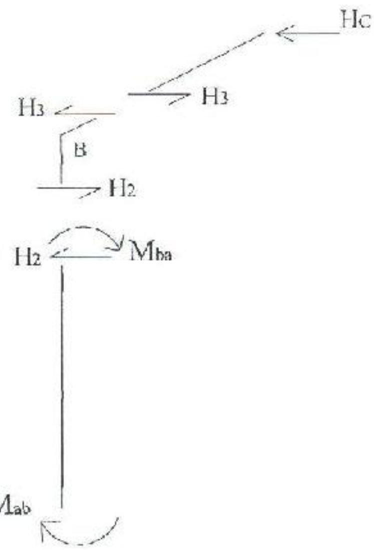
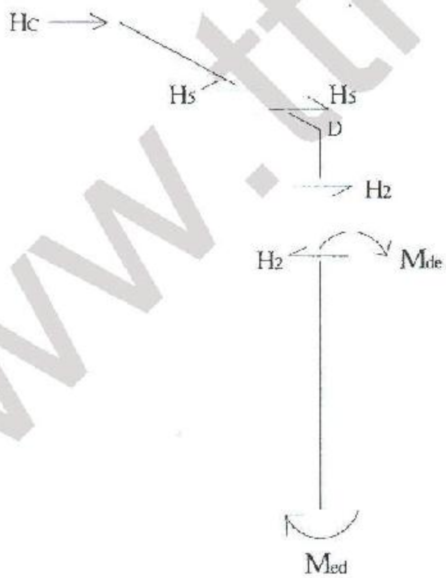



$$H_C = H_3 + 5.4 = H_2 + 5.4 = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{6} + 5.4 + 5.4 - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{6} + 10.8 \quad (V)$$

$$(IV),(V) \Rightarrow \quad (M_{BC} + M_{CB}) - (M_{CD} + M_{DC}) - (M_{AB} + M_{BA}) = 13.5$$

$$\Rightarrow (\frac{6}{\sqrt{5}} - 2)\theta_B + 0 \times \theta_C + (\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3})\Delta_1 - \frac{6}{\sqrt{5}}\theta_d - \frac{4}{\sqrt{5}}\Delta_2 = 13.5 \quad (VI)$$




$$H_C = H_5 , H_5 = -H_2 \Rightarrow H_C = -H_2 = -\frac{M_{DE} + M_{ED}}{6} \quad (VII)$$

$$(VII),(VI) \Rightarrow \quad (M_{DE} + M_{ED}) - (M_{CD} + M_{DC}) + (M_{BC} + M_{CB}) = -51.3$$

$$\frac{6}{\sqrt{5}}\theta_b + (2 - \frac{6}{\sqrt{5}})\theta_d + \frac{4}{\sqrt{5}}\Delta_1 - (\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3})\Delta_2 = -51.3$$

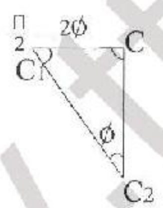
$$\begin{bmatrix} 3.122 & 0.894 & 0 & 0.1139 & -0.447 \\ 0.894 & 3.578 & 0.894 & 0 & 0 \\ 0 & 0.894 & 3.122 & -0.447 & 0.1139 \\ 0.685 & 0 & -2.683 & 2.456 & -1.789 \\ 2.683 & 0 & -0.683 & 1.789 & -2.455 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.15 \\ -8.55 \\ 0 \\ 13.5 \\ -51.3 \end{bmatrix}$$

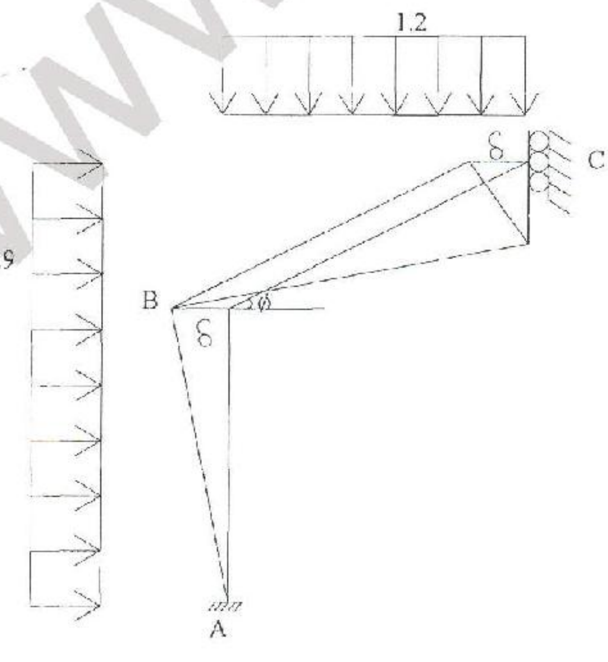
$$\begin{bmatrix} 3.122 & 0.894 & 0 & 0.1139 & -0.447 \\ 0.894 & 3.578 & 0.894 & 0 & 0 \\ 0 & 0.894 & 3.122 & -0.447 & 0.1139 \\ 0.1139 & 0 & -0.447 & 0.409 & -0.209 \\ -0.447 & 0 & 0.1139 & -0.298 & 0.409 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.15 \\ -8.55 \\ 0 \\ 2.251 \\ 8.547 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_b = 13.40512 \\ \theta_c = -8.3282 \\ \theta_d = 10.36257 \\ \Delta_1 = 78.64233 \\ \Delta_2 = 89.96138 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_{AB} = 22.677, M_{BA} = -2.94, M_{BC} = 2.186, M_{CB} = 0.579, M_{CD} = -2.567,$
$M_{DC} = -16.15, M_{DE} = 16.17, M_{ED} = 23.078$

روش حل۳)

$$C_1C_2 = \delta_{BC} = \frac{\delta}{3/3\sqrt{5}} = \sqrt{5}\delta$$



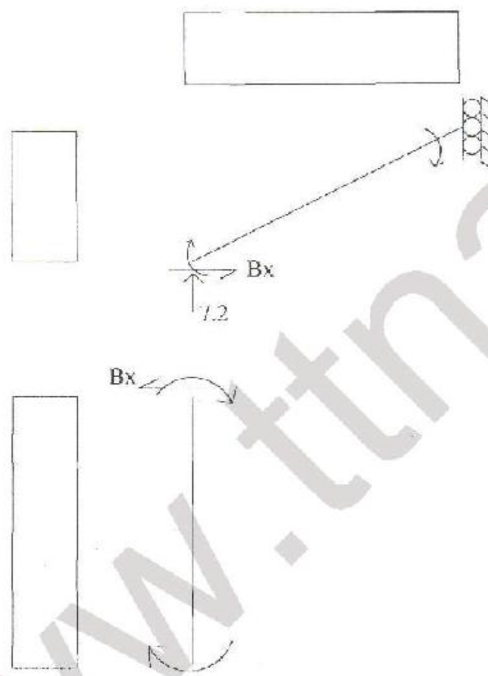
$$M'_{AB} = \frac{4}{6} EI(\theta'_b + 3\frac{\delta}{6}) - 2.7 = 0.20167$$

$$M'_{BA} = \frac{4}{6} EI(2\theta'_b + 3\frac{\delta}{6}) - 2.7 = 6.616$$

$$M'_{BC} = \frac{6}{3\sqrt{5}} EI(2\theta'_b - (\frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}})\delta) - 4.275 = -6.616$$

$$M'_{CB} = \frac{6}{3\sqrt{5}} EI(\theta'_b - (\frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}})\delta) + 4.275 = 0.573$$

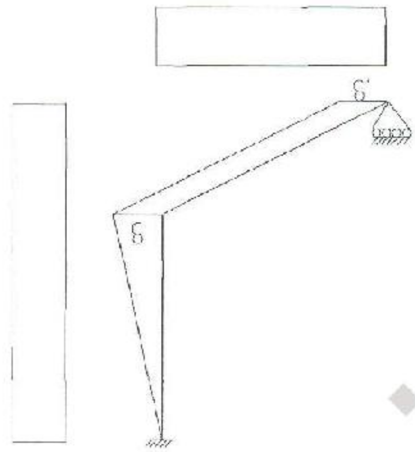
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M'_{BC} + M'_{BA} = 0 \Rightarrow (\frac{4}{3} + \frac{4}{\sqrt{5}})\theta'_b + (\frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}})\delta = 1.575$$




$$\left.\begin{array}{l} B_x \times 3 - M'_{BC} + M'_{CB} + 7.2\times 6 - 1.2\times 6\times 3 - 0.9\times 3\times 1.5 \quad (I) \\ B_x = \frac{1}{6}(M'_{BA} + M'_{AB}) + 0.9\times 3 \quad (II) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$2(M'_{BC} + M'_{CB}) - (M'_{BA} + M'_{AB}) = -18.9 \Rightarrow (\frac{12}{\sqrt{5}} - 2)\theta'_b - (\frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3})\delta = -18.9$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3.122 & -0.561 \\ 3.367 & -4.244 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta'_b \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.575 \\ -18.9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \delta = 5.661 \\ \theta'_b = 1.522 \end{array}$$




$$M''_{AB} = \tfrac{4}{6} EI(\theta''_b + 3\frac{\delta'}{6}) - 2.7 = -22.885$$

$$M''_{BA} = \tfrac{4}{6} EI(2\theta''_b + 3\frac{\delta'}{6}) + 2.7 = -9.55$$

$$M''_{BC} = \tfrac{9}{3\sqrt{5}} EI(\theta''_b) - 6.413 = 9.55$$

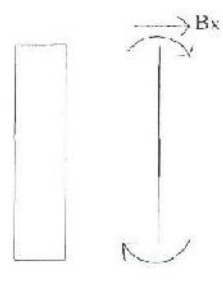
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (\tfrac{4}{3} + \tfrac{3}{\sqrt{5}})\theta''_b + \tfrac{1}{3}\delta' = 3.7125$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 2.7 \quad \text{(I)}$$

$$B_x = \frac{M''_{AB} + M''_{BA}}{6} + 0.9 \times 3 \quad \text{(II)}$$

$$\text{(I),(II)} \Rightarrow \left.\begin{aligned} M''_{AB} + M''_{BA} &= -32.4 \\ 2\theta''_b + \tfrac{2}{3}\delta' &= -32.4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$


$$\begin{bmatrix} 2.673 & \tfrac{1}{3} \\ 2 & \tfrac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta''_b \\ \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.7125 \\ -32.4 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \begin{aligned} \theta''_b &= 11.899 \\ \delta' &= -84.354 \end{aligned}$$




$$\Delta_1 = \delta + \delta'$$
$$\Delta_2 = \delta - \delta'$$
$$\theta_b = \theta'_b + \theta''_b$$
$$\theta_c = \theta'_c + \theta''_c$$
$$\theta_d = \theta'_d - \theta''_d$$

$$M_{AB} = M'_{AB} + M''_{AB}$$
$$M_{BA} = M'_{BA} + M''_{BA}$$
$$M_{BC} = M'_{BC} + M''_{BC}$$
$$M_{CB} = M'_{CB} + 0$$
$$M_{CD} = M'_{CB}$$
$$M_{DC} = M'_{BC} - M''_{BC}$$
$$M_{DE} = M'_{BA} - M''_{BA}$$
$$M_{ED} = M'_{AB} - M''_{AB}$$

## ۵- تأثیر درجه حرارت در سازه ها

تغییر درجه حرارت در اعضاء سازه ها موجب افزایش یا کاهش حجم می‌گردد، تغییرات درجه حرارت به دو صورت یکنواخت و غیر یکنواخت (بصورت تفاضلی (گرادیان حرارتی)) خواهد بود.

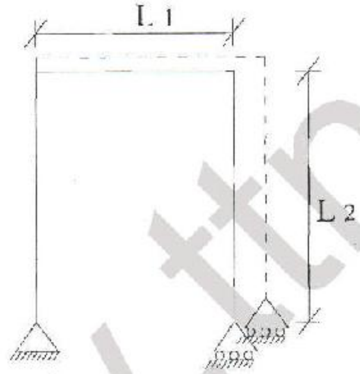
الف- تغییرات درجه حرارت یکنواخت:

۱) در سازه‌های آزاد (بدون تکیه گاه) انبساط بصورت خطی که فقط افزایش یا کاهش طول را بررسی می‌کنیم $\Delta l = \alpha l \Delta T$ که در آن $\alpha$ ضریب انبساط حرارتی بوده که در جداول موجود می‌باشد، مثلاً:

$\alpha_{st} = 12\times10^{-6}\ 1/^{\circ}C = 6.5\times10^{-6}\ 1/^{\circ}F$

$\alpha_{con} = 11\times10^{-6}\ 1/^{\circ}C = 6.0\times10^{-6}\ 1/^{\circ}F$

۲) در سازه های معین یا سازه‌هایی که در جهت افزایش طول اعضاء مانعی وجود نداشته باشد، فقط و فقط تولید انبساط اعضاء گردیده و تنش ایجاد نمی‌شود.



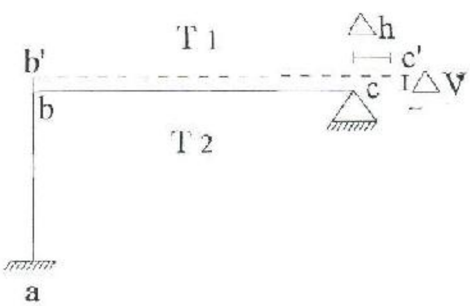

۳) اگر سازه‌ای دارای رانش اضافی یا نامعین خارجی باشد (از نظر ایستائی) در آن تنش حرارتی ایجاد می‌شود.

۴) برای بدست آوردن اثر تغییر درجه حرارت در سازه‌های نامعین و تحلیل آنها:

(a) سازه را معین می کنیم

(b) آن‌را برای افزایش یا کاهش طول در اثر درجه حرارت حل می‌کنیم. $\Delta l = \alpha l(T_2 - T_1)$

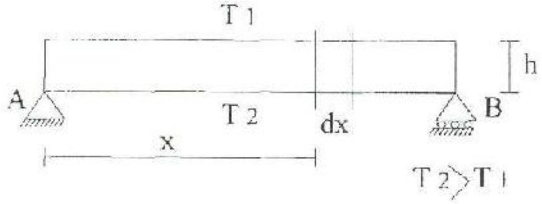
(c) واکنش‌های اضافی را اثر داده (تکیه‌گاه را بجای خودش منتقل می‌کنیم) و نیروهای حاصل را حساب می‌کنیم.

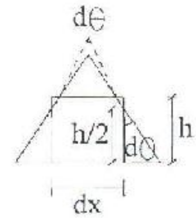


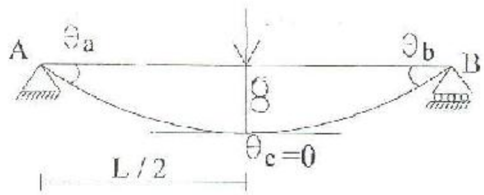

-در تکیه‌گاه فوق C به اندازهٔ $\Delta V$ به سمت پائین و $\Delta h$ به سمت چپ حرکت کرده است.

تأثیر این حرکت‌ها را می توان به روش شیب افت به حساب آورده و سازه را تحلیل نمود.

ب:- تغییرات درجه حرارت تفاضلی یا غیر یکنواخت (گرادیان حرارتی)




دوران سطوح تیر $d\theta = \dfrac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}dx$

$$\theta_a = \theta_b = \int_0^{l/2} \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}dx = \frac{\alpha l(T_2 - T_1)}{2h}$$

$\delta$ تغییر مکان مربوط به بار واحد را در کلیه نقاط تیر می توان به روش بار واحد محاسبه نمود. m لنگر ناشی از بار واحد.

$$\delta = \int m d\theta$$

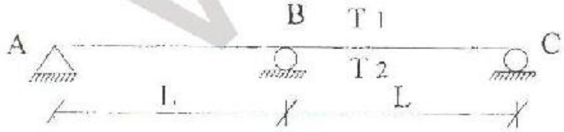
مثلاً:

$$\delta_c = \int m d\theta = 2\int_0^{l/2} \frac{x\alpha(T_2 - T_1)}{2h} = \frac{\alpha(T_2 - T_1)l^2}{8h}$$

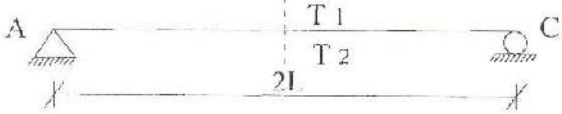
## روش حل

۱) تیر را آزاد می‌کنیم تا تغییر مکان دهد سپس تغییر مکان‌ها را از رابطه فوق حساب نموده و به عنوان نشست و دوران تکیه‌گاهی اعمال می‌کنیم، بعنوان مثال تیر زیر تحت تأثیر حرارت غیر یکنواخت است.

تکیه‌گاه b را بر می‌داریم . این نقطه به اندازه $\delta$ تحت اثر حرارت نشست می‌کند:



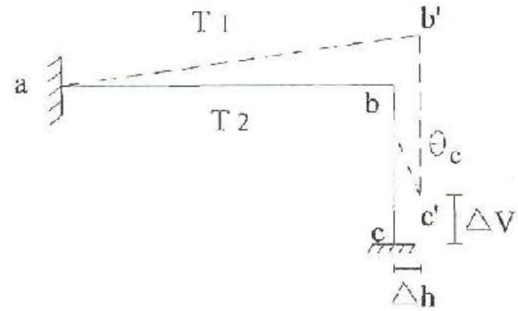

$$\delta_b = \frac{\alpha(T_2 - T_1)L^2}{2h}$$



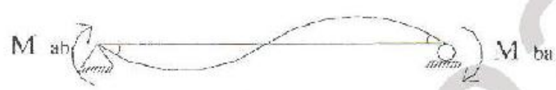

پس تأثیر تکیه‌گاه b اینست که تیر را به اندازهٔ $\delta_b$ بطرف بالا حرکت می‌دهد، یعنی تیر abc با تغییر مکان معلوم

$\delta_b$ که قبلاً حل شده .

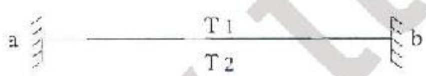
در حالت زیر می‌توانیم $\Delta V, \Delta h, \theta_C$ را به روش بار واحد یا هر روش دیگری حساب کنیم. سپس تکیه گاه را از $C'$ به $C$ منتقل نموده و آن‌را مثل قابی با تغییر مکان و دوران معلوم تکیه‌گاهی در $C$ حل می‌کنیم.




روش حل ۲) می‌توان لنگرهای گیرداری معادل تغییر حرارت غیر یکنواخت را حساب نموده و مستقیماً به سازه اعمال نمود.







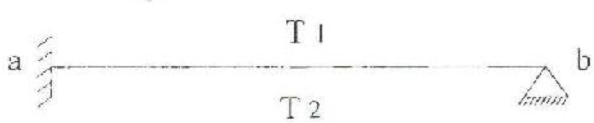

در اثر حرارت.
$$\theta_a = \frac{\alpha l(T_2 - T_1)}{2h} \qquad \theta_a = \frac{M_{ab} l}{3EI} - \frac{M_{ba} l}{6EI}$$

حال اگر تیر دوسرگیر دار تحت اثر اختلاف درجه حرارت قرار گیرد، لنگرهای گیرداری بایستی بقسمی باشد که از دوران a و b جلوگیری کنند یعنی:

$$\frac{\alpha l(T_2 - T_1)}{2h} - \frac{M_{ab} l}{3EI} + \frac{M_{ba} l}{6EI} = 0 \quad (1)$$

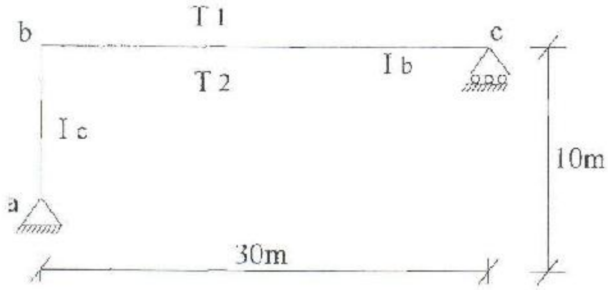
$$\Rightarrow M_{ab} = -M_{ba} = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

اگر مثل شکل روبرو $M_{ba} = 0$ که آن‌را در (۱) قرار می‌دهیم:




$$M_{ab} = \frac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{2h}$$

**مسئله:** مطلوبست تعیین نیروهای ناشی از افزایش درجه حرارت در قاب روبرو:




حل به روش لنگر گیرداری:

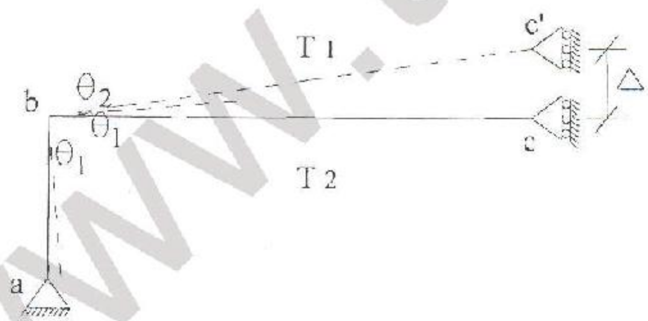
$$M'_{ba} = \frac{3\alpha EI_c(T_2 - T_1)}{2h_c} = 28.35\ (\text{t.m})$$

$$M'_{bc} = -\frac{3\alpha EI_b(T_2 - T_1)}{2h_b} = -51.03\ (\text{t.m})$$

$$\left.\begin{aligned} M_{ba} &= \frac{3EI_c}{L_{ba}}\theta_b + 28.35 \\ M_{bc} &= \frac{3EI_b}{L_{bc}}\theta_b - 51.0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2E\left(\frac{I_c}{L_c} + \frac{I_b}{L_b}\right)\theta_b = 22.68 \Rightarrow \theta_b = 1.8\times10^{-3}\ (\text{rad})$$

$$\Rightarrow M_{ba} = 6.3\times10^3\times1.8\times10^{-3} + 28.35 = 39.69\ (\text{t.m})$$

$$M_{bc} = -39.69\ (\text{t.m})$$




$$\Delta = (\theta_1 + \theta_2)L_b$$

$$\theta_1 = \frac{\alpha L_c \Delta T}{2h_c} = 4.5\times10^{-3}\ (\text{rad})$$

$$\theta_2 = \frac{\alpha L_b \Delta T}{2h_b} = 8.1\times10^{-3}\ (\text{rad})$$

$$\Rightarrow \Delta = (4.5\times10^{-3} + 8.1\times10^{-3})30 = 0.378\ (\text{m})$$

حال اگر نقطه $C'$ را بطرف C به اندازهٔ Δ پائین بیاوریم، لنگر گیردارای اصلاح شده از b بصورت زیر خواهد بود (چون تکیه‌گاه بطرف پائین می آید پس علامت Δ مثبت خواهد بود).

$$M'_{bc} = -\frac{3EI_b\Delta}{L_b^2} = -79.38\ (t.m)\ ,\ M'_{ba} = 0$$

$$M_{ba} = \frac{3EI_C}{L_C}\theta_b$$

$$M_{bc} = \frac{3EI_b}{L_b}\theta_b - 79.38$$

تعادل در گره B : $M_{ba} + M_{bc} = 0 \Rightarrow 3E(\frac{I_C}{L_C} + \frac{I_b}{L_b})\theta_b = 79.38$

$$\Rightarrow \theta_b = 6.3\times 10^{-3}\ (rad)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{ba} = 39.69\ (t.m) \\ M_{bc} = -39.69\ (t.m) \end{cases}$$

لنگرهای بدست آمده با روش قبل کاملاً مساوی هستند.

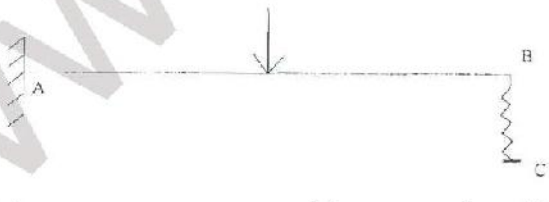
## ۶- تکیه گاه ارتجاعی در سازه ها

تکیه‌گاه‌ها دارای انواع مختلفی می باشند که به طور نمونه می توان به انواع زیر اشاره نمود:

۱-تکیه‌گاه غلطکی: این نوع تکیه‌گاه تنها قابلیت تحمل نیرو در راستای قائم را دارد.

۲-تکیه‌گاه مفصلی: این نوع تکیه‌گاه قابلیت تحمل نیروهای قائم و افقی را دارد ولی در برابر چرخش هیچ مقاومتی از خود نشان نمی دهد.

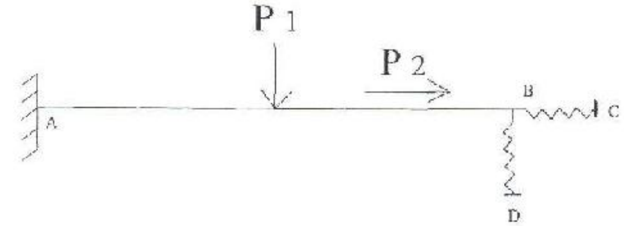
۴-تکیه‌گاه ارتجاعی: تکیه گاهی است که تغییر مکان در آن بصورت نیم ازاد صورت می‌گیرد (تغییرشکل محدود) و بهترین مثال جهت شبیه سازی آن فنر می‌باشد. این نوع تکیه‌گاه به دو دسته فنرهای برشی و فنرهای پیچشی تقسیم می‌شوند.

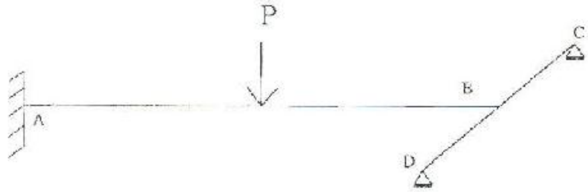



فنر وقتی تحت اثر نیرو قرار می‌گیرد، تغییر طول می‌دهد یعنی به نحوی از تغییر مکان آزاد تکیه‌گاه جلوگیری می‌کند ولی نمی‌تواند از تمام تغییر مکان ممانعت بعمل آورد.

ضریب فنریت K بصورت (واحد طول/نیرو) تعریف شده و مقدار آن نیروئیست که سبب افزایش یا کاهش طول فنر به اندازه یک واحد می شود (این مقاومت نسبی فقط در یک جهت اعمال می‌شود یعنی برای محدود کردن هر حرکت بایستی یک فنر اعمال کنیم).

انواع تکیه‌گاه ارتجاعی:

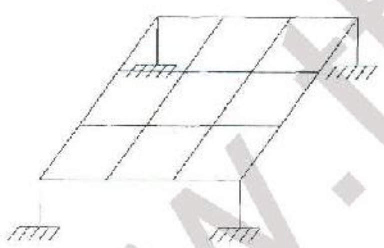


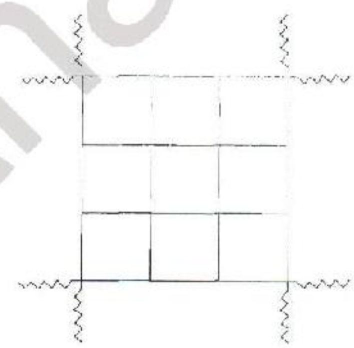




I- تیر بصورت تکیه گاه تیر دیگر

II- عنصر سازه ای بصورت تکیه‌گاه $k=AE/L$

III- ستونهای مدل شده توسط فنر در شبکه های سقف تحت اثر بار جانبی



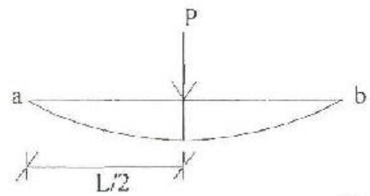


IV- اثرات متقابل سازه و فونداسیون:

وقتی بار به فونداسیون وارد می‌شود بواسطه صلب نبودن پی، در زمین تغییر مکان بوجود می‌آید و تحت اثر تغییر شکل‌هایی قرار می‌گیرد، لذا نمی‌توان فونداسیون‌ها را تکیه‌گاه صلب فرض نمود، در این حالت رفتار زمین را با استفاده از یک سری فنرهای برشی و پیچشی مدل‌سازی می‌نمایند.

### ۶-۱- ضریب فنر و محاسبه آن

در حالتی که تیری بر روی تیر دیگر قرار می گیرد می توان از رابطه تغییر مکان در نقطه تکیه گاهی مقدار ضریب فنر را بدست آورد.





$$\left.\begin{aligned}
&\delta=\frac{PL^3}{48EI}\\
&\text{if}\ \ \delta=1=\frac{\overset{K}{P}L^3}{48EI}\\
&\delta=\frac{PL^3}{3EI}\ \Rightarrow\ 1=\frac{KL^3}{3EI}\\
&\delta=\frac{PL}{EA}\ \Rightarrow\ 1=\frac{KL}{EA}
\end{aligned}\right\}
\qquad
\begin{array}{|c|}\hline K=\dfrac{48EI}{L^3}\\ \hline K=\dfrac{3EI}{L^3}\\ \hline K=\dfrac{EA}{L}\\ \hline\end{array}$$

بسته به محل تاثیر نیرو می‌توان $\delta$را حساب کرد و از آنجا k را بدست آورد.


**طریقهٔ حل مسائل**

روش‌های زیادی جهت محاسبه ضریب فنریت وجود دارد که در زیر می‌توان به روش جمع آثار قوا با فرض داشتن K اشاره نمود.

a - تکیه‌گاه ساده فرض می‌شود و نیروها حساب می‌شود، نیروی تکیه‌گاه را $R^{\circ}$ می‌نامیم.

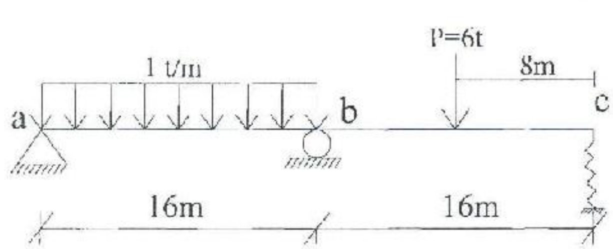
b - در محل فنر، تغییر مکان واحد ($\Delta$) اعمال می کنیم و نیروها را حساب می‌کنیم. نیروی تکیه‌گاه $R^1$

c - ضریب نیروها را بدست می‌اوریم (با توجه به سازگاری تغییر مکان‌ها).

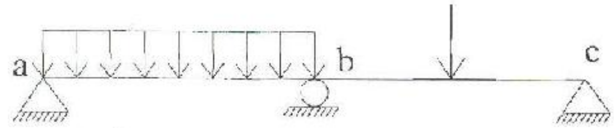
$$\begin{Bmatrix} R^{\circ}=\alpha R^1=R_C \\ R_C=\alpha K(\Delta=1) \end{Bmatrix}\quad \boxed{\alpha=\frac{R^{\circ}}{K-R^1}}$$

d - نیروها در مسئله واقعی از رابطهٔ $\tilde{F}=\tilde{F}^{\circ}+\alpha\tilde{F}^1$ حساب می‌شود. که در آن $\tilde{F}$ بردار تعمیم‌یافته به روش شیب افت می‌باشد.

**مثال**- مطلوبست حل تیر سراسری ذیل به روش شیب افت:



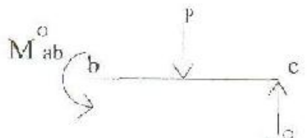
**گام اول**: تکیه گاه C را تبدیل به تکیه گاه ساده می‌کنیم و سپس سازه را به روش شیب افت حل می‌کنیم.




$$M'_{ba}=\frac{WL^2}{8}=32\ (t.m)\quad ,\ M'_{ab}=0$$

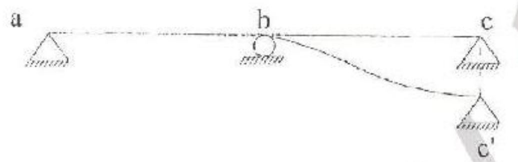
$$M'_{bc}=\frac{-3PL}{16}=-18\ (t.m)\quad ,\ M'_{cb}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{ba}=\frac{3EI}{L}\theta_b+M'_{ba}=\frac{3EI}{16}+32 \\ M_{bc}=\frac{3EI}{L}\theta_b+M'_{bc}=\frac{3EI}{16}-18 \end{array}\right\}=0 \Rightarrow 6EI\theta_b^o=-14 \Rightarrow \theta_b^o=-5.374\times10^{-6}\ (rad)$$




$$R_C^o=\frac{P}{2}-\frac{M'_{bc}}{16} \Rightarrow R_C^o=1.4375\ (t)\ ,\ M_b^o=-25\ (t.m)$$

**گام دوم**: فرض می‌کنیم در نقطه C تغییر مکان واحد داریم.

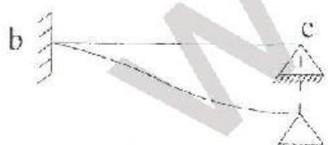




$$M'_{ab}=-M'_{ba}=0$$

$$M'_{bc}=\frac{2EI}{L}(2\underbrace{\theta_b}_{0}+\underbrace{\theta_C}_{0}-\frac{3\Delta}{L})=-\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

در حالت اصلاح شده (یک سر مفصل) میتوان اثر نشست Δ را بصورت M′ گیرداری اعمال نمود.




$$M'_{bc}=\frac{2EI}{L}(2\underbrace{\theta_b}_{0}+\theta_C-\frac{3\Delta}{L})$$

چون گروه C مفصلی است $\quad M'_{cb}=\frac{2EI}{L}(2\theta_C+\theta_b-\frac{3\Delta}{L})=0$

لنگر گیرداری اصلاح شده $\quad \theta_C=\frac{3\Delta}{2L} \Rightarrow M'_{bc}=-\frac{3EI\Delta}{L^2}$

می‌توان اثر نشست تکیه‌گاهی Δ را در فرمولهای شیب افت یک لنگرگیرداری اعمال نمود که در بالا این

لنگرگیرداری محاسبه شده است. در حل این مثال از این روش استفاده نموده و روابط اصلاح شده را در دو عضو نوشتیم:

$$\left.\begin{aligned} M^1_{ba} &= \frac{3EI}{L}\theta_b \\ M^1_{bc} &= \frac{3EI}{L}\theta_b - \frac{3EI\Delta}{L^2} \end{aligned}\right\} = 0 \Rightarrow \theta^1_b = \frac{\Delta}{2L}$$

$$M^1_{bc} = \frac{3EI}{L}\left(\frac{\Delta}{2L}\right) - \frac{3EI\Delta}{L^2} = -\frac{3EI\Delta}{2L^2}$$

$$\Delta = 1\ \text{cm} \Rightarrow R^1_C = -\frac{3EI\Delta}{2L^2} = -0.254\ (t)$$

**گام سوم:** با فرض اینکه تغییر مکان فنر $\alpha$ باشد شرط سازگاری در گره C اعمال می‌شود

$R^0 + \alpha R^1 = R_C = \alpha K$ ( $\alpha K$ نیروی کل ایجاد شده در فنر تحت تغییر مکان $\alpha$)

$$\alpha = \frac{R^0}{K - R^1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1.4327}{3 - 0.254} = 0.4417 \\ R_C = 1.325\ (t) \\ M_{bc} = -25.0 + 0.4417 \times (-4.07) = -26.8\ (t.m) \end{cases}$$

### ۶-۲- روش تقریبات متوالی

روش‌های تکراری هستند که احتیاج به یک حل اولیه دارند.

الف: حل اولیه (حل صفر) سازه را برای حذف تکیه گاه فنری در نظر می‌گیریم: $\Delta^0 \leftarrow R^0$

ب: با فرض $R^0$ جواب مسئله که تولید $\Delta^0$ نموده را به سازه اعمال می‌کنیم و $R^1$ را بدست می‌آوریم:

$$\Delta^1 \leftarrow R^1 = K\Delta^1$$

ج: با استفاده از $\Delta^1$، $M$ این بار $R^{II} \leftarrow R^{II} = K\Delta^{II} \leftarrow \Delta^{II} \leftarrow \ldots$ و ادامه می‌دهیم تا به جواب نزدیک شویم.

**روش دیگر:** تا مرحله الف معادل روش فوق بوده بعد از محاسبهٔ $\Delta^0$، $M$ پس $R^1$ و آنگاه $R = R^0 + R^1$ و $\Delta^1 = \frac{R}{K}$ را بدست می‌آوریم.

سپس در مرحله بعد جاگذاری $\Delta^1$ و محاسبهٔ $M^{II}$ و $R^{II}$ به ترتیب فوق $R = R^0 - R^{II} \Leftarrow \Delta^{II} = \frac{R^{II}}{K}$ تا آنجا که $\Delta^n = \Delta^{n-1}$ و بعد $R = R^0 - R^n$ ...

**مثال**- مسئله قبل را به روش تقریب متوالی بدون در نظر گرفتن فنر (تکیه گاه ساده) حل می‌نمائیم.

$$R^0 = 1.4375 \qquad \Delta^0 = 0.47916\,cm$$

حال $\Delta^0$ را روی سازه بدون بار اعمال می‌کنیم که تولید یک لنگر گیرداری در عضو bc می‌نماید.

$$M' = -\frac{3EI\Delta}{L^2} \quad (I)$$ اصلاح شده

$$\left.\begin{array}{l} M' = -\frac{3EI\Delta}{L^2} \quad (I) \\ M_{bc} + M_{ba} = 0 \quad (II) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \theta_b{}^i = \frac{\Delta^{i-1}}{2L} \\ M_{bc}{}^i = -\frac{3EI\Delta^{i-1}}{2L^2} \\ R^i = -\frac{3EI\Delta^{i-1}}{2L^3} \end{array}\right.$$

دو راه حل جهت ادامه موجود است:

(cross) نمو را بطور متوالی بدست آورده و نمو را صفر می‌کنیم.

$$\tilde{R} = \tilde{R}^0 + \sum_{i=1}^{n} \delta\tilde{R}^i$$

(kany) هر بار که نمو را را حساب کردیم مقدار $R^i$ را اصلاح می‌کنیم:

$$R = R^n \ , \ R^n - R^{n-1} = 0$$

روش اول:

$$R^0 \rightarrow \Delta^0 = 0.48 \ (cm)$$

$$i = 1 \rightarrow \delta R^I = -\frac{3EI\Delta_0}{2l^3} = -0.122 \rightarrow \Delta^I = 0.041$$

$$i = 2 \rightarrow \delta R^{II} = 0.0103 \rightarrow \Delta^{II} = 3.4\times10^{-3}$$

$$i = 3 \rightarrow \delta R^{III} = -8.8\times10^{-4} \rightarrow \Delta^{III} = 0$$

$$R = R^0 + \sum \delta R^i = 1.41 - 0.122 + 0.0103 - 4.8\times10^{-4} = 1.3$$

روش دوم:

$$\delta R^I = -0.122 \rightarrow \overline{R^I = 1.4375 - 0.122 = 1.3155} \rightarrow \Delta^I = 0.4385$$

$$\delta R^{II} = -0.122 \rightarrow R^{II} = 1.4375 - 0.1115 = 1.3259 \rightarrow \Delta^{II} = 0.44198$$

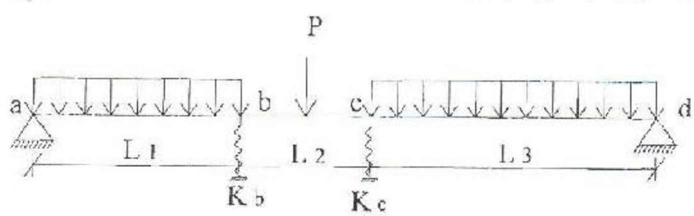
$$\delta R^{III} = -0.1124 \rightarrow R^{III} = 1.325 \rightarrow \Delta^{III} = 0.44169$$

$$\delta R^{IV} = -0.1124 \rightarrow R^{IV} = 1.325 \rightarrow \Delta^{IV} = 0.44169$$

$$R^{IV} - R^{III} = 0 \rightarrow R = R^{IV} = 1.325$$

تیر روی بیش از یک تکیه گاه ارتجاعی:

روش حل (اصل رویهم گذاری اجتماع اثر قوا)




۱) تیر را با درنظر گرفتن دو تکیه گاه ساده بجای فنرها حل می‌کنیم و عکس العمل‌های تکیه گاهی را بدست می آوریم : $R_b{}^0, R_c{}^0$

۲) تکیه گاه b را تحت اثر تغییر مکان واحد قرار داده و دوباره نیروها را در سازه بدست می آوریم : $R_b^{I}, R_c^{I}$

۳) تکیه گاه c را تحت اثر تغییر مکان واحد قرار داده و دوباره نیروها را در سازه بدست می آوریم : $R_b^{II}, R_c^{II}$

۴) تغییر مکان تکیه گاه b برابر است با $\alpha$ پس نیروهای تکیه گاهی در اثر تغییر مکان واقعی b برابرند با : $\alpha R_b^{I}, \alpha R_c^{I}$

۵) تغییر مکان واقعی تکیه گاه c برابر است با $\beta$ پس نیروهای تکیه گاهی در اثر تغییر مکان واقعی c برابرند با : $\beta R_b^{II}, \beta R_c^{II}$

۶) نیروی واقعی در تکیه گاه b برابر است با $\alpha K_b$ و در تکیه گاه c برابرست با $\beta K_c$

۷) با توجه به اصل اجتماع قوا از دستگاه ذیل $\alpha$ و $\beta$ به دست آمده و کلیه مجهولات مشخص می گردد.

$$\begin{cases} R^{\circ} + \alpha R_b^{I} + \beta R_b^{II} = \alpha K_b \\ R_c^{\circ} + \alpha R_c^{I} + \beta R_c^{II} = \beta K_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = F^{\circ} + \alpha R^{I} + \beta F^{II} \\ a = a^{\circ} + \alpha a^{I} + \beta a^{II} \end{cases}$$

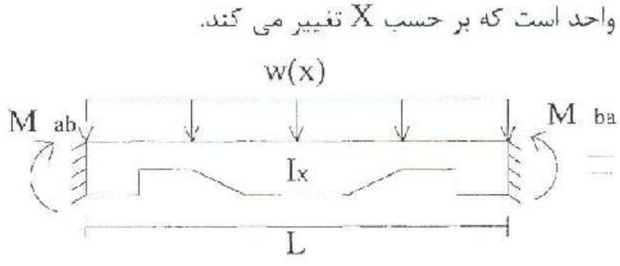
پس برای یک سیستم که دارای n تکیه گاه ارتجاعی باشد، می بایستی سیستم را n+1 بار حل کنیم، نتیجه کلی از ترکیب این جوابها بدست می آید. باید توجه کرد که در محدوده خطی عمل شده و کلیه جوابها باید با توجه به ترکیب خطی اعضاء بدست آید.

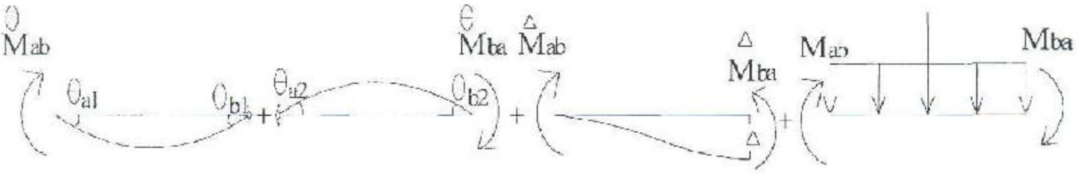
## ۷- روش شیب افت برای تحلیل سازه ها با مقاطع متغیر

روابط کلی شیب افت که در مرحله قبلی استخراج شده بصورت:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{\ell}(2\theta_i + \theta_j - \frac{3\Delta}{\ell}) + M'_{ij}$$

بوده و برای حالتی است که مقطع تیر ثابت باشد در حالتی ممکن است از تیرهای با مقطع متغیر استفاده شود که در اینحال لنگر اینرسی مقطع را بصورت $\beta$ نشان می‌دهیم که در آن $\beta$ کوچکترین ممان اینرسی موجود در مقطع $\beta$ عددی بزرگتر از واحد است که بر حسب X تغییر می کند.





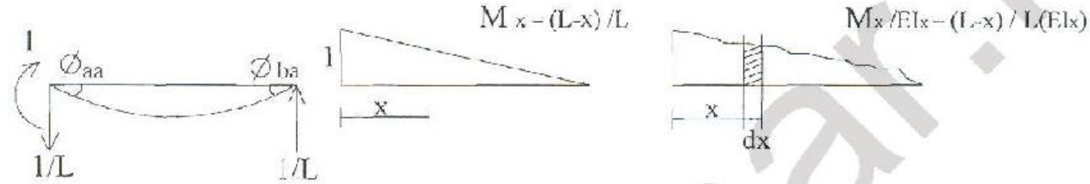

$M_{ab} = M^{\theta}_{ab} + M^{\Delta}_{ab} + M''_{ab}$

$\theta_a = \theta_{a1} - \theta_{a2}$

$\theta_b = -\theta_{b1} + \theta_{b2}$

الف- محاسبهٔ $M^{\theta}_{ab}$ ، $M^{\theta}_{ba}$

برای این منظور ابتدا لنگر واحد را بر a اثر می دهیم و زوایای حاصل یعنی $\Phi_{aa}$ و $\Phi_{ba}$ را حساب می‌کنیم.




$\Phi_{aa} =$ (لنگر $\frac{M}{EI}$ بین a و b حول b) $/L$

$= \frac{1}{L}\int_0^L \frac{M_x}{EI_x}\, dx\,(L-x) = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{(L-x)^2}{EI_C L\cdot n_x}dx$

$C_1 = \frac{1}{L^3}\int_0^L \frac{(L-x)^2}{n_x}dx$

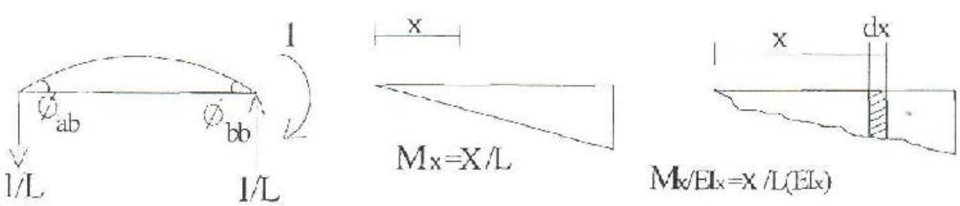
$\Phi_{aa} = \frac{C_1}{EI_C}$ , $\Phi_{ba} =$ (لنگر سطح زیر $\frac{M}{EI}$ بین a و b حول a) $/L$

$\Phi_{ba} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{M_x}{EI_x}\, dx\,(x) = \frac{1}{L^2}\int_0^L \frac{(L-x)x}{EI_C L\cdot n_x}dx$

$C_2 = \frac{1}{L^3}\int_0^L \frac{x(L-x)}{n_x}dx$

$\Phi_{ba} = \frac{C_2 L}{EI_C}$

در مرحله بعد لنگر واحد را بر b اعمال کرده و زوایای $\Phi_{bb}$ و $\Phi_{ab}$ را حساب می‌کنیم:



$$\Phi_{ab} = (\text{لنگر زیر سطح } \frac{M}{EI} \text{ بین a و b حول b})/L = \frac{1}{L}\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)\frac{dx}{EI_C n_x}(L-x)$$

$$= \frac{1}{L^2}\int_0^L \frac{x(L-x)}{EI_C n_x}dx = \frac{C_2 L}{EI_C} \quad , \quad C_2 = \frac{1}{L^3}\int_0^L \frac{x(L-x)}{n_x}dx$$

$$\Phi_{bb} = (\text{لنگر زیر سطح } \frac{M}{EI} \text{ بین a و b حول a})/L = \frac{1}{L}\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)\frac{dx}{EI_C n_x}\, x$$

$$= \frac{C_3 L}{EI_C} \quad , \quad C_3 = \frac{1}{L^3}\int_0^L \frac{x^2}{n_x}dx$$

$$\theta_{a1} = M^{\theta}_{ab}\left(\frac{C_1 L}{EI_C}\right) \qquad \theta_{b1} = M^{\theta}_{ab}\left(\frac{C_2 L}{EI_C}\right)$$

$$\theta_{a2} = M^{0}_{ba}\left(\frac{C_2 L}{EI_C}\right) \qquad \theta_{b2} = M^{0}_{ba}\left(\frac{C_3 L}{EI_C}\right)$$

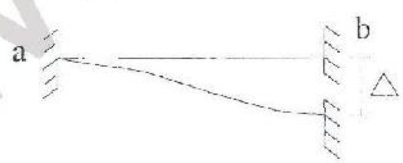
$$\theta_a = M^{0}_{ab}\left(\frac{C_1 L}{EI_C}\right) - M^{0}_{ba}\left(\frac{C_2 L}{EI_C}\right)$$

$$\theta_b = -M^{\theta}_{ab}\left(\frac{C_2 L}{EI_C}\right) + M^{\theta}_{ba}\left(\frac{C_3 L}{EI_C}\right)$$

$$\begin{vmatrix}\theta_a \\ \theta_b\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{C_1 L}{EI_C} & -\frac{C_2 L}{EI_C} \\ -\frac{C_2 L}{EI_C} & \frac{C_3 L}{EI_C}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}M^0_{ab} \\ M^0_{ba}\end{vmatrix} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{L}{EI_C}\begin{vmatrix}C_1 & -C_2 \\ -C_2 & C_3\end{vmatrix}\tilde{M}^{\theta}$$

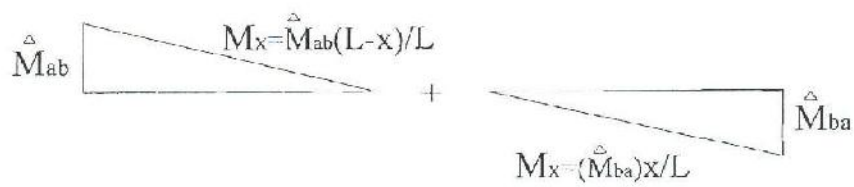
$$\begin{array}{ccc} & K_{aa} & K_{ab} \\ \begin{vmatrix}M^0_{ab} \\ M^0_{ba}\end{vmatrix} = \frac{2EI_C}{L} & \multicolumn{2}{c}{\begin{vmatrix}\frac{C_3}{2(C_1C_3-C_2^2)} & \frac{-C_2}{2(C_1C_3-C_2^2)} \\ \frac{-C_2}{2(C_1C_3-C_2^2)} & \frac{C_1}{2(C_1C_3-C_2^2)}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\theta_a \\ \theta_b\end{vmatrix} \Rightarrow}\end{array}$$

$$\begin{vmatrix}M^{\theta}_{ab} \\ M^{0}_{ba}\end{vmatrix} = \frac{2EI_C}{L}\begin{vmatrix}K_{aa} & -K_{ab} \\ -K_{ba} & K_{bb}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\theta_a \\ \theta_b\end{vmatrix}$$

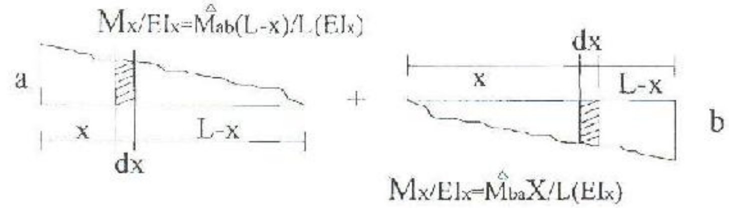



ب- بررسی اثر نشست Δ

منحنی لنگر خمشی



منحنی $\frac{M}{EI}$ با توجه به متغیر بودن EI در طول تیر




$$\text{I)}\ \Delta=-\int_0^L\left(\frac{\hat{M}_{ab}}{EI_C n_x}\frac{L-x}{L}dx\right)(L-x)+\int_0^L\left(\frac{\hat{M}_{ba}}{EI_C n_x}\frac{x}{L}dx\right)(L-x)=-\frac{\hat{M}_{ab}L^2}{EI_C}C_1+\frac{\hat{M}_{ba}L^2}{EI_C}C_2$$

$$\text{II)}\ \Delta=\int_0^L\left(\frac{\hat{M}_{ab}}{EI_C n_x}\frac{L-x}{L}dx\right)(x)-\int_0^L\left(\frac{\hat{M}_{ba}}{EI_C n_x}\frac{x}{L}dx\right)(x)=\frac{\hat{M}_{ab}L^2}{EI_C}C_2-\frac{\hat{M}_{ba}L^2}{EI_C}C_3$$

$$\begin{matrix}\hat{M}_{ab}\\ \hat{M}_{ba}\end{matrix}=-\frac{2EI_C}{L}\begin{vmatrix}\dfrac{C_2+C_3}{2(C_1C_3-C_2^2)}\\ \dfrac{C_1+C_2}{2(C_1C_3-C_2^2)}\end{vmatrix}\frac{\Delta}{L}=-\frac{2EI_C}{L}\begin{vmatrix}K_{aa}+K_{ab}\\ K_{ab}+K_{bb}\end{vmatrix}\frac{\Delta}{L}$$

از جمع دو رابطهٔ فوق:

$(I)+(II)$ :

$$1)\ M_{ab}=\frac{2EI_C}{L}\left[(K_{aa}\theta_a+K_{ab}\theta_b)-(K_{aa}+K_{ab})\frac{\Delta}{L}\right]+M'_{ab}$$

$$2)\ M_{ba}=\frac{2EI_C}{L}\left[(K_{ba}\theta_a+K_{bb}\theta_b)-(K_{ab}+K_{bb})\frac{\Delta}{L}\right]+M'_{ba}$$

$$K_{aa}=\frac{C_3}{2(C_1C_3-C_2^2)}$$

$$K_{ab}=\frac{C_2}{2(C_1C_3-C_2^2)}$$

$$K_{bb}=\frac{C_1}{2(C_1C_3-C_2^2)}$$

اگر یک سر تیر مفصل باشد با فرض نداشتن $\Delta$ و $M'$ (مثلاً b مفصل) خواهیم داشت:

$$M_{ba}=0\xrightarrow{(2)}\theta_b=-\frac{K_{ba}}{K_{bb}}\theta_a$$

$$M'_{ba}=\frac{2EI_C}{L}\left(K_{aa}-\frac{K_{ba}}{K_{bb}}K_{ab}\right)\theta_a$$

روابط اصلاح شده شیب افت:

$M'^{\bullet}_{ab} = M^{\bullet}_{ab} - C_{ba} M^{\bullet}_{ba}$

$M'_{ab} = \frac{2EI_c}{L}(K_{aa} - C_{ba}K_{ab})\theta_a$

$C_{ba} = \frac{K_{ba}}{K_{aa}} \quad , \quad C_{ab} = \frac{K_{ab}}{K_{bb}}$

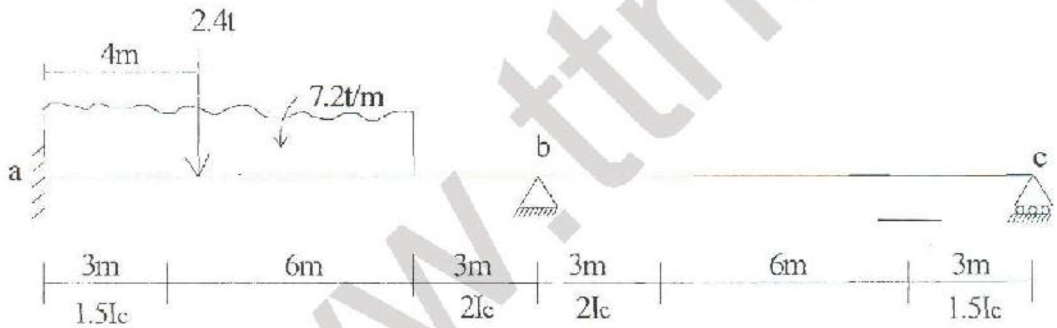
☑ برای به دست آوردن لنگرهای گیرداری از فرمول‌های زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

$$C_4 = \int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)}(L-x)\,dx$$

$$C_5 = \int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)}x\,dx$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{M}_{ab} \\ \overline{M}_{ba} \end{bmatrix} = \frac{1}{2(C_1C_3 - C_2^2)} \begin{bmatrix} C_3 & C_2 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix} \times \frac{2}{L^2} \begin{bmatrix} -C_4 \\ C_5 \end{bmatrix}$$

مثال۱-




الف- دهانهٔ ab

1- محاسبه ضرایب ثابت $C_1, C_2, C_3$.

$$C_1 = \frac{1}{L^3}\int_0^L \frac{(L-x)^2}{nx}dx = \frac{1}{12^3}\left[\int_0^3 \frac{1}{1.5}(12-x)^2 dx + \int_3^9 \frac{1}{1}(12-x)^2 dx + \int_9^{12} \frac{1}{2}(12-x)^2 dx\right]$$
$$= 0.266493$$

$$C_2 = \frac{1}{L^3}\int_0^L \frac{(L-x)x}{nx}dx = \frac{1}{12^3}\left[\int_0^3 \frac{1}{1.5}(12-x)x\,dx + \int_3^9 \frac{1}{1}(12-x)x\,dx + \int_9^{12} \frac{1}{2}(12-x)x\,dx\right]$$
$$= 0.144965$$

$$C_3 = \frac{1}{L^3}\int_0^L \frac{x^2}{nx}dx = \frac{1}{12^3}\left[\int_0^3 \frac{1}{1.5}x^2 dx + \int_3^9 \frac{1}{1}x^2 dx + \int_9^{12} \frac{1}{2}x^2 dx\right]$$
$$= 0.235243$$

۲- محاسبه ضرایب سختی

$$2(C_1C_3 - C_2^2) = 0.0833516$$

$$K_{aa} = \frac{C_3}{2(C_1C_3 - C_2^2)} = 2.8223$$

$$K_{ab} = \frac{C_2}{2(C_1C_3 - C_2^2)} = 1.7392$$

$$K_{bb} = \frac{C_1}{2(C_1C_3 - C_2^2)} = 3.1972$$

ب- دهانه bc ( بعلت مساوی بودن با ab )

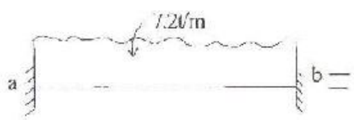
$C_1 = 0.266493$ $\quad K_{bb} = 3.1972$

$C_2 = 0.144965$ $\quad K_{bc} = 1.7392$

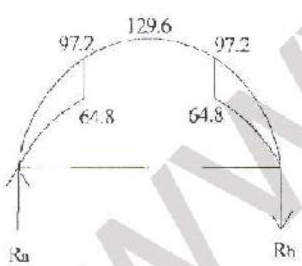
$C_3 = 0.235243$ $\quad K_{cc} = 2.8223$

ج- لنگرهای گیرداری در دهانهٔ ab

۱- تحت بار گسترده








$$M_x = -\frac{Wx^2}{2} + 43.2x = -3.6x^2 + 43.2x$$

$$R_a = EI_c\theta_{a1} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{M(x)(L-x)dx}{n_x EI_C}$$

$$= \frac{1}{12}\left[\int_0^3 \frac{1}{1.5}(43.2x - 3.6x^2)(12-x)dx + \int_3^9 \frac{1}{1}(43.2x - 3.6x^2)(12-x)dx + \int_9^{12} \frac{1}{2}(43.2x - 3.6x^2)(12-x)dx\right] = 460.0125$$

$$R_b = EI_c\theta_{b1} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{M(x)x\,dx}{n_x EI_C}$$

$$= \frac{1}{12}\left[\int_0^3 \frac{1}{1.5}(43.2x - 3.6x^2)x\,dx + \int_3^9 \frac{1}{1}(43.2x - 3.6x^2)x\,dx\right.$$
$$\left. + \int_9^{12}\frac{1}{2}(43.2x - 3.6x^2)x\,dx\right] = 441.7875$$

زوایای تحت اثر لنگرهای متمرکز

$$EI_c\theta_{a2} = M'_{ab}C_1L = 3.197916M''_{ab}$$

$$EI_c\theta_{b2} = M'_{ab}C_2L = 1.73958M''_{ab}$$

$$EI_c\theta_{a3} = M'_{ba}C_2L = 1.73958M''_{ba}$$

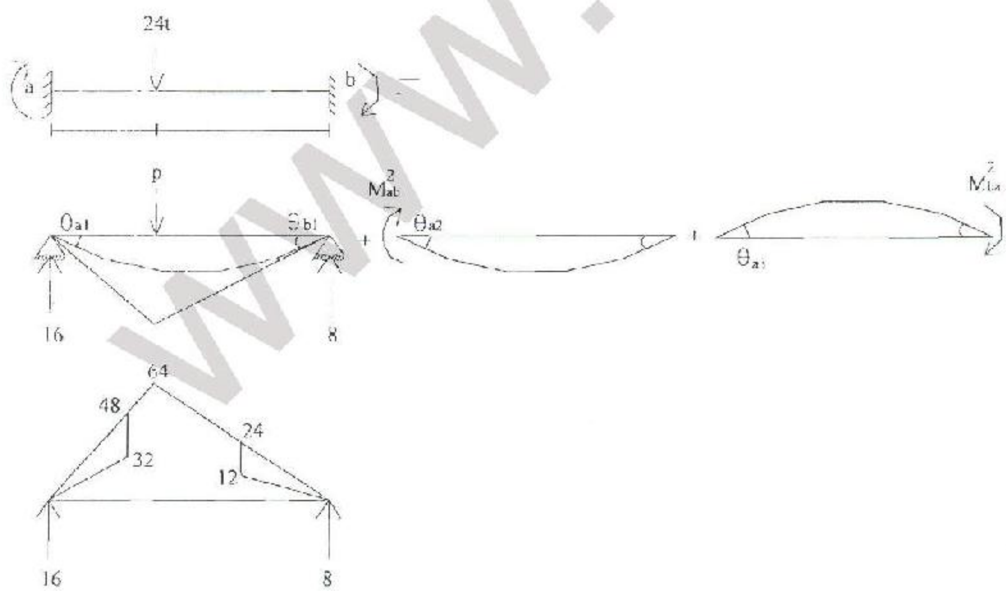
$$EI_c\theta_{b3} = M'_{ba}C_3L = 2.822916M''_{ba}$$

با استفاده از اصل سازگاری تغییر مکان‌ها

$$\begin{cases}\theta_{a1} + \theta_{a2} - \theta_{a3} = 0\\ \theta_{b1} - \theta_{b2} + \theta_{b3} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{460.0125}{EI_c} + \dfrac{3.197916}{EI_c}M'_{ab} - \dfrac{1.73958}{EI_c}M'_{ba} = 0\\ \dfrac{-441.7875}{EI_c} - \dfrac{1.73958}{EI_c}M''_{ab} + \dfrac{2.822918}{EI_c}M''_{ba} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}M'_{ab} = -88.323\\ M''_{ba} = 102.073\end{cases}$$

۲- بار متمرکز:




به روش تیر مزدوج مانند قبل:

$$EI_c\theta_{a1} = 190.333$$
$$EI_c\theta_{b1} = 151.666$$

زوایای تحت اثر لنگر متمرکز مانند قبل:

$$EI_c\theta_{a2} = 3.197916M'^{2}_{ab}$$

$$EI_c\theta_{b2} = 1.73958M'^{2}_{ab}$$

$$EI_c\theta_{a3} = 1.73958M'^{2}_{ba}$$

$$EI_c\theta_{b3} = 2.822916M'^{2}_{ba}$$

با استفاده از اصل سازگاری تغییر مکان‌ها:

$$\begin{cases}\theta_{a1} + \theta_{a2} - \theta_{a3} = 0\\ -\theta_{b1} - \theta_{b2} + \theta_{b3} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{190.333}{EI_c} + \dfrac{3.197916}{EI_c}M'^{2}_{ab} - \dfrac{1.73958}{EI_c}M'^{2}_{ba} = 0\\ \dfrac{-151.666}{EI_c} - \dfrac{1.73958}{EI_c}M'^{2}_{ab} + \dfrac{2.822918}{EI_c}M'^{2}_{ba} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}M'^{2}_{ab} = -45.566\\ M'^{2}_{ba} = 25.647\end{cases}$$

$$\begin{cases}M'_{ab} = -133.889\\ M'_{ba} = 127.72\\ M'_{bc} = M'_{cb} = 0\end{cases}$$

**حل:** معادلات شیب افت را می نویسیم:

$$M_{ab} = \frac{2EI_c}{L}\left[K_{aa}\theta_a + K_{ab}\theta_b - (K_{aa} + K_{ab})\frac{\Delta}{L}\right] + M^{*}_{ab}$$

$$M_{ba} = \frac{2EI_c}{L}\left[K_{ab}\theta_a + K_{bb}\theta_b - (K_{ab} + K_{bb})\frac{\Delta}{L}\right] + M^{*}_{ba}$$

$$M_{bc} = \frac{2EI_c}{L}\left[K_{bb}\theta_b + K_{bc}\theta_c - (K_{bb} + K_{bc})\frac{\Delta}{L}\right] + M^{*}_{bc}$$

$$M_{cb} = \frac{2EI_c}{L}\left[K_{bc}\theta_b + K_{cc}\theta_c - (K_{bc} + K_{cc})\frac{\Delta}{L}\right] + M^{*}_{cb}$$

$$\begin{cases}\sum M_b = 0\\ \sum M_c = 0\end{cases} \Rightarrow \quad \frac{2EI_c}{L} = 1 \;,\; \theta_a = 0 \;,\; \Delta = 0$$

$$M_{ab} = 1.7392\theta_b - 133.889$$

$$\begin{cases}\theta_b = -23.3\\ \theta_c - 14.96\end{cases} \quad 0 = \begin{cases}M_{ba} = 3.19722\theta_b - 127.72\\ M_{bc} - 3.1972\theta_b + 1.7392\theta_c\end{cases} \Rightarrow$$

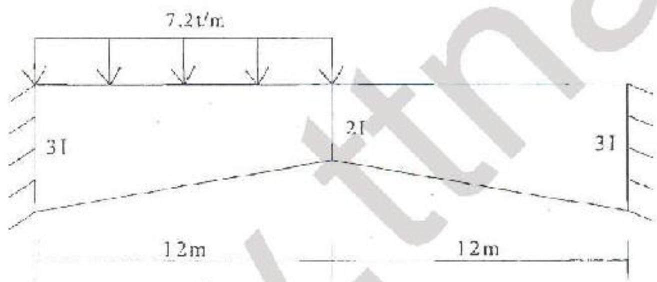
$$0 = M_{cb} = 1.7392\theta_b + 2.8223\theta_c$$

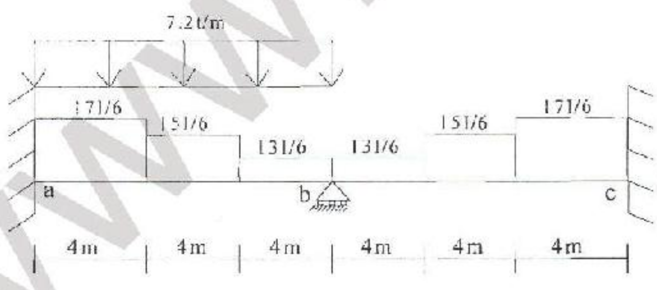
$$\Rightarrow \begin{cases}M_{ab} = 175.6\\ M_{ba} = 51.0\\ M_{bc} = -51.0\\ M_{cb} = 0\end{cases}$$

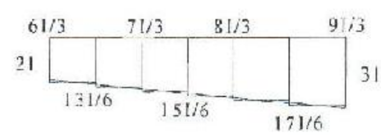
کنترل پیوستگی:

| علت | $EI_c\theta_a$ | $EI_c\theta_b$ | $EI_c\theta_b$ | $EI_c\theta_c$ |
|---|---|---|---|---|
| بار گسترده | 460.0 | -441.8 | 0 | 0 |
| بار متمرکز | 190.3 | -151.67 | 0 | 0 |
| لنگر انتهای نزدیک $EI\theta = C_1LM$ | -561.5 | 144 $EI\theta_b = C_3LM$ | $\underbrace{C_1ML}_{(-)}$ -144 | 0 |
| لنگر انتهای دور $EI\theta = C_2LM$ | -88.7 | 305.5 $\underbrace{C_2ML}_{(-)(-)}$ | 0 | 0 $\underbrace{C_2ML}_{(-)(-)}$ |
| | $\approx 0$ | $\approx -144$ | -144 | $\approx -88.7$ |

**مثال۲**- تیر ماهیچه ای زیرا به روش شیب افت حل نمائید.



$$C_1=\frac{1}{L^3}\int_0^L\frac{(L-x)^2}{nx}dx=\frac{1}{12^3}\left[\int_0^4\frac{1}{2.883}(12-x)^2dx+\int_4^8\frac{1}{2.5}(12-x)^2dx+\int_8^{12}\frac{1}{2.169}(12-x)^2dx\right]$$
$$=0.1231$$

$$C_2=\frac{1}{L^3}\int_0^L\frac{(L-x)x}{nx}dx=\frac{1}{12^3}\left[\int_0^4\frac{1}{2.833}(12-x)x\,dx+\int_4^8\frac{1}{2.5}(12-x)x\,dx+\int_8^{12}\frac{1}{2.169}(12-x)x\,dx\right]$$
$$=0.0673$$

$$C_3=\frac{1}{L^3}\int_0^L\frac{x^2}{nx}dx=\frac{1}{12^3}\left[\int_0^4\frac{1}{2.833}x^2\,dx+\int_4^8\frac{1}{2.5}x^2\,dx+\int_8^{12}\frac{1}{2.169}x^2\,dx\right]=0.1472$$

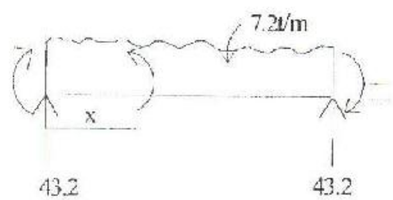
به علت تقارن : $C_1^{ab}=C_3^{bc}\ ,\ C_2^{ab}=C_2^{bc}\ ,\ C_3^{ab}=C_1^{bc}$

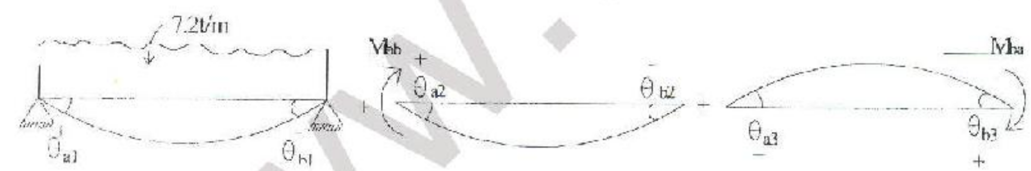
$$2(C_1C_3-C_2^2)=2(0.1231\times0.1472-0.0673^2)=0.0272$$

$$K_{aa}=\frac{C_3}{0.0272}=\frac{0.1472}{0.0272}=5.4118$$

$$K_{ab}=\frac{C_2}{0.0272}=\frac{0.0673}{0.0272}=2.4743$$

$$K_{bb}=\frac{C_1}{0.0272}=\frac{0.1231}{0.0272}=4.5257$$




$K_{cc}=5.4118$

$K_{bc}=2.4743$

$K_{bb}=4.5257$

معادلهٔ منحنی لنگر خمشی بار گسترده :

$$M_x=43.2x+7.2x(\frac{x}{2})=0$$
$$=43.2x-3.6x^2$$

$$R_a=EI_c\theta_{a1}=\frac{1}{L}\int_0^L\frac{M(x)}{EI_c nx}(L-x)dx$$

$$=\frac{1}{12}\left[\int_0^4\frac{1}{2.833}(43.2x-3.6x^2)(12-x)dx+\int_4^8\frac{1}{2.5}(43.2x-3.6x^2)(12-x)dx\right.$$
$$\left.+\int_8^{12}\frac{1}{2.167}(43.2x-3.6x^2)(12-x)dx\right]=200.9705$$

$$R_b = EI_c\theta_{b1} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{M(x)\,x\,dx}{EI_c n x}$$

$$= \frac{1}{12}\left[\int_0^4 \frac{1}{2.833}(43.2x - 3.6x^2)x\,dx + \int_4^8 \frac{1}{2.5}(43.2x - 3.6x^2)x\,dx + \int_8^{12} \frac{1}{2.169}(43.2x - 3.6x^2)x\,dx\right] = 217.6337$$

$$EI_c\theta_{a2} = C_1 M_{ab}.L = 0.1231(12)M'_{ab} = 1.4772M'_{ab}$$

$$EI_c\theta_{b2} = -C_2 M_{ab}.L = -0.0673(12)M'_{ab} = -0.8076M'_{ab}$$

$$EI_c\theta_{a3} = -C_2 M_{ba}.L = -0.8076M'_{ab}$$

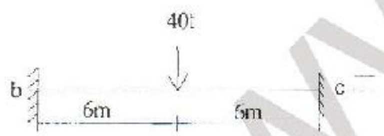
$$EI_c\theta_{b3} = C_3 M_{ba}.L = 1.7664M'_{ab}$$

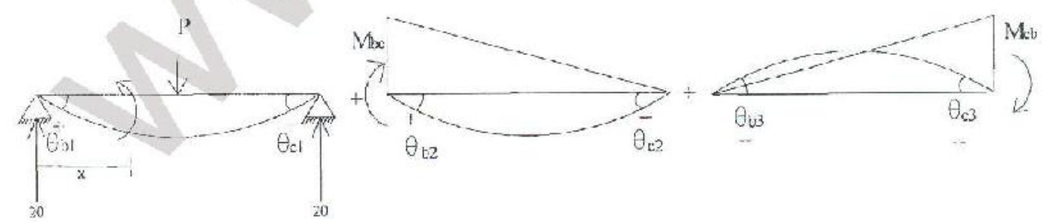
چون تکیه‌گاه‌ها گیردار هستند پس M به $M'$ تبدیل شده و نیز باید برآیند جبری θ توجه به جهات مثبت و منفی صفر باشد.

$$\begin{cases}\theta_{a1} + \theta_{a2} + \theta_{a3} = 0\\ \theta_{b1} + \theta_{b2} + \theta_{b3} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{200.9705}{EI_c} + \dfrac{1.4772}{EI_c}M'_{ab} - \dfrac{0.8076}{EI_c}M'_{ba} = 0\\[2mm] \dfrac{-217.6337}{EI_c} - \dfrac{0.8076}{EI_c}M'_{ab} + \dfrac{1.7664}{EI_c}M'_{ba} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}1.4772M'_{ab} - 0.8076M'_{ba} = -200.9705\\ -0.8076M'_{ab} + 1.7664M'_{ba} = 217.6337\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}M'_{ab} = -91.5813\\ M'_{ba} = 81.3355\end{cases}$$




معادلات لنگر خمشی بار نقطه‌ای:

$$M(x) - 20x = 0 \Rightarrow M(x) = 20x \quad , \quad 0 \le x \le 6$$
$$M(x) - 20x + 40(x-6) = 0 \Rightarrow M(x) = -20x + 240 \quad , \quad 6 \le x \le 12$$

$$EI_c\theta_{b1} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{M(x)}{EI_c n x}(L - x)dx$$

$$=\frac{1}{12}\left[\int_0^4 \frac{1}{2.833}(20x)(12-x)dx+\int_4^6 \frac{1}{2.5}(20x)(12-x)dx\right.$$
$$\left.+\int_6^8 \frac{1}{2.5}(240-20x)(12-x)dx+\int_8^{12}\frac{(240-20x)(12-x)}{2.167}dx\right]$$
$$=140.3345$$

$$EI_c\theta_{c1}=\frac{1}{L}\int_0^L \frac{M(x)}{EI_c nx}x\,dx$$
$$=\frac{1}{12}\left[\int_0^4 \frac{1}{2.833}(20x)x\,dx+\int_4^6 \frac{1}{2.5}(20x)x\,dx+\int_6^8 \frac{1}{2.5}(240-20x)x\,dx+\int_8^{12}\frac{(240-20x)x}{2.167}\right]$$
$$=149.9776$$

$$EI_c\theta_{b2}=C_1 M_{bc}.L=1.7664M'_{bc}$$

$$EI_c\theta_{c2}=-C_2 M_{bc}.L=-0.8076M'_{bc}$$

$$EI_c\theta_{b3}=-C_2 M_{cb}.L=-0.8076M'_{cb}$$

$$EI_c\theta_{c3}=C_3 M_{cb}.L=1.4772M'_{cb}$$

$$\begin{cases}\theta_{b1}+\theta_{b2}+\theta_{b3}=0\\ \theta_{c1}+\theta_{c2}+\theta_{c3}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}140.3345+1.7664M'_{bc}-0.8076M'_{cb}=0\\ -143.9776-0.8076M'_{bc}+1.4772M'_{cb}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M'_{cb}=77.4530\\ M'_{bc}=-44.0350\end{cases}$$

$$M_{ba}=\frac{2EI_c}{L}\left[(\underbrace{K_{ab}\theta_a}_{0}+K_{bb}\theta_b)-\underbrace{(K_{ba}+K_{bb})}_{0}\frac{\Delta}{L}\right]+M^*_{ba}$$
$$=\frac{2EI_c}{12}(4.52570_b)+81.3353$$

$$M_{bc}=\frac{2EI_c}{L}\left[(K_{bb}\theta_b+\underbrace{K_{bc}\theta_c}_{0})-\underbrace{(K_{cc}+K_{bc})}_{0}\frac{\Delta}{L}\right]+M^*_{bc}$$
$$=\frac{2EI_c}{12}(4.52570_b)-44.035$$

$$\Rightarrow\frac{2EI_c}{12}(4.52570_b)+81.3353+\frac{2EI_c}{12}(4.52570_b)-44.0350=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\theta_b=-\frac{24.7258}{EI_c}}$$

با جاگذاری مقدار $\theta_b$ در معادلات شیب افت لنگرهای گیری داری را می توان محاسبه نمود.

| | $\sum EI_C\theta_a$ | $\sum EI_C\theta_b$ | $\sum EI_C\theta_b$ | $\sum EI_C\theta_C$ |
|---|---|---|---|---|
| ناشی از بار گسترده | 200.9705 | -217.6337 | 0 | |
| ناشی از بار متمرکز | 0 | 0 | 140.3345 | |
| ناشی از لنگر انتهای نزدیک | -135.2839 | 143.6710 | -77.7834 | |
| ناشی از لنگر انتهای دور | -65.6865 | 73.9611 | -62.55 | |
| | $\sum EI_C\theta_a = 0.0001 \approx 0$ | | $\sum EI_C\theta_C = 0$ | |

$$\left(\sum EI_C\theta_b\right)_L = \left(\sum EI_C\theta_b\right)_R$$

### ۷-۱- مسائل خاص در روش شیب افت برای مقاطع غیر منشوری

الف- وقتیکه تیر بجای دوسر گیردار، یک سر مفصل و یک سر گیردار باشد. ضرایب اصلاح شده برای لنگر گیرداری و سختی تیر بصورت زیر می باشد

$$M'_{ab} = M_{ab} - C_{ba}M_{ba}$$
$$K'_{aa} = K_{aa}(1 - C_{ab}C_{ba})$$

که در آن ضرایب انتقال لنگر بصورت زیر بدست می آید:

$$C_{ab} = \frac{K_{ba}}{K_{aa}}$$
$$C_{ba} = \frac{K_{ab}}{K_{bb}}$$

در تیرهای منشوری $C_{ab} = C_{ba} = \frac{1}{2}$ ، پس $M'_{ab} = M_{ab} - \frac{1}{2}M_{ba}$ و $K'_{aa} = K_{aa}(2 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{2}$ خواهد بود.

ب- در حالت وجود تقارن مستقیم، سختی اصلاح شده برابر خواهد بود با:

$$K'_{aa} = K_{aa}(1 - C_{ab})$$

در تیرهای منشوری این رابطه بصورت $K'_{aa} = 2(1 - \frac{1}{2}) = 1$ می‌باشد.

ج- در حالت وجود تقارن معکوس، سختی اصلاح شده برابر خواهد بود با:

$$K'_{aa} = K_{aa}(1 - C_{ab})$$

در تیرهای منشوری این رابطه بصورت $K'_{aa} = 2(1 + \frac{1}{2}) = 3$ می باشد.

➤توجه: در هر یک از حالات الف و ب و ج، معادله شیب افت فقط برای $\theta_a$ نوشته می شود.

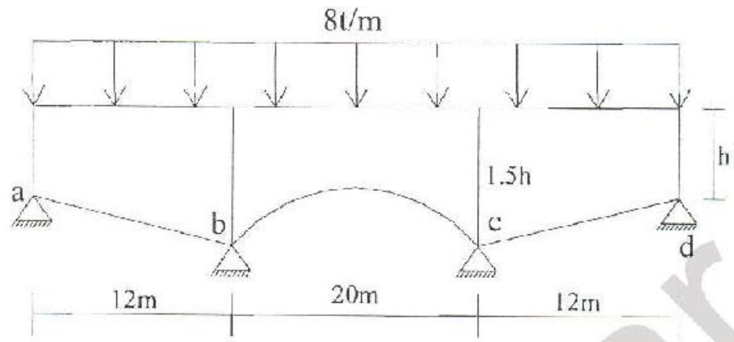
د- در حالت نشست Δ در تکیه گاه b .

$$M_{ab} = -K_{aa}(1 + C_{ab})\frac{\Delta}{\ell} \times \frac{2EI_0}{\ell}$$
$$M_{ba} = -K_{ab}(1 + C_{ba})\frac{\Delta}{\ell} \times \frac{2EI_0}{\ell}$$

نشست تکیه گاهی برای b در حالتیکه تکیه گاه b مفصلی باشد.

$$M'_{ab} = M_{ab} - C_{ba}M_{ba} = -K_{aa}(1 - C_{ab}C_{ba})\frac{\Delta}{\ell} \times \frac{2EI_0}{\ell}$$

**مثال**- با استفاده از روش شیب افت برای تیرهای غیر منشوری حل کنید:




الف- روش مستقیم

دهانه AB :

$$C_1 = \frac{1}{L^3}\int^{L}\frac{(L-x)^2}{nx}dx = \frac{1}{12^3}\int^{12}\frac{(12-x)^2}{(1-\frac{x}{24})^3}dx = 0.2437$$

$$C_2 = \frac{1}{L^3}\int^{L}\frac{(L-x)x}{nx}dx = \frac{1}{12^3}\int^{12}\frac{(12-x)x}{(1+\frac{x}{24})^3}dx = 0.0896$$

$$C_3 = \frac{1}{L^3}\int^{L}\frac{x^2}{nx}dx = \frac{1}{12^3}\int^{12}\frac{x^2}{(1+\frac{x}{24})^3}dx = 0.13261$$

$K_{aa} = 2.73 \qquad K_{ab} = 1.84 \qquad K_{bb} = 5.017$

دهانه BC :

$$C_1 = \frac{1}{L^3}\int^{L}\frac{(L-x)^2}{nx}dx = \frac{1}{20^3}\int^{20}\frac{(20-x)^2}{[1+0.5(1-\frac{x}{10})^2]^3}dx = 0.212392$$

$$C_2 = \frac{1}{20^3}\int^{20}\frac{(20-x)x}{[1+0.5(1-\frac{x}{10})^2]^3}dx = 0.131367$$

$$C_3 = \frac{1}{20^3}\int^{20}\frac{x^2}{[1-0.5(1-\frac{x}{10})^2]^3}dx = 0.212392$$

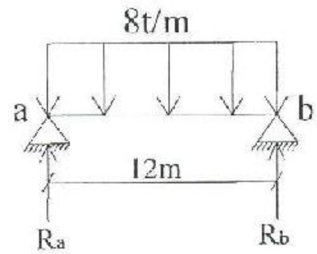
$$\begin{cases} a_a = 0.5 \\ r_a = \frac{1.5-1}{1} = 0.5 \\ a_b = 0.5 \\ r_b = 0.5 \end{cases}$$

$K_{bb} = 3.813 \qquad K_{bc} = 2.358 \qquad K_{cc} = 3.813$

دهانهٔ cd ، به علت تقارن

$$C_1 = 0.13261 \qquad K_{cc} = 5.017$$
$$C_2 = 0.0896 \qquad K_{cd} = 1.84$$
$$C_3 = 0.2437 \qquad K_{dd} = 2.73$$

بدست آوردن لنگرهای گیرداری برای دهانه AB



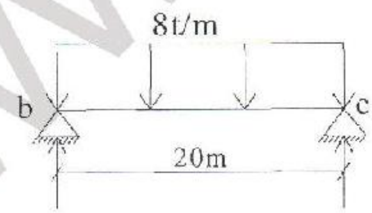

$$EI\theta_{a_1} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{Mx(L-x)}{nx}dx = \frac{1}{12}\int_0^{12}\frac{(48x-4x^2)(12-x)}{(1+\frac{x}{24})^3}dx = 347.21$$

$$EI\theta_{b_1} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{Mx.x}{nx}dx = \frac{1}{12}\int_0^{12}\frac{(48x-4x^2)x}{(1+\frac{x}{24})^3}dx = 272.19$$

$$C_1L = 2.924 \qquad C_2L = 1.075 \qquad C_3L = 1.591$$

$$\begin{cases}\theta_{a_1}+\theta_{a_2}+\theta_{a_3}=0\\ \theta_{b_1}+\theta_{b_2}-\theta_{b_3}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}347.21+2.924M_a-1.075M_b=0\\ 272.91+1.075M_a-1.591M_b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}M_{ab}=-79.31\\ M_{ab}=120.88\end{cases}$$

بدست آوردن لنگرهای گیرداری برای دهانه BC




$$EI\theta_{b_1} = \frac{1}{20}\int_0^{20}\frac{(80x-4x^2)(20-x)}{[1+0.5(1+\frac{x}{10})^2]^3}dx = 2101.88$$

$$EI\theta_{c_1} = \frac{1}{20}\int_0^{20}\frac{(48x-4x^2)x}{[1+0.5(1+\frac{x}{10})^2]^3}dx = 2101.88$$

$$C_1L = 4.248 \qquad C_2L = 2.627 \qquad C_3L = 4.248$$

$$\begin{cases}\theta_{b_1}+\theta_{b_2}+\theta_{b_3}=0\\ \theta_{c_1}+\theta_{c_2}-\theta_{c_3}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2101.88+4.248M_a-2.627M_b=0\\ 2101.88+2.627M_a-4.248M_b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}M_{ab}=-305.73\\ M_{ab}=305.73\end{cases}$$

$$0 = M_{ab} = \frac{1}{6}(2.73\theta_a + 1.48\theta_b) - 74.31$$

$$0 = \begin{cases} M_{ba} = \frac{1}{6}(1.84\theta_a + 5.0178\theta_b) + 120.88 \\ M_{ab} = \frac{1}{10}(2.358\theta_c + 3.8138\theta_c) + 305.73 \end{cases}$$

$$0 = \begin{cases} M_{cb} = \frac{1}{10}(3.813\theta_b + 2.358\theta_c) - 120.88 \\ M_{cd} - \frac{1}{6}(1.84\theta_c + 2.73\theta_d) + 74.31 \end{cases}$$

به علت تقارن $\Rightarrow \begin{cases} M_{cd} = -120.88 \\ M_{cc} = 74.31 \end{cases}$

$$\begin{array}{cccc} \theta_a & \theta_b & \theta_c & \theta_d \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2.73}{6} & \frac{1.84}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1.84}{6} & 1.217 & 0.2358 & 0 \\ 0 & 0.2358 & 1.217 & \frac{1.84}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1.84}{6} & \frac{2.73}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.31 \\ 184.85 \\ -184.85 \\ -74.31 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \theta_a = 46.1142 \\ \theta_b = 173.896 \\ \theta_c = -173.896 \\ \theta_d = -46.1142 \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{ab} = 0.0 \\ M_{ab} = 280.43 \\ M_{ab} = -280.43 \\ M_{ab} = 280.43 \\ M_{ab} = -280.43 \\ M_{ab} = 0 \end{cases}$$

ب- استفاده از جدول

دهانهٔ AB $\begin{cases} a_a = 0 & a_b = 1 \\ r_a = 0 & r_b = 1 \end{cases}$

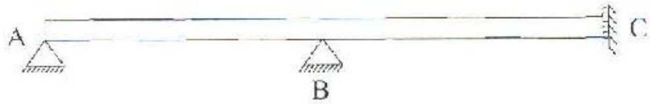
بین دو جدول ۵ و ۱۰ باید انترپوله کنیم.

| | $C_{ab}$ | $C_{ba}$ | $K_{ab}$ | $K_{ba}$ | $M_{ab}$ | $M_{ba}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| جدول ۵۲ (بین ۰/۴ و ۰/۶ انترپوله می‌کنیم): | 0.676 | 0.369 | 5.455 | 10.1 | 0.0647 | 0.1049 |
| جدول ۵ (بین ۰/۴ و ۰/۶ انترپوله می‌کنیم): | 0.6275 | 0.59 | 6.99 | 7.455 | 0.0913 | 0.098 |
| جدول ۱۰ (بین ۰/۴ و ۰/۶ انترپوله می‌کنیم): | 0.6085 | 0.6465 | 8.245 | 7.78 | 0.09975 | 0.09305 |

پس از انترپوله کردن بین نتایج بدست آمده از جدول ۵ و ۱۰ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} C_{bc} = 0.618 \\ C_{cb} = 0.618 \end{cases} \quad \begin{cases} k_{bc} = 7.618 \\ K_{cb} = 7.618 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{bc} = 0.0955 \\ M_{cb} = 0.0955 \end{cases}$$

بعلت تقارن نصف سازه را تحلیل می‌کنیم.




$$K'_{ab} = \frac{5.455}{12} = 0.4546 \qquad K'_{bc} = \frac{7.618}{20} = 0.3809$$

$$K'_{ba} = \frac{10.1}{12} = 0.842 \qquad K'_{cb} = \frac{7.618}{20} = 0.3809$$

$$M_{ij} = K'_{ij}(\theta_i + C_{ij}\theta_j) + M_{ij}$$

$$M_{ji} = K'_{ji}(\theta_j + C_{ji}\theta_i) + M_{ji}$$

$$M_{ab} = 0.0647 \times 8 \times 12^2 = -74.53$$

$$M_{ba} = 0.1049 \times 8 \times 12^2 = 120.84$$

$$M_{ba} = -M_{cb} = -0.09975 \times 8 \times 20^2 = -305.6$$

$$0 = \{M_{ab} = 0.4546(\theta_a + 0.676\theta_b) - 74.53$$

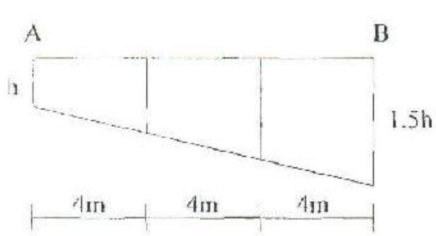
$$0 = \begin{cases} M_{ab} = 0.842(0.369\theta_a + \theta_b) + 120.84 \\ M_{bc} = 0.3809(0.618\theta_c + \theta_b) - 305.6 \end{cases}$$

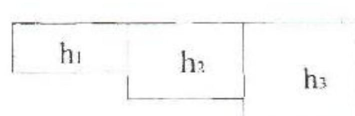
$$\begin{bmatrix} 0.4546 & 0.310 \\ 0.310 & 0.988 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.53 \\ 184.76 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \theta_a = 46.34 \\ \theta_b = 172.46 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{ab} = 0 \\ M_{ba} = 280.45 \\ M_{bc} = -280.45 \\ M_{cb} = 280.45 \\ M_{cd} = -280.45 \\ M_{dc} = 0 \end{cases}$$

ج- تقسیم تیر به قطعات منشوری

دهانه AB را سه قسمت و دهانه BC را پنج قسمت می کنیم.



$$h=1+\frac{x}{24}\quad\begin{cases}x=4 & h=1+\frac{1}{6}\\ x=8 & h=1+\frac{1}{6}\end{cases}\quad\begin{cases}h_1=\dfrac{h(1+(1+\frac{1}{6}))}{2}=1.083h\\ h_2=\dfrac{(1+\frac{1}{6})+(1+\frac{1}{3})}{2}h=1.25h\\ h_3=\dfrac{1+\frac{1}{3}+1.5}{2}h=1.417h\end{cases}$$

$$h=1+0.5(1-\frac{x}{10})^2$$

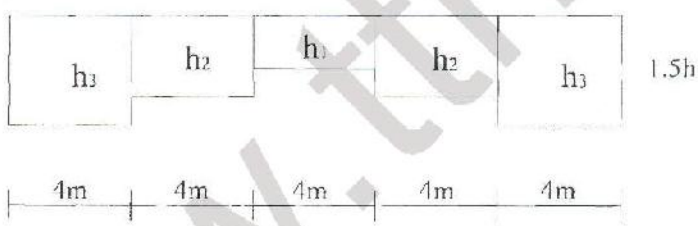
$x=4 \qquad h=1.18$

$x=8 \qquad h=1.02$

$x=12 \qquad h=1.02$

$x=16 \qquad h=1.18$

$$h_1=\frac{1.5+1.18}{2}=1.34 \qquad h_2=\frac{1.18+1.02}{2}=1.1 \qquad h_3=\frac{2\times1.02}{2}=1.02$$




$$C_1=\frac{1}{20^3}\Big[\int_0^4\frac{(20-x)^2}{1.34^3}dx+\int_4^8\frac{(20-x)^2}{1.13^3}dx+\int_8^{12}\frac{(20-x)^2}{1.02^3}dx$$
$$+\int_{12}^{16}\frac{(20-x)^2}{1.13^3}dx+\int_{16}^{20}\frac{(20-x)^2}{1.34^3}dx\Big]=0.20461$$

$$C_2=\frac{1}{20^3}=\Big[\int_0^4\frac{(20-x)x}{1.34^3}dx+\int_4^8\frac{(20-x)x}{1.13^3}dx+\int_8^{12}\frac{(20-x)x}{1.02^3}dx$$
$$+\int_{12}^{16}\frac{(20-x)x}{1.13^3}dx+\int_{16}^{20}\frac{(20-x)x}{1.34^3}dx\Big]=0.123$$

$$C_3=C_1=0.20461$$

بدست آوردن لنگرهای گیرداری

$$EI\theta_{a_1}=\frac{1}{L}\int_0^L\frac{M_x(L-X)}{n_x}dx$$

$$=\frac{1}{12}\left[\int_0^4\frac{(48x-4x^2)(12-x)}{1.083^3}dx+\int_4^8\frac{(48x-4x^2)(12-x)}{1.1.25^3}dx\right.$$

$$\left.+\int_8^{12}\frac{(48x-4x^2)(12-x)}{1.417^3}dx\right]=349.23$$

$$EI\theta_{b_1}=\frac{1}{12}\left[\int_0^4\frac{(48x-4x^2)x}{1.083^3}dx+\int_4^8\frac{(48x-4x^2)x}{1.25^3}dx\right.$$

$$\left.+\int_8^{12}\frac{(48x-4x^2)x}{1.417^3}dx\right]=274.86$$

$$\begin{cases}\theta_{a_1}+\theta_{a_2}-\theta_{a_3}=0\\ \theta_{b_1}+\theta_{b_2}-\theta_{b_3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}349.23+2.797M_a-1.084M_b=0\\ 274.86+1.084M_a-1.637M_b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M_{ab}=-80.43\\ M_{ab}=114.65\end{cases}$$

$C_1L=2.797\qquad C_2L=1.084\qquad C_3L=1.637$

بدست آوردن لنگرهای گیرداری برای دهانه BC

$$EI\theta_{a_1}=\frac{1}{20}\left[\int_0^4\frac{(80x-4x^2)(20-x)}{1.34^3}dx+\int_4^8\frac{(80x-4x^2)(20-x)}{1.1^3}dx\right.$$

$$\left.+\int_8^{12}\frac{(80x-4x^2)(20-x)}{1.02^3}dx+\int_{12}^{16}\frac{(80x-4x^2)(20-x)}{1.1^3}dx+\int_{16}^{20}\frac{(80x-4x^2)(20-x)}{1.34^3}dx\right]$$

$$=1968.212=EI\theta_{b_1}$$

$$\begin{cases}1968.212+4.097M_a-2.46M_b=0\\ 1968.212+2.46M_a-4.09M_b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M_{bc}=-300.49\\ M_{cb}=300.49\end{cases}$$

معادلات شیب افت (بعلت تقارن نصف سازه را تحلیل می کنیم) $\theta_b=-\theta_c$

$$0=M_{ab}=\frac{1}{6}(2.885\theta_a+1.91\theta_b)-80.43$$

$$0=\begin{cases}M_{ba}=\frac{1}{6}(1.91\theta_a+4.93\theta_b)-80.43\\ M_{bc}=\frac{1}{6}(3.82\theta_b+2.3\theta_c)-80.43\end{cases}\qquad\begin{bmatrix}0.481 & 0.318\\ 0.318 & 0.974\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_a\\ \theta_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}80.43\\ 185.84\end{bmatrix}\begin{cases}\theta_a=52.38\\ \theta_b=173.7\end{cases}$$

$M_{ab}=0\quad ,M_{bc}=-274.05\quad ,M_{cd}=-274.05$

$M_{ba}=274.05\quad ,M_{cb}=274.05\quad ,M_{dc}=0$

# فصل سوم

## روش توزیع لنگر (کراس)　　　Cross Method

فهرست مطالب

## ۱- توزیع لنگر

همان‌طور که در فصل‌های گذشته ملاحظه گردید روش‌های مختلفی برای تحلیل سازه‌های نامعین وجود دارد که جامع‌ترین آن‌ها روش شیب-افت می‌باشد. در تحلیل سازه‌های نامعین به این روش در نهایت به دستگاه چند مجهولی خواهیم رسید که حل این دستگاه برای سازه‌های با درجه نامعینی بالا بسیار مشکل خواهد بود. برای احتراز از تشکیل دستگاه معادلات می توان از روش‌های تکراری استفاده نمود. روش‌های تکراری مبتنی بر فرض یک حل اولیه و پیش بینی روش مناسبی برای اصلاح جواب‌ها تا رسیدن به جواب با دقت مناسب می‌باشد.

در تحلیل سازه‌های نامعین به روش تکراری می‌توان حل اولیه را لنگرهای گیرداری فرض نمود و برای بدست آوردن روش بهتر کردن پاسخ از دو مفهوم توزیع لنگر و انتقال لنگر استفاده کرد. به این منظور برای حل اولیه که لنگرهای گیرداری می‌باشند فرض می‌شود که در محل گره‌های سازه قفل‌هایی اعمال شده که مانع دوران گره‌ها می‌شوند به این ترتیب هریک از اعضا به تیرهای دوسر گیردار تبدیل می‌شوند و جواب اولیه مسئله همان لنگرهای گیرداری می‌باشند.

بعد از این مرحله تعادل گره‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به پیوستگی سازه بایستی جمع لنگرها در گره‌ها صفر باشد ولی با فرض وجود قفل این‌گونه نیست و در هر گره لنگر نامتعادلی وجود دارد. این لنگر نامتعادل در گره‌های سازه بین اعضای منتهی به گره توزیع می‌شود و از هر انتهای عضو به انتهای دیگر آن لنگرهایی منتقل خواهد شد. برای درک بهتر موضوع دو پدیده توزیع لنگر و انتقال لنگر را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### ۱-۱- تعاریف پایه

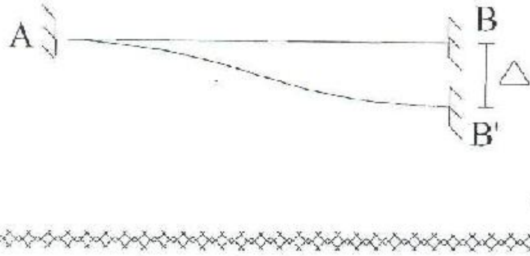
#### الف- قرارداد علامت

علامت‌های ما همان علامت‌های روش شیب افت می‌باشد (لنگر وارد بر انتهای عضو در صورتی مثبت است که در جهت حرکت عقربه‌های ساعت عمل نماید.)

#### ب- لنگرهای گیرداری

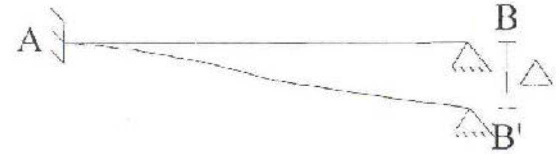
در استفاده از روش فوق باید لنگرهای انتهایی تولید شده در عضو وقتی که دو انتهای آن گیردار فرض می‌شود، معلوم باشد.

#### ج- لنگرهای ناشی از تغییر مکان نسبی دو انتهای عضو




$$M_{ab} = \frac{2EI}{l}(2\overset{0}{\theta_a} + \overset{0}{\theta_b} - \frac{3\Delta}{l}) = \frac{6EI\Delta}{l^2} \quad \text{(I)}$$

$$M_{ba} = \frac{6EI\Delta}{l^2}$$




$$M_{ab} = \frac{2EI}{l}(\overset{0}{2\theta_a} + \theta_b - \frac{3\Delta}{l})$$

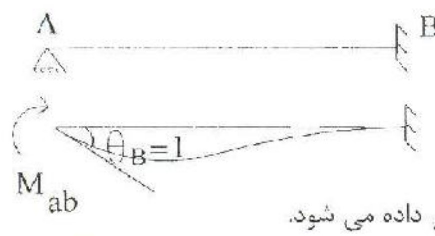
$$M_{ba} = \frac{2EI}{l}(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{l}) = 0 \qquad \textbf{(II)}$$

$$\theta_b = \frac{3\Delta}{l} \Rightarrow M_{ba} = \frac{3EI\Delta}{l^2}$$

### د- سختی دورانی مطلق

لنگر انتهایی لازم برای ایجاد دورانی به اندازه واحد در یک انتها، وقتی که انتهای دیگر گیردار فرض می‌شود و از دوران کلی عضو جلوگیری شده باشد. برای تیرشکل زیر با صلبیت خمشی EI خواهیم داشت:

$$M_{ab} = \frac{2EI}{l}(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{l}) = \frac{4EI\theta_a}{l}$$




سختی دورانی مطلق $M_{ab}\big|_{\theta_a=1} = \frac{4EI}{l} = k'$

نسبت $\frac{I}{L}$ را ضریب سختی یا سختی نسبی می نامند که با k نمایش داده می شود.

### ه- سختی دورانی کاهش یافته

لنگر انتهایی لازم برای ایجاد دورانی به اندازه واحد در یک انتها، وقتی که انتهای دیگر ساده فرض می‌شود. (B مفصلی)

$$M_{ab} = \frac{2EI}{l}(2\theta_a + \theta_b)$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{l}(1 + 2\theta_b) = 0 \Rightarrow \theta_b = -\frac{1}{2}$$

سختی دورانی کاهش‌یافته

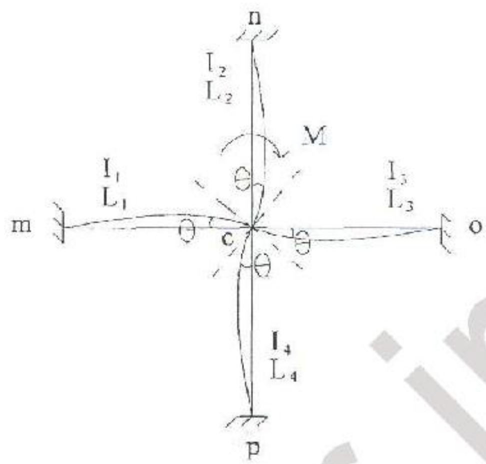

$$M_{ab}\big|_{\theta_a=1} = \frac{2EI}{l} = k'^R = \frac{3}{4}k'$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود سختی دورانی کاهش یافته $\frac{3}{4}$ سختی دورانی مطلق می‌باشد.

### و- ضرایب توزیع

شکل زیر را در نظر بگیرید که از چهار عضو تشکیل شده است که یک انتهای هر عضو گیردار می‌باشد. فرض می‌کنیم لنگر M بر گره C وارد می شود. این گره به اندازهٔ $\theta$ می‌چرخد، به علت این چرخش لنگری در اعضا ایجاد می‌شود.

با توجه به معادلات شیب- افت داریم:




$$M_{cm} = \frac{2EI}{l_1}(2\theta) = 4E\frac{I_1}{l_1}\theta = k'_1\theta$$

$$M_{cn} = \frac{2EI}{l_2}(2\theta) = 4E\frac{I_2}{l_2}\theta = k'_2\theta$$

$$M_{co} = \frac{2EI}{l_3}(2\theta) = 4E\frac{I_3}{l_3}\theta = k'_3\theta$$

$$M_{cp} = \frac{2EI}{l_4}(2\theta) = 4E\frac{I_4}{l_4}\theta = k'_4\theta$$

معادلات فوق نشان می‌دهد که لنگر خارجی وارد بر گره C باعث ایجاد لنگر در انتهای نزدیک هر تیر می شود تا اثر لنگر خارجی را خنثی کند. این لنگرها را لنگرهای توزیع شده و نسبت هر لنگر به لنگر کل را ضریب توزیع برای ان عضو می‌نامیم.

با توجه به تعادل گره C می دانیم:

$$M_{cm} + M_{cn} + M_{co} + M_{cp} = M$$

$$(K'_1 + K'_2 + K'_3 + K'_4)\theta = M$$

$$4E(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)\theta = M \Rightarrow \theta = \frac{M}{4E\sum K}$$

با جایگذاری مقدار θ به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\left.\begin{aligned} M_{cm} &= \frac{K_1}{\sum K}M = r_1 M \\ M_{cn} &= \frac{K_2}{\sum K}M = r_1 M \\ M_{co} &= \frac{K_3}{\sum K}M = r_1 M \\ M_{cp} &= \frac{K_4}{\sum K}M = r_1 M \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_i = \frac{K_i}{\sum K}$$

نسبت $\frac{k_i}{\sum k}$ را ضریب توزیع لنگر می نامند و با $r_i$ نمایش داده می شود. اگر یک انتها مفصلی بود باید به جای $K_i$ ، $K_i^R$ قرار داده شود.

همان‌طور که ملاحظه می شود لنگر خارجی M با توجه به ضریب توزیع هر عضو بین اعضای متصل به یک گره پخش می‌شود.

## ز – ضریب انتقال

اگر لنگر به یک انتهای تیر وارد شود، لنگر ایجاد شده در انتهای دیگر را لنگر انتقال می نامیم و نسبت این دو لنگر را ضریب انتقال نامیده و با c نشان می دهیم.

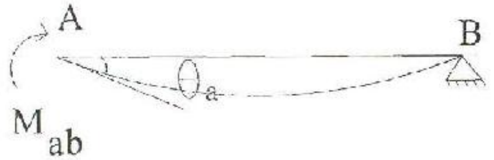

$$M_{ab} = \frac{2EI}{l}(2\theta_a)$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{l}(\theta_a) = \frac{1}{2}M_{ab} \Rightarrow C_{ab} = \frac{1}{2}$$

$$M_{ba} = C_{ab}M_{ab}$$

$$C_{ba} = \frac{1}{2}$$

با تعویض تکیه‌گاه‌ها و عمل تأثیر لنگرهای خارجی داریم:




$$M_{ba} = 0 \Rightarrow C_{ab} = 0$$

- در تکیه گاه گیردار همه لنگرها ذخیره می‌شوند یعنی ضریب انتقال صفر می‌باشد.
- در تکیه گاه مفصلی هم لنگرها بر می‌گردند یعنی ضریب انتقال یک می‌باشد.

## ۱–۲– روش حل

۱- ضرایب سختی، ضرایب توزیع و ضرایب انتقال برای تمام اعضاء محاسبه گردند.

۲- گره‌ها در مقابل دوران گیردار شوند. (حل صفر)

۳- لنگرهای گیرداری به اعضاء اعمال شوند.

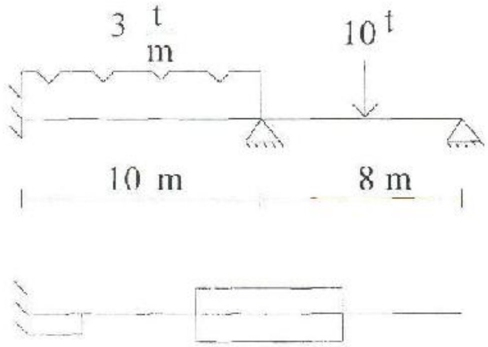
۴- گرهی که بیشترین عدم تعادل را دارد انتخاب شود و لنگر متعادل کننده بر آن اعمال شود.

۵- این لنگر بین انتهاهای نزدیک اعضاء متصل به گره توزیع شود.

۶- لنگرهای انتقالی به اعضاء دور تعیین شوند.

۷- گره تعادل یافته گیر دار شود و گره بعدی انتخاب شود. مراحل ۴ تا ۷ تکرار شود تا همه گره ها یک بار به تعادل برسند.

۸- مراحل ۴ تا ۷ برای همه گره ها تکرار شود تا نمو به صفر برسد.




$$M_{ab} = -M_{ba} = -\frac{3\times 10^2}{12} = -25 \ \text{t.m}$$

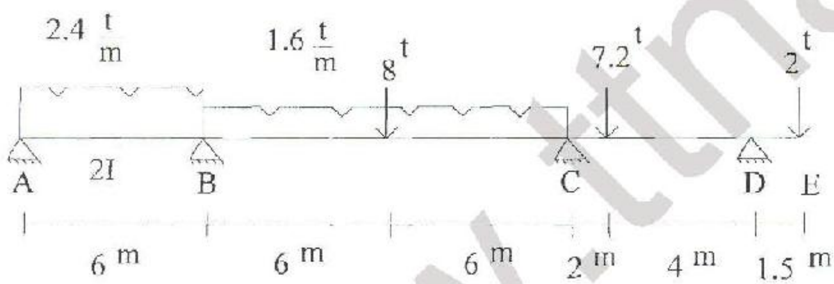
$$M'_{bc} = -\frac{3Pl}{16} = -\frac{3\times 10\times 8}{16} = -15 \ \text{t.m}$$

$$\frac{I}{L} = \frac{1}{10}\ ,\ \frac{1}{8}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{32}$$

$$\sum K = \frac{1}{10} + \frac{3}{32} = \frac{31}{160}$$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{1/10}{31/160} = 0.52 \\ r_2 = \dfrac{3/32}{31/160} = 0.48 \end{cases}$$

**مثال**- مطلوبست تحلیل تیر سراسری زیر به روش توزیع لنگر.




گام۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{2.4\times 6^2}{12} = -7.2 \ \text{t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -(\frac{1.6\times 12^2}{12} + \frac{pl}{8}) = -31.2 \ \text{t.m}$$

$$M'_{cd} = -\frac{7.2\times 4^2}{6^2} = -6.4 \ \text{t.m} \quad , \quad M'_{dc} = 3.2 \ \text{t.m} \ , \ M'_{de} = -3.6 \ \text{t.m}$$

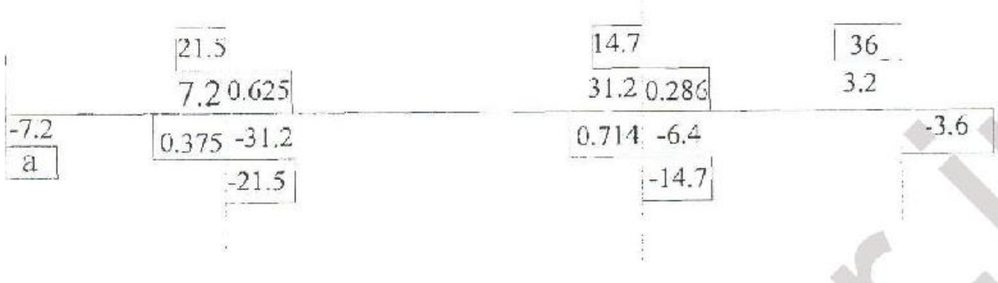
گام۲) محاسبه ضرایب سختی نسبی و ضرایب توزیع

$$(\frac{EI}{\ell})_{AB} = 0.5 \ ,\ (\frac{EI}{\ell})_{BC} = 0.833 \ ,\ (\frac{EI}{\ell})_{CD} = 0.333$$

B) $\sum K = 0.5 + 0.833 = 1.333 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0.375 \\ r_2 = 0.625 \end{cases}$

C) $\sum K = 0.833 + 0.333 = 1.166 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0.714 \\ r_2 = 0.286 \end{cases}$

گام۳) توزیع لنگر، ضرایب انتقال $\frac{1}{2}$




### ۱-۳- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل تیرهای سراسری

گام‌های حل مسئله عبارتند از:

الف) تعیین لنگرهای گیر داری

ب) تعیین ضرایب توزیع

ج) متعادل کردن گره‌ها بر روی یک شکل مشابه سازه واقعی.

**نکات:**

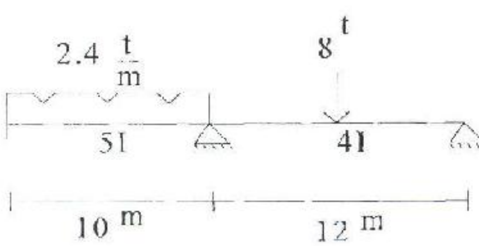
- در هر حالتی بهتر است از روش‌های اصلاح‌شده برای حالات انتهای مفصل، تقارن مستقیم و تقارن معکوس استفاده شود.

- متعادل کردن گره‌ها بهتر است از گرهی که بیشترین عدم تعادل را دارد آغاز شود.

- می‌توان همهٔ گره‌ها را با هم یا چندتا چندتا متعادل نمود.

- می‌توان از تکنیک‌های ویژه مثل رهایی بیش از حد و رهایی کمتر از حد استفاده نمود.

**مثال**- تیر سراسری زیر را تحلیل کنید.




**- روش عادی**

گام۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = -M'_{ba} = -\frac{2.4 \times 100}{12} = -20 \ \text{t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{8 \times 12}{8} = -12 \ \text{t.m}$$

گام۲) محاسبه ضرایب توزیع

$$\left.\begin{array}{l} K_{ab} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ K_{bc} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum K = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \qquad \left\{\begin{array}{l} r_{ba} = \frac{1/2}{5/6} = 0.6 \\ r_{bc} = \frac{1/3}{5/6} = 0.4 \end{array}\right.$$

گام۳) توزیع لنگر

(تمام گره‌ها را متعادل و لنگرها را منتقل می‌کنیم.)

| | | |
|---|---|---|
| 0.85 | | |
| -0.3 | | 0.2 |
| 0.3 | | -0.2 |
| -0.6 | | 0.4 |
| 0.6 | | -0.4 |
| -1.2 | | 0.8 |
| 1.2 | | -0.8 |
| -2.4 | | 1.6 |
| 10 | | -1.6 |
| -4.8 | | -12 |
| -20 | 0.4 | 12 |

| | | |
|---|---|---|
| | 0.6 | |
| -20 | | -12 |
| 20 | | -3.2 |
| -2.4 | | -6 |
| 2.4 | | -1.6 |
| -1.2 | | 0.8 |
| 1.2 | | -0.8 |
| -0.6 | | 0.4 |
| 0.6 | | -0.4 |
| -0.3 | | 0.2 |
| 0.3 | | -0.2 |
| -0.15 | | |

| | 0.6 | 0.4 | |
|---|---|---|---|
| | 20 | | 12 |
| -20 | -4.8 | -12 | -12 |
| 20 | 10 | -3.2 | -1.6 |
| -2.4 | -2.4 | -6 | 1.6 |
| 2.4 | 1.2 | -1.6 | -0.8 |
| -1.2 | -1.2 | 0.8 | 0.8 |
| 1.2 | 0.6 | -0.8 | -0.21 |
| -0.6 | -0.6 | 0.4 | 0.21 |
| 0.6 | 0.3 | -0.4 | -0.2 |
| -0.3 | -0.3 | 0.2 | 0.2 |
| 0.3 | 0.15 | -0.2 | -0.1 |
| -0.15 | -0.15 | 0.1 | 0.1 |
| 0.15 | 0.08 | -0.1 | -0.05 |
| -0.08 | -0.08 | 0.05 | 0.05 |
| 0.08 | 22.5 | -0.05 | 0.0 |
| 0.0 | | -22.8 | |

- **روش اصلاح شده**

گام۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = 0.0\ ,\quad M'_{ba} = \frac{wl^2}{8} = +30\ \ t.m$$

$$M'_{bc} = -\frac{3PL}{16} = -18\ \ t.m\quad ,\quad M'_{cb} = 0.0$$

گام۲) محاسبه ضرایب توزیع

$$K'_{ba} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{10} = 0.375 \qquad r_{ba} = 0.6$$

$$K'_{bc} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{12} = 0.75 \qquad r_{bc} = 0.4$$

گام۳) توزیع لنگر

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 22.8 | | |
| | -7.2 | | |
| | 30 | 0.4 | 0.0 |
| 0.0 | 0.6 | -18 | |
| | | -4.8 | |
| | | -22.8 | |

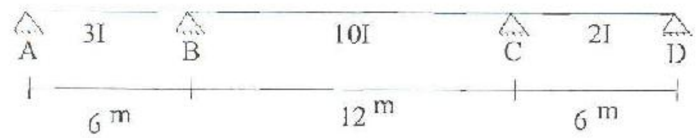
## ۱-۴- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل تیرهای سراسری با نشست تکیه گاهی

همان‌گونه که در فصل شیب- افت بیان شد نشست تکیه‌گاه‌ها باعث ایجاد لنگر گیرداری در سازه می‌شود. بنابراین در روش توزیع لنگر، لنگرگیرداری ناشی از نشست را برای عضو مورد نظر بدست آورده و ادامه حل را مانند آن‌چه ذکر شد ادامه می‌دهیم.

**مثال-** تیر شکل ذیل را با فرض نشست تکیه گاه B به میزان ۱۵ میلی‌متر تحلیل نمایید.

$I = 4*10^{-4}\ m^4$

$E = 2*10^7\ {}^{t}/_{m^2}$




**- روش عادی**

گام۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = M'_{ba} = -\frac{6\times 2\times 10^7\times 3\times 4\times 10^{-4}\times 0.015}{6\times 6} = -60\ \ t.m$$

$$M'_{bc} = M'_{cb} = -\frac{6\times 2\times 10^7\times 10\times 4\times 10^{-4}\times -0.015}{12\times 6} = +50\ \ t.m$$

گام۲) محاسبه ضرایب توزیع

$$K_{ab} = \frac{I}{L} = \frac{3}{6} = \underline{0.5}\ ,\ K_{bc} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}\ ,\ K_{cd} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

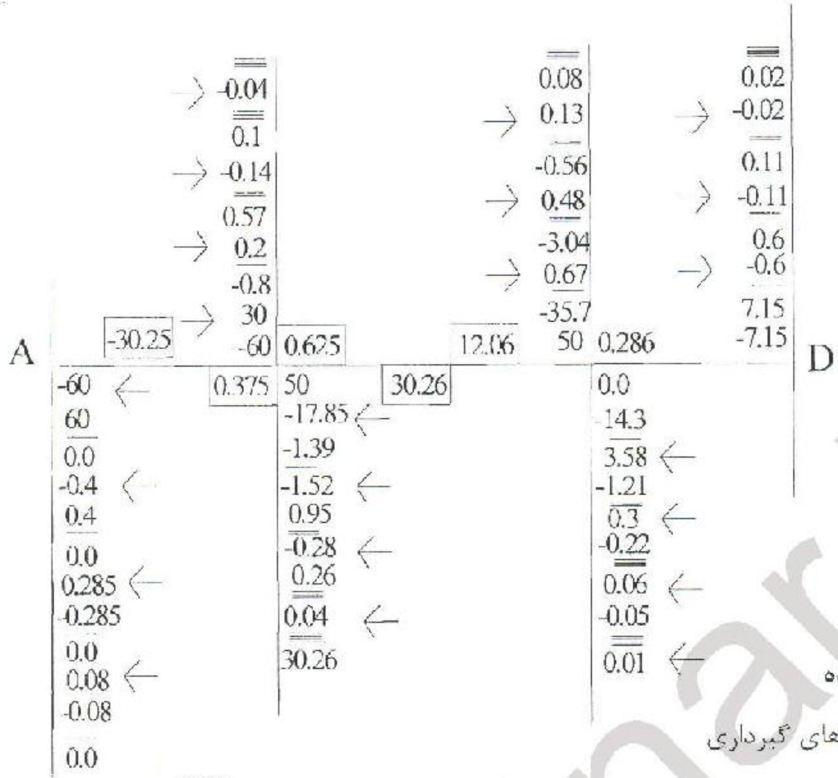
$$r_{ab} = \frac{1/2}{1/2 + 5/6} = \frac{6}{16} = 0.375$$

$$r_{bc} = 0.625$$

$$r_{cb} = \frac{5/6}{1/3 + 5/6} = \frac{5}{7} = 0.714$$

$$r_{cd} = \frac{1/3}{1/3 + 5/6} = 0.286$$

گام۳) توزیع لنگر. (گره A را متعادل می‌کنیم.)




– روش اصلاح شده

گام۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = 0 \quad , \quad M'_{ba} = -\frac{3EI\Delta}{L^2} = -30 \quad \text{t.m}$$

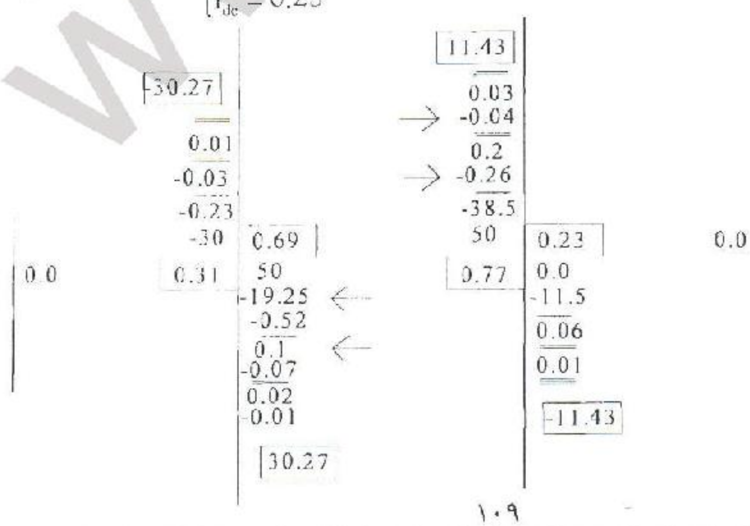
$$M'_{bc} = M'_{cb} = -\frac{6EI\Delta}{L^2} = +50 \quad \text{t.m}$$

گام۲) محاسبه ضرایب توزیع

$$\left.\begin{aligned} K'_{ab} &= \frac{3}{4}K_{ab} = \frac{3\times 3}{6\times 4} = 0.375 \\ K_{bc} &= \frac{10}{12} = 0.833 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} r_{ab} = \dfrac{0.375}{0.833+0.375} = 0.31 \\ r_{bc} = 0.69 \end{cases}$$

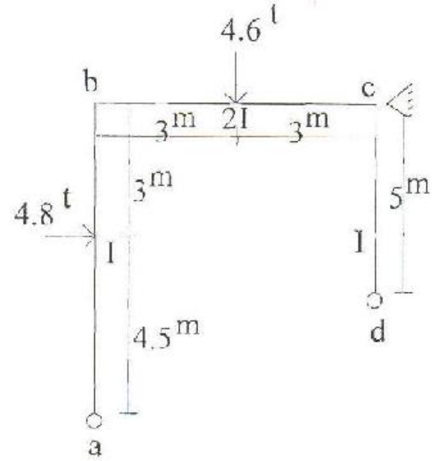
$$K'_{cd} = \frac{3}{4}\times\frac{2}{6} = 0.25 \quad \Rightarrow \begin{cases} r_{cd} = \dfrac{0.833}{0.833+25} = 0.77 \\ r_{dc} = 0.23 \end{cases}$$

گام۳) توزیع لنگر



## ۱–۵– کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای مستطیلی بدون حرکت جانبی

**مثال–** قاب شکل زیر را حل کنید.




گام۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ba}=\frac{4.8\times 4.5^2\times 3}{(7.5)^2}-\frac{1}{2}\times\frac{4.8\times 3^2\times 4.5}{(7.5)^2}=6.9\ \text{t.m}$$

$$M'_{bc}=M'_{cb}=-\frac{PL}{8}=-7.2\ \text{t.m}$$

گام۲) محاسبه ضرایب توزیع

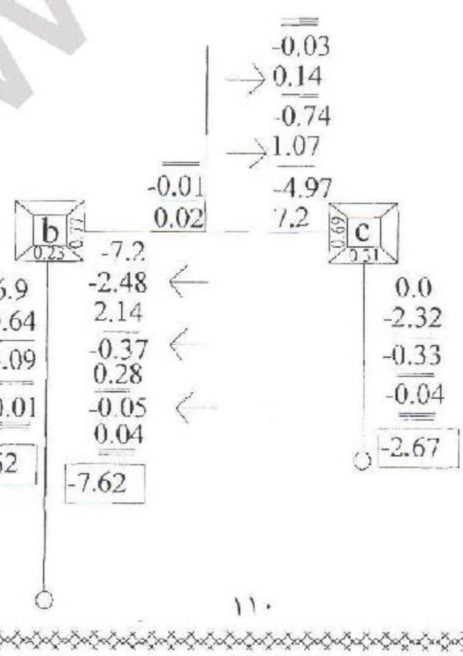
گره b-

$$\left.\begin{array}{l} K'_{ba}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{7.5}=0.1 \\ K_{bc}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow \sum K=0.433\Rightarrow\begin{cases} r_{bc}=0.23 \\ r_{bc}=0.77\end{cases}$$

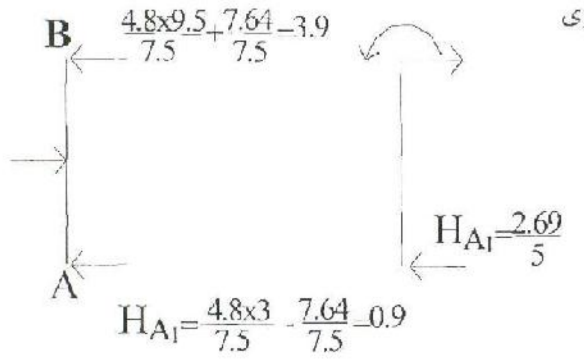
گره c-

$$\left.\begin{array}{l} K_{cb}=\frac{1}{3} \\ K'_{cd}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=0.15\end{array}\right\}\Rightarrow \sum K=0.485\Rightarrow\begin{cases} r_{cb}=0.69 \\ r_{cd}=0.31\end{cases}$$

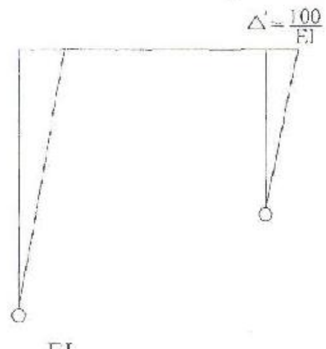
گام۳) توزیع لنگر



گام۴) به دست آوردن عکس العمل در تکیه‌گاه مجازی




**۱-۶- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای مستطیلی با حرکت جانبی**




**مثال**- قاب شکل ذیل را که دارای تغییر مکان جانبی برابر $\Delta'=\frac{100}{EI}$ می باشد، حل کنید.

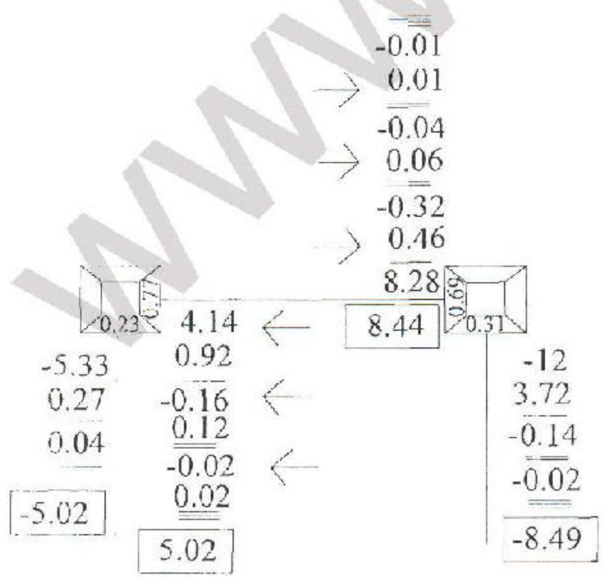
گام۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ba}=-3\frac{EI}{L^2}\Delta=-5.33\ \text{t.m}\ ,\qquad M'_{cd}=-12.0\ \text{t.m}$$

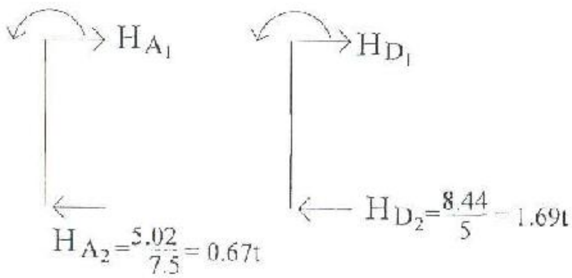
گام۲) محاسبه ضرایب توزیع

ضرایب توزیع مانند مثال قبل می باشد.

گام۳) توزیع لنگر



گام۴) بدست آوردن عکس العمل در تکیه گاه مجازی




$$(H_{A_1}+H_{D_1})+\alpha(H_{A_2}+H_{D_2})=4.8 \Rightarrow \alpha=1.43$$

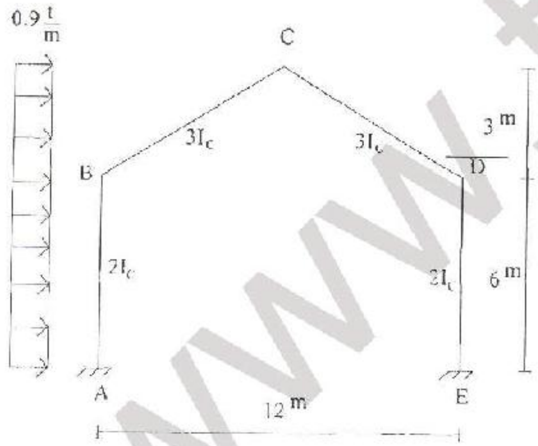
$$\Delta=\alpha\Delta'=1.43\times\frac{100}{EI}=\frac{143}{EI}$$

$$M=M^{\circ}+\alpha M'$$

**۱-۷- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای شیبدار بدون حرکت جانبی**

حل قاب‌های شیب‌دار همانند قاب‌های مستطیلی است با این تفاوت که در همه اعضا لنگرهای گیرداری ایجاد می‌شود.

**مثال**- قاب شیب‌دار زیر را با فرض این‌که تکیه‌گاه‌های B و D حرکت جانبی ندارند، با روش توزیع لنگر تحلیل نمایید.




گام۱) محاسبه لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab}=-M'_{ba}=-\frac{0.9\times36}{12}=-2.7\ \text{t.m}$$

$$M'_{bc}=-M'_{cb}=-\frac{0.9\times9}{12}=-0.675\ \text{t.m}$$

گام۲) محاسبه ضرایب توزیع

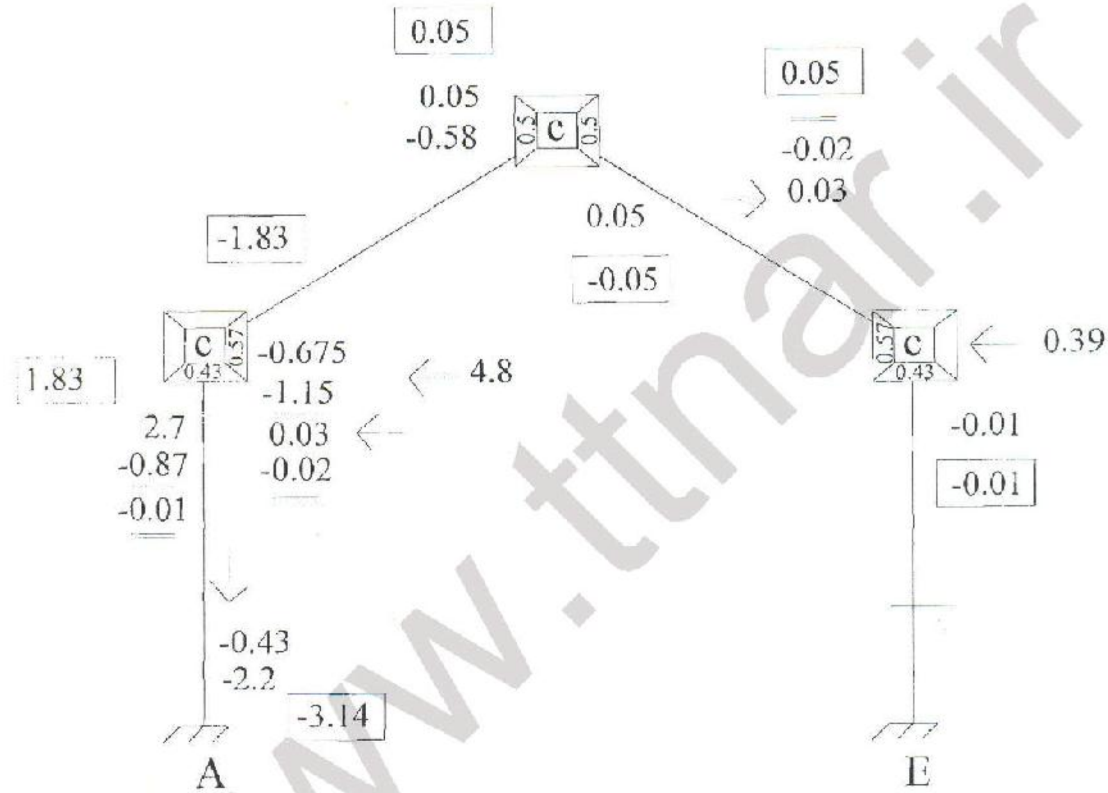
$$\left.\begin{aligned}K_{ab}&=\frac{2}{6}=0.333\\ K_{bc}&=\frac{3}{3\sqrt{5}}=0.447\end{aligned}\right\}\rightarrow\sum K=0.75$$

- گره b $\quad r_{ba} = 0.43 \quad , \quad r_{bc} = 0.57$

- گره C $\quad r = \frac{1}{2}$

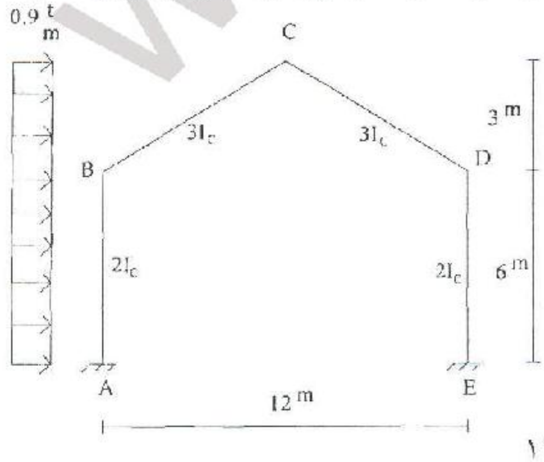
- گره d $\quad r_{dc} = 0.57 \quad , \quad r_{de} = 0.43$

گام۳) توزیع لنگر




### ۱-۸- کاربرد روش توزیع لنگر در تحلیل قابهای شیبدار با حرکت جانبی

**مثال**- قاب شیب‌دار زیر را با فرض این‌که تکیه‌گاه‌های B و D حرکت جانبی دارند، با روش توزیع لنگر تحلیل نمایید.

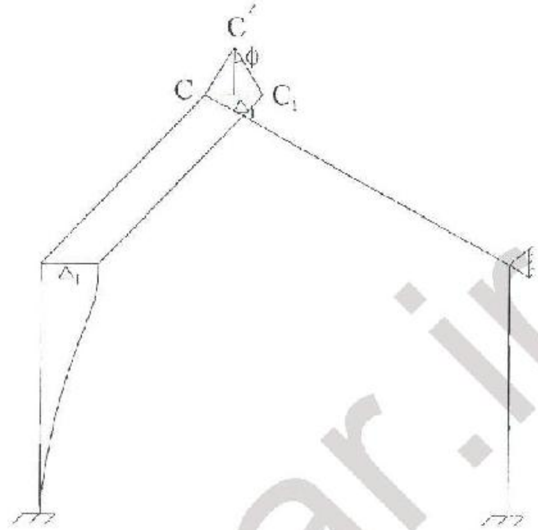


گام۱) حل هندسی

$$\Delta = \frac{100}{EI}$$

$$\frac{CC_1}{\sin 2\Phi} = \frac{C'C_1}{\cos\Phi} \quad \Rightarrow \sin\Phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Delta = 2\sin\Phi\ C'C_1 \quad \Rightarrow C'C = \frac{\Delta}{2\sin\Phi} = \frac{\sqrt{5}}{2}\Delta$$



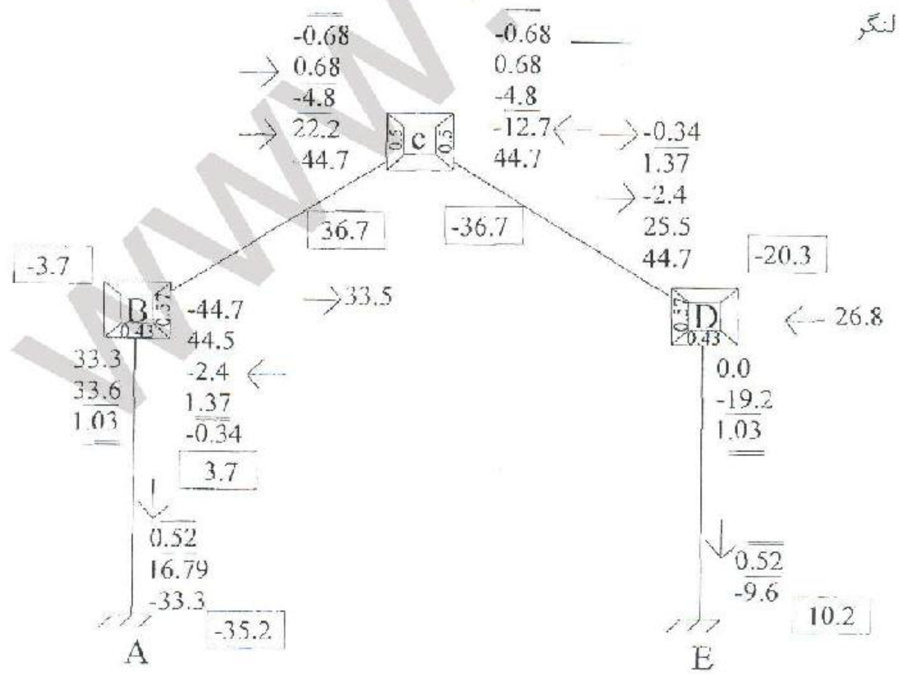

گام۲) لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab} = M'_{ba} = -\frac{6E(2I)}{36} \times \frac{100}{EI} = -33.33 \ \text{t.m}$$

$$M'_{bc} = -M'_{cb} = -\frac{6E(3I)}{(3\sqrt{5})^2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{100}{EI} = -44.72 \ \text{t.m}$$

$$M'_{cd} = -M'_{dc} = 44.72 \ \text{t.m}$$

گام۳) توزیع لنگر



## فصل چهارم

# روش کانی Kani Method

☑ فهرست مطالب

## ۱– روش کانی

یک روش تکراری است که با دقت مناسبی جواب می‌دهد و پایهٔ آن روش شیب‌افت است.

### ۱–۱– فرضیات

- سازه ارتجاعی است.
- تغییر مکان‌ها کوچک هستند.
- گره‌ها صلب هستند.
- از اثر نیروی محوری صرفنظر می‌کنیم.

۱– مجموع لنگرهایی که سبب عدم تعادل می‌شود در روش کراس با علامت منفی به گره اعمال می‌شود. در روش کانی همین مجموع لنگرها را لنگر مقاوم گره می‌نامیم- بدون تغییر علامت. $\sum M'_{ij} = M'_i \quad (I)$

۲– در حالت بدون درجهٔ آزادی تغییرمکان $M_{ij} = M'_{ij} + 2M^{\theta}_{ij} + M^{\theta}_{ji} \quad (II)$

درواقع روابط شیب‌افت به صورت

$$M_{ij} = 2\frac{EI}{L}(2\theta_i) + 2\frac{EI}{L}(\theta_j) + M'_{ij}$$

می‌باشد. پس در واقع با فرض $\frac{I}{L} = K$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} M_{ij}^{(\theta)} = 2EK\theta_i \\ M_{ji}^{(\theta)} = 2EK\theta_j \end{cases}$$

جمع لنگرهای ناشی از اعضاء در گره i از رابطهٔ II می‌شود:

$$\overbrace{\sum M'_{ij}}^{0} = \sum M'_{ij} + \sum M^{\theta}_{ji} + 2\sum M^{\theta}_{ij}$$

$$\sum M'_{ij} + \sum M^{\theta}_{ji} = -2\sum M^{\theta}_{ij}$$

$$M'_i + \sum M^{\theta}_{ji} = -2\sum M^{\theta}_{ij} \qquad (III)$$

نتیجه می‌شود:

$$\sum M^{\theta}_{ij} = -\frac{1}{2}\left[\overbrace{\sum M^{\theta}_{ij}}^{M'_i} + \sum M^{\theta}_{ji}\right] \qquad (IV)$$

یعنی اگر ضریب توزیع را به جای این‌که از تقسیم عدد ۱ بر مجموعهٔ سختی‌ها به دست آوریم، از تقسیم عدد $\frac{1}{2}$ به دست اوریم و می‌توان چرخش انتهایی هر گره را حساب کرد.

پس روش را به شرح زیر مرحله به مرحله بررسی می‌کنیم:

۱- تعیین لنگرهای گیرداری هر گره و به دست آوردن جمع کلی آن‌ها

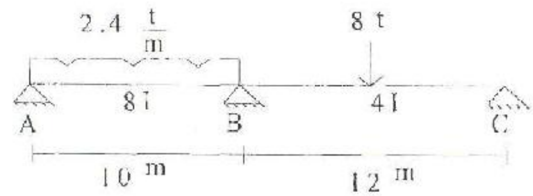
۲- تعیین ضرایب توزیع برای روش کانی

۳- به دست آوردن لنگرهای چرخش با استفتده از روابط IV

۴- تکرار مرحلهٔ سوم تا اینکه جواب‌ها یکسان شود.

۵- جواب نهایی عبارتست از: $M'_{ij} + M^{\theta}_{ij} + \left(M'^{\theta}_{ij} + M'^{\theta}_{ji}\right) = M_{ij}$

**مثال۱** تیر شکل زیر را به روش کانی تحلیل کنید.

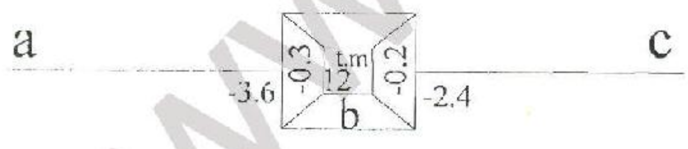



الف) لنگرهای گیرداری

$$M'_{ba} = \frac{2.4\times10^2}{8} = +30^{\ t.m}$$
$$M'_{bc} = -18^{\ t}$$

ب) ضرایب توزیع

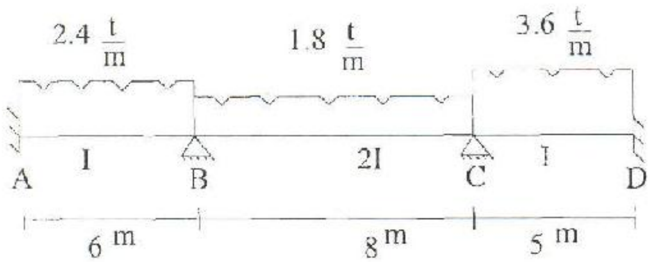
$$\left.\begin{array}{l} K_{ab} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \\ K_{bc} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum K = \frac{5}{6} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r_{ab} = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{K_{ba}}{\sum K} = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = -0.3 \\ r_{ab} = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{K_{bc}}{\sum K} = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = -0.2 \end{array}\right.$$




ج) لنگر چرخش انتهای دور- صفر

$$M_{ba} = 30 + (-3.6) + )-3.6 + 0) = 22.8$$
$$M_{bc} = (-18) + (-2.4) + (-2.4 + 0) = -22.8$$

**مثال۲-** (برای مقایسهٔ روش‌های توزیع لنگر و کانی)




***۱- روش کراس***

الف) لنگرهای گیرداری

$$M'_{ab}=-M'_{ba}=-\frac{2.4\times 36}{12}=-7.2\ ^{t.m}$$

$$M'_{bc}=-M'_{cb}=-\frac{1.8\times 64}{12}=-9.6\ ^{t.m}$$

$$M'_{cd}=-M'_{dc}=-\frac{3.6\times 25}{12}=-7.5\ ^{t.m}$$

ب) ضرایب توزیع- گره B

$$\left.\begin{aligned}K_{ba}&=\frac{1}{6}\\ K_{bc}&=\frac{1}{4}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sum K=\frac{5}{12}\Rightarrow\begin{cases}r_{ba}=0.4\\ r_{bc}=0.6\end{cases}$$

ضرایب توزیع- گره C

$$\left.\begin{aligned}K_{cb}&=\frac{1}{4}\\ K_{cd}&=\frac{1}{5}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sum K=\frac{9}{20}\Rightarrow\begin{cases}r_{cb}=0.56\\ r_{cd}=0.44\end{cases}$$

ج) مرحلهٔ توزیع