بسمه تعالی

جزوه

مقاومت مصالح 1

دانشگاه

تهران

استاد

دکتر جوهرزاده

[illegible]

علیرضا جوادیان - عمران ۸۲

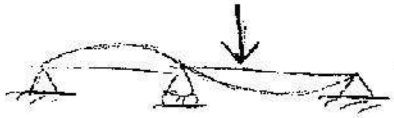
مقاومت ج ۱ [illegible] ۸۳/۱۱/۱۲

میان ترم ۹ خرداد ۸ نمره از ۲۰ نمره

پایان ترم ۲۳ خرداد ۱۰ نمره از ۲۰ نمره

۲ نمره حل تمرین

مسائل نامعین استاتیکی را در مقاومت می‌توان حل نمود با در نظر گرفتن تغییر شکل اجزای نامعین



مبانی اولیه مقاومت در زمان لئوناردو داوینچی یا گالیله گذاشته شده است ؛

قبلاً تجربه در مقاومت سازه های تاثیر نمود ؛

به طور تجربی سازه‌ها را بهبود می‌بخشیدند .

اولین مواردی که مکتوب وجود دارد در کتاب های مکانیک و فیزیک هست یعنی مقاومت مصالح در درس مکانیک بررسی می‌شد ؛

اولین بار در سال ۱۸۲۶ اولین کتاب مقاومت مصالح چاپ شده و از مکانیک جدا شد

* هر سازه ای تا حدی ارتجاعی است یعنی وقتی بار را برداریم به حالت قبل خود برمی‌گردد به این حالت الاستیک یا برگشت پذیری گویند ؛ « [illegible] الاستیک »

کشسان

درمقابل ارتجاعی، غیرارتجاعی یا برگشت ناپذیر یا پلاستیک داریم ؟ «خیر»

* ارتجاعی ← کشسان
* خمیری یا غیرارتجاعی ← مومسان

مسئله مهم درمقاومت مصالح پیوستگی سازه است ؟ «همگن»

هیچ ماده‌ای اساساً به خاطر وجود پروتون‌ها و الکترون‌ها

پیوسته نیست ولی عملاً می‌سازد انگار یا دیگر فعلی اشکالی ایجاد نمی‌کند

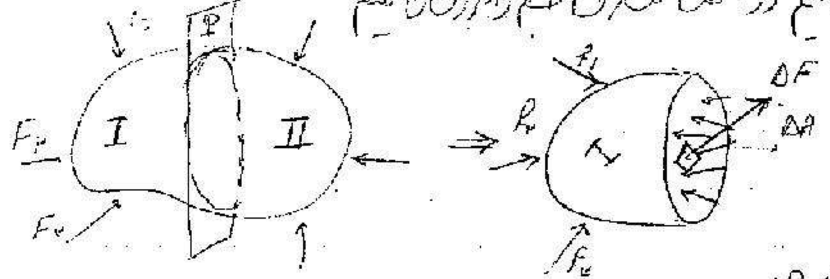
درمقاومت ۱ با اجسام ایزوتروپ سروکار داریم

www.ttmar.ir

* علیرضا جوادیان - عمران ۸۲

ج ۲ بنام خدا ۸۳/۱۱/۱۴

اگر یک مقطع در جسم بدهیم در قسمت مشترک جسم را بررسی می‌کنیم



در تعادل جسم جمع نیروها صفر است.

حال جمع نیروهای خارجی دیگر صفر نیست بلکه باید نیروهای سطح مشترک در نظر گرفته شود.
به هر نقطه سطح یک نیرو وارد می‌شود

اگر یک جزء ΔA بگیریم یک نیروی ΔF به این سطح وارد می‌شود:

stress یا تنش $\Longrightarrow$ $$\boxed{S = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}}$$

تعریف تقریباً شبیه فشار است؛ با این تفاوت که فشار همیشه عمودی از یک جسم به طرف جسم دیگر است در حالیکه تنش هم می‌تواند فشاری یا کششی باشد؛ یا باعث لغزش روی سطح شود یعنی هر نیرویی در امتداد سطح داشته باشد؛

$$\text{تنش} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}}$$

* واحد تنش ⟵ $$\boxed{1\,Pa = \frac{1N}{m^2} \text{ پاسکال}}$$

چون این واحد، واحد کوچکی است از واحدهای بزرگتر استفاده می‌شود:

www.tfmar.ir

واحدهای علمی

$$\begin{cases} 1000\ Pa = 1\ \frac{kN}{m^2} = kPa \\ MPa = 10^6\ Pa = 1\ \frac{N}{mm^2} \end{cases}$$

واحدهای عرفی :

kgf واحد نیرو

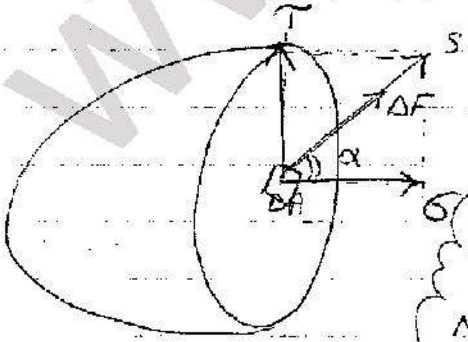
$1\ \frac{kgf}{cm^2}$ واحد تنش

یا $1\ \frac{kgf}{m^2}$ "

یا $1\ \frac{tonf}{m^2}$ "

$* \quad 1\ \frac{kgf}{cm^2} = \simeq \frac{10\ N}{10^{-4}\ m^2} \simeq 10^5\ \frac{N}{m^2} = 10^5\ Pa$

$* \quad 1\ MPa \simeq 10\ \frac{kgf}{cm^2}$



S در امتداد ΔF است :

S را تجزیه کردیم به دو مؤلفه : σ و τ

$\sigma_{\text{تنش عمودی}} = S \cos \alpha$

Normal stress

در حقیقت مؤلفه عمود بر سطح مقطع است :

تنش قائم غلط است ؛ قائم یعنی عمود بر افق ؛ در حالیکه عمود بر سطح مقطع است ؛
در حالیکه عمود بر سطح مقطع ؛ سطح مقطع می تواند مایل باشد ؛

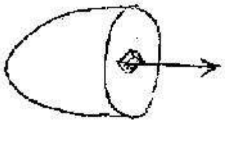
تنش برشی $\tau = S \sin\alpha$
Shear stress

تنش برشی خود می تواند زلزله شود ؛

زلزله ای در سطح واقع می شود تنش برشی است ؛

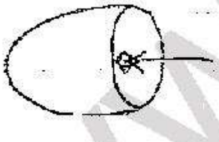
*تنش عمودی دو نوع تعریف می شود ؛

Tensile stress



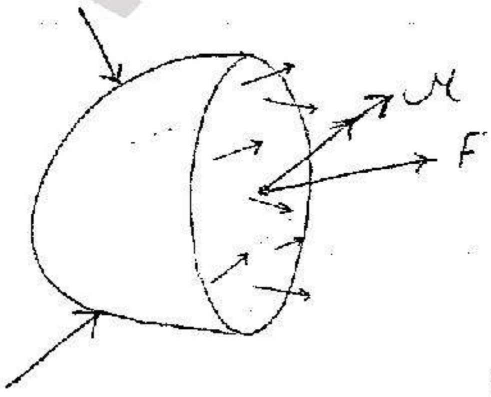
دو قطعه می خواهند ← (جهت به بیرون جسم) تنش کششی
از هم دور شوند

Compressine stress



دو قطعه روی هم فشرده ← (جهت به داخل جسم) تنش فشاری
می شوند.

نیرو در یک جا بیشتر متمرکز شود تنش افزایش می یابد و احتمال خطر گسیختگی است ؛



هدف ما تقریباً تعیین توزیع نیروها در
مقطع است ؛
مثلاً فقط می توانیم
برآیندشان را تعیین
کنیم ؛

برآیند کلی یک نیرو و یک گشتاور است ؛

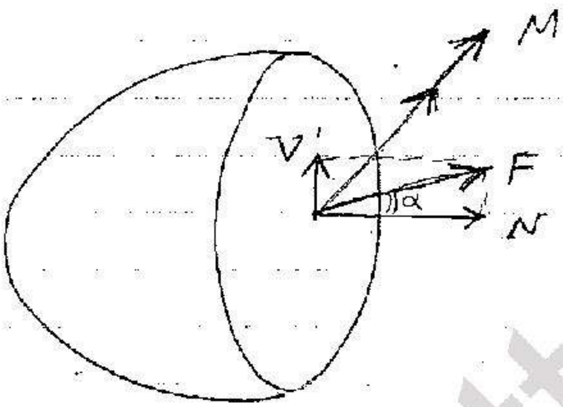
F ، M را نیروهای داخلی مقطع گویند.

این نیروهای داخلی در استاتیک معین می‌شوند

معادلات تعادل

$\sum \vec{F} = 0$ F بدست می‌آید

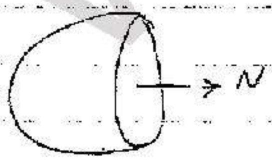
$\sum \vec{M}_A = 0$ گشتاور M بدست می‌آید



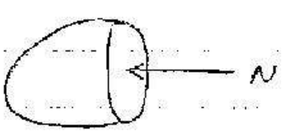
$N = F\cos\alpha \rightarrow$ نیروی عمودی Normal Force

$V = F\sin\alpha \rightarrow$ نیروی برشی Shear Force

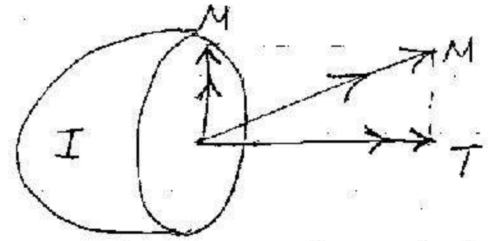
* نیروی عمودی هم می‌تواند فشاری یا کششی باشد 8



بیرون مقطع) نیروی کششی



درون مقطع) نیروی فشاری



M → لنگر خمشی → در داخل سطح می‌تواند به ۲ مؤلفه تجزیه شود .

T → لنگر پیچشی   پیچش حول محور لنگر

* نیروی داخلی کلاً ۶ مؤلفه است ← ۲ مؤلفه برشی (نیرو) Internal Force → نیروی داخلی *
- ۲ لنگر خمشی
- ۱ مؤلفه لنگر پیچشی
- ۱ مؤلفه نیروی عمودی

این نیروهای داخلی در مقطع هستند چون نیروهای داخلی دیگری نداریم ؟

۳ محور داریم یک محور عمود بر سطح و ۲ محور در داخل سطح

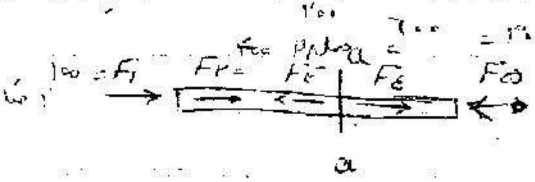
* برای به دست آوردن این نیروهای داخلی 8

قسمت I نیز قسمت باقیمانده
قسمت II " " حذف شده

$N = ? \longrightarrow \sum F = 0$
جمع نیروها در امتداد محور عمود بر سطح مقطع

* این $\sum$ فقط برای یک قسمت است نیز قسمت باقیمانده یا قسمت حذف شده

مثال:



در مقطع aa N را بخواهیم .

