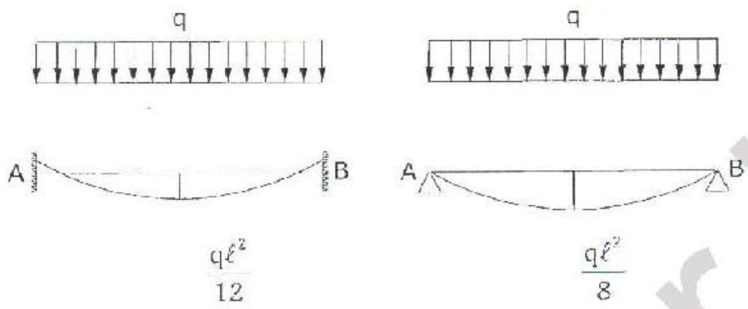
روش شیب افت در تحلیل سازه‌ها

Slope-Deflection Method

☑ فهرست مطالب

۱- مقدمه

به منظور تامین پایداری و صرفه جوئی در مصالح سازه ها به صورت نامعین طراحی و اجرا می شوند. بعنوان یک مثال ساده می توان باربری تیر ساده و تیر دو سر گیردار را مقایسه نمود که میزان لنگرهای خمشی در تیر دو سر گیردار ملایم تر از تیر معمولی می‌باشد.



سازه نامعین، سازه ای است که معادلات تعادل استاتیکی برای حل مجهولات آن کافی نیست، لذا از شرایط سازگاری هندسی به منظور تشکیل معادلات اضافی استفاده می شود.

بطور کلی روشهای تحلیل سازه‌های نامعین به دو دسته روش‌های نرمی و سختی تقسیم می‌شوند. قبل از بررسی روش‌ها به فرضیات زیر که درهر دو روش صادق هستند توجه می‌کنیم.

۱- تغییر مکان‌ها و دوران‌ها بسیار کوچک هستند.

۲- رفتار مصالح خطی و ارتجاعی است.

فرض اول به مفهوم تغییر نکردن هندسه سازه (سیستم) بعد از اعمال نیرو و آثار خارجی و فرض دوم به مفهوم یکسان بودن رفتار سیستم در بارگذاری و باربرداری می‌باشد.

علاوه بر فرضیات فوق در تحلیل مقدماتی سازه ها دو فرض زیر نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳- گره‌های سازه صلب هستند

۴- اثر نیروی محوری قابل صرفنظر کردن می‌باشد.

از فرض سوم مفهوم می‌شود که در یک گره که چندین عضو به آن متصل هستند، فقط یک دوران مجهول داریم و فرض چهارم مسئله کمانش یا ناپایداری اعضا تحت اثر بار محوری، را از محدوده بحث و تحلیل خارج می کند.

از فرضیات اول و دوم نتیجه بسیار مهمی بدست می‌آید و آن برقرار بودن اصل اجتماع آثار قوا است که در تحلیل خطی بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

۱-۱- روش سختی

در این روش مجهولات اصلی تغییر مکانها می باشند. فرمول بندی و تحلیل به نحوی است که این تغییر مکان‌ها در اولین مرحله حل پیدا می‌شوند و سپس با کمک آن‌ها مجهولات ثانوی مثل نیروها، عکس العمل‌ها و غیره بدست می آیند.

۱-۲- روش نرمی

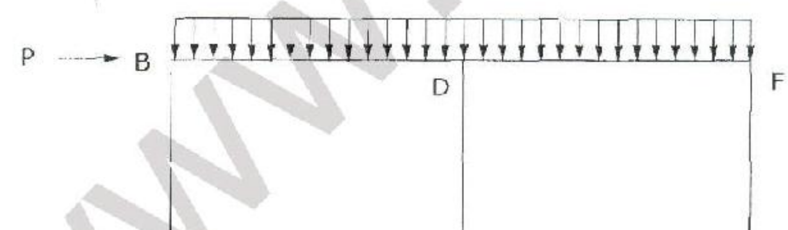
در این روش مجهولات اصلی نیروها یا واکنش‌های اضافی می‌باشند. فرمول‌بندی و تحلیل به طریقی انجام می‌شود که در اولین مرحله نیروها و واکنش‌های اضافی بدست می‌آیند و سپس سایر مجهولات مانند تغییر مکان‌ها و غیره بدست خواهند آمد.

۱-۳- روش تحلیل

به طور کلی در تحلیل سیستمهای سازه ای سه دسته معادله الف) تعادل، ب)سازگاری و ج)رفتار مصالح، باید بطور همزمان ارضا شوند تا تحلیل درست انجام پذیرد.بطوریکه خواهیم دید هر دو روش بر مبنای ارضای این سه دسته معادله قرار دارند و به همین دلیل تنها ملاک انتخاب این و یا آن روش، سهولت استفاده از آنها می باشد.

- روش سختی

قاب شکل زیر را در نظر بگیرید:



اگر مجهولات مسئله را تغییر مکان‌ها در نظر بگیریم، با توجه به فرضیات تئوری و نوع تکیه گاه‌ها خواهیم داشت:

گره A

تغییر مکان جهت x = ۰

تغییر مکان جهت y= ۰

چرخش گره = ۰

گره B:

تغییر مکان جهت $x = \Delta$

تغییر مکان جهت $y = ۰$

چرخش گره $= \theta_B$

گره C:

تغییر مکان جهت $x = ۰$

تغییر مکان جهت $y = ۰$

چرخش گره $= ۰$

گره D:

تغییر مکان جهت $x = \Delta$

تغییر مکان جهت $y = ۰$

چرخش گره $= \theta_D$

گره E:

تغییر مکان جهت $x = ۰$

تغییر مکان جهت $y = ۰$

چرخش گره $= ۰$

گره F:

تغییر مکان جهت $x = \Delta$

تغییر مکان جهت $y = ۰$

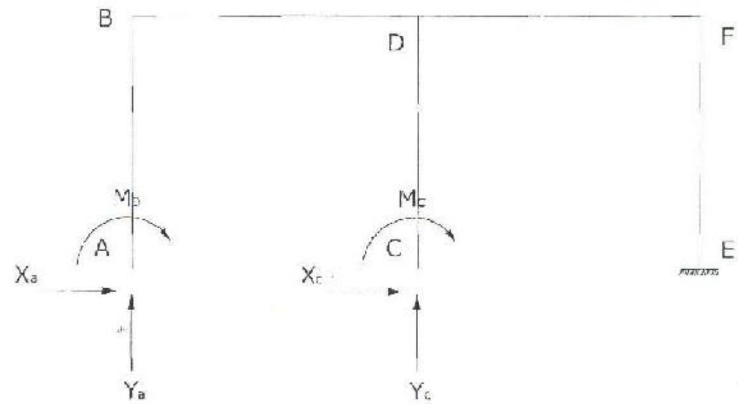
چرخش گره $= \theta_F$

ملاحظه می شود که در این حالت ۴ مجهول تغییر مکانی موجود می‌باشد.

– *روش نرمی*

در صورتیکه مجهولات مسئله را نیروهای اضافی یا زائد در نظر بگیریم، واکنش‌های اضافی عبارتند از:

$$X_A , Y_A , M_A , X_C , Y_C , M_C$$



در این حالت تعداد مجهولات مسئله ۶ مجهول نیرویی می باشد.

طبیعی است برای تحلیل سیستم باید در حالت اول چهار معادله و در حالت دوم شش معادلـه تولیدکرد تـا پس از حل این معادله ها بتوان مسئله را بطور کامل تحلیل نمود.

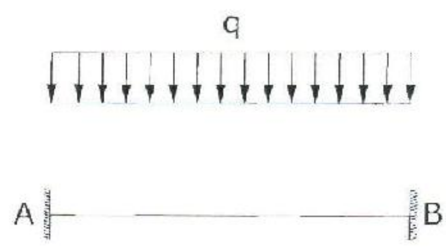
در این مثال تعداد مجهولات ناشی از روش سختی کمتر از روش نرمی است. این موضوع در همه موارد صادق نیست ولی با توجه به قانونمند بودن روش سختی، در مواردی که تعداد مجهولات روش سختی بیشتر از روش نرمی باشد نیز از روش سختی استفاده می‌شود.

۱-۴- روش شیب- افت

در تحلیل سازه های ساده این روش بعنوان پایه روش سختی مورد استفاده قرار می گیرد.

مبنای روش: این روش بر مبنای انتخاب مجهولات یک عنصر پایه از سیستم سازه‌ای که در این حالت تیر مـی‌باشد، قرار دارد. هر سیستم سازه‌ای را می‌توان به عناصر پایه‌ای که تیر یـا تیـر- سـتون هـستند تفکیـک نمـود. بنابراین روابط شیب- افت در سطح تیر استخراج شده و سازه پس از تجزیه به تیرها بطور جداگانه فرمول سـازی می شود. سپس با استفاده از سازگاری تغییر مکان‌ها و تعادل نیروها سیستم دوباره جمع شده و دسـتگاه معادلـه مورد نظر حاصل می‌شود.

تیر دو سر گیردار شکل به عنوان عنصر پایه در نظر گرفته می‌شود.



تعداد واکنش‌های زائد سه می باشد.

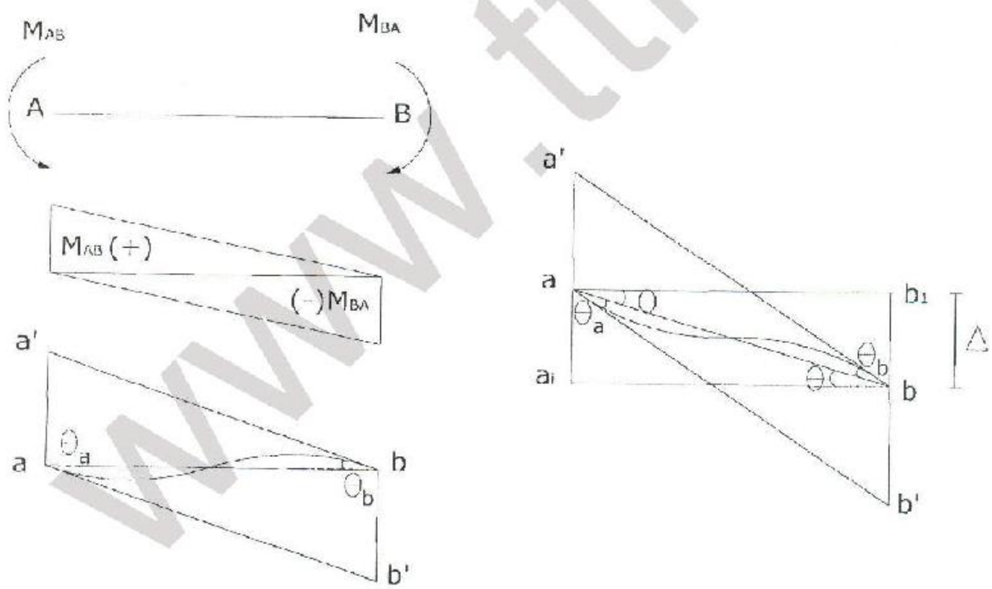
با صرفنظر کردن از اثر نیروی محوری دو واکنش و یک معادله حذف شده و تعداد واکنش‌های اضافی ۲ خواهد بود. پس اگر به هر ترتیبی ۲ واکنش اضافی محاسبه شود، تیر معین می‌شود. به این منظور دو واکنش اضافی را دو لنگر انتهائی تیر در نظر می‌گیریم بنابراین نیاز به روابطی داریم که مقدار لنگرهای انتهائی را برحسب دوران‌ها بدست دهد.

پس اگر θ_1, θ_2 محاسبه شود، تیر معین می‌شود.

در یک سیستم برای همه اعضا به نوبت این کار انجام می‌شود و سپس سازگار بودن تغییر مکان‌ها (یکسان بودن θ ها در گره‌ها و ...) و تعادل نیروها (صفر بودن مجموع لنگرها در هر گره) اعمال می‌شود و از آنجا دستگاه معادله‌ای بر حسب مجهولات تغییر مکانی بدست می‌آید.

۲- روابط اصلی شیب- افت

قبل از نوشتن روابط شیب- افت به شرح قرارداد علایم شیب - افت می‌پردازیم:



۱- لنگرهای انتهایی M_{AB}, M_{BA} در صورتی‌که در جهت گردش عقربه‌های ساعت باشند، مثبت فرض می‌گردند.

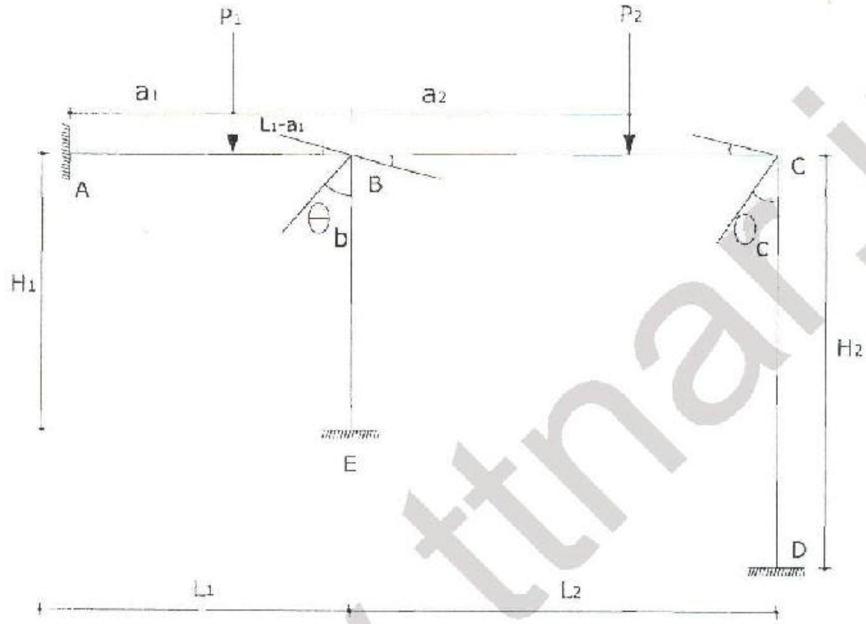
۲-شیب های نقاط A,B یعنی θ_A و θ_B در صورتیکه جهت چرخش انها نسبت به حالت اولیه خود در جهت عقربه های ساعت باشند، مثبت در نظر گرفته می‌شوند.

۳-تغییر مکان نقطه B نسبت به نقطه A یعنی Δ_{BA} در صورتی مثبت می‌باشد که حرکت نقطه B نسبت به A در جهت گردش عقربه‌های ساعت باشد.

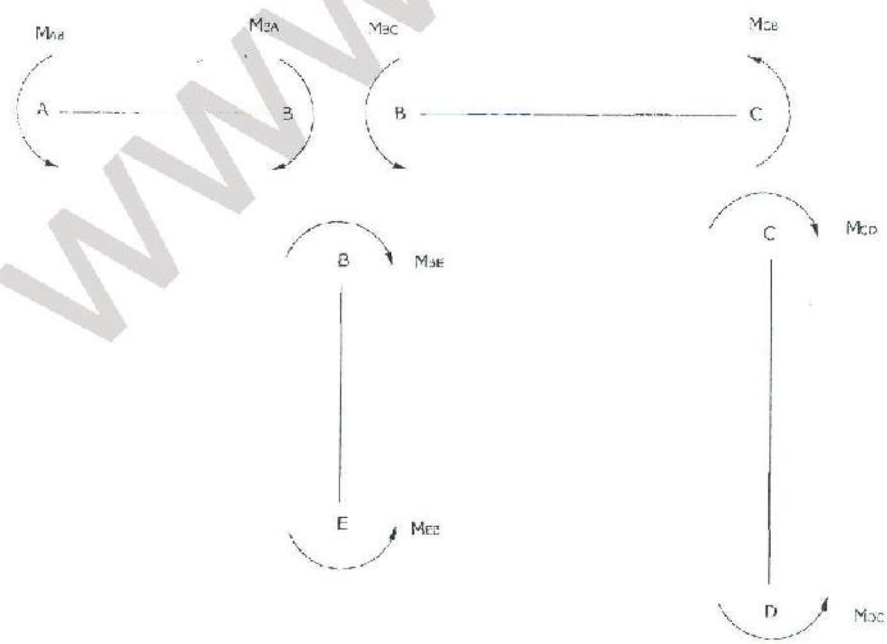
در این بخش معادلات اصلی شیب- افت را به دو روش سطح لنگر و معادلات دیفرانسیل طی یک مثال بدست خواهیم آورد.

۲-۱- بدست آوردن روابط شیب- افت با استفاده از قضیه سطح لنگر

سازه زیر یک قاب ساختمانی است که از نظر استاتیکی ۶ درجه نامعین می‌باشد.

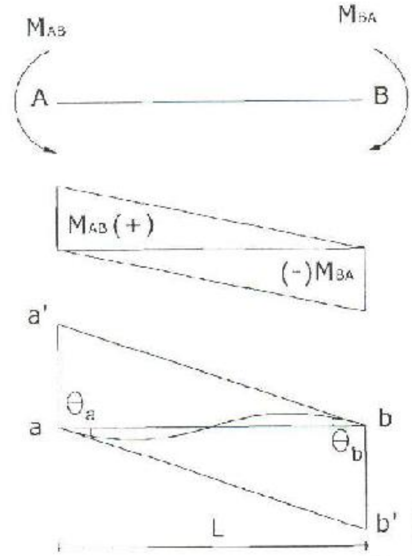


اجزاء آنرا جدا می‌سازیم:



فرض کنیم:

قطعه ab تحت اثر لنگرهای انتهائی M_{ab}, M_{ba} قرار گرفته باشد، چرخش‌های آنرا با θ_A, θ_B نمایش می‌دهیم.



از قضیه دوم سطح لنگرخواهیم داشت:

$$aa' = -\left(\frac{M_{ab}}{EI}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{3} - \frac{M_{ba}}{EI}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{2L}{3}\right)\times\frac{6EI}{L^2}$$

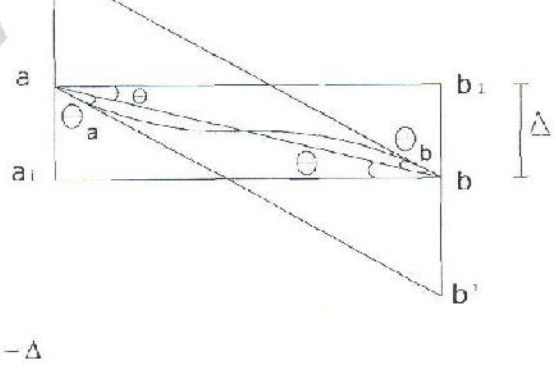
$$bb' = \left(\frac{M_{ab}}{EI}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{2L}{3} - \frac{M_{ba}}{EI}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{3}\right)\times\frac{12EI}{L^2}$$

نتیجه می‌شود:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b)$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L}(\theta_a + 2\theta_b)$$

اگر در حالت فوق تکیه گاه‌ها نشست داشته باشند، داریم:



$$a_1a' = \theta_b L \Rightarrow aa' = \theta_b L - \Delta$$

$$aa' = -(\frac{M_{ab}}{EI}.\frac{L^2}{6} - \frac{M_{ba}}{EI}.\frac{L^2}{3})$$

$$b_1b' = \theta_a L \Rightarrow bb' = \theta_a L - \Delta$$

$$bb' = (\frac{M_{ab}}{EI}.\frac{L^2}{3} - \frac{M_{ba}}{EI}.\frac{L^2}{6})$$

از قضیه دوم سطح لنگر همیشه فاصله بین مماس‌های مرسوم بر منحنی تغییر شکل یعنی 'aa و 'bb بدست می‌آید. لذا خواهیم داشت:

$$\theta_a L - \Delta = -(\frac{M_{ab}}{EI}.\frac{L^2}{6} - \frac{M_{ba}}{EI}.\frac{L^2}{3}) \times \frac{6EI}{L^2}$$

$$\theta_a L - \Delta = (\frac{M_{ab}}{EI}.\frac{L^2}{3} - \frac{M_{ba}}{EI}.\frac{L^2}{6}) \times \frac{12EI}{L^2}$$

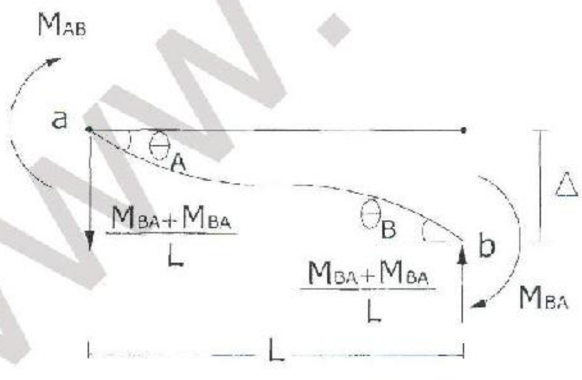
بنابراین معادله شیب-افت بصورت زیر خواهد بود:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L})$$

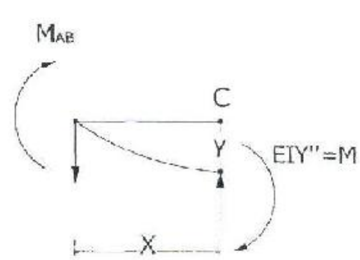
$$M_{ba} = \frac{2EI}{L}(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{L})$$

۲-۲- به دست آوردن روابط شیب-افت با استفاده از معادلات دیفرانسیل

تیر شکل زیر را در نظر بگیرید:



با توجه به این‌که در هر مقطع از تیر داریم $M(x) = EIy''$ در مقطعی به فاصله x از تکیه‌گاه A مطابق شکل زیر خواهیم داشت:



$$\sum M_z = 0$$

$$EIy'' + M_{AB} - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} x = 0$$

$$EIy'' = \frac{M_{AB}}{L}(x - L) + \frac{M_{BA}}{L} x \qquad (I)$$

با دوبار انتگرال‌گیری از معادلهٔ (I) خواهیم داشت:

$$EIy' = \frac{M_{AB}}{L}(\frac{x^2}{2} - Lx) + \frac{M_{BA}}{L}\frac{x^2}{2} + C_1 \qquad (II)$$

$$EIy = \frac{M_{AB}}{L}(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}) + \frac{M_{BA}}{L}.\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \qquad (III)$$

شرایط مرزی در نقطه A عبارتند از :

$$x = 0, y = 0, y' = \theta_A$$

که با جای‌گذاری در معادلات (II) و (III) خواهیم داشت:

$$C_1 = EI\theta_A, C_2 = 0$$

و معادلات (II) و (III) بصورت زیر اصلاح می‌شود:

$$EIy' = \frac{M_{AB}}{L}(\frac{x^2}{2} - Lx) + \frac{M_{BA}}{L}\frac{x^2}{2} + EI\theta_A \qquad (1)$$

$$EIy = \frac{M_{AB}}{L}(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}) + \frac{M_{BA}}{L}.\frac{x^3}{6} + EI\theta_A x \qquad (2)$$

شرایط مرزی در نقطه B عبارتند از:

$$x = L, y = \Delta, y' = \theta_B$$

که پس از جای‌گذاری در معادلات (۱) و (۲) به معادلات زیر می‌رسیم:

$$EI\theta_B = \frac{M_{AB}}{L}(\frac{L^2}{2} - L^2) + \frac{M_{BA}}{L}.\frac{L^2}{2} + EI\theta_A \qquad (3)$$

$$EI\Delta = \frac{M_{AB}}{L}(\frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{3}) + \frac{M_{BA}}{L}.\frac{L^3}{6} + EI\theta_A L \qquad (4)$$

که پس از مرتب کردن نسبت به M_{AB} و M_{BA} خواهیم داشت:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L}) \qquad (5)$$

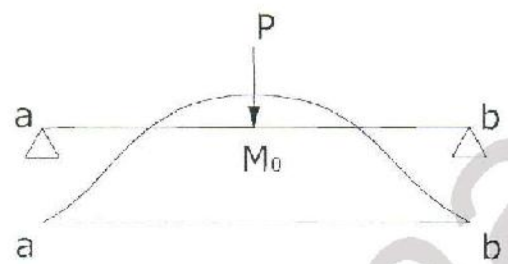
$$M_{ba} = \frac{2EI}{L}(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{L}) \qquad (6)$$

در این روابط اثر لنگرهای ناشی از بارهای خارجی در نظر گرفته نشده است و برای منظور کردن این اثر کافی است لنگرهای گیرداری را که در بخش بعدی به توضیح آن خواهیم پرداخت با معادلات (۵) و (۶) جمع کنیم.

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L}) + M'_{AB}$$
$$M_{ba} = \frac{2EI}{L}(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{L}) + M'_{BA} \qquad (7)$$

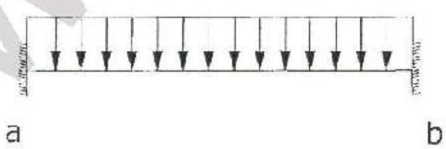
- لنگرهای گیرداری

اگر تحت اثر بار خارجی یک لنگر M_0 داشته باشیم و m_0 را معادل $\frac{M_0}{EI}$ بگیریم و m_{0a} و m_{0b} به ترتیب نشان‌دهنده لنگر ایستائی مساحت نمودار $m_0 - \frac{M_0}{EI}$ نسبت به نقاط a و b باشد، مقادیر aa' و bb' به‌ترتیب زیر اصلاح می‌شود:



$$aa' = -(\frac{M_{ab}}{EI}\cdot\frac{L^2}{6} - \frac{M_{ba}}{EI}\cdot\frac{L^2}{3} + \frac{m_{0a}}{EI})$$
$$bb' = (\frac{M_{ab}}{EI}\cdot\frac{L^2}{3} - \frac{M_{ba}}{EI}\cdot\frac{L^2}{6} + \frac{m_{0b}}{EI})$$
$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L}) + \frac{2}{L^2}(m_{0a} - 2m_{0b})$$
$$M_{ba} = \frac{2EI}{L}(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{L}) + \frac{2}{L^2}(2m_{0a} - m_{0b})$$

اگر تیری کاملاً گیردار باشد (دو سر گیردار) خواهیم داشت:



$$M'_{ab} = \frac{2}{L^2}(m_{0a} - 2m_{0b})$$
$$M'_{ba} = \frac{2}{L^2}(2m_{0a} - m_{0b})$$

لذا رابطه شیب- افت با در نظر گرفتن اثر بارهای خارجی بدین صورت می‌باشد:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{L}) + M'_{AB}$$
$$M_{ba} = \frac{2EI}{L}(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{L}) + M'_{BA}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، لنگرهای ایجاد شده به عوامل زیر بستگی دارند:

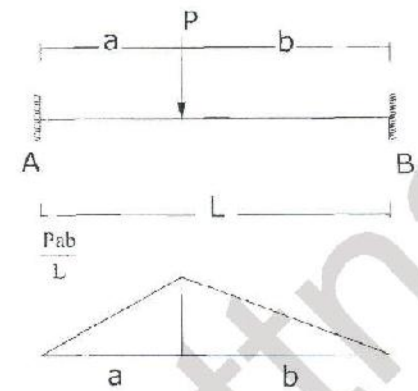
۱- دوران ابتدایی عضو (θ_A)

۲- دوران انتهایی عضو (θ_B)

۳- دوران کلی عضو ($\frac{\Delta}{L}$)

۴- آثار و بارگذاری خارجی (لنگرهای گیرداری)

مثال: لنگرهای گیرداری تیر زیر را تحت اثر بار متمرکز **P** بدست آورید.



$$m_{0a} = \frac{Pab}{L}\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{2a}{3} + \frac{b}{2}\left(a + \frac{b}{3}\right)\right) = \frac{Pab}{6L}(2a^2 + 3ab + b^2) = \frac{Pab}{6}(2a + b)$$

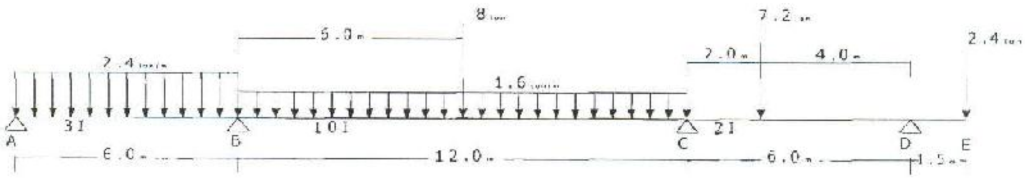
$$m_{0b} = \frac{Pab}{L}\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{2b}{3} + \frac{a}{2}\left(b + \frac{a}{3}\right)\right) = \frac{Pab}{6L}(a^2 + 3ab + 2b^2) = \frac{Pab}{6}(a + 2b)$$

$$M_{ab} = \frac{2}{L^2}(m_{0a} - 2m_{0b}) = \frac{2}{L^2}\left[\frac{Pab}{6}(2a + b - 2a - 4b)\right] = -\frac{pab^2}{L^2}$$

$$M_{ba} = \frac{2}{L^2}(2m_{0a} - m_{0b}) = \frac{2}{L^2}\left[\frac{Pab}{6}(a + 2b - a - 2b)\right] = \frac{pa^2b}{L^2}$$

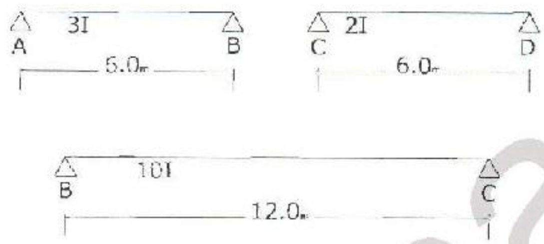
۳-کاربرد روش شیب- افت برای تحلیل تیرهای سراسری

تیر سراسری زیر را در نظر بگیرید:



گام

گام اول: تفکیک تیر به قسمت‌های مجزا



گام دوم: تعیین مجهولات اصلی

همان‌طور که قبلا ذکر شد مجهولات اصلی در این روش تغییر مکان و شیب‌ها می‌باشند. با توجه به این‌که در تیر فوق تغییر مکان گرهی وجود ندارد، بنابراین مجهولات مسئله عبارتند از:

$(\theta_A)_R, (\theta_B)_L, (\theta_B)_R, (\theta_C)_L, (\theta_C)_R, (\theta_D)$

گام سوم: نوشتن معادلات سازگاری

باتوجه به سراسری بودن تیر فوق داریم:

$$\theta_B = (\theta_B)_L = (\theta_B)_R$$
$$\theta_C = (\theta_C)_L = (\theta_C)_R$$

لذا مجهولات تیر عبارتند از θ_a، θ_b، θ_c، θ_d.

گام چهارم: بدست آوردن لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{2.4\times6^2}{12} = -7.2\,\text{t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{1.6\times12^2}{12} - \frac{8\times6\times6^2}{12} = -31.2\,\text{t.m}$$

$$M'_{cd} = -\frac{pab^2}{l^2} = -\frac{7.2\times2\times4^2}{6^2} = -6.4\,\text{t.m}$$

$$M'_{dc} = \frac{pba^2}{l^2} = \frac{7.2\times4\times2^2}{6^2} = 3.2\,\text{t.m}$$

$$M'_{de} = -pl = -2.4\times1.5 = -3.6\,\text{t.m}$$

گام پنجم: نوشتن روابط شیب- افت برای هریک از اجزای جدا شده

$$M_{ab} = \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_a + \theta_b) - M'_{ab} = 2EI\theta_a + EI\theta_b - 7.2$$

$$M_{ba} = \frac{2E(3I)}{6}(\theta_a + 2\theta_b) + M'_{ab} = EI\theta_a + 2EI\theta_b + 7.2$$

$$M_{bc} = \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_b + \theta_c) - M'_{bc} = \frac{10}{3}EI\theta_b + \frac{5}{3}EI\theta_c - 31.2$$

$$M_{cb} = \frac{2E(10I)}{12}(\theta_b + 2\theta_c) + M'_{cb} = 3.33EI\theta_c + 1.67EI\theta_b + 31.2$$

$$M_{cd} = \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_c + \theta_d) - M'_{cd} = 1.33EI\theta_c + 0.67EI\theta_d - 6.4$$

$$M_{dc} = \frac{2E(2I)}{6}(\theta_c + 2\theta_d) + M'_{cd} = 1.33EI\theta_d + 0.67EI\theta_c + 6.4$$

گام ششم: نوشتن معادلات تعادل

با توجه به این‌که در تیر فوق تکیه گاه‌ها مفصلی می‌باشند لذ خواهیم داشت:

$$M_{ab} = 0 \qquad 2EI\theta_a + 1EI\theta_b = 7.2$$
$$\sum M_B = 0 \qquad M_{ba} + M_{bc} = 0 \qquad EI\theta_a + 5.33EI\theta_b + 1.67EI\theta_c = 2.4$$
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_{cb} + M_{cd} = 0 \Rightarrow 1.67EI\theta_b + 4.67EI\theta_c + 0.67EI\theta_d = -24.8$$
$$\sum M_D = 0 \qquad M_{dc} + M = 0 \qquad 0.67EI\theta_c + 1.33EI\theta_d = 0.4$$

معادلات فوق را می‌توان به صورت ماتریس تبدیل نمود:

$$ka = f \Rightarrow EI\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5.33 & 1.67 & 0 \\ 0 & 1.67 & 4.67 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0.67 & 1.33 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 24 \\ -24.8 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق، ماتریس ضرائب سختی یا به طور خلاصه ماتریس سختی نام دارد.

- خواص ماتریس سختی

الف- نسبت به قطر اصلی قرینه می‌باشد (ماتریس متقارن).

ب- قطر حاکم

ج- نواری

د- مثبت معین

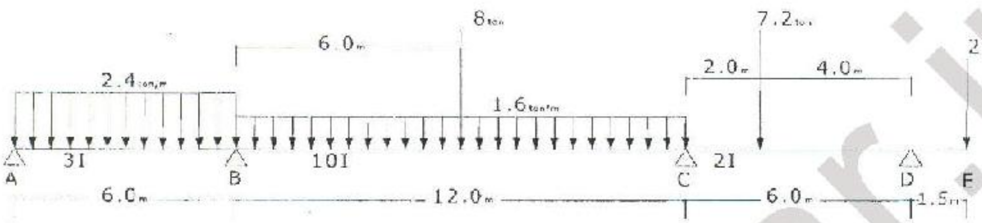
در صورت اضافه کردن عناصر جدید به سازه یا حذف کردن عناصری از سازه، کافیست ماتریس سختی عنصر را به ماتریس سختی کل اضافه یا از آن کم کنیم.

بهترین روش برای حل دستگاه معادلات "روش حذف مستقیم گاوس" می‌باشد. در این روش ماتریس ضرایب

بصورت ماتریس بالا مثلثی در آمده به روش جایگزینی برگشتی حل می‌شود؛ لذا از بالا به پایین درایه ها را حذف نموده و از پایین به بالا مجهولات محاسبه می‌شوند. (روش حذف مستقیم و جایگزینی معکوس)

لازم به ذکر است که برای حل معادلات فوق روش‌های دیگری از جمله روش گوس- سایدل، روش چولسکی و ... را نیز می توان به کار برد.

به طوری که ملاحظه می‌شود تشکیل ماتریس سختی و بردار بار و بردار تغییر مکانی مجهول هدف اصلی در تحلیل می‌باشد. در این مرحله روش تشکیل این عناصر را به طور مستقیم بررسی می‌کنیم.



$$M_{ij}=\frac{2EI}{L_{ij}}\left(2\theta_i+\theta_j-\frac{3\Delta}{L_{ij}}\right)+M'_{ij}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{12}=\dfrac{2E3I}{6}(2\theta_1+\theta_2)-7.2 \\ M_{21}=EI(\theta_1+2\theta_2)-7.2 \end{array}\right\}\Rightarrow EI\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-7.2\\ 7.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{12}\\ M_{21}\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{23}=1.67EI(2\theta_2+\theta_3)-31.2 \\ M_{32}=1.67EI(\theta_2+2\theta_3)+31.2 \end{array}\right\}\Rightarrow EI\begin{bmatrix}3.33 & 1.67\\ 1.67 & 3.33\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-31.2\\ 31.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{23}\\ M_{32}\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{34}=0.67EI(2\theta_3+\theta_4)-6.4 \\ M_{43}=0.67EI(\theta_3+2\theta_4)+3.2 \end{array}\right\}\Rightarrow EI\begin{bmatrix}1.33 & 0.67\\ 0.67 & 1.33\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_3\\ \theta_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6.4\\ 3.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{34}\\ M_{43}\end{bmatrix}$$

$$EI\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2+3.33 & 1.67 & 0\\ 0 & 1.67 & 3.33+1.33 & 0.67\\ 0 & 0 & 0.67 & 1.33\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-7.2\\ 7.2-31.2\\ 31.2-6.4\\ 3.2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 3.6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ka=\begin{bmatrix}7.2\\ 24\\ -24.8\\ 0.4\end{bmatrix}$$

حال دستگاه معادلات را به دو روش گوس(حذف مستقیم و جایگزینی معکوس) و گوس سیدل به صورت زیر حل می نماییم:

الف) روش گوس:

$\theta_D = \dfrac{5.62}{1.22} = 4.61$

$\theta_C = -8.53$

$\theta_B = 7.18$

$\theta_A = 0.01$

$M_{ab} = 0 \qquad M_{ba} = 21.54$

$M_{bc} = -21.54 \qquad M_{cb} = 14.73$

$M_{cd} = -14.72 \qquad M_{dc} = 3.6 \qquad M_{dc} = -3.6$

ب-روش گوس-سایدل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5.333 & 1.667 & 0 \\ 0 & 1.667 & 4.667 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0.667 & 1.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 24 \\ -24.8 \\ .4 \end{bmatrix}$$

$\theta_A = 0 \qquad \theta_B = 7.2 \qquad \theta_C = -8.64 \qquad \theta_D = 5.28 \qquad \theta_a = \theta_c = \theta_d = 0$

$\theta_A = 3.6 - \dfrac{\theta_B}{2} \qquad \theta_a = 3.6$

$\theta_B = -(\theta_a - 1.667\theta_c + 24)/5.33 \qquad \theta_b = (3.6 + 24)/5.33 = 5.18$

$\theta_C = \dfrac{1}{4.667}(-1.667\theta_b - 0.667\theta_d - 24.8) \qquad \theta_c = -7.16$

$\theta_D = \dfrac{1}{1.333}(-0.667\theta_C + 0.4) \qquad \theta_D = 3.88$

$\theta_a = 1.01 \qquad \theta_b = 6.93 \qquad \theta_c = -8.34 \qquad \theta_d = 4.47$

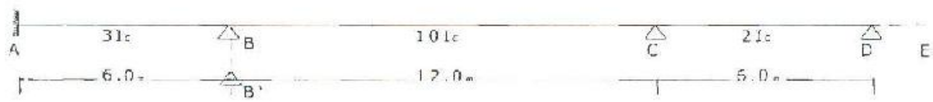
نتایج حاصل بعد از حل مثال:

$\theta_A = 0.02/EI \qquad \theta_B = 7.16/EI \qquad \theta_C = -8.52/EI \qquad \theta_D = 4.56/EI$

$M_{ab} = 0$, $M_{ba} = 21.541$, $M_{bc} = -21.541$ (t.m)

$M_{cb} = 14.735$, $M_{cd} = -14.73$, $M_{dc} = 3.6$, $M_{dc} = -3.6$ (t.m)

مثال: تیر سراسری زیر را به روش شیب افت تحلیل کنید:



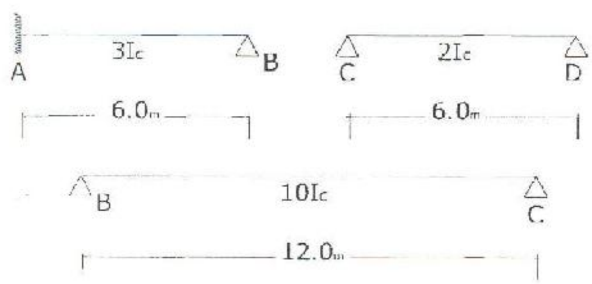
$E = 20\times10^{6}\ t/m^{2}$

فرضیات:

$I = 400\times10^{-6}\ m^{4}$

$\Delta = 15\times10^{-3}$

گام اول: تفکیک تیر به قسمتهای مجزا



گام دوم: تعیین مجهولات اصلی

$(\theta_A)_R, (\theta_B)_L, (\theta_B)_R, (\theta_C)_L, (\theta_C)_R, (\theta_D)_L$

گام سوم: نوشتن معادلات سازگاری

باتوجه به سراسری بودن تیر فوق داریم:

$\theta_B = (\theta_B)_L = (\theta_B)_R$

$\theta_C = (\theta_C)_L = (\theta_C)_R$

لذا مجهولات تیر عبارتند از θ_b، θ_c، θ_d.

گام چهارم: بدست آوردن لنگرهای گیرداری

بدلیل عدم وجود بار خارجی، لنگر گیرداری ناشی از بار خارجی نداریم.

گام پنجم: نوشتن روابط شیب-افت برای هریک از اجزای جداشده

$$M_{ab} = \frac{16000\times3}{6}(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\times15\times10^{-3}}{6}) = 18000\theta_b - 60$$

$$M_{ba} = \frac{16000\times3}{6}(\theta_a + 2\theta_b + \frac{45\times10^{-3}}{6}) = 16000\theta_b - 60$$

$$M_{bc} = \frac{160000}{12}(2\theta_b + \theta_c + \frac{45\times10^{-3}}{12}) = 26666.7\theta_b + 13333.3\theta_c + 50$$

$$M_{cb} = 2\times6666.7(\theta_b + 2\theta_c + \frac{45\times10^{-3}}{12}) = 13333.3\theta_b + 26666.7\theta_c + 50$$

$$M_{cd} = 2\times 2666.7(2\theta_c + \theta_d) = 10666.7\theta_c + 5333.3\theta_d$$

$$M_{dc} = 2\times 2666.7(\theta_c + 2\theta_d) = 5333.3\theta_c + 10666.7\theta_d$$

گام ششم: نوشتن معادلات تعادل

$$\begin{bmatrix} 42666.7 & 13333.3 & 0 \\ 13333.3 & 37333.3 & 5333.3 \\ 0 & 5333.3 & 10666.7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -500 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\theta_c = -1.7418\times 10^{-3}$

$\theta_b = 0.7787\times 10^{-3}$

$\theta_d = 0.8709\times 10^{-3}$

$M_{ab} = -53.77\,t.m$

$M_{ba} = -47.54\,t.m$

$M_{bc} = 47.54\,t.m$

$M_{cb} = 13.93\,t.m$

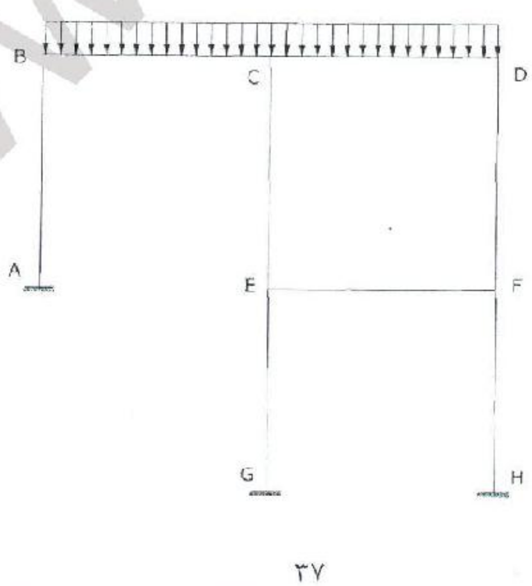
$M_{cd} = -13.93\,t.m$

$M_{dc} = 0\,t.m$

۴-کاربرد روش شیب-افت برای تحلیل قاب‌ها

قابها عناصر سازه ای هستند که قادر به تحمل بار در صفحه خودشان می باشند. عناصر افقی، تیر و عناصر قائم ستون نامیده می شوند. به عبارت دیگر عناصری که بار محوری در آنها غالب باشد ستون، و عناصری که لنگر خمشی در آنها غالب است تیر نامیده می شوند.

در حل قاب ها به روش شیب افت از تغییر شکل محوری ستونها صرفنظر می شود پس تغییر طول محوری نداریم یعنی در شکل زیر نقطه B نسبت به نقطه A افت ندارد لذا تغییر مکان نسبی دو سر تیر صفر است.



باید توجه کرد که چون ستونهای DF,CE,AB نمی‌توانند تغییر طول محوری داشته باشند، پس نقاط تغییر مکان نسبی ندارند؛ یعنی در تیرهای افقی هیچ افتی بوجود نمی‌آید.

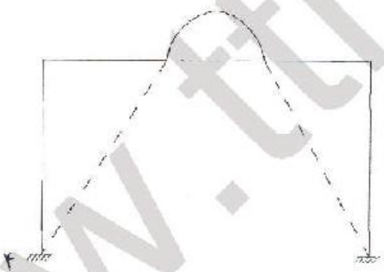
قاب‌ها از جنبه شکل ظاهری به دو دسته مستطیلی و غیرمستطیلی (شیبدار) تقسیم می‌شوند. همچنین می‌توان آنها را از لحاظ تغییر مکان جانبی به دو دسته قاب‌های با تغییر مکان جانبی و بدون تغییر مکان جانبی تقسیم کرد.

☑ **نکته: تعیین درجه آزادی یک قاب**

برای تعیین تعداد درجه آزادی یک قاب می توان از دو روش زیر استفاده نمود که به ترتیب در ادمه توضیح داده می‌شوند.

۱- تمام گره‌ها را به مفصل تبدیل نموده و با قرار دادن تکیه گاه، سازه را پایدار می‌کنیم، تعداد تکیه‌گاه‌ها مشخص کننده درجه آزادی قاب می‌باشد.

۲- تمام گره‌ها را به مفصل تبدیل نموده و سپس با اضافه کردن اعضای میله‌ای سازه را به یک سری اعضاء خرپایی تبدیل می‌کنیم. تعداد میله‌ها مبین درجات آزادی است.



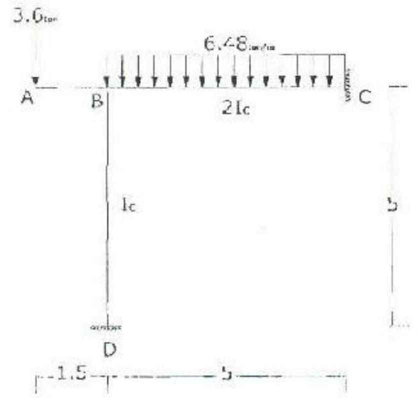
روش تحلیل هر یک از انواع قابها را با ذکر یک مثال پی می‌گیریم:

۴-۱- قاب مستطیلی بدون تغییر مکان جانبی

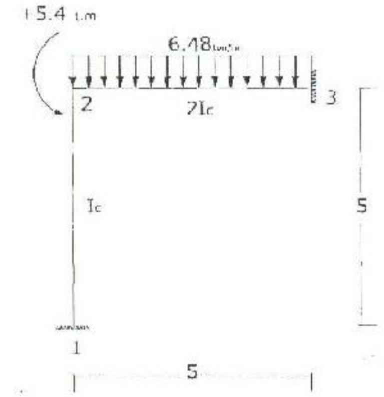
۱- زاویه بین اعضا قاب ۹۰ درجه می باشد و به یک گره ممکن است بیش از دو عضو متصل باشد.

۲- از تغییر شکل‌های ناشی از نیروی محوری صرفنظر می‌شود.

مثال: قاب شکل زیر را حل کنید.



بار ۳/۶ تن را بصورت لنگر به نقطه ۲ منتقل می‌کنیم.



با توجه به گیردار بودن تکیه گاه‌های ۱و۳ تنها مجهول اصلی مسئله θ_2 می باشد.

محاسبه لنگرهای گیرداری:

$$M'_{23} = -M'_{32} = \frac{-ql^2}{12} = -13.5\,\text{t.m}$$

نوشتن روابط شیب-افت برای اعضا:

$$M_{12} = \frac{2EI}{5}(2\theta_1 + \theta_2) = 0.4EI\theta_2$$

$$M_{21} = 0.4EI(\theta_1 + 2\theta_2) = 0.8EI\theta_2$$

$$M_{23} = 0.8EI(2\theta_2 + \theta_3) - 13.5 = 1.6EI\theta_2 - 13.5$$

$$M_{32} = 0.8EI(\theta_2 + 2\theta_3) + 13.5 = 0.8EI\theta_2 + 13.5$$

نوشتن معادلات تعادل:

$$M_{21} + M_{23} + 5.4 = 0 \Rightarrow 0.8EI\theta_2 + 1.6EI\theta_2 - 13.5 + 5.4 = 0 \Rightarrow EI\theta_2 = 3.375$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{12} = 1.35\,t.m \\ M_{21} = 2.7\,t.m \\ M_{23} = -8.1\,t.m \\ M_{32} = 16.2\,t.m \end{cases}$$

اگر مثال فوق بدون لنگر خارجی باشد نتایج بصورت زیر خواهد بود:

$$M_{21} + M_{23} = 0 \Rightarrow EI\theta_2 = 5.625$$

$$\begin{cases} M_{12} = 2.25\,t.m \\ M_{21} = 4.5\,t.m \\ M_{23} = -4.5\,t.m \\ M_{32} = 18.0\,t.m \end{cases}$$

حال برای نشان دادن تاثیر سختی اعضا بر روی لنگرهای بوجود آمده، به بررسی نتایج حاصله با در نظر گرفتن سختی‌های مختلف برای اعضا می‌پردازیم:

۱)سختی مساوی تیر و ستون

$$\begin{cases} M_{12} = 0.4EI\theta_2 \\ M_{21} = 0.8EI\theta_2 \\ M_{23} = 0.8EI\theta_2 - 13.5 \\ M_{32} = 0.4EI\theta_2 + 13.5 \end{cases} ,\ M_{21} + M_{23} = 0 \Rightarrow 1.6EI\theta_2 = 13.5 \Rightarrow EI\theta_2 = 8.4375$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{12} = 3.375\,t.m \\ M_{21} = 6.75\,t.m \\ M_{23} = -6.75\,t.m \\ M_{32} = 16.875\,t.m \end{cases}$$

۲)سختی تیر ده برابر سختی ستون

$$\begin{cases} M_{12} = 0.4EI\theta_2 \\ M_{21} = 0.8EI\theta_2 \\ M_{23} = 8EI\theta_2 - 13.5 \\ M_{32} = 4EI\theta_2 + 13.5 \end{cases} ,\ M_{21} + M_{23} = 0 \Rightarrow 8.8EI\theta_2 = 13.5 \Rightarrow EI\theta_2 = 1.534$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{12} = 0.613\,t.m \\ M_{21} = 1.227\,t.m \\ M_{23} = 19.636\,t.m \\ M_{32} = -1.227\,t.m \end{cases}$$

۳)سختی ستون ده برابر سختی تیر

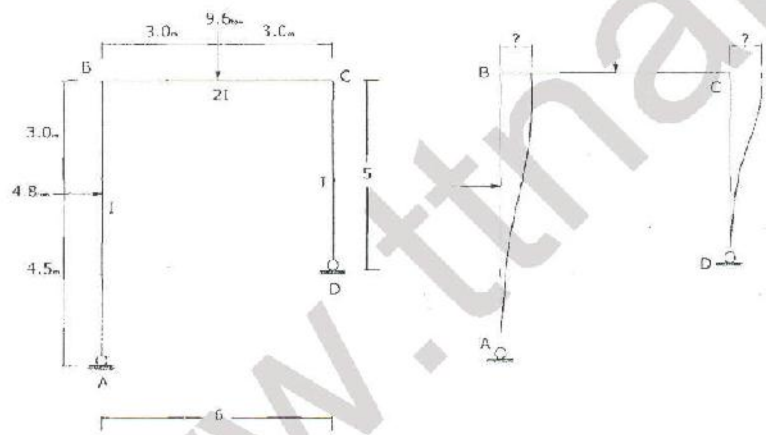
$$\begin{cases} M_{12} = 4EI\theta_2 \\ M_{21} = 8EI\theta_2 \\ M_{23} = 0.8EI\theta_2 - 13.5 \\ M_{32} = 0.4EI\theta_2 + 13.5 \end{cases}, \ M_{21} + M_{23} = 0 \Rightarrow 8.8EI\theta_2 = 13.5 \Rightarrow EI\theta_2 = 1.534$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{12} = 6.136 \ \ t.m \\ M_{21} = 12.27 \ \ t.m \\ M_{23} = -12.27 \, t.m \\ M_{32} = 14.11 \ \ t.m \end{cases}$$

مراتب فوق نشان می‌دهد که سختی نسبی اعضا نسبت به هم در لنگرها تأثیر زیادی ایجاد نمی‌کند.

۴-۲- قاب مستطیلی با تغییر مکان جانبی

مثال۱- قاب شکل زیر را تحلیل کنید.



مجهولات: $\Delta, \theta_a, \theta_b, \theta_c, \theta_d$

تعیین لنگرهای گیرداری:

$$M'_{ab} = -\frac{4.8 \times 3^2 \times 4.5}{7.5^2} = -3.45 \, t.m$$

$$M'_{ba} = \frac{4.8 \times 4.5^2 \times 3}{7.5^2} = 5.18 \, t.m$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{PL}{8} = -7.2 \, t.m$$

نوشتن معادلات شیب افت (با در نظر گرفتن سازگاری تغییر مکان‌ها)

$$M_{ab} = \frac{2EI}{7.5}(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{7.5}) + (-3.45) = 0.26667EI(2\theta_a + \theta_b - 0.4\Delta) - 3.45$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{7.5}(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{7.5}) + (5.18) = 0.26667EI(\theta_a + 2\theta_b - 0.4\Delta) + 5.18$$

$$M_{bc} = \frac{4EI}{6}(2\theta_b + \theta_c) + (-7.2) = 0.66667EI(2\theta_b + \theta_c) - 7.2$$

$$M_{cb} = \frac{4EI}{6}(\theta_b + 2\theta_c) + (7.2) = 0.66667EI(\theta_b + 2\theta_c) + 7.2$$

$$M_{cd} = \frac{2EI}{5}(2\theta_c + \theta_d - \frac{3\Delta}{5}) = 0.4EI(2\theta_c + \theta_d - 0.6\Delta)$$

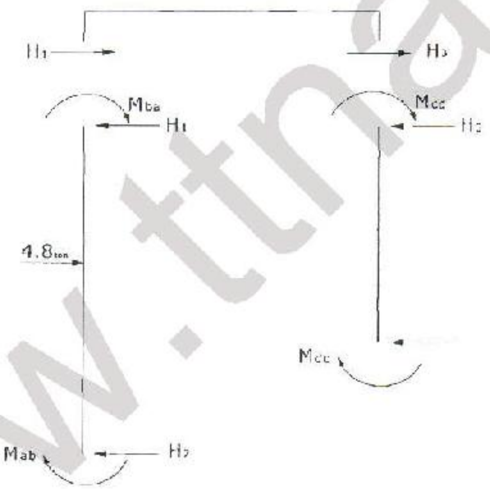
$$M_{dc} = \frac{2EI}{5}(\theta_c + 2\theta_d - \frac{3\Delta}{5}) = 0.4EI(\theta_c + 2\theta_d - 0.6\Delta)$$

اعمال شرایط تعادل :

الف- تعادل لنگرها

$$\begin{cases} M_{ab} = 0 \\ M_{ba} + M_{bc} = 0 \\ M_{cb} + M_{cd} = 0 \\ M_{dc} = 0 \end{cases}$$

ب- تعادل برش‌ها



$$H_1 = \frac{4.8 \times 4.5}{7.5} + \frac{M_{ab} + M_{ba}}{7.5}$$

$$H_3 = \frac{M_{cd} + M_{dc}}{5}$$

$$2.88 + 0.03555(3\theta_a + 3\theta_b - 0.8\Delta) + 0.23061 + 0.08EI(3\theta_c + 3\theta_d - 1.2\Delta) = 0$$

$$\Rightarrow -0.10667\theta_a - 0.1066\theta_b - 0.24\theta_c - 0.24\theta_d + 0.12444\Delta = 3.1104$$

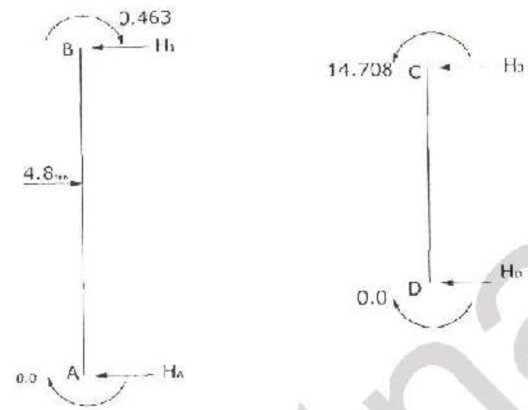
تشکیل ماتریس سختی

$$EI\begin{bmatrix} 0.5333 & 0.26667 & 0 & 0 & -0.10667 \\ 0.26667 & 1.86666 & 0.6667 & 0 & -0.10667 \\ 0 & 0.6667 & 2.1333 & 0.4 & -0.24 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.8 & -0.24 \\ -0.10667 & 0.10667 & -0.24 & -0.24 & 0.12444 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.45 \\ -5.18+7.2 \\ -7.2+0 \\ 0 \\ 3.1104 \end{bmatrix}$$

با حل معادله فوق خواهیم داشت:

$$\begin{cases} EI\Delta = 143.27 \\ EI\theta_d = 40.912 \\ EI\theta_c = 4.14 \\ EI\theta_b = 2.982 \\ EI\theta_a = 33.642 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{ab} = -0.001 \\ M_{ba} = 0.463 \\ M_{bc} = -0.464 \\ M_{cb} = 14.708 \\ M_{cd} = -14.708 \\ M_{dc} = 0.001 \end{cases}$$

کنترل نیروی برشی تکیه گاه‌ها:



$$H_3 = \frac{M_{45} + M_{54}}{6.4}$$

$$H_A + H_D = 4.8$$

$$H_A = \frac{4.8 \times 3}{3 + 4.5} - \frac{0.463}{7.5} \;,\; H_D = \frac{14.708}{5}$$

$$\left(\frac{14.4}{7.5} - \frac{0.463}{7.5}\right) + \frac{14.708}{5} = 1.8583 + 2.9416 = 4.7999 \cong 4.8$$

اگر در این مسئله تکیه گاه‌های A,D گیردار باشند خواهیم داشت:

$$\theta_c = \theta_d = 0 \;,\; M_{ab}, M_{cd} \neq 0$$

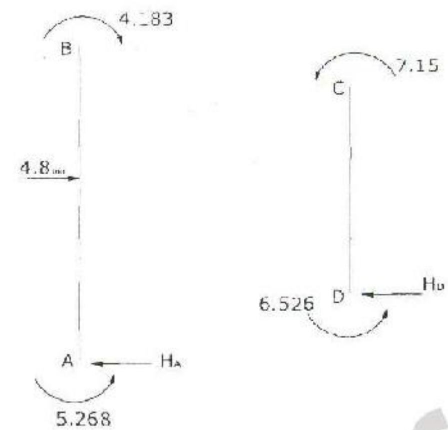
در نتیجه: (سطر و ستون مربوطه حذف می‌گردد)

$$EI\begin{bmatrix} 1.8666 & 0.6667 & -0.1067 \\ 0.6667 & 2.1333 & -0.24 \\ -0.1067 & -0.24 & 0.1244 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.016 \\ -7.2 \\ 3.1104 \end{bmatrix}$$

با حل معادله فوق نتایج زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{cases} EI\Delta = 24.596 \\ EI\theta_c = -1.5586 \\ EI\theta_b = 3.0422 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{ab} = -5.268 \\ M_{ba} = 4.183 \\ M_{bc} = -4.183 \\ M_{cb} = 7.15 \\ M_{cd} = -7.15 \\ M_{dc} = -6.526 \end{cases}$$

کنترل نیروی برشی تکیه‌گاه‌ها:

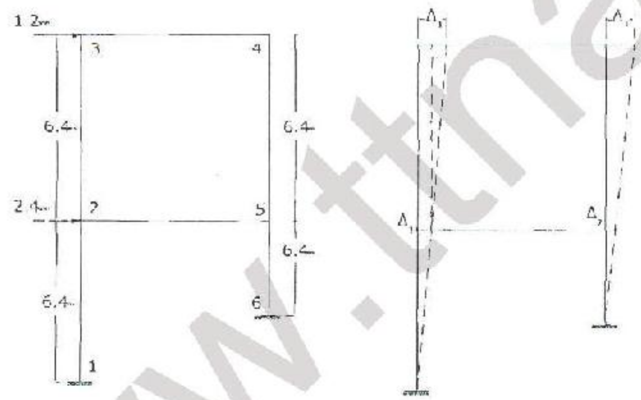


$$H_A = \frac{4.8\times 3 + 5.268 - 4.183}{7.5} = 2.065$$

$$H_D = \frac{7.15 + 6.526}{5} = 2.735$$

$$H_A + H_D = 2.065 + 2.735 = 4.8t$$

مثال ۲- قاب مستطیلی با دو درجه آزادی.



در این حالت مجهولات عبارتند از: $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \Delta_1, \Delta_2$

برای حل این گونه قاب‌ها نیز مانند موارد قبل شرایط تعادل لنگر در گره‌ها را می‌نویسیم که در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\sum M_2 = \sum M_3 = \sum M_4 = \sum M_5 = 0$$

روابط حاصل از تعادل برش‌ها:

1) $M_{21} + M_{23} + M_{25} = 0$

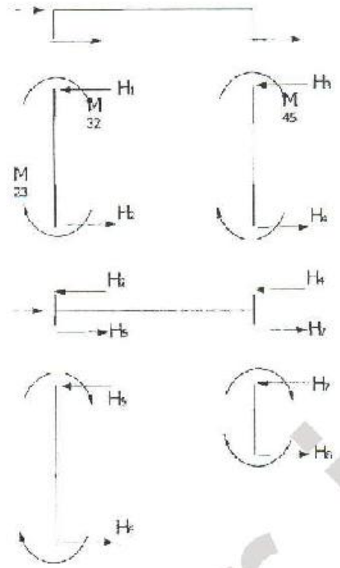
2) $M_{32} + M_{34} = 0$

3) $M_{43} + M_{45} = 0$

4) $M_{54} + M_{56} + M_{52} = 0$

$5)\ -1.2 - H_1 - H_3 = 0$

$6)\ -2.4 + H_1 + H_3 - H_5 - H_7 = 0$



با نوشتن شرایط تعادل نیروها داریم:

$$H_1 = \frac{M_{32} + M_{23}}{6.4}$$

$$H_3 = \frac{M_{45} + M_{54}}{6.4}$$

$$H_5 = \frac{M_{12} + M_{21}}{6.4}$$

$$H_7 = \frac{M_{63} + M_{56}}{3.2}$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L_{ij}}\left(2\theta_i + \theta_j - \frac{3\Delta}{L_{ij}}\right) + \overline{M'_{ij}}$$

با حل دستگاه شش معادله شش مجهول فوق، تمامی مجهولات به ترتیب زیر بدست می‌آیند:

$$\theta_2 = 0.79347 \frac{tm^2}{EI}$$

$$\theta_3 = 0.66138 \frac{tm^2}{EI}$$

$$\theta_4 = 0.46592 \frac{tm^2}{EI}$$

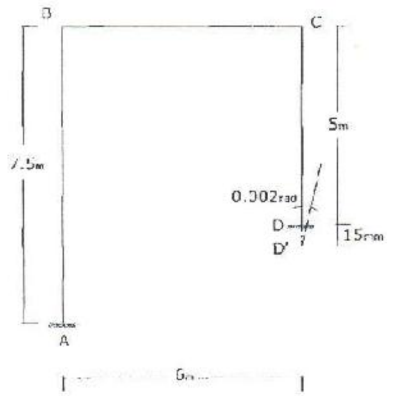
$$\theta_5 = 1.5744 \frac{tm^2}{EI}$$

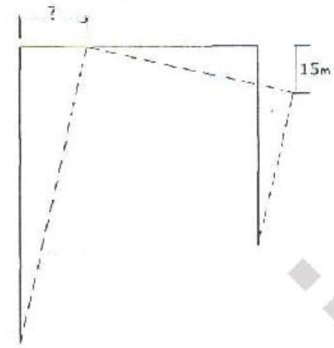
$$\Delta_1 = 18.601$$

$$\Delta_2 = 6.455$$

۴-۳- قاب مستطیلی با نشست تکیه گاهی و دوران تکیه گاه

مثال: قاب شکل زیر را تحلیل کنید.





نوشتن روابط شیب-افت:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{7.5}(\theta_b + -\frac{3\Delta_1}{7.5}) = EI(0.267\theta_b - 0.1067\Delta_1)$$

$$\begin{cases} M_{ba} = \frac{2EI}{7.5}(2\theta_b - \frac{3\Delta_1}{7.5}) = EI(0.5333\theta_b - 0.1067\Delta_1) \\ M_{bc} = \frac{2EI}{6}(2\theta_b + \theta_c - \frac{3\times 15\times 10^{-3}}{6}) = EI(0.67\theta_b + 0.33\theta_c) - 2.5\times 10^{-4} EI \end{cases}$$

$$M_{cb} = \frac{2EI}{6}(\theta_b + 2\theta_c - \frac{45\times 10^{-3}}{6}) = EI(0.333\theta_b + 0.67\theta_c) - 2.5\times 10^{-4}$$

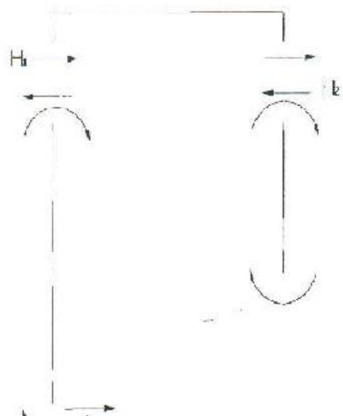
$$M_{cd} = \frac{2EI}{5}(2\theta_c + 0.002 - \frac{3\Delta_1}{5}) = EI(0.8\theta_c - 0.24\Delta_1) + 8\times 10^{-4}$$

$$M_{dc} = \frac{2EI}{5}(2\times 0.002 + \theta_c - \frac{3\Delta_1}{5}) = EI(0.4\theta_c - 0.24\Delta_1) + 16\times 10^{-4} EI$$

تعادل لنگرها:

$$M_{ba} + M_{bc} = 0$$
$$M_{cb} + M_{cd} = 0$$

تعادل برش:



$$H_1 = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{7.5}, H_2 = \frac{M_{cd} + M_{dc}}{5}$$

$$H_1 + H_2 = 0 \Rightarrow \frac{EI}{7.5}(0.5\theta_B - 2\times 0.1067\Delta_1) - \frac{EI}{5}(1.5\theta_C - 0.48\Delta_1) - 24\times 10^{-4}EI = 0$$

تشکیل ماتریس سختی:

$$\begin{bmatrix} 1.2 & 0.333 & -.1067 \\ 0.333 & 1.467 & -0.24 \\ -0.1067 & -0.24 & 0.1244 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5\times 10^{-4} \\ -5.5\times 10^{-4} \\ 4.8\times 10^{-4} \end{bmatrix} EI$$

با حل معادله فوق خواهیم داشت:

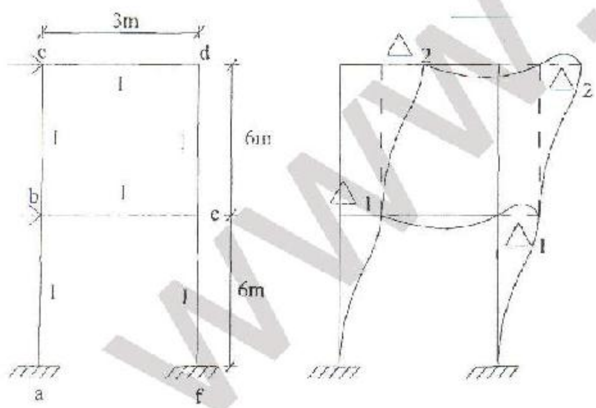
$$\begin{cases} \Delta_1 = 4.92\times 10^{-3}(m) \\ \theta_C = 3.015\times 10^{-4}(rad) \\ \theta_b = 5.62\times 10^{-4}(rad) \end{cases}$$

۴-۴- قاب مستطیلی با تقارن معکوس

قاب های مستطیلی با تقارن معکوس را می توان به دو روش مستقیم و هندسی تحلیل نمود، که در ادامه هر دو روش توضیح داده می شوند.

۱- روش مستقیم

مثال۱- قاب روبرو تحت اثر نیروهای جانبی تقارن معکوس دارد و در اثر اعمال نیروهای مخالف به حالت اولیه باز می گردد.



با توجه به در نظر گرفتن خواص سازه های با تقارن معکوس داریم: $\Delta_c = \Delta_d, \Delta_b = \Delta_e$

پس مجهولات در این حالت تقلیل یافته و تنها چهار مجهول $\Delta_1, \Delta_2, \theta_b, \theta_C$ باقی می ماند که با توجه به معادلات شیب افت خواهیم داشت:

$$M_{ab} = M_{fe} = \left(\theta_b - \frac{3\Delta_1}{6}\right) \quad , \theta_a = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{ba} = M_{ab} = \left(2\theta_b - \dfrac{3\Delta_1}{6}\right) \\ M_{bc} = M_{cb} = \left(2\theta_b + \theta_c - \dfrac{3\Delta_2}{6}\right) \\ M_{be} = M_{eb} = \left(2\theta_b + \theta_e\right) = 6\theta_b \qquad \left(\theta_b = \theta_e\right) \end{array}\right\} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M_{ba} + M_{bc} + M_{be} = 0 \quad \Rightarrow$$

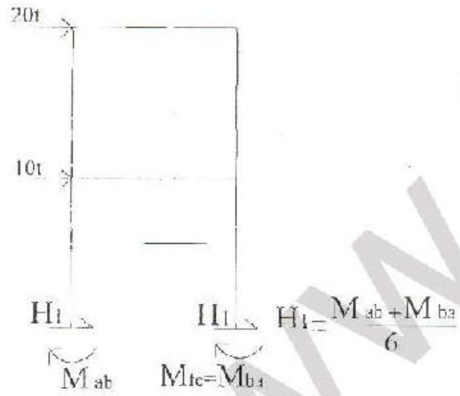
$$-\Delta_1 - \Delta_2 + 20\theta_b + 2\theta_c = 0 \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{cb} = M_{bc} = \left(2\theta_c + \theta_b - \dfrac{3\Delta_2}{6}\right) \\ M_{cd} = M_{dc} = 2\left(2\theta_c + \theta_d\right) = 6\theta_c \qquad \left(\theta_C = \theta_d\right) \end{array}\right\} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M_{cb} + M_{cd} = 0 \Rightarrow$$

$$-0.5\Delta_2 + \theta_b + 8\theta_c = 0 \quad (II)$$

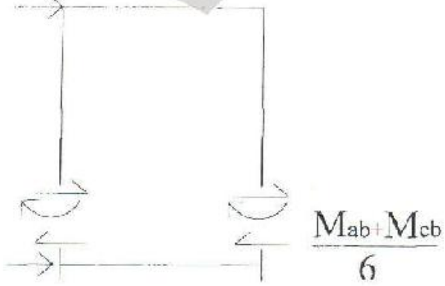
با توجه به معادلات برش:



«برش اول»

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{M_{ba} + M_{ab}}{6}\right) + 20 + 10 = 0$$

$$0.33\Delta_1 - \theta_b = 30 \quad (III)$$



«برش دوم»

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; 2\left(\frac{M_{bc} + M_{cb}}{6}\right) + 10 = 0$$

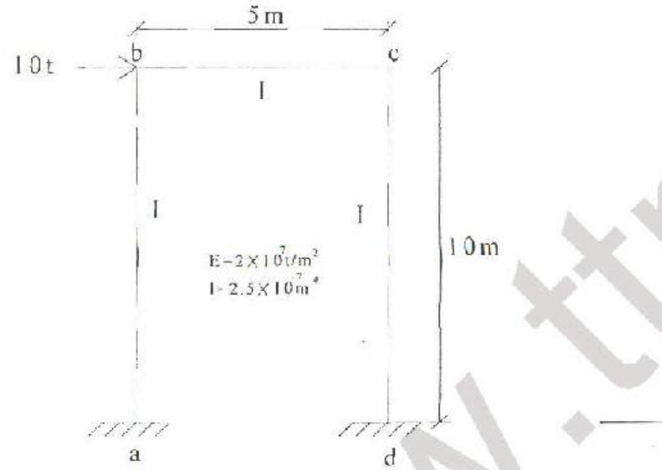
$$0.33\Delta_2 - \theta_b - \theta_c = 10 \quad (IV)$$

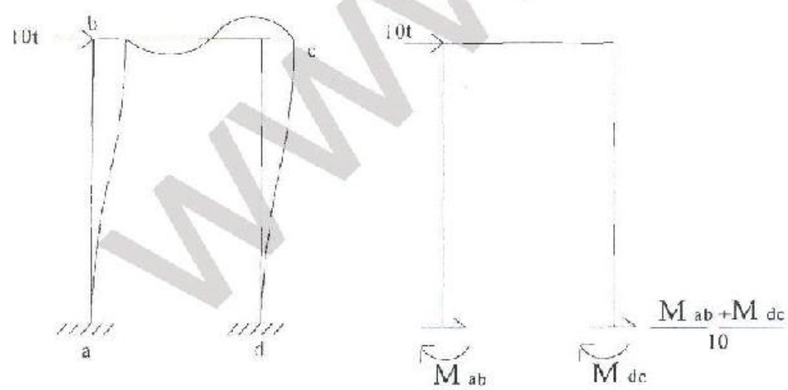
دو معادله برش مستقل خطی می‌باشند

با توجه به چهار معادله و چهار مجهول ماتریس سختی را نوشته و مجهولات را بدست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 20 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 16 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0.33 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0.33 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

مثال ۲- تقارن معکوس





$$\theta a = \theta b$$

$$M_{ab} = M_{dc} = \frac{2EI}{10}(2\underbrace{\theta_a}_{0} + \theta_b - \frac{3\Delta}{10}) = \theta_b - \frac{3\Delta}{10}$$

$$M_{ba} = M_{cd} = \frac{2EI}{10}(\underbrace{\theta_a}_{0} + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{10}) = 2\theta_b - \frac{3\Delta}{10}$$

$$M_{bc} = M_{cb} = 2(2\theta_b + \theta_b) = 6\theta_b$$

$$\sum M_b = 0 \;\Rightarrow\; 8\theta_b - 0.3\Delta = 0 \quad (I)$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; 2(\frac{M_{ab} + M_{ba}}{10}) + 10 = 0$$

$$3\theta_b - 0.6\Delta + 50 = 0 \quad (II)$$

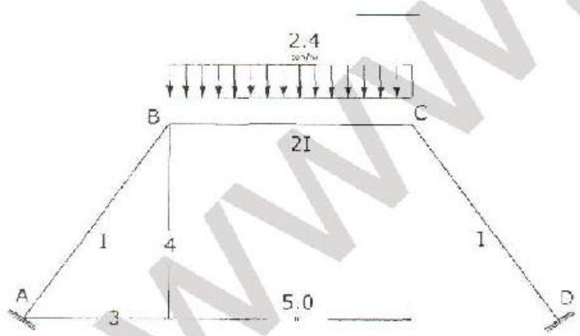
$$(I),(II): \begin{cases} 8\theta_b - 0.3\Delta = 0 \\ 3\theta_b - 0.6\Delta = -50 \end{cases} \Rightarrow \quad \theta_b = 50/13 \quad \Delta = 4000/39$$

۲- روش هندسی: در بخش قاب‌های شیبدار به آن خواهیم پرداخت.

۴-۵- قاب غیر مستطیلی بدون تغییرمکان جانبی

(قاب‌های شیبدار Gable Frame)

مثال- قاب شکل زیر را تحلیل کنید.



(بار جانبی به سازه وارد نمی‌شود و بارگذاری متقارن می‌باشد پس سازه متقارن بوده و تغییر شکل جانبی نداریم.)

(تقارن مستقیم)

محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{AB} = M'_{CD} = 0$$

$$M'_{BC} = -M'_{CB} = -\frac{2.4 \times 5^2}{12} = -5.0\,t.m$$

نوشتن روابط شیب-افت:

$$M_{ij}=\frac{2EI}{\ell}(2\theta_i+\theta_j-\frac{3\Delta}{\ell})+M'_{ij}$$

$$M_{ab}=\frac{2EI}{5}(2\theta_a+\theta_b)=0.4EI\theta_b$$

$$M_{ba}=\frac{2EI}{5}(\theta_a+2\theta_b)=0.8EI\theta_b$$

$$M_{bc}=\frac{4EI}{5}(2\theta_b+\theta_c)-5.0=0.8EI\theta_c+1.6EI\theta_b-5.0$$

$$M_{cb}=\frac{4EI}{5}(\theta_b+2\theta_c)+5.0=0.8EI\theta_b+1.6EI\theta_c+5.0$$

$$M_{cd}=\frac{2EI}{5}(2\theta_c+\theta_d)=0.8EI\theta_c$$

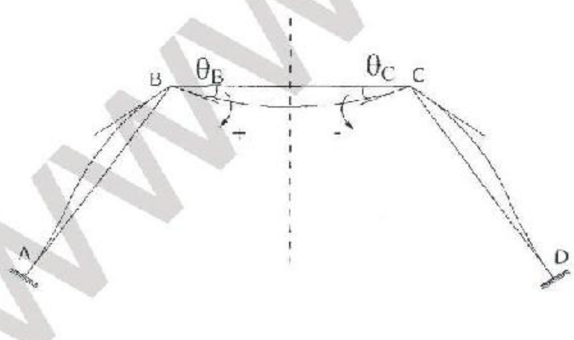
$$M_{dc}=\frac{2EI}{5}(\theta_c+2\theta_d)=0.4EI\theta_c$$

با توجه به گیردار بودن تکیه گاه‌های A,D خواهیم داشت: $\theta_a=\theta_d=0$

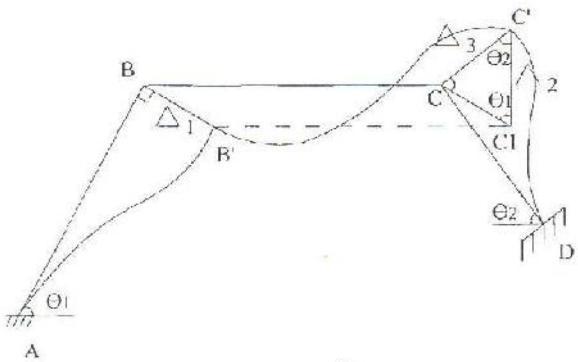
تعادل لنگرها

$$\begin{cases}M_{bc}+M_{ba}=0\\M_{cb}+M_{cd}=0\end{cases}\Rightarrow\theta_B=-\theta_C=+3.125/EI$$

$$\left.\begin{array}{l}E=200\times10^6\ t/m^2\\I=40\times10^{-6}\ m^4\\EI=8000\ t.m^2\end{array}\right\}\Rightarrow\theta_B=-\theta_C=4\times10^{-4}(rad)$$



۴-۶- حل هندسی قاب‌های غیر مستطیلی



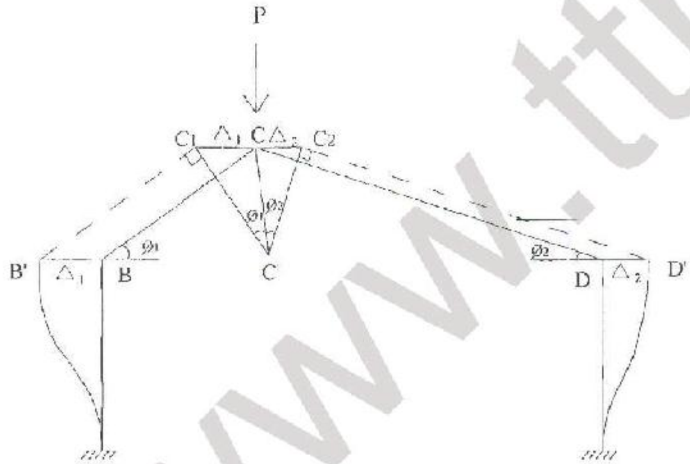
$$\Delta_{ab} = CC_1 = \Delta_1$$

$$\Delta_{bc} = C_1C' = \Delta_2$$

$$\Delta_{cd} = CC' = \Delta_3$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\Delta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \frac{\Delta_3}{\sin\theta_1}$$

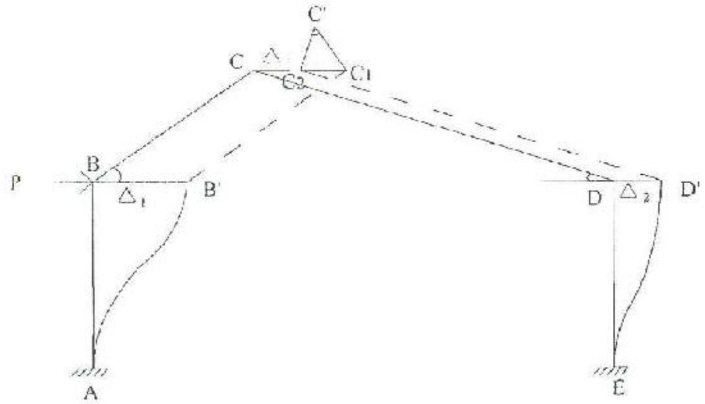
الف) قاب نامتقارن تحت اثر بار قائم:

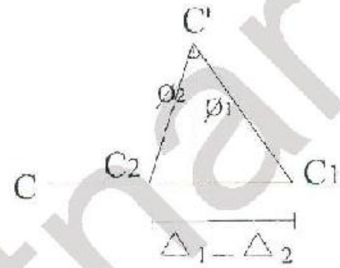


$$\frac{\Delta_{bc}}{\sin(90-\Phi_1)} = \frac{\Delta_{cd}}{\sin(90-\Phi_2)} = \frac{\Delta_1+\Delta_2}{\sin(\Phi_1+\Phi_2)}$$

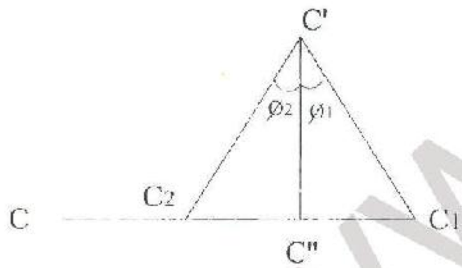
(در حالت سازهٔ متقارن $\Delta_1 = \Delta_2, \Phi_1 = \Phi_2$)

ب) قاب نامتقارن تحت اثر بار افقی:





$\Delta_1 = C_1C \quad , \quad CC_2 = \Delta_2$

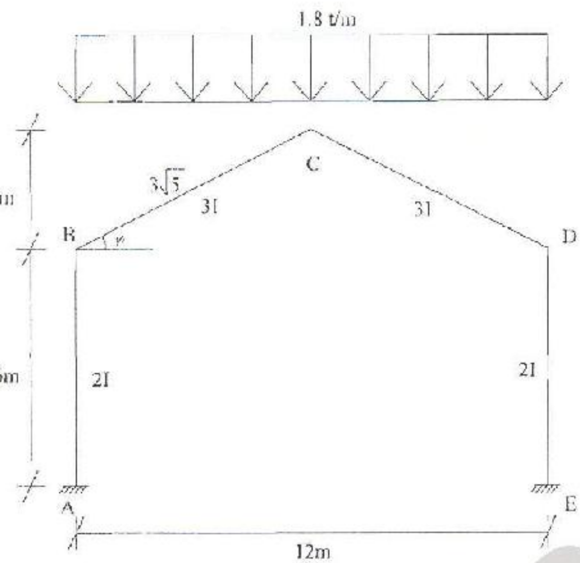


(در حالت سازه متقارن $C_2C'' = C''C_1, \Phi_1 = \Phi_2$)

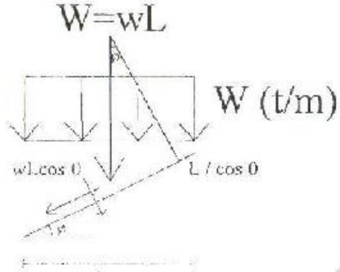
ج) قابهای شیبدار

برای حل قابهای شیبدار ابتدا مجهولات گرهی را تعیین نموده و سپس قاب را از لحاظ هندسی حل می کنیم (بدست آوردن تغییر مکان دو سر اعضا)و در نهایت با نوشتن معادلات شیب-افت مجهولات را بدست می آوریم.

مثال۱- سازهٔ متقارن تحت بار قائم

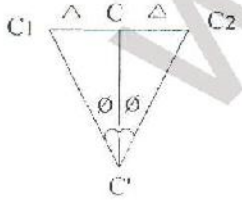


۱) ابتدا بار قائم بر سطح افق را به بار معادل وارد بر سطح شیبدار قاب تبدیل می کنیم که در این صورت خواهیم داشت:



$$\frac{W\ell.\cos\Phi}{\ell/\cos\Phi} = W.\cos^2\Phi$$

۲) مجهولات : $\Delta, \theta_b, \theta_c, \theta_d$

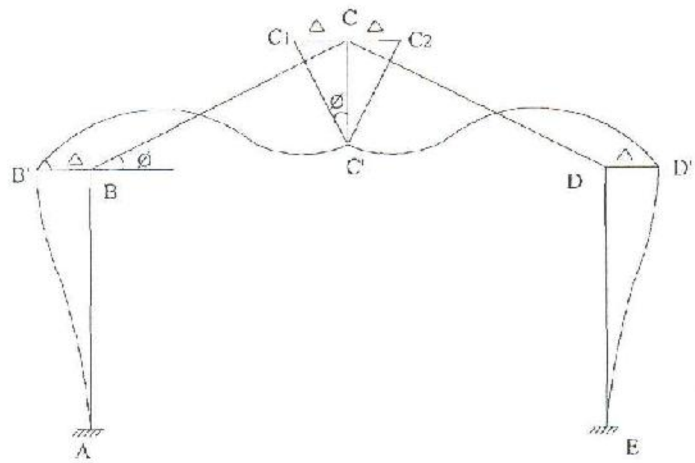


$\Delta_{ab} = \Delta_{ba} = -\Delta$

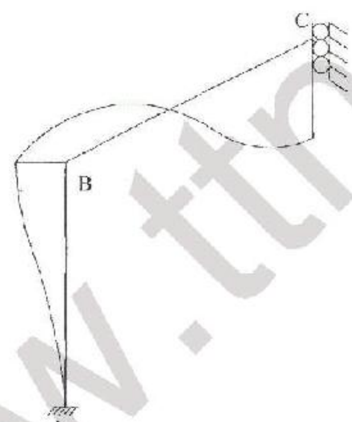
$\Delta_{bc} = \Delta_{cb} = \dfrac{CC'}{\sin\alpha} = \sqrt{5}\Delta$

$\Delta_{cd} = \Delta_{dc} = -\sqrt{5}\Delta$

$\Delta_{de} = \Delta_{ed} = \Delta$



۳) با استفاده از تقارن و با توجه به اینکه تغییر مکان افقی نقطه C صفر است و فقط تغییر مکان قـائم دارد. لـذا داریم: $\theta_C = 0$



$M'_{ab} = -M'_{bc} = 0$

$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{1}{12} \times 1.8 \times 36 = -5.4\, t.m$

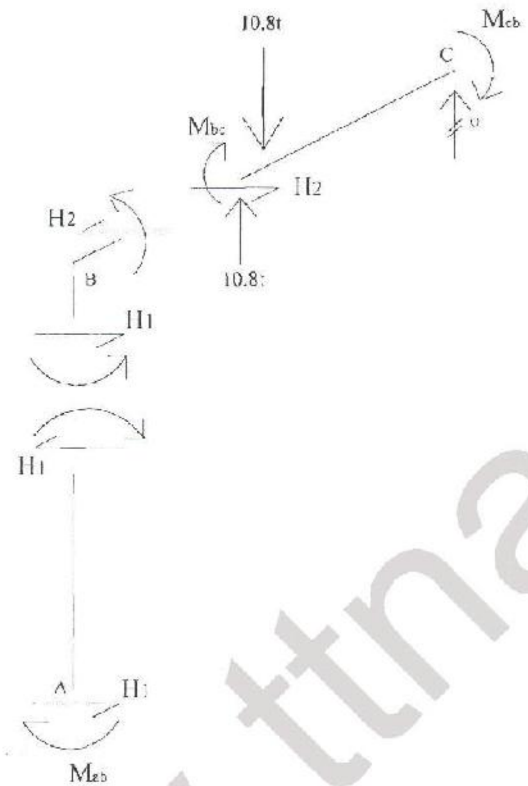
$M_{ab} = \frac{2E(2I)}{6}(\theta_b + \frac{3\Delta}{6}) \quad , \quad \theta_a = 0 \quad , M'_{ab} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} M_{ba} = \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_b + \frac{3\Delta}{6}) \\ M_{bc} = \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_b - \frac{3\sqrt{5}\Delta}{3\sqrt{5}}) - 5.4 \end{array}\right\} = 0 \qquad (I)$$

$M_{cb} = \frac{2E(3I)}{6}(\theta_b - \frac{3\sqrt{5}\Delta}{3\sqrt{5}}) + 5.4$

۴) تعادل برش:

عکس العمل قائم C صفر است چون تکیه گاه غلطکی است و تغییر مکان دارد.



$$\sum F_{x(L)} = 0 \Rightarrow H_1 - H_2 = 0$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow$$

$$-3H_2 - 10.8 \times 3 + 10.8 \times 6 + M_{bc} + M_{cb} = 0$$

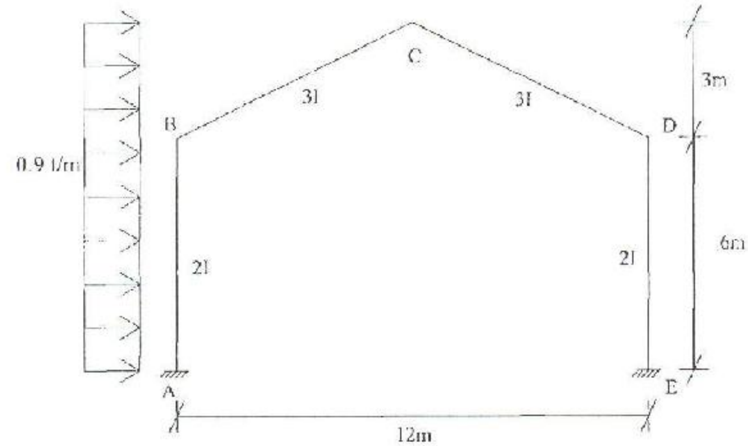
$$H_2 = 10.8 + \frac{M_{bc} + M_{cb}}{3}$$

$$\frac{M_{ab} + M_{ba}}{6} - \frac{M_{bc} + M_{cb}}{3} - 10.8 = 0 \quad \text{(II)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} EI\left[\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)\theta_b + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\Delta \right] = 5.4 & \text{(I)} \\ EI\left[-3.366\theta_b - 4.25\Delta\right] = 6 \times 10.8 & \text{(II)} \end{cases}$$

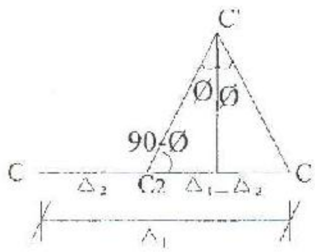
$$\begin{cases} 3.12\theta_b - 0.561\Delta = \dfrac{5.4}{EI} \\ -0.561\theta_b + 0.7\Delta = \dfrac{10.8}{EI} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta_b = \dfrac{5.217}{EI} \\ \Delta = \dfrac{19.404}{EI} \end{cases}$$

مثال۲: سازهٔ متقارن تحت بار جانبی

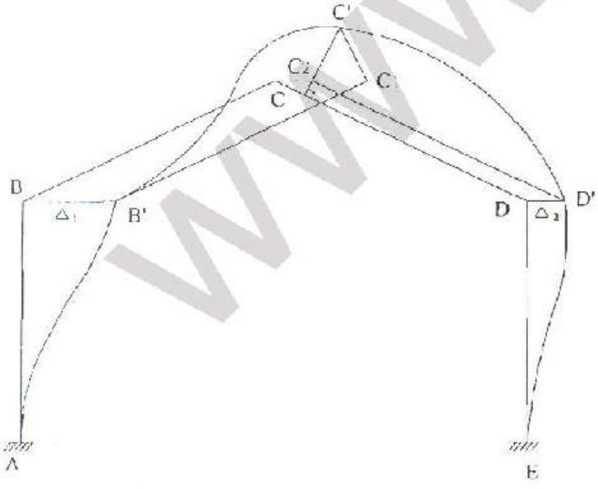


مانند مثال قبل قاب شیبدار متقارن هندسی، تحت بار افقی مانند باد قرار گرفته است.

۱)مجهولات تغییر مکانی $\Delta_1,\Delta_2,\theta_b,\theta_c,\theta_d$



۲)حل هندسی- ترسیم منحنی ارتجاعی



الف: از C به اندازه Δ_1 در جهت افقی حرکت و به C_1 می‌رسیم، تغییر مکان یافته نقطه C یعنی C' روی خطی عمود بر امتداد bc یا $b'C_1$ قرار دارد، پس از C_1 عمودی بر $b'C_1$ اخراج می‌کنیم.

ب: از C به اندازهٔ Δ_2 در جهت افقی حرکت به C_2 می‌رسیم، تغییر مکان یافته C یعنی C' روی خطی عمود بر

امتداد cd یا C_2d' قرار دارد پس از C_2 عمودی بر C_2d' اخراج می کنیم.

ج: محل تقاطع نقطه C' می باشد. $C_2C_1 = \Delta_1 - \Delta_2$

د: Δهای اضلاع مختلف را با توجه به مثلث $C_2C'C_1$ به دست می آوریم.

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\sin 2\Phi} = \frac{C_1C'}{\sin(90 - \Phi)}$$

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2\sin\Phi\cos\Phi} = \frac{C_1C'}{\cos\Phi}$$

$$C'C_1 = C'C_2 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2\sin\Phi}$$

$$\Delta_{ab} = \Delta_{ba} = \Delta_1$$

$$\Delta_{bc} = \Delta_{cb} = -C_1C' = -\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2\sin\Phi} = \frac{-(\Delta_1 - \Delta_2)}{2/\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$\Delta_{cd} = \Delta_{dc} = -\Delta_{bc} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2\sin\alpha} = \frac{(\Delta_1 - \Delta_2)}{2/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$\Delta_{de} = \Delta_{ed} = \Delta_2$$

۳) تشکیل معادلات شیب افت

الف: لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{wl^2}{12} = -\frac{0.9\times 6^2}{12} = -2.7\,t.m$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{wl^2}{12} = -\frac{0.9\times 3^2}{12} = -0.675\,t.m$$

ب: تعیین شرایط مرزی $\theta_a = \theta_e = 0$

ج: نوشتن معادلات

$$M_{ab} = \frac{2E(2I)}{6}(\theta_b - \frac{3\Delta_1}{6}) + (-2.7) = 0.67EI(\theta_b - 0.5\Delta_1) - 2.7$$

$$M_{ba} = 0.67EI(2\theta_b - 0.5\Delta_1) + 2.7$$

$$M_{bc} = \frac{2E(3I)}{3\sqrt{5}}\left[2\theta_b + \theta_c + 3\times\frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)\right] - 0.675$$

$$= 0.89EI(2\theta_b + \theta_c) + \frac{EI}{\sqrt{5}}(\Delta_1 - \Delta_2) - 0.675$$

$$M_{cb} = 0.89EI(\theta_b + 2\theta_c) + \frac{EI}{\sqrt{5}}(\Delta_1 - \Delta_2) + 0.675$$

$$M_{cd} = \frac{2E(3I)}{3\sqrt{5}}\left[2\theta_c + \theta_d - \frac{3\sqrt{5}}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)\right] = 0.89EI(2\theta_c + \theta_d) - \frac{EI}{\sqrt{5}}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$M_{dc}=0.89EI(\theta_c+2\theta_d)-\frac{EI}{\sqrt{5}}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$M_{de}=\frac{2E(2I)}{6}(2\theta_d-\frac{3\Delta_2}{6})=0.67EI(2\theta_d)-0.33EI\Delta_2$$

خلاصه می‌شود:

$$M_{ab}=0.67EI\theta_b-0.33EI\Delta_1-2.7$$

$$M_{ed}=0.67EI\theta_d-0.33EI\Delta_2$$

$$\left.\begin{aligned}M_{ba}&=1.33EI\theta_b-0.33EI\Delta_1+2.7\\M_{bc}&=1.78EI\theta_b+0.81EI\theta_c+0.447EI(\Delta_1-\Delta_2)-0.675\end{aligned}\right\}=0\quad(I)$$

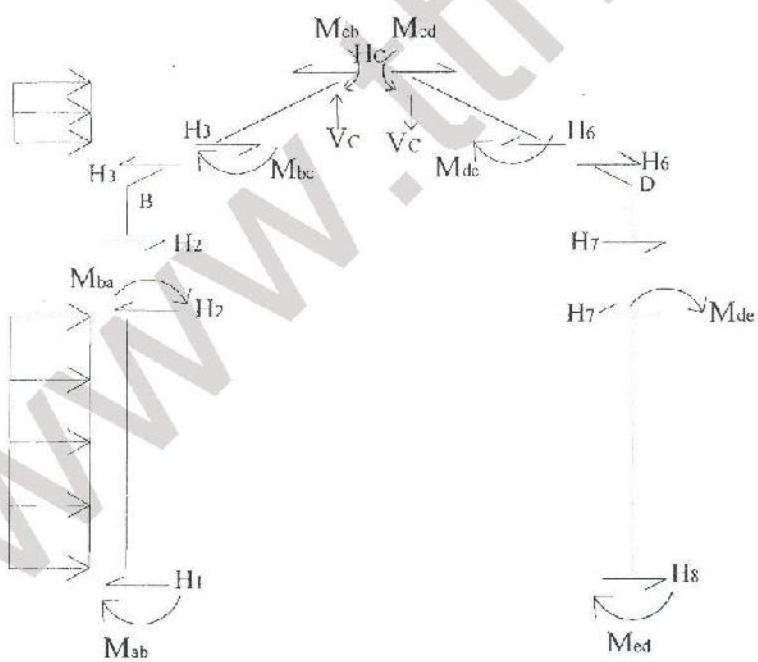
$$\left.\begin{aligned}M_{cb}&=0.84EI\theta_b+1.78EI\theta_c+0.447EI(\Delta_1-\Delta_2)+0.675\\M_{cd}&=1.78EI\theta_c+0.84EI\theta_d-0.447EI(\Delta_1-\Delta_2)\end{aligned}\right\}=0\quad(II)$$

$$\left.\begin{aligned}M_{dc}&=0.84EI\theta_c+1.78EI\theta_d+0.447EI(\Delta_1-\Delta_2)\\M_{de}&=1.33EI\theta_d-0.33EI\Delta_2\end{aligned}\right\}=0\quad(III)$$

با حل سه معادله III, II, I بدست می آید:

$$M_{ed}=0.67EI\theta_d-0.33EI\Delta_2$$

د: روابط برش (برای تأمین دو معادله دیگر):



$$\sum M_d=0\ \Rightarrow$$

$$+3H_c-6V_c+M_{cd}+M_{dc}=0$$

$$H_c=\frac{(M_{cb}+M_{bc})-(M_{dc}+M_{cd})}{6}+0.675$$

$$\sum F_x = 0$$
$$2.7 + H_2 = H_C \qquad \text{برای } (BC)$$

$$\sum F_x = 0$$
$$H_G = H_C \qquad \text{برای } (CD)$$

عضو CD , BC انتقال صلب دارند پس دوران ندارند.

$$\left.\begin{matrix} -H_2 + H_3 = 0 \\ -H_6 - H_7 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$H_2 = 2.7 + \frac{M_{ab} + M_{ba}}{6} \quad (IV)$$

$$H_7 = \frac{M_{cd} + M_{dc}}{6} \quad (V)$$

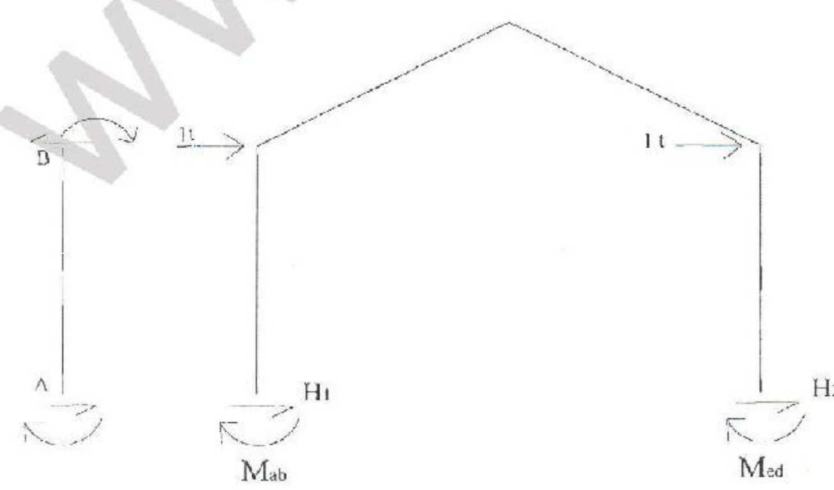
هـ : تشکیل معادلات و حل:

$$EI\begin{bmatrix} 3.1221 & 0.8944 & 0 & 0.11388 & -0.44721 \\ 0.8944 & 3.5776 & 0.8944 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8944 & 3.1221 & -0.44721 & 0.11388 \\ 0.11388 & 0 & -0.44721 & 0.40425 & -0.29815 \\ -0,44721 & 0 & 0,11388 & -0,29815 & 0,40925 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,025 \\ -0,675 \\ 0 \\ 4.725 \\ 0,675 \end{bmatrix}$$

$$\text{نتایج} \quad \begin{cases} \theta_b = 3.356EI \\ \theta_c = -2.356EI \\ \theta_d = 5.312EI \\ \Delta_1 = 40.95EI \\ \Delta_2 = 33.67EI \end{cases}$$

مثال ۳- آنالیز قاب‌های شیبدار متقارن با استفاده از تقارن معکوس در بارگذاری‌ها:

(منظور محاسبهٔ یک قاب شیبدار تحت اثر بار قرینهٔ معکوس مثل شکل روبرو می‌باشد.)



روش حل۱) بدون استفاده از تقارن معکوس

(C حرکت قائم ندارد) از نظر هندسی تغییر مکان نقطهٔ C ممکن نیست.

مجهولات: $\theta_d , \theta_b , \theta_c , \Delta$

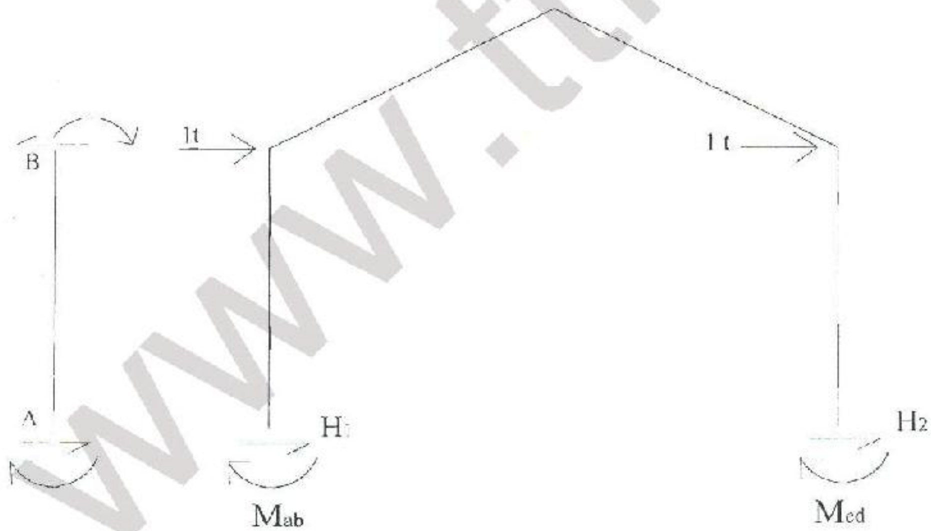
$$M_{ab} = \frac{2EI}{h}(\theta_b - \frac{3\Delta}{h}) = 2\theta_b - \Delta$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{ba} = \dfrac{2EI}{h}(2\theta_b - \dfrac{3\Delta}{h}) = 4\theta_b - \Delta \\ M_{bc} = \dfrac{2EI}{l}(2\theta_b + \theta_c) = 4\theta_b + 2\theta_c \end{array}\right\} = 0 \Rightarrow 8\theta_b + 2\theta_c - \Delta = 0 \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{cb} = \dfrac{2EI}{l}(\theta_b + 2\theta_c) = 2\theta_b + 4\theta_c \\ M_{cd} = \dfrac{2EI}{l}(2\theta_c + \theta_d) = 4\theta_c - 2\theta_d \end{array}\right\} = 0 \Rightarrow 2\theta_b + 8\theta_c + 2\theta_d = 0 \quad (II)$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{dc} = \dfrac{2EI}{l}(\theta_c + 2\theta_d) = 2\theta_c + 4\theta_d \\ M_{de} = \dfrac{2EI}{h}(2\theta_d - \dfrac{3\Delta}{h}) = 4\theta_d - \Delta \end{array}\right\} = 0 \Rightarrow 2\theta_c + \theta_d - \Delta = 0 \quad (III)$$

$$M_{ed} = \frac{2EI}{h}(\theta_d - \frac{3\Delta}{h}) = 2\theta_d - \Delta$$



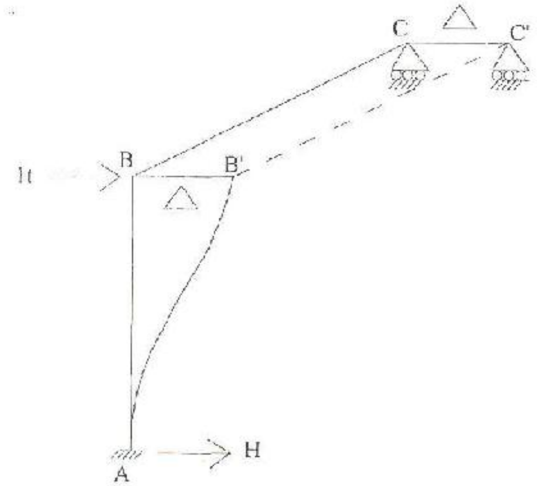
$$H_1 = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{6} = H_2$$

معادلهٔ تعادل : $\quad H_1 + H_2 + 2 = 0$

$$-(\frac{M_{ab} + M_{ba}}{6}) + (\frac{M_{de} + M_{ed}}{6}) - 2 \Rightarrow -\theta_b - \theta_d - \tfrac{2}{3}\Delta - 2 \quad (IV)$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_b = 0.75 \\ \theta_c = 0.375 \\ \theta_d = 0.75 \\ \Delta = \frac{21}{4} \end{cases}$$

روش حل۲) با استفاده از تقارن معکوس



$\theta_b, \theta_c, \Delta, \theta_a = 0$

$M_{cb} = \frac{2EI}{h}(\theta_b + 2\theta_c) = 0$ مفصل و $\theta_c = -\frac{1}{2}\theta_b$

$M'_{bc} = \frac{2EI}{l}(2\theta_b - \theta_c) = 3\theta_b$

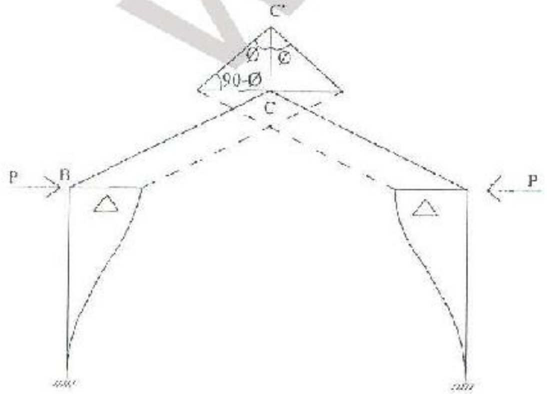
$M_{ab} = 2\theta_a - \Delta$

$\left.\begin{matrix} M_{ba} = 4\theta_b - \Delta \\ M'_{bc} = 3\theta_b \end{matrix}\right\} = 0 \Rightarrow 7\theta_b - \Delta = 0 \; (I)$ اصلاح شده

$-\left(\frac{M_{ab} + M_{ba}}{6}\right) = 1 \Rightarrow -\theta_b + \frac{1}{3}\Delta = 0 \; (II)$

$\theta_b = 0.75 \Rightarrow \theta_c = 0.375, \Delta = \frac{21}{4}$

➤ قاب یاد شده تحت اثر بارگذاری متقارن:

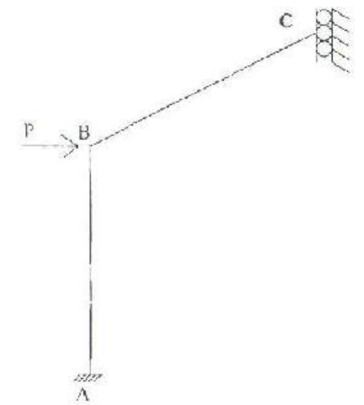


- **حل هندسی**

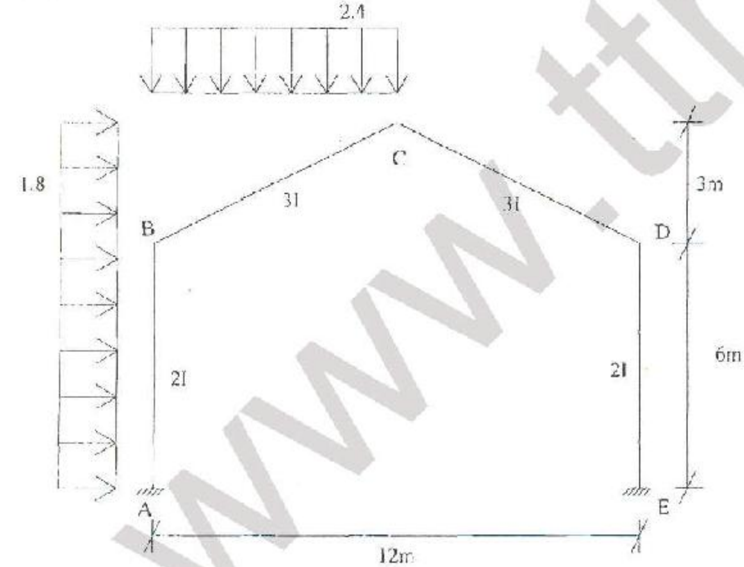
$$CC'' = \Delta_{bc} = \Delta . Cotg\Phi$$

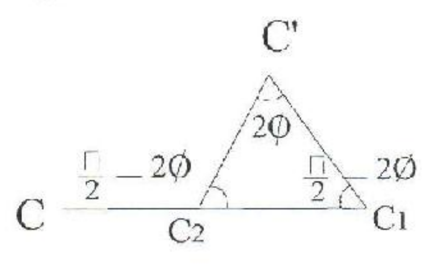
$$\frac{\Delta}{Sin\Phi} = \frac{\Delta_{bc}}{Cos\Phi} \Rightarrow \Delta_{bc} = \Delta . Cotg\Phi$$

مانند مرحله قبل با توجه به تقارن به راحتی حل می‌شود.



مثال۴- قاب زیر را تحلیل کنید.





$$\Delta_{co} = \frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta_1 - \Delta_2) = \Delta_{bc}$$

$$M_{AB}=\frac{4}{6}EI(\theta_b-\frac{3\Delta_1}{6})-5.4=\frac{2}{3}\theta_b-\frac{1}{3}\Delta_1-5.4$$

$$M_{BA}=\frac{4}{6}EI(2\theta_b-\frac{3\Delta_1}{6})+5.4=\frac{4}{3}\theta_b-\frac{1}{3}\Delta_1+5.4$$

$$M_{BC}=\frac{6}{3\sqrt{5}}EI(2\theta_b+\theta_c+\frac{3}{3\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta_1-\Delta_2))-8.55$$

$$=\frac{4}{\sqrt{5}}\theta_b+\frac{2}{\sqrt{5}}\theta_c+\frac{1}{2}(\Delta_1-\Delta_2)-8.55$$

$$M_{CD}=\frac{6}{3\sqrt{5}}EI(2\theta_c+\theta_d-\frac{3}{3\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta_1-\Delta_2))+0=\frac{4}{\sqrt{5}}\theta_c+\frac{2}{\sqrt{5}}\theta_d-\frac{1}{2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$M_{DE}=\frac{4}{6}EI(2\theta_d-\frac{3\Delta_2}{6})=\frac{4}{3}\theta_d-\frac{1}{3}\Delta_2$$

$$M_{ED}=\frac{4}{6}EI(\theta_d-\frac{3\Delta_2}{6})=\frac{2}{3}\theta_d-\frac{1}{3}\Delta_2$$

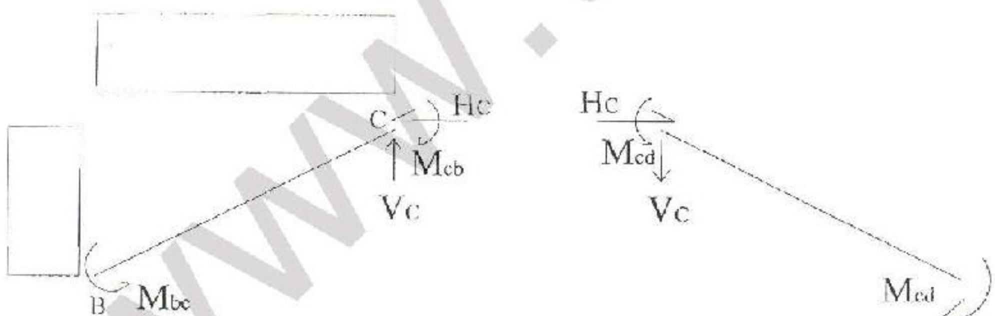
$$\sum M_B=0\Rightarrow M_{BC}+M_{BA}=0$$

$$\Rightarrow(\frac{4}{3}+\frac{4}{\sqrt{5}})\theta_b+\frac{2}{\sqrt{5}}\theta_c+(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{3})\Delta_1-\frac{1}{\sqrt{5}}\Delta_2-3.15=0\quad(I)$$

$$\sum M_C=0\Rightarrow M_{CB}+M_{CD}=0\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{5}}\theta_b+(\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}})\theta_c+\frac{2}{\sqrt{5}}\theta_d+8.55=0\quad(II)$$

$$\sum M_D=0\Rightarrow M_{DC}+M_{DE}=0$$

$$\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{5}}\theta_c+(\frac{4}{3}+\frac{4}{\sqrt{5}})\theta_d+(\frac{-1}{\sqrt{5}})\Delta_1+(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{3})\Delta_2=0\quad(III)$$



$$\begin{cases}\sum M_B=0\Rightarrow M_{BC}+M_{CB}-3H_C-6V_C+51.3=0\\ \sum M_D=0\Rightarrow M_{CD}+M_{DC}-3H_C-6V_C=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(M_{BC}+M_{CB})-(M_{CD}+M_{DC})+51.3=6H_C\quad(IV)$$