$F_1 + F_2 - F_3 + N = 0 \Rightarrow N = F_3 - F_1 - F_2$

⇒ * $N = -300$ ⇒ فشاری N

www.tinar.ir

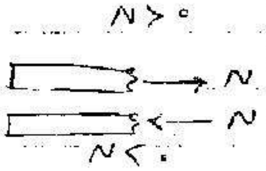
* به جای جهت باقیمانده و حذف شده از چپ و راست استفاده می کنیم

باقیمانده = چپ
حذف شده = راست

جمع مولفه های نیروهای وارد بر سمت چپ در امتداد عمود بر سطح مقطع + N = ۰

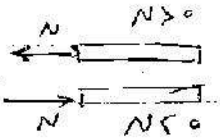
جمع مولفه های نیروهای وارد بر سمت راست در امتداد عمود بر سطح مقطع − N = ۰

N = − (جمع مولفه های نیروهای وارد بر سمت چپ مقطع در امتداد عمود بر سطح مقطع) ⇒



یا

N = (جمع مولفه های نیروهای وارد بر سمت راست مقطع در امتداد عمود بر مقطع) ⇒



مثال قبل → N = − (۱۰۰ + ۴۰۰ − ۲۰۰) = − ۳۰۰
یا N = (−۶۰۰ + ۳۰۰) = − ۳۰۰

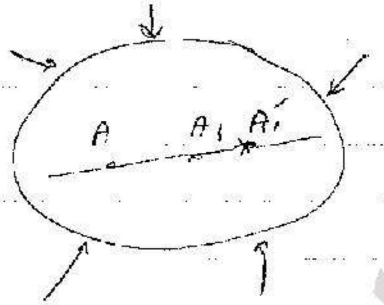
کشش را مثبت بگیرید و فشار را منفی

www.itnar.ir

* تغییر شکلها 8

در مقاومت مصالح نه فقط می خواهیم بدانیم که آیا مثلاً یک المان می تواند یک نیرو را تحمل کند بلکه می خواهیم بدانیم که آیا تغییر شکلی می دهد ؟

برای این کار واحد اندازه گیری تعریف می کنیم بنام کرنش یا strain 8

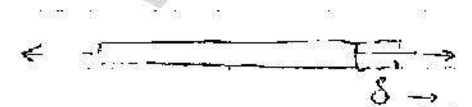


وقتی نیرو به جسم وارد می شود
نقطه A_1 به A نزدیک یا دور می شود
ممکن است A هم تغییر کند ولی دوباره آن را
به جای اصلی منطبق می کنیم

$$\varepsilon = \lim_{\overline{AA_1} \to 0} \frac{\overline{AA_1'} - \overline{AA_1}}{\overline{AA_1}}$$

یا کرنش «تعریف»

$\overline{AA_1} \to 0$ چون ممکن است یک جا طول زیاد شود یک جا کم شود پس ما داریم در یک نقطه تعریف کنیم
پس تقسیم طول را خیلی کوچک بگیریم



«دیگر حتماً در امتداد» در اینجا کرنش در همه نقاط یکی
محور باشد. است ؛ چون همه یک تغییر طول
می دهند !

$$* \quad \varepsilon = \frac{\delta}{\underset{\text{طول اولیه}}{L}} \leftarrow \text{تغییر طول}$$

یعنی همه جا منفی تواند باشد در این حالت
ساده برقرار است .

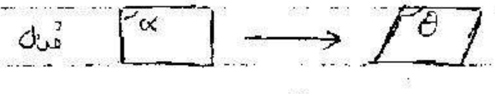
تنش یا تغییر طول نسبی یا کرنش : " گاهی تنش خطی هم گفته می شود " ⟸ (linear)

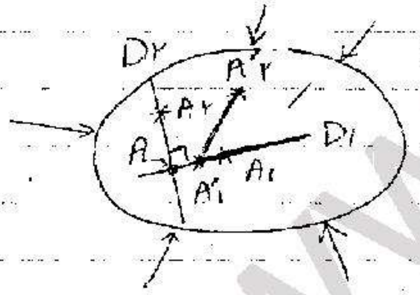
کرنش لغت خوبی نیست :

تنش در فارسی به معنای درهم کشیده شدن و درهم فشرده شدن است :
کرنش به معنای تعظیم است معنی فیزیکی خوبی ندارد :

تنش بدون بعد است :

حالت دیگری از تغییر شکل وجود دارد و آن تغییر زاویه است :





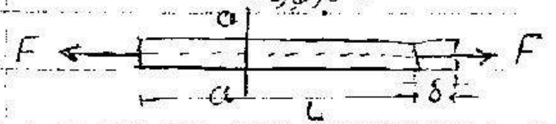
D1 و D2 عمودند :

$$\text{تغییر زاویه قائمه} \quad \gamma = \lim \left(\hat{\tfrac{\pi}{2}} - \widehat{A'_1 A A'_2} \right)$$

$$\overline{A_1 A} \rightarrow 0$$
$$\overline{A_2 A} \rightarrow 0$$

* γ تنش برشی shear strain — هم به شکل نقطه بستگی دارد هم به امتداد

* بارمحوری 8

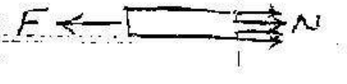


هر چه طول میله اضافه شود هر تکه آن نیز به همان اندازه طول اضافه می شود.

aa : N = F

$$\underset{x}{\varepsilon}\ \text{تنش} = \frac{\delta}{L}$$

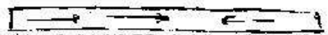
در امتداد x



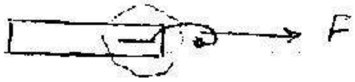
N به طور یکنواخت در مقطع پخش شده است : ═ اگر میله هیچ تغییر مقطعی نداشته باشد :

www.ttmar.ir

* تنش $\sigma = \frac{N}{A}$

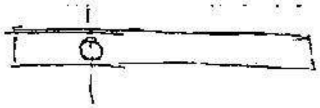


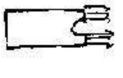
هر نکته زیرا اگر تکیه بار محوری است .



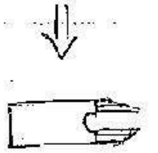
اگر نیرو را توسط قلاب وارد کنیم دیگر تنش در ناحیه قلاب از رابطه بالا تبعیت نمی‌کند

هر تغییری در میله داده شود در حوالی این تغییر این رابطه صادق نیست !





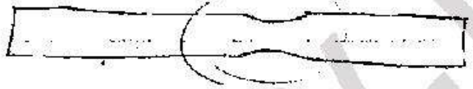
یکنواخت نیست ← غلط است



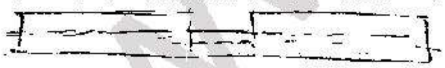
* تنش در نزدیک سوراخ حدود ۳ برابر دو انتهاست ؛ ✓

دایره اگر به سمتی تیز یک شود خیلی تمرکز تنش خطرناکتر است و خیلی زود در اثر نیروی اندکی پاره خواهد شد .

از رابطه بالا نمی‌شود رفت



* از محل تغییر باید به اندازه یک قطر میله (تقریباً) دور شویم تا تنش یکنواخت شود ؛ فرمول را بپذیریم .

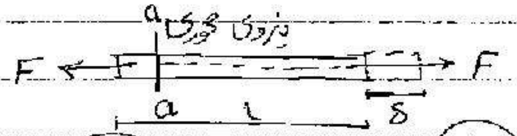


در اینجا محور کلاً تغییر می‌کند بحث آن متفاوت است .

این نکته که در حوالی تغییرات تنش زیاد می‌شود به تمرکز تنش یا stress concentration موسوم است که در تئوری ارتعاشات کاربرد دارد یا در سازه‌های فولادی در اتصالات مطرح می‌شود (طراحی‌ها) حتماً باید در نظر گرفته شوند .

بنام خدا

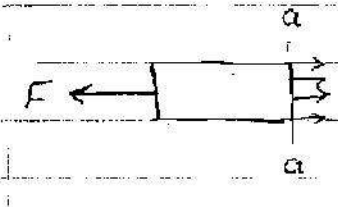
۸۴ / ۱۱ / ۲۶



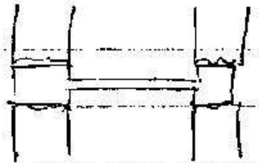
$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L}$$

میله به طور یکنواخت تغییر طول پیدا می کند



یک نمونه داده را می توانیم تحت آزمایش کشش قرار دهیم تا رابطه بین ε_x و σ_x را می یابیم.



نمونه مورد نظر به صورت مقابل در فک کشش قرار می گیرد

یک جفت از فک ها امکان تغییر مکان ندارند و یک جفت دیگر با سرعت خیلی کمی حرکت می کنند.

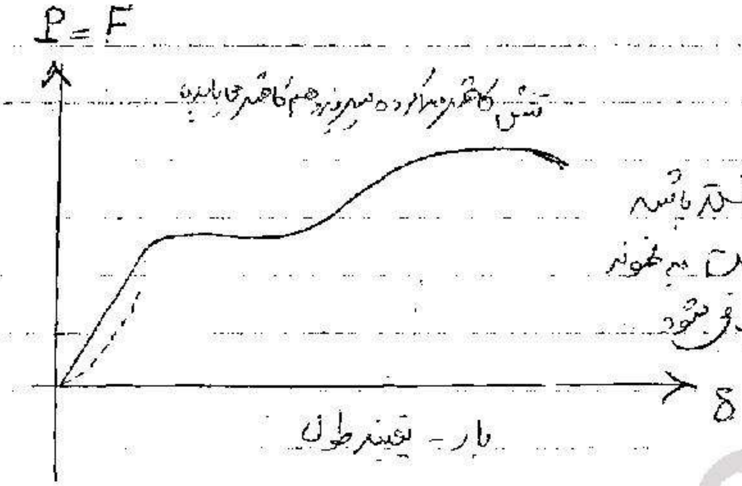
دستگاه برای این که این تغییر شکل را ایجاد کند ناچار است نیرویی به میله وارد کند و بدین ترتیب رابطه ای بین نیرو و تغییر طول می یابیم.

دستگاه های جدید طوری هست که خود دستگاه نیرو و اندازه تغییر را ثبت و رسم می کند و منحنی تغییر طول و نیرو را به ما می دهد.

این منحنی در مواد مختلف متفاوت است ؛

یکی از مصالح مهم مهندسی فولاد سازه ای است یعنی فولادی که در تیرآهن های I یا میلگرد که در بتن مورد استفاده قرار می‌گیرد ؛ « structural steel »

* منحنی برای فولاد سازه ای δ

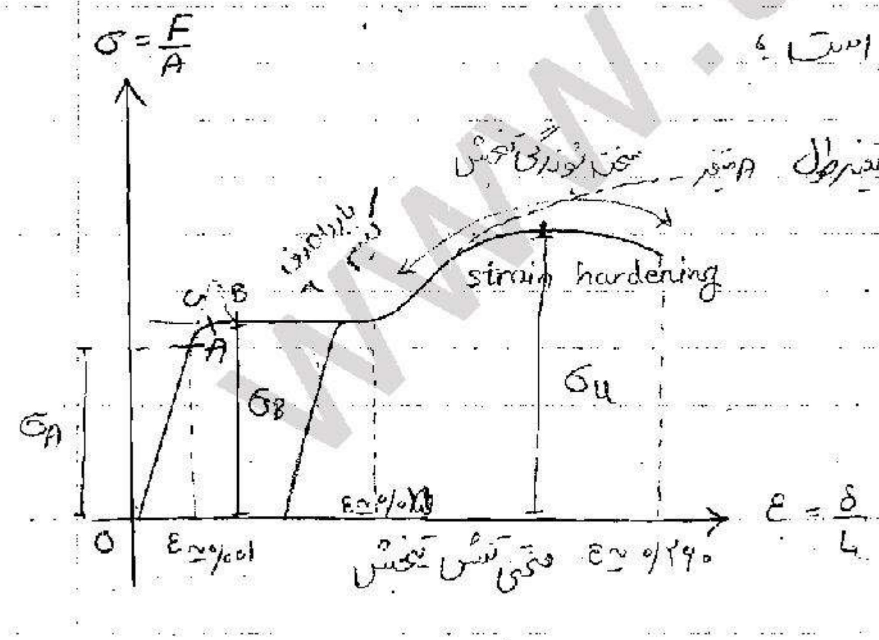


در ابتدای منحنی ممکن است فرق داشته باشه
چون ممکن است در شروع فک‌ها هنوز به‌خوبی
نگیرند و این لغزش جزء δ محسوب می‌شود
ولی از آنکه تغییر طول واقعی نیست
پس ممکن است که δ اضافه
ما اشتباه داشته باشیم .

نیرو به سطح مقطع بستگی دارد هرچه سطح مقطع میله بزرگتر باشد این نیرو بیشتر و برعکس اند

هرچه میله بزرگتر باشد δ بزرگتر است ؛

می‌توانیم با تقسیم F بر A نمودار تغییر طول A متغیر تنش را رسم کنیم ؛



در ابتدای منحنی یک خط داریم که منحنی خطی است ؛

www.titnar.ir

www.tunar.ir

* OA قسمت نسبی یا خطی منحنی تنش - کرنش
رابطه خطی بین این دو وجود دارد یعنی متناسب با هم تغییر می کند

اگر عدم تعادل داشته باشیم منحنی به شکل خط چین در می آید ؛

نقطه A دارای تنشی است به نام تنش نسبی یا حد نسبی σA
یعنی حدی که تا آنجا نسبت برقرار است و بعد از آن رابطه دیگر خطی نیست

* نقطه B دارای تنشی است به نام تنش تسلیم σyp yield point
نقطه تسلیم «انگلیسی ها»

چون مثل این است که میله در مقابل تغییر طول تسلیم شده است یعنی

دستگاه بدون این نیاز به افزایش نیرو داشته باشد با نیروی ثابت فک ها حرکت می کند و تغییر طول

می دهد « مقاومتی در مقابل تغییر طول ایجاد نمی کند »

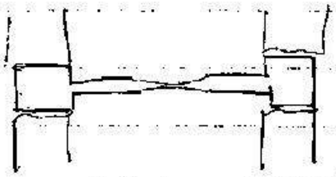
« موسوم است به تنش جاری شدن - تنش سیلان »
* لفظ حد تسلیم درست نیست ؛ چون اینجا حدی نیست ؛ حد جاری شدن غلط است ؛

* در سخت شوندگی تنش فرض شده است که تنش مثل یک فنر عمل می کند یعنی دوباره باید نیرو وارد کنیم تا تغییر طول داده بشود ؛
* max این قسمت از منحنی به نام تنش نهایی یا تاب موسوم است (σu)

بعد تنش کم می شود و میله خم می شود ؛

* در تمام این قسمت ها قطر کم می شود ولی با چشم قابل ملاحظه نیست ؛

از شروع سخت شوندگی تغییر قطر به طور واضح اتفاق می افتد.

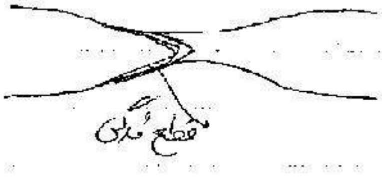


قبلاً می توانستیم این تغییر قطر را ببینیم بستگی دارد به این که

میله دارای حباب هوا باشد یا ترک کوچکی باشد از طرفی فولاد ترکیبی است از آهن و کربن و سیلیس ممکن است جزء مخلوط نشده باشند و این مخلوط در آنجا ضعیف است و شروع به باریک شدن می کند.

علت این که دوباره در انتها تنش کم می شود به این علت است که A را ثابت گرفتیم در حالیکه باید یک تنش جدید تعریف کنیم

اگر بخواهیم سطح جدید را اعمال کنیم منحنی همواره رو به بالا است یعنی فولاد یا میله در بزرگترین تنش قطع خواهد شد.



در هنگام قطع شدن نیرو max نیست.

* الاستیک - ارتجاعی - برگشت پذیر: هر جسم بعد از حذف نیرو به وضع اول بر می گردد به این خاصیت الاستیسیته یا خاصیت برگشت پذیری یا خاصیت ارتجاعی می گویند.

هر جسمی تا یک حدی این خاصیت را دارد، موم را اگر در نظر بگیریم به ظاهر اصلاً این خاصیت را ندارد اما اگر نیرو فوق العاده کم باشد باز هم الاستیسیته داریم ولی مقدار آن خیلی کم است.

* چنین جسمی مثل موم را پلاستیک یا خمیری گویند و به این خاصیت که جسم بعد از حذف نیرو به وضع اولش بر نگردد خاصیت پلاستیسیته یا خمیری گویند.

روی OA هرجا که نیرو را حذف کنیم میله به وضع اولش برمی‌گردد الاستیک است ؛

اگر از نقطه C رد شویم دیگر میله الاستیک نیست ؟

* هرجا بار را قطع کنیم بعد از C به صورت شکل قبل منحنی شروع می‌شود یعنی تغییر شکل در آن باقی می‌ماند ؟

ممکن است هر ۳ نقطه A و B و C را یکی بگیرند

* حد تناسبی فولاد ساختمانی $\simeq 190-220$ MPa یا $(1900-2200\ \frac{kgf}{cm^2})$

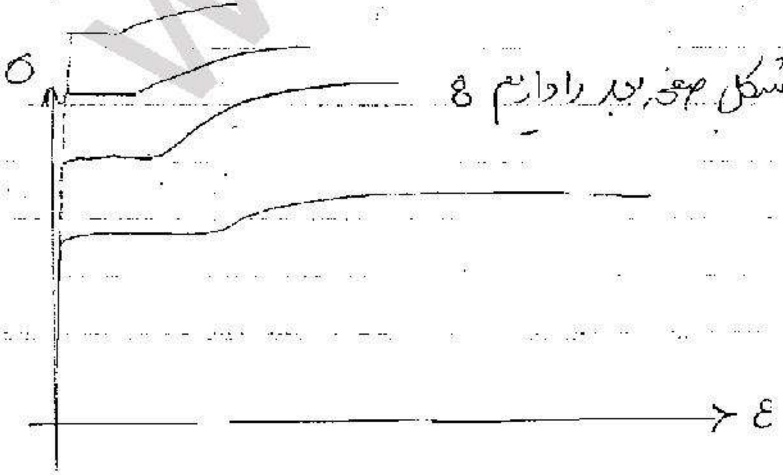
اگر یک میله ای یک cm^2 سطح مقطع داشته حدود ۲۰۰۰kg می‌تواند تحمل کند تا به این حد برسد .

* تنش تسلیم فولاد $\simeq 220-250$ MPa $\rightarrow (2200-2500\ \frac{kgf}{cm^2})$ *

* σ_c حد الاستیک یا حد ارتجاعی چون دقیقاً بعد از آن میله پلاستیک می‌شود ؛ $200-230$ MPa — $(2000-2300\ \frac{kgf}{cm^2})$

* تاب نهایی $\simeq 330-390$ MPa — $(3300-3900\ \frac{kgf}{cm^2})$

تغییر طول در انتها خیلی بیشتر از ابتدای منحنی است



اگر منحنی را با دقت رسم کنیم شکل صفحه بعد را داریم :

منحنی شوزنگی خیلی فراوانی خواهد بود .

* فولاد در حسب کربن : اگر کربن آن زیاد شود مقاومت اولیه آن بالا می رود

یعنی فولاد می تواند به طور الاستیک مقاومت بیشتری بگیرد ولی تغییر طول در موقع کار کمتر است.

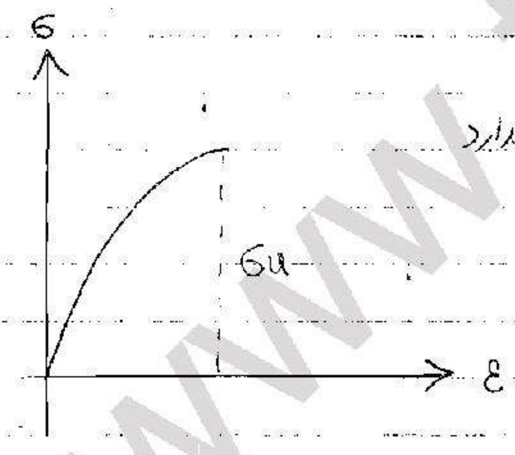
اگر فولاد بخواهد در حالت عادی و بدون ضربه باشد فولادی که فولاد ساده دارد خوب است.

اگر نیرو ناگهانی وارد شود جسمی بیشتر مقاومت می کند که بتواند تغییر طول بیشتری بدهد اگر این تغییر شکل را جسم نتواند تحمل کند گسیخته می شود «در بخش مخت نمودار طولانی تر باشد» .

* در مقابل ضربه با افزایش کربن فولاد شکسته می شود : «فولاد خشک»

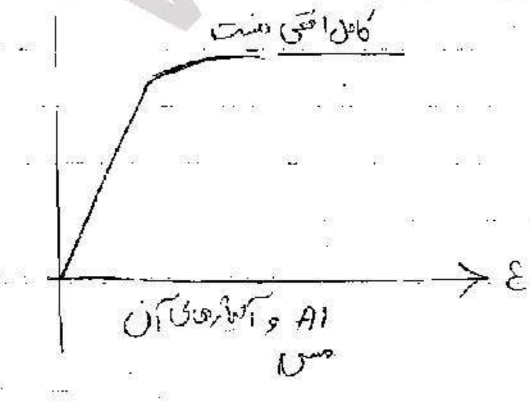
امروزه فقط با کربن فولاد را تغییر نمی دهند با منگنز، کروم ... خواص مختلفی به فولاد می دهند یکی از این خواص دیرکد بودن تغییر شکل است.

* کربن زیاد در آهن ← چدن



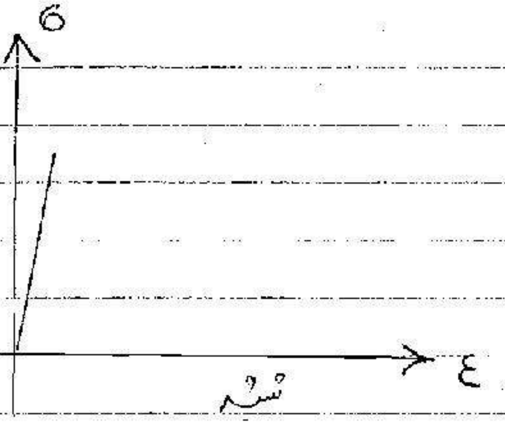
چون مقاومت بالاتری ندارد قسمت افقی و طولانی ندارد
چون قسمت افقی ندارد جسم زودتر می شکند :

چون ε در موقع پارگی خیلی کم است :

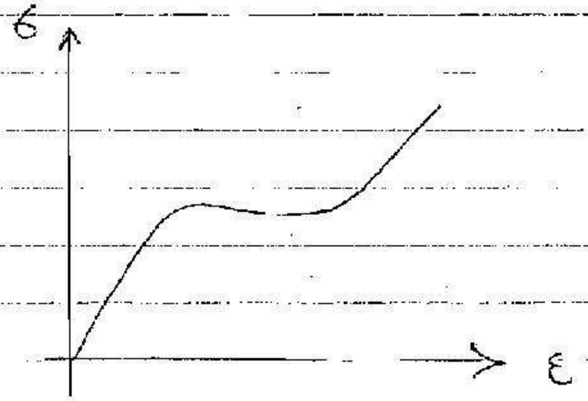


* آلومینیوم شکسته نیست چون افقی دارد :

فولاد که بلندترین منحنی را دارد :



* در موقع بارگی تحمل زیادی نمی تواند تحمل کند
چون ε اولیه آن خیلی کم است



* لاستیک

* تمام این منحنی با بارگذاری تدریجی در کارخانه ها رسم می شوند :

اگر بارگذاری سریعتر باشد منحنی هایی کمی متفاوت تر بدست می آورند ؟

* این منحنی ها در درجات معمولی رسم شده اند درجات کم شکنندگی مواد را زیاد می کند یعنی تغییر طول زیاد
نمی توانند نشان دهند
در درجات بالا مواد مقاومت کمتری نشان می دهند

در آتش سوزی ها دیگر فولاد مقاومت معمول خود را ندارد .
سازه های فولادی به سرعت فرو می ریزند .

* وقتی سازه را طراحی می کنیم باید توجه کنیم که نباید تغییر شکل زیاد در سازه داشته باشیم یعنی نباید وارد
قسمت های سخت شوندگی شویم باید قسمت هایی باشد که تغییر شکل کم است .

یک سقف را برای یک بارگذاری طراحی می‌کنیم ؛ «شرایط معمولی»
ممکن است در شرایطی بارگذاری بیشتر از حالت معمول روی سقف اعمال شود !

* در طراحی باید تنشی را در نظر بگیریم که به آن تنش مجاز می‌گویند که برابر است با 8

allowable
or working
stress

$$\sigma_w = \frac{\sigma_{yp}}{S.F}$$

safety factor S.F

بعضی مواد تنش تسلیم ندارند مثل چدن ؛ ممکن است یک تنشی را تعریف کنند
با رسم به شیب خط موازی در منحنی !

در مورد بعضی مصالح مجبوریم از تنش ~~[illegible]~~ نهایی استفاده کنیم ؟

$$\sigma_w = \frac{\sigma_u}{S.F}$$

تا u که سازه گسیخته می‌شود
ممکن هم هست بشود پس
S.F در این موارد بالایی
باید بزرگتر باشد ؛ چون احتمال
گسیختگی بیشتر است !

یک سد خرابی آن باعث خرابی چند تا شهر می‌شود پس S.F خیلی بیشتری باید بکار برد ؛
S.F را محققین هر رشته تعیین می‌کنند.

* در کارهای معمول ساختمانی ضریب اطمینان فولاد ۱/۶ است ؛

* رابطه بین تنش - کرنش 8

قرن ۱۷

Hooke's law

$$\sigma = E\varepsilon$$

هر دو در یک امتدادند

E = ضریب ارتجاعی یا
ضریب کشسانی یا مدول الاستیسیته

ε بدون بعد

σ بعد فشاری است

E از بعد فشار برابر است ضریب گفته می‌شود در مدول ارتجاعی ..

$$\text{فولاد}\ E = ۲\times۱۰^{۵}\ MPa \longrightarrow ۲\times۱۰^{۶}\ \frac{Kgf}{cm^{2}}$$

* E را مدول یانگ هم می‌گویند ((young's Modulus of Elasticity))

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta \longrightarrow$$

برای یک میله با بار محوری

$$\delta = \frac{FL}{EA}$$

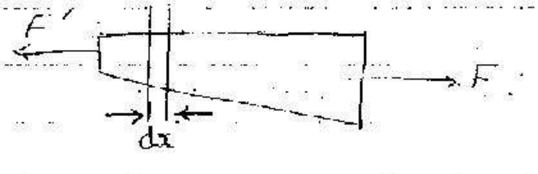
گاهی به این رابطه قانون هوک گفته می‌شود.

* EA را صلبیت محوری گویند هرچه بیشتر باشد تغییر طول کمتر است میله صلب‌تر است؟

* $\frac{EA}{L}$ را سختی محوری گویند ← (axial stiffness) تقسیم سختی گفته می‌شود که تحت محوری بوده

نشان می‌دهد مثل فنر است ← $F = k\delta$ نیروی فنری

- اگر میله کمی مخروطی باشد به طوری که تغییر مقطع شبیه هم نباشد δ



تنش فرق می‌کند؟
در هر مقطع سطح خودش را دارد

$$\sigma = \frac{F}{A} \longrightarrow$$ A مربوط به هر مقطع است.

www.ttrar.ir

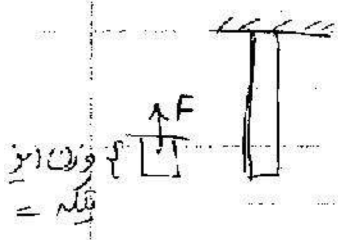
هر مقطع — L

$$d\delta = \frac{F\,dx}{EA}$$ A مربوط به هر مقطع

در طول dx بازاء dδ تغییر طول داریم؛

E ثابت است؛

$$\delta = \int \frac{F\,dx}{EA}$$

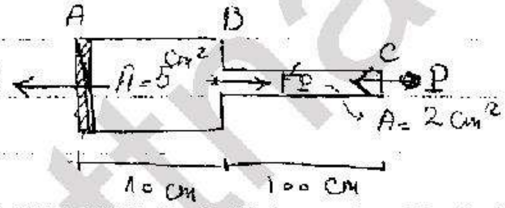


میله ای که تحت اثر وزن خودش آویزان است در مقاطع مختلف نیروی مختلفی دارد

مثال 8

$E = ۲ \times ۱۰^{۵}$ MPa

$\sigma_w = ۱۲۰$ MPa



در شکل بالا؛ مقدار مجاز P را تعیین کنید به شرطی که تغییر مکان هیچ کدام از نقاط A و B و C نسبت به همدیگر نخواهیم از 1 mm بیشتر شود؟

σw — هرگاه تنش مجاز آن نباید از ۱۲۰ بیشتر شود.

حل: A - B : $N_{AB} = ۳P$ کششی $1\ \text{MPa} = 1\ \frac{N}{mm^2}$

$N_{BC} = -P$ فشاری

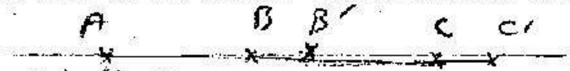
$\sigma_{AB} = \frac{۳P}{۵۰۰}$ حتماً است مساحت بر حسب mm^2 باشد؛ تا MPa تعریف شود؛

① $\sigma_{AB} \leqslant ۱۲۰ \Rightarrow P \leqslant ۲۰۰۰۰\ N = ۲۰\ kN$

② $|\sigma_{BC}| = \left|\frac{-P}{۲۰۰}\right| = \frac{P}{۲۰۰} \leqslant ۱۲۰ \Rightarrow P \leqslant ۲۴۰۰۰\ N = ۲۴\ kN$

چون می‌خواهیم با ثبت
مقادیر کشش فشار [illegible]

$$\delta = \frac{FL}{EA}$$



A را ثابت گرفتیم

تنش فشاری $B'C' < BC$

$\delta AB \leqslant 1$ mm

$|\delta BC| \leqslant 1$ mm

می‌خواهیم $|\delta AC| \leqslant 1$ mm

[illegible]

$|\delta AC| = |\delta AB - \delta BC| \leqslant 1$ mm نیازی به کنترل این آخری نیست؛

$$\delta AB = \frac{۳P \times ۸۰۰}{۲\times۱۰^۵ \times ۵۰۰} \leqslant 1 \Rightarrow P \leqslant \frac{10^6}{۲۴} N = ۴۰/۱ \text{ KN}$$

$$|\delta BC| = \frac{P \times 1000}{۲\times۱۰^۵ \times ۲۰۰} \leqslant 1 \Rightarrow P \leqslant ۴۰ \text{ KN}$$

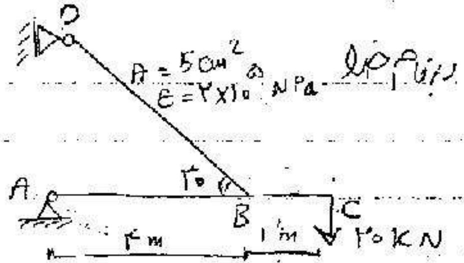
$\frac{۶\times۱۰^۵}{۵}$

$\longrightarrow$ $P_{w} = ۲۰$ KN مجاز جوابی که در تمام

آنها صدق کند ؛ کمترین مقدار گفته شده‌ها را انتخاب کنید .

۸۴، ۱۲، ۲۰

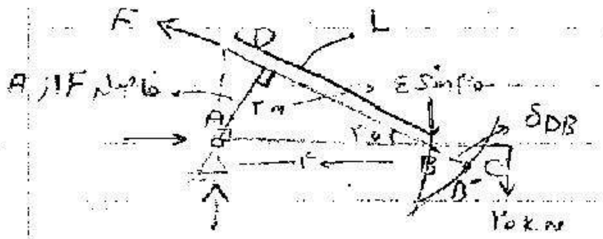
ج ۴


D
$A = 5 cm^2$
$E = ۲\times۱۰^۵ MPa$
[illegible]
۳۰
A
B
C
۴m
۱m
۲۰KN

مثال ۸

در شکل روبرو میله ABC صلب است تغییر مکان نقطه C را تعیین کنید؟

صلب است یعنی تغییر شکل نمی‌دهد نه طولش عوض می‌شود نه خم می‌شود ولی می‌تواند حول A دوران کند. میله DB طولش تغییر می‌کند اگر تحت کشش باشد میله در B به سمت پایین حرکت می‌کند؛ در نتیجه C رو به پایین دوران می‌کند؛


F
D
L
فاصله F از A
۲m
F sin۳۰
δ_{DB}
A
۲√۳
۴
B
B′
C
۲۰KN

ابتدا باید نیروی محوری را در DB یافت؛

$$\overset{\curvearrowright}{\sum M_A} = ۰ \Rightarrow$$

$$= ۲۰ \times ۵ - F \times ۲ = ۰$$

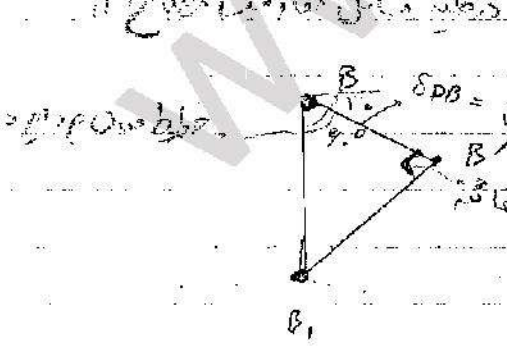
$$\Rightarrow \boxed{F = ۵۰ KN}$$

$L = ۴/\cos۳۰$

$$\delta_{DB} = \frac{FL}{EA} = \frac{۵۰\times۱۰۰۰ \times \frac{۴۰۰۰ mm}{\cos۳۰}}{۲\times۱۰^۵ \times ۵۰۰}$$

$$\Rightarrow \delta_{DB} = \frac{۴}{\sqrt{۳}} mm$$

طول AB ثابت است یک دایره به مرکز A به شعاع AB چون صلب است برای تعیین B′ دایره به مرکز D به شعاع DB′ رسم می‌کنیم؛ محل تقاطع محل جدید B یعنی B′ است؛ به جای دایره‌ها از خط استفاده می‌کنیم و دیگر مسائل تقریباً صحیح ؛ چون تغییر شکل‌ها نسبت به طول‌ها کوچکند

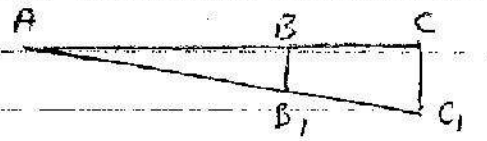

خط عمود بر AB
B
۳۰
۶۰
$\delta_{DB} = \frac{۴}{\sqrt{۳}} mm$
B′
قائم
B_1

$$\Rightarrow \overline{BB_1} \times \cos۶۰ = \frac{۴}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{BB_1} = \frac{۸}{\sqrt{۳}} mm}$$

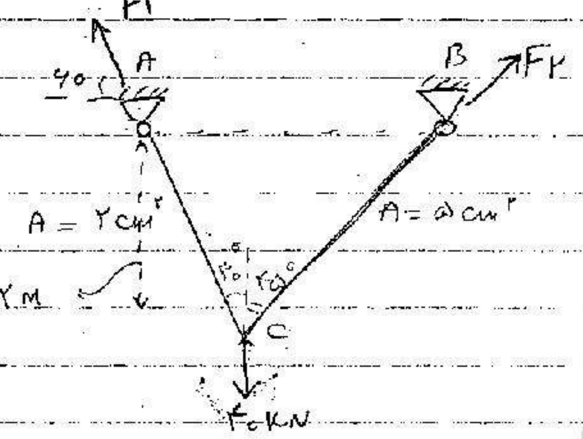
www.tinar.ir

برای یافتن محل C جدید :



$$\frac{\overline{CC_1}}{\overline{BB_1}} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \boxed{\overline{CC_1} = \frac{۱۰}{\sqrt{۳}}\ mm}$$

مثال : تغییر مکان نقطه C ؟



$E = ۲ \times ۱۰^{۵}\ MPa$

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow -F_۱ \times \frac{۱}{۲} + F_۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰ \Rightarrow F_۱ = F_۲\sqrt{۲}$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_۱ \frac{\sqrt{۳}}{۲} + F_۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۴۰ = ۰ \Rightarrow$$

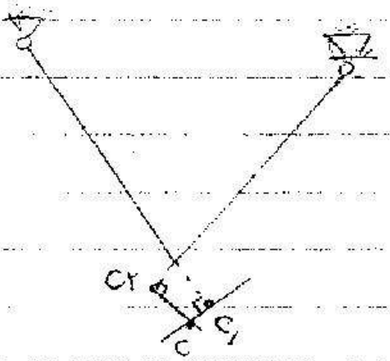
$$\Rightarrow F_۲ \left(\frac{\sqrt{۶}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۴۰$$

$$\Rightarrow F_۲ = \frac{۸۰}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}} = \boxed{۲۰٫۷۱\ kN}$$

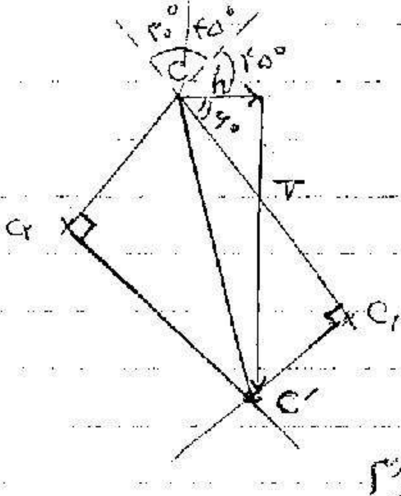
$$\Rightarrow \boxed{F_۱ = ۲۹٫۲۸\ kN}$$

$$* \quad \delta_۱ = \frac{۲۹۲۸۰ \times \frac{۲۰۰۰ \times ۲}{\sqrt{۳}}}{۲ \times ۱۰^{۵} \times ۲۰۰} = ۱٫۶۹\ mm$$

$$* \quad \delta_۲ = \frac{۲۰۷۱۰ \times ۲۰۰۰ \times \sqrt{۲}}{۲ \times ۱۰^{۵} \times ۵۰۰} = ۰٫۵۹\ mm$$



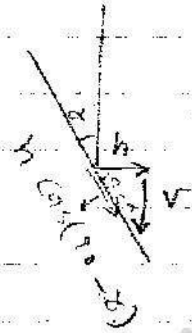
به جای دایره خطوط عمود بر شعاع را رسم
می‌کنیم



برای یافتن محل C′ ، کافی است h و v یعنی
تغییر مکان افقی و قائم را بیابیم:

تصویر مقادیر h و V را بر روی ①
یا بر روی ① بدست می‌آوریم

در بار اول میله ۱ و بار دوم میله ۲ است
جهت + یعنی جهتی که طول افزایش پیدا کند:



$h\sin\alpha + V\cos\alpha$

$$\Rightarrow \quad h \times \frac{1}{2} + V \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \delta_1 = 1.69$$

$$-h \times \frac{\sqrt{2}}{2} + V \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \delta_2 = 0.59$$

* چون h را در جهت خلاف [illegible]
طول را میله ۲ کم می‌کند

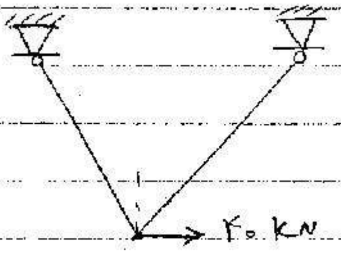
$\Rightarrow h = 0.71 \longrightarrow$ سمت راست

$V = 1.54 \downarrow$ پایین

اگر منفی بدست می‌آمد باید جهت را تغییر می‌دادیم

ممکن است یکی از تغییر طولها منفی باشد ؛

مثال ؛



اگر جهت کاهش طول را منفی بگیریم ؛
δ کاهش طول را باید – گذاشت

* سازه خطی ؛

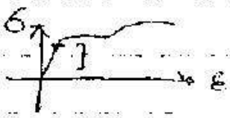
تا زمانیکه تغییر شکلها کوچکند می توان همان هندسه اولیه را در سازه بکار برد ؛

یعنی مثلاً در مثال قبل اگر نیروی قائم ۴۰ را به ۲۰ یا ۸۰ تبدیل کنیم ، می توانیم بگوییم δ ها نصف یا ۲ برابر می شوند

* سازه را خطی گویند اگر نیرو را در یک عدد k ضرب کنیم تنش ها ، تغییر طول ها و نیروها هم در k ضرب شوند ؛

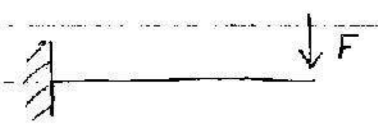
① برای این که این شرط برقرار باشد باید تغییر شکلها کوچک باشند ؛ « از نظر هندسی »

② تنش - کرنش در قسمت خطی باشد ؛ اگر در قسمت های دیگر منحنی وارد شده باشیم تنش ها دیگر از خطی بودن تبعیت نمی کنند « از نظر مادی »



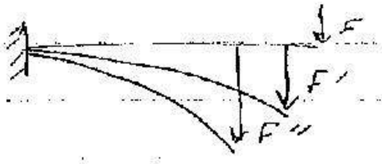
ممکن است یک سازه از نظر مادی خطی باشد ولی از نظر هندسی خطی نباشد ؛

مثلاً کش از نظر هندسی دارای تغییر شکلهای بزرگ است ولی از نظر مادی خطی باقی می ماند.

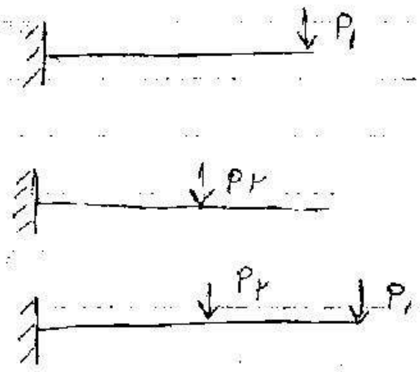


اگر تغییر شکل کم باشد با دو برابر شدن F ، لنگر در تکیه گاه دو برابر می شود

ولی اگر تغییر شکل بزرگ باشد دیگر لنگر ممکن نیست دو برابر شود بلکه بیشتر هم می شود !

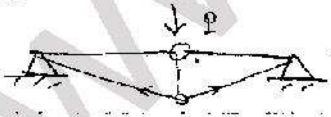


* به طور کلی در سازه خطی روش جمع اثرها برقرار است superposition جمع گذاری



مثلاً اگر حالت اول و دوم را حل کنیم می توانیم بنویسیم که در حالت سوم ، تغییر طول از جمع تغییر طول های دو حالت قبل به دست می آید :

مثال :

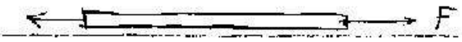


این سازه پایدار نیست یعنی برای تغییر شکل های کوچک راه حل برای آن وجود ندارد

زوایا ، زوایای اولیه نیستند ، پس سازه خطی نیست :

* ضریب پواسن :

یک میله را در راستای محور تغییر طول بدهیم بخش آن را حساب کنیم :



$\sigma_x = \frac{F}{A}$ $\quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\delta}{L}$

حال می‌خواهیم ببینیم در امتداد y و z چه تغییری داریم ؛

(ضریب پواسن) $\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$

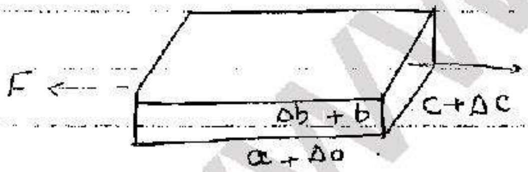
این نسبت برای هر ماده یک مقدار ثابتی دارد ؛

– برای این است چون ν را می‌خواهیم + بدست آوریم (poisson's ratio)
تحت کشش ε_x + است و قطر کم می‌شود پس ε_y – است ؛

هر محوری که در داخل مقطع انتخاب کنیم تغییر در راستای آن محور نسبت به محور x مقدار ثابتی دارد

ضریب پواسن بین صفر و نیم تغییر می‌کند ؛ $\quad$ ۰ < ν < ۰/۵

برای اثبات حد بالای ضریب پواسن داریم ؛



به هر دلیلی a به اندازه Δa و دیگر طول‌ها نیز تغییر کنند ؛

① اولیه $V = abc$

$$V + \Delta V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c)$$

$$= abc + bc\Delta a + ac\Delta b + ab\Delta c + \underbrace{\cancel{c\Delta a\Delta b}\cdots}_{\text{صرفنظر}}$$

$$+ \underbrace{\cancel{\Delta a\Delta b\Delta c}}_{\text{بی‌نهایت کوچک} \Rightarrow \text{صرفنظر}}$$

$$\Delta V = bc\Delta a + ac\Delta b + ab\Delta c$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}}$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} \longrightarrow \underbrace{\text{تنش حجمی}}_{\text{مجموع تنش در ۳ امتداد عمود بر هم}} \qquad \boxed{\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$

مکعب تحت اثر نیروی F قرار گرفته باشد می توانیم بنویسیم 8

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad , \quad \sigma_x = \frac{F}{A} \Rightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \checkmark$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

$$\xRightarrow{\text{در } \varepsilon_V \text{ می گذاریم}} \Rightarrow \varepsilon_x - \nu\varepsilon_x - \nu\varepsilon_x = \varepsilon_x(1-2\nu) = \frac{\sigma_x}{E}(1-2\nu)$$

وقتی میله را می کشیم حتماً حجم آن کم نمی شود اگر فشار دهیم حجم آن نباید زیاد شود

$\sigma_x > 0$ اگر $\Rightarrow \varepsilon_V > 0$ کشش $\Rightarrow 1-2\nu \geq 0$

یا $\sigma_x < 0$ اگر $\Rightarrow \varepsilon_V < 0$ فشار $\Rightarrow 1-2\nu \leq 0$ $\qquad \Rightarrow \boxed{\nu \leq \frac{1}{2}}$

صفر ν را هم خودمان انتخاب کردیم با قرار دادن ⊖

* برای فلزات بین $\frac{1}{3}$ تا $\frac{1}{4}$ ← برای فولاد $\cong 0/3$

برای خاک و بتن حدود $0/2$

* هر چه ضریب پواسن به صفر نزدیکتر باشد تغییر حجم زیادتر است هر چه به $0/5$ نزدیکتر باشد تغییر حجم کم

برای کائوچو $\cong 0/5$

www.ttrar.ir

همچنین U ها برای قسمت خطی منحنی ۵ - ۴ است در قسمت افقی منحنی ۵ همانند مثال دوم عمل می کند .

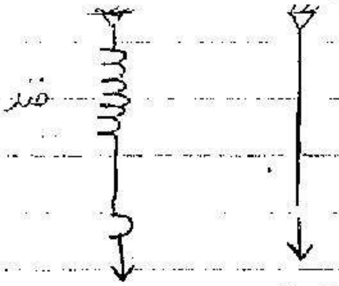
www.ttmar.ir

انرژی کرنش 8 strain energy

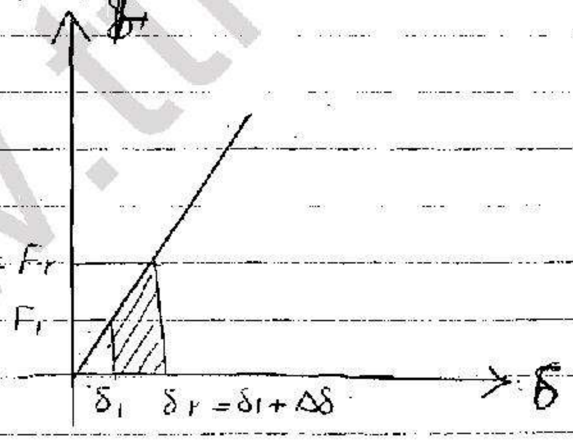
در میله ای که تحت اثر نیرو قرار می گیرد چون نقطه اثر نیرو حرکت می کند کار انجام می شود اگر جسم الاستیک باشد این کار در جسم ذخیره می شود هر عضوی از سازه که تغییر شکل بدهد و در قسمت الاستیک باشد یک مقدار انرژی در آن ذخیره می شود ؟

در گذشته هم بوده مثل ساعتهای کوکی که با انرژی ذخیره شده در فنر کار می کردند ؟

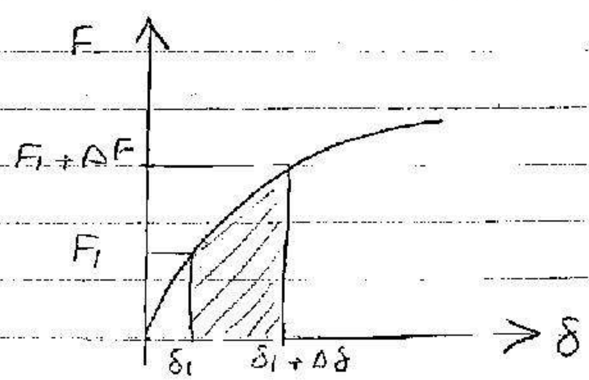
انرژی کرنش از نوع انرژی پتانسیل است چون پتانسیل به محل ماده و فضای شکلی دارد و چون تغییر شکل هم محل ذرات را نسبت به هم عوض کرده است پس این انرژی ، پتانسیل (انرژی) است ؟



میله هم مثل فنر است
ولی تغییر طول آن کمتر
است ؟



با زور اتا ۱۰۰ اتم
دهیم
با افزایش بار ، تغییر طول
هم افزایش می یابد
اگر ۱۰۰ را هم ۹۹ ن
تغییر طول کم می شود
فنر ای ها کار را نیک ؟



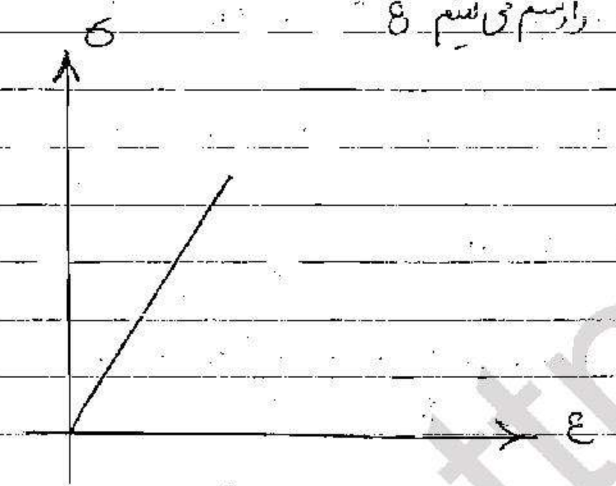
کار در فاصله ΔF $\Rightarrow \quad \Delta W = (F_1 + \Delta F)\Delta\delta = F_1 \Delta\delta$

مساحت زیر منحنی $F - \delta$ ← کار انجام شده یا انرژی ذخیره شده در دستگاه

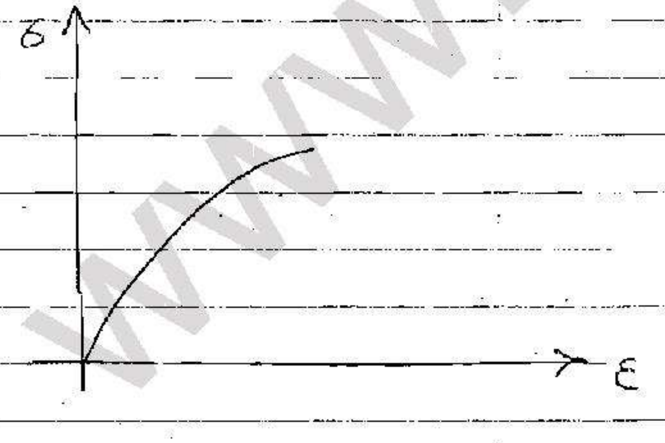
چون اگر الاستیک باشد دوباره روی همین منحنی برمی گردد بنابراین انرژی را پس می دهد « تماماً »

$$* \quad W = \int_0^F F \, d\delta$$

به جای $F - \delta$، منحنی $\sigma - \varepsilon$ را رسم می کنیم :



مساحت زیر منحنی به یک حجم تقسیم می شود



در اینجا انرژی تغییر شکل در واحد حجم را خواهیم داشت که با U نشان داده می شود :

$$\boxed{U = \frac{W \rightarrow U}{\underset{\text{حجم}}{V}}}$$

www.ttmar.ir

$$\text{انرژی تغییر شکل در واحد حجم} = \frac{\overset{U}{W}}{AL} = \frac{\overset{U}{W}}{\underset{\text{برای مصالح}}{A.L}}$$

$$* \quad \delta = \frac{FL}{EA} \Rightarrow w = \int_0^{\delta} F\,d\delta = \frac{1}{2} F \cdot \delta$$

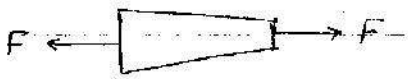
برای حالت خطی

منحنی $\varepsilon - \sigma$

u = سطح زیر منحنی تنش-تغییر شکل

$$\boxed{w = \frac{F^2 L}{2EA}}$$

$$* \quad \text{غیرخطی} \qquad \delta = \int \frac{F\,dx}{EA} \Rightarrow \boxed{\underset{U\ \text{یا}}{W} = \int \frac{F^2\,dx}{2EA}}$$



U کل

u تنش واحد حجم

$$* \ \boxed{\text{برای حالت خطی}} \quad \boxed{u = \frac{\frac{F^2 L}{2AE}}{\underset{\text{حجم}}{AL}} = \frac{E^2}{2A^2E} = \frac{\sigma^2}{2E}}$$

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \left(\frac{\sigma}{E}\right)\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \varepsilon - \sigma \ \text{مساحت زیر منحنی} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

$$* \quad u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$$* \quad u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

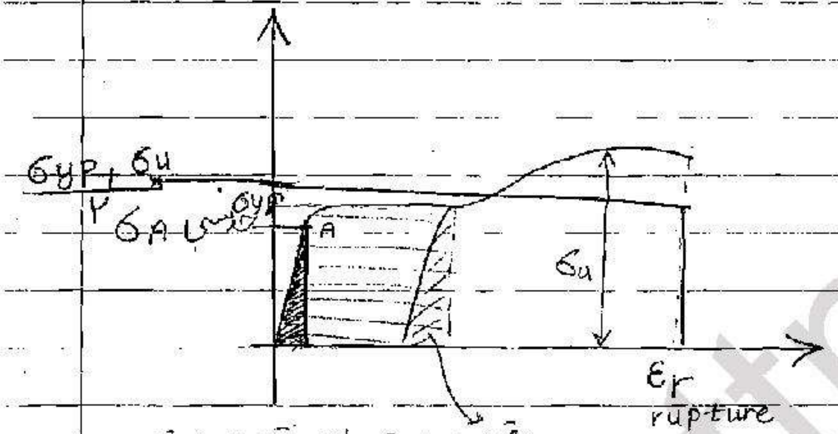
$$* \quad u = \frac{E}{2}\varepsilon^2$$

www.ttmar.ir

* $U = \frac{F^2 L}{2AE}$

* $U = \frac{1}{2} F \delta$

* $U = \frac{EA\delta^2}{2L}$


$\frac{\sigma_{yp} + \sigma_u}{2}$
σ_A حد تناسبی
σ_{yp}
A
σ_u
ε_r
rupture

وقتی از A رد می‌شوم و وارد مرحله پلاستیک می‌شوم دیگر کار حالت برگشتی ندارد؟
سطح زیر منحنی کار انجام شده می باشد

* وقتی باربرداری داریم فقط همین قدر انرژی پس می‌دهد
در حالیکه به اندازه هاشور مشکی کار انجام داده بودیم

بقیه انرژی به حرارت تبدیل می‌شود به صورت پتانسیل دهنده نمی‌شود که بتواند پس داده شود.
حرارت در محل قطع شدگی.

مقدار انرژی تا σ_A را ؟

« مقدار انرژی تحمل واحد حجم تا رسیدن به حد تناسبی را مدول رزیلیانس گویند »

$$\boxed{\text{مدول رزیلیانس} = \frac{\sigma_A^2}{2E}}$$

نشان می دهد چقدر انرژی در واحد حجم در محدوده الاستیک ذخیره می شود.

منحنی و الاستیک را تقریباً یکی در نظر گرفته شده است :

* فولاد $\sigma_A \simeq ۲۰۰\ MPa = ۲۰۰۰\ \frac{kgf}{cm^۲}$

$E \simeq ۲\times10^۵\ MPa = ۲\times10^۶\ \frac{kgf}{cm^۲}$

مدول رزیلیانس فولاد نرم $= ۰/۱\ MPa$

* $\frac{\text{انرژی}}{\text{حجم}} = \frac{FL}{L^۳} = \frac{F}{L^۲}$

مدول رزیلیانس $= 1\ \frac{kg}{cm^۲}$

* لاستیک معمولی $E \simeq 1\ MPa = 10\ kg/cm^۲$

$\sigma_A \simeq ۲\ MPa = ۲۰\ kg/cm^۲$

مدول رزیلیانس $= ۲\ MPa$

انرژی که واحد حجم لاستیک می تواند ذخیره کند و الاستیک بماند ۲۰ برابر فولاد است .

اگر در یک جایی بخواهیم انرژی مستهلک شود یعنی نیروی یک ضربه را داشته باشیم و نخواهیم وارد مراحل خمیری شویم می توانیم از لاستیک استفاده کنیم ! «ضربه‌گیر سریع [illegible]»

* سطح کل زیر منحنی یا کل انرژی که جسم می گیرد :

مدول طاقت
Modulus of toughness

انرژی است که واحد حجم یک جسم می گیرد تا گسیخته شود :

یک معیاری از شکستگی جسم است هر چه این مدول بیشتر باشد جسم شکل پذیرتر است :
برای فولاد با مقاومت بالا سطح منحنی و زیرش کمتر می شود زیرا شکل پذیری آن بیشتر می شود

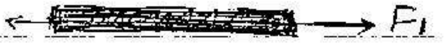
شیشه که اصلاً مقاومت کششی ندارد و سطح زیر آن خیلی کم است

برای محاسبه این مدول سطح زیر منحنی را به طور تقریبی مساوی یک مستطیل می‌گیرند با طول $\varepsilon_۲$ و عرض $\frac{\sigma_{yp}+\sigma_u}{۲}$

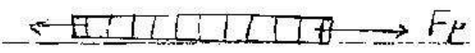
$$\boxed{\text{مدول طاقت} = \frac{\sigma_{yp}+\sigma_u}{۲} \cdot \varepsilon_۲}$$

* چون نیرو و انرژی خطی نیستند ؛ $U = \frac{F^۲L}{۲EA}$

روش جمع اثرها برای محاسبه انرژی درست نیست ؛

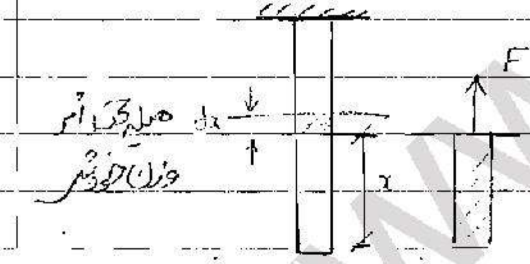


$U_1 = \frac{F_1^۲L}{۲EA}$



$U_۲ = \frac{F_۲^۲L}{۲EA}$

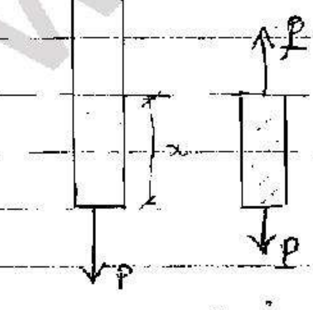
$U \cancel{U_1} + U_۲ \ne U = \frac{(F_1+F_۲)^۲}{۲EA} L$



$F = \gamma \overset{\text{حجم}}{V_x} = \gamma (Ax)$

$\sigma = \frac{F}{A} = \gamma x$

انرژی در اثر وزن $U_1 = \int_0^L \frac{F^۲dx}{۲EA} = \int_0^L \frac{\gamma^۲A^۲x^۲dx}{۲EA} = \frac{\gamma^۲AL^۳}{۶E}$



$P = \gamma V + P = \gamma Ax + P$

$\sigma = \gamma x + \frac{P}{A}$

تنش را می‌توان از جمع اثرها به دست آورد

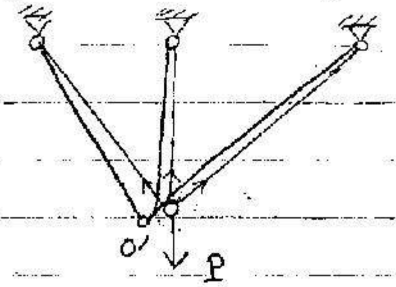
ولی در مورد انرژی [illegible] :

انرژی در اثر P $U_۲ = \frac{P^۲L}{۲EA}$

در حالت کلی $\Rightarrow U = \int_0^L \frac{(\gamma Ax+P)^۲}{۲EA}dx$

$$\boxed{U \ne U_1 + U_۲}$$

* مسائل هیپراستاتیک در بار محوری 8 «نامعین استاتیکی»



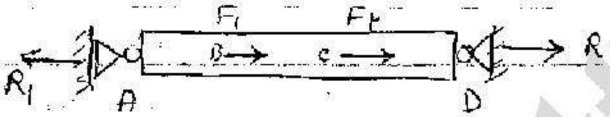
$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$

دو معادله داریم و با ۳ مجهول

n میله ← $n-2$ درجه هیپراستاتیکی

میله اول و سوم یک تغییر طول می دهد در نتیجه میله دوم هم باید یک مقدار مشخص تغییر طول بدهد

اگر n میله داشته باشیم $n-2$ رابطه بین تغییر طولها نوشته خواهد شد و ۲ معادله هم برای تعادل پس n معادله خواهیم داشت.



$\Sigma F_x = 0$

یک معادله داریم و با دو مجهول

نیاز به یک معادله دیگر داریم A و D تغییر طول نمی توانند بدهند پس $\delta_{AD} = 0$

این δ را اگر برحسب F ها بنویسیم مجهولات درست می آید.

اگر رابطه اضافی پیدا کنیم احتمال اشتباه در آن است مثلاً $\delta_{AB} = 0$ غلط است زیرا می تواند تغییر طول بدهد.

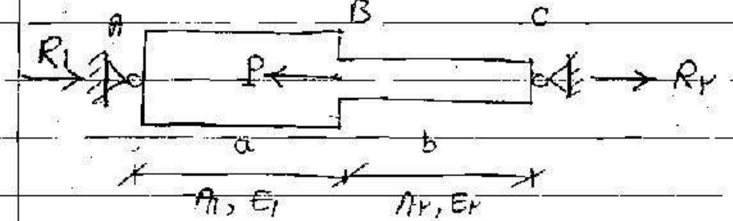
۱ درجه هیپراستاتیکی = ۱ معادله تعادل − دو تا مجهول

درجه هیپراستاتیکی یا درجه نامعینی

پس یک معادله باید از تغییر شکل کمک گرفته شود.

دقیقاً به اندازه درجه هیپراستاتیکی باید معادله بنویسیم ؟

مثال 8



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_1 - P + R_2 = 0 \quad ①$$

یکدرجه هیپراستاتیک $\delta_{AC} = 0 \Rightarrow \delta_{AB} + \delta_{BC} = 0$

$$\begin{cases} N_{AB} = -R_1 \\ N_{BC} = -(R_1 - P) = R_2 \quad ① \text{ از} \end{cases}$$

$$\delta_{AB} : \frac{-R_1 a}{E_1 A_1}$$

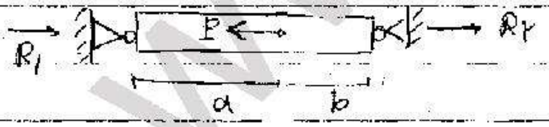
$$\Rightarrow \frac{-R_1 a}{E_1 A_1} \quad \frac{(R_1 - P) b}{E_2 A_2} = 0$$ [illegible]

$$\delta_{BC} : \frac{-(R_1 - P) b}{E_2 A_2}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{P \dfrac{b}{A_2 E_2}}{\dfrac{a}{E_1 A_1} + \dfrac{b}{E_2 A_2}}$$

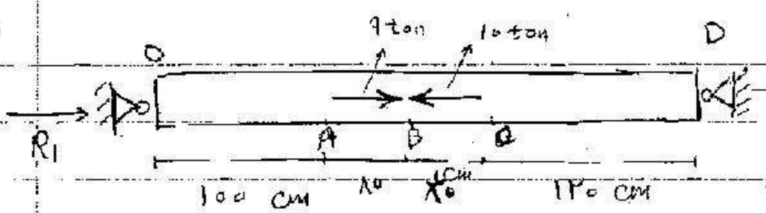
$$R_2 = \frac{P \dfrac{a}{A_1 E_1}}{\dfrac{a}{E_1 A_1} + \dfrac{b}{E_2 A_2}}$$

مثال 8



$$R_1 = \frac{Pb}{a+b}$$

$$R_2 = \frac{Pa}{a+b}$$



مثال: R_1 , R_2 ؟

در تمام مسائل هیپراستاتیکی هر چیزی که تغییر شکل یا تغییر طول را عوض کند روی جواب مسئله اثر می‌گذارد

تغییر درجه حرارت را می‌توان در مثال قبل در δ_{AC} وارد کرد:

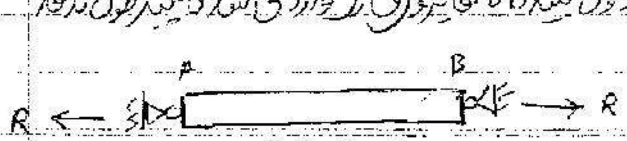
$\delta_{AC} = 0$ چون ثابت است

$\delta_{AB} + \delta_{BC} = 0$

$\delta : \frac{FL}{EA} + L\alpha\Delta\theta$ تغییر طول ناشی از حرارت و قانون هوک

دو رابطه باید جداگانه برای AB و BC نوشته شوند. نه برای AC:

* اگر میله هیچ نیرویی به آن وارد نشود و درجه حرارت به اندازه $\Delta\theta$ تغییر کند نیروهایی در تکیه‌گاه‌ها ایجاد می‌شود. اگر $\Delta\theta$ مثبت شد طول می‌خواهد زیاد شود ولی تکیه‌گاه‌ها نیرویی را وارد می‌کنند تا تغییر طول ندهد مثل ریل آهن که طول نباید تغییر کند:



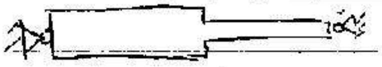
$\Delta\theta, E, A$

$\delta_{AB} = 0$

$$\frac{RL}{EA} + L\alpha\Delta\theta = 0$$

$$\boxed{R_1 = -EA\alpha\Delta\theta}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{R}{A} = -E\alpha\Delta\theta}$$

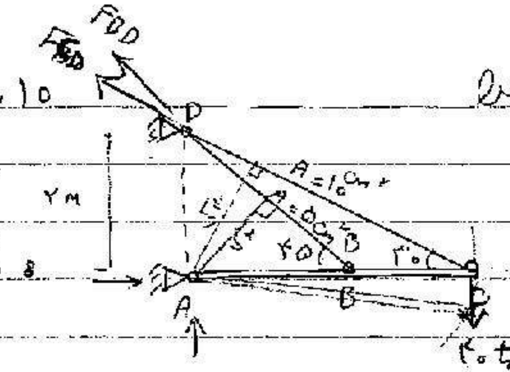


در اینجا با توجه به اینکه R ها مساوی اند ولی برای محاسبه تنش نمی توان از فرمول $-E\alpha\Delta\theta$ استفاده کرد چون سطح آن یکنواخت نیست.

۸۳/۱۱/۱۰

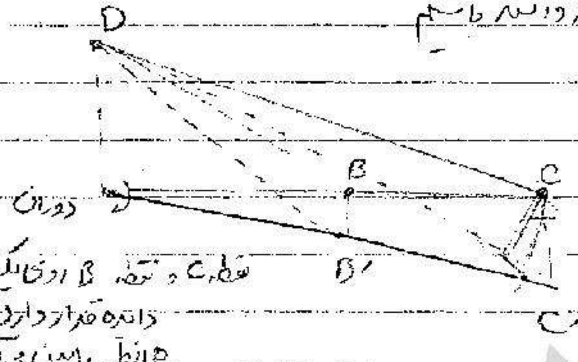
بنام خدا

مثال ۵


FBD
FCD
D
۲m
A = ۱۰ cm²
A = ۵ cm²
۴۵
۳۰
A
B
C
۴۰ t

- تغییر شکل و تنش در میله‌های BD و CD را تعیین کنید میله افقی ABC صلب است و سایر میله‌ها از یک جنس‌اند

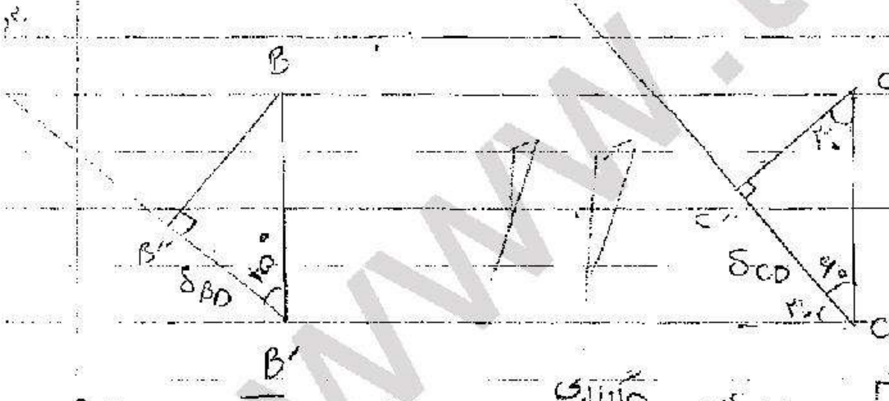
دو میله تحت اثر ۲ نیروی محوری اند و ۴ مجهول داریم ۳ معادله تعادل پس ۱ درجه نامعین یا هیپراستاتیک است پس ۱ معادله δ باید داشته باشیم


D
B
C
دوران
B'
C'

نقطه C و نقطه B روی یک دایره قرار دارند و همانطور پایین می‌آیند

$$\Rightarrow \frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{AB} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{CC'}{BB'} = \sqrt{\frac{۳}{۲}}$$


B
B''
δ_{BD}
۴۵
B'
C
۳۰
C''
δ_{CD}
۶۰
۳۰
C'

$$\begin{cases} \delta BD = \overline{BB'} \cos ۴۵ \\ \delta CD = \overline{CC'} \times \cos ۶۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگزاری}} \frac{۲\delta CD}{\delta BD\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow \frac{۲\delta CD}{\delta BD} = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{FL}{EA} \Rightarrow \frac{\frac{۲ \times FCD \times ۴۰۰}{E \times ۱۰}}{\frac{FBD \times ۲۰۰\sqrt{۲}}{E \times ۵}} = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow F_{DC}\sqrt{2} = F_{BD}\sqrt{3}$$

$$* \sum M_A = 0 \Rightarrow F_{DC}\sqrt{3} + F_{BD}\sqrt{2} - 40 \times \frac{6}{\sqrt{3}} = 0 \qquad ②$$

معادله ۱ و ② در اول $\Rightarrow \quad F_{CD} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, F_{BD}$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) F_{BD} = 80\sqrt{3} \Rightarrow F_{BD} = 16\sqrt{6}\ \text{ton}$$

$$F_{CD} = 48\ \text{ton}$$

$$* \quad \sigma_{BD} = \frac{16000\sqrt{6}}{5} = 3200\sqrt{6} = 7838/4\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{48000}{10} = 4800\ \frac{kg}{cm^2}$$

مثال ۵ در مسئله قبل اگر درجه حرارت ۲۰ °C افزایش یابد تنش میله‌ها را بیابید؟

خواسته $\alpha = 11 \times 10^{-6}\ \frac{1}{°C} \qquad \Delta\theta = 20\ °C \qquad E = 2 \times 10^{6}\ \frac{kg}{cm^2}$

اگر مسئله معین استاتیکی بود تغییر درجه حرارت تأثیر نداشت ولی در اینجا چون یک درجه نامعین است روی جواب تأثیر دارد

نسبت δ ها به مثل مسئله قبل حل می‌شود ولی در مورد δ :

$$\delta = \frac{FL}{EA} + L\alpha\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2\delta_{CD}}{\delta_{BD}} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\left[\frac{F_{CD} \times 400}{2 \times 10^{6} \times 10} + 400 \times 11 \times 10^{-6} \times 20\right]}{\frac{F_{BD} \times 200\sqrt{2}}{2 \times 10^{6} \times 5} + 200\sqrt{2} \times 11 \times 10^{-6} \times 20}$$

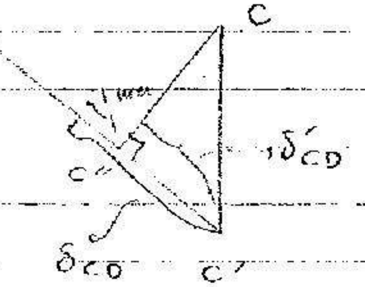
معادله دوم تغییر نمی‌کند

مسئله را یکبار فقط با درجه حرارت حل کنید یکبار هم با نیرو ؛ از جمع آنها استفاده کنید !

مثال ۸ : در مسئله قبل اگر میله DC ، 1 mm از طولی که باید باشد کوچکتر ساخته شده باشد تنش چقدر خواهد بود ؟ "بدون حرارت"

در اینجا هم ۴۰t و هم 1 mm را در نظر می‌گیریم ؛

$$\delta = \frac{FL}{EA} +$$ نقص طول



$$\frac{2\delta'_{CD}}{\delta_{BD}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

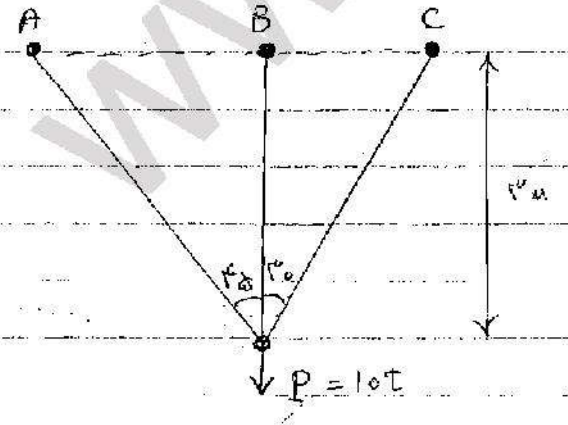
$$\Rightarrow \frac{2\delta'_{CD}}{\delta_{BD}} = \sqrt{3}$$

(کل $\delta_{CD} = 1$ mm

جمع دوتاشون !

$$\Rightarrow \frac{2\left(\frac{F_{CD}\times 400}{2\times10^6\times10} - 0/1\right)}{\frac{F_{BD}\times 200\sqrt{2}}{2\times10^6\times5}} = \sqrt{3}$$

مثال ۸ : در شکل روبرو سطح مقطع و جنس
هر ۳ میله یکسان است
نیروی وارد بر هر میله ؟

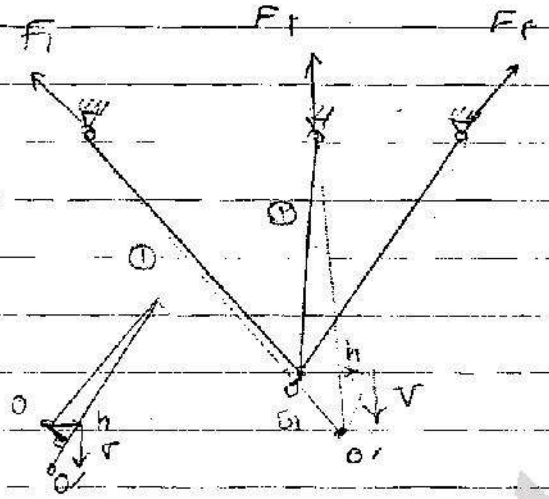


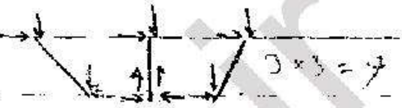
۲ معادله داریم با ۳ مجهول : $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ هر شکل یک درجه نامعین است :

در این نوع میله های مفصلی منظم به حرکت نقطه O را به نقطه دیگر شکل O' می بریم

و حرکت افقی و قائم نقطه را h و V می نامیم ، هر کدام از میله ها می توانند تغییر طول

را بر حسب h و V می نویسیم :





وسط اول

$$h\cos 45 + V\cos 45 = \delta_1$$
$$V = \delta_2$$
$$-h\cos 60 + V\sin 60 = \delta_3$$

$$\frac{F_1 \times 300\sqrt{2}}{EA} = h\frac{\sqrt{2}}{2} + V\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{F_2 \times 300}{EA} = V$$

← طول و تغییر را تقریباً می دانیم
طول ها را می خواهیم :

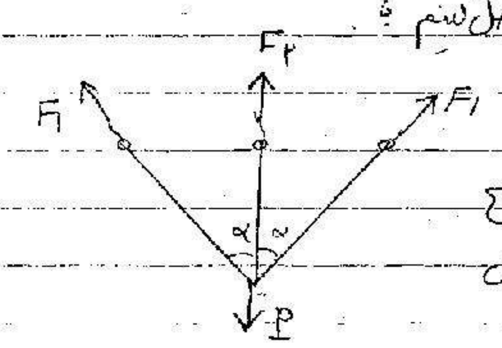
$$\frac{F_3 \times \frac{300 \times 2}{\sqrt{3}}}{EA} = -\frac{h}{2} + V\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow -F_1\frac{\sqrt{2}}{2} + F_3 \times \frac{1}{2} = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow F_1\frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 + F_3\frac{\sqrt{3}}{2} - 1000 = 0 \end{cases}$$

۵ معادله ۵ مجهول :

اگر تغییر حرارتی داشته باشیم : جمله $L\alpha\Delta\theta$ اضافه می شود ، به صورت زیر $h + V = \delta_1 + L\alpha\Delta\theta$

اگر میله‌ها تقارن داشتند می توانیم با یک مجهول حل کنیم :



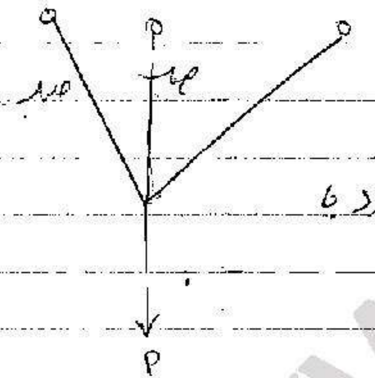
$\sum P_y = 0$

دو تا مجهول

تغییر شکل فقط قائم است پس یک مجهول اضافه می شود :

اگر میله وسط در مثال قبل صلب بود : $\delta_2 = 0$ می شد چون صلب بود : فقط تغییر مکان افقی داریم :

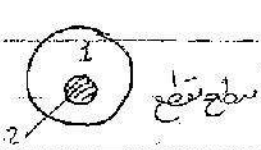
اگر دو میله صلب بود : نقطه O تغییر مکان ندارد پس یک میله الاستیک نیروی آن صفر می شود



اگر دو تا میله صلب شد نیروی میله سوم صفر است

نیرو فقط در ۲ تا میله صلب وجود دارد :

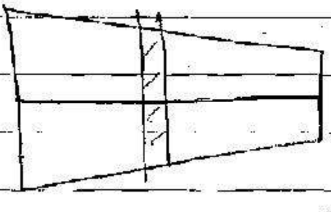
* یک میله از دو جنس 8



این میله از نظر تنش نامعین است مگر اینکه به تغییر شکل توجه کنیم $\Rightarrow \delta_1 = \delta_2$

چون کل میله است با هم تغییر طول می دهند : $\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ هندسی : ۲

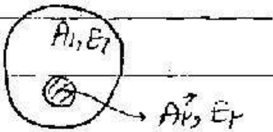
پس تغییر طول‌ها باید مساوی باشند هر کدام جداگانه نمی توانند تغییر طول بدهند



میله مرکب (چند مرکب)

مساحت ثابتی ندارد ولی درجی دارد تغییر سطح می دهد ، باید بنویسیم در Δx تغییر طول

دو قسمت باهم برابر است ؛ بنابراین $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ رابطه بهتری است



$$\xrightarrow{\delta_1 = \delta_2} \frac{F_1 \cancel{L}}{E_1 A_1} = \frac{F_2 \cancel{L}}{E_2 A_2}$$ فقط L برابر است

$$\xrightarrow{\varepsilon_1 = \varepsilon_2} \frac{F_1}{E_1 A_1} = \frac{F_2}{E_2 A_2} \qquad ①$$

$$\xrightarrow{\text{یا}} \boxed{\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}}$$ نسبت تنش‌ها مثل نسبت مدول است

هر قسمت از میله که E بیشتر دارد σ بیشتر دارد .

مثلاً اگر Al ، فولاد داشته باشد ؛ فولاد مدول ارتجاعی بیشتری از Al دارد پس تنش آن بیشتر از فولاد است

اگر چند تا جسم هم باشد باز هم n رابطه می توانیم بنویسیم .

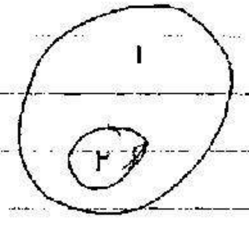
رابطه نیرویی : $\overset{\text{معادله ①}}{F_1} + F_2 = F$ کل نیرو ②

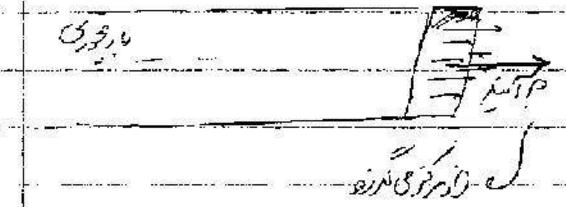
$\xRightarrow{\text{با توجه به ① و ②}}$ $* \quad F_1 = F_2 \cdot \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}$

$$* \quad F_2 = \left(1 + \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}\right) F \qquad \boxed{F_2 = \frac{F}{1 + \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}}}$$

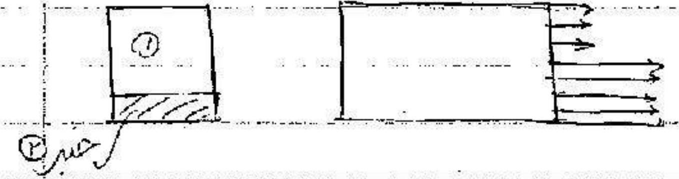
$$* \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F}{A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1}$$

$$* \quad \sigma_1 = \frac{F}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2}$$





$$\sigma = \frac{F}{A}$$



نیروی بیشتری می‌گیرد ⟹ شیر فولاد است!

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int_A x \gamma \, dA}{\int_A \gamma \, dA} \\[2ex] \bar{y} = \dfrac{\int_A y \gamma \, dA}{\int_A \gamma \, dA} \end{cases}$$

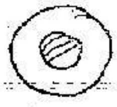
مرکز هندسی مقطع دوجنس از روابط زیر بدست می‌آید

$$\bar{x} = \frac{\int x \frac{E_i}{E_1} dA}{\int \frac{E_i}{E_1} dA}$$

$$= \int x \, dA + \int x \frac{E_2}{E_1} dA + \cdots$$

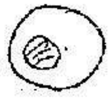
$$\bar{y} = \frac{\int y \frac{E_i}{E_1} dA}{\int \frac{E_i}{E_1} dA}$$

مثلاً دو دایره هم مرکز



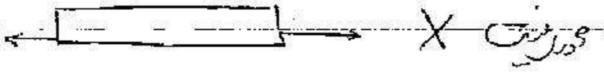
چون متقارن است ⟹ مرکز محل اثر نقطه اثر نیروی محوری است!

نامتقارن

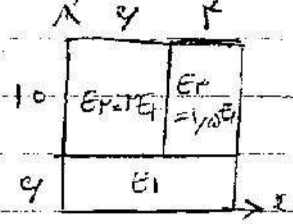


⟹ مرکز نیرو با مرکز دایره نیست

اگر بار محوری نباشد دیگر از این روابط نمی توانیم استفاده کنیم.


X
محوری نیست

۸۴/۱۲/۱۵ بنام خدا



مثال: مقطع مرکب است ، مرکز مقطع را تعیین کنید ؟

حل - $\bar{x} = \dfrac{\int_A x \frac{E_i}{E_1}\, dA}{\int_A \frac{E_i}{E_1}\, dA}$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{\int_A y \frac{E_i}{E_1}\, dA}{\int_A \frac{E_i}{E_1}\, dA}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\overset{A_1}{(6\times10)}\times\overset{\bar{x}_1}{(5)} + 2(6\times10)(3) + \overset{\frac{E_3}{E_1}}{(1.5)}\overset{A_3}{(4\times10)}\overset{\bar{x}_3}{(8)}}{6\times10 + 1.5(4\times10) + 2(6\times10)} = \frac{114}{24} = 4.75\ \text{cm}$$

نکته: $\int_A x\, dA = A\bar{x}$

$$\bar{y} = \frac{(6\times10)(3) + 2(6\times10)(11) + (1.5)(40)(11)}{6\times10 + 1.5(4\times10) + 2(6\times10)} = \frac{216}{24} = 9\ \text{cm}$$

اگر مرکز اثر بار در این نقطه باشد می توانیم از روابط مربوط به تنش حالت قبل استفاده کنیم

مثال: اگر در مسئله قبل نیروی 120 t در مرکز جرم تعیین شده وارد گردد تنش هر جسم را بیابید ؟

حل - $\sigma_1 A_1 = F_1$ $\qquad \dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{\sigma_2}{E_2} = \dfrac{\sigma_3}{E_3}$ ①

$\sigma_2 A_2 = F_2$ $\qquad F_1 + F_2 + F_3 = F = 120000\ \text{kg}$

$\sigma_3 A_3 = F_3$ $\qquad \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 60\sigma_1 + 60\sigma_2 + 40\sigma_3 = 120000$ ②

$$\begin{cases} E_2 = 2E_1 \,;\; E_3 = 1.5E_1 \\ \Rightarrow \sigma_2 = 2\sigma_1 \,,\; \sigma_3 = 1.5\sigma_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 60\sigma_1 + 120\sigma_1 + 60\sigma_1 = 120000$

$\Rightarrow \sigma_1 = 500\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_2 = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_3 = 750\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

www.tnar.ir

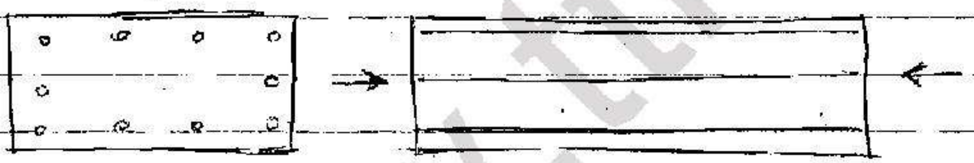
می‌توانستیم تنش را از رابطه زیر بیابیم

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1 + A_2\frac{E_2}{E_1} + A_3\frac{E_3}{E_1}}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{120000}{60 + 60(2) + 40(1/5)} = 500 \ kg/cm^2$$

مثالی که در رشته عمران اهمیت بیشتری دارد بتن آرمه است :

بتن آرمه مجموعه یک جسم از بتن با فولادهایی که داخلش هست :



وقتی نیرویی به آن وارد می‌شود بین این دو جسم تقسیم می‌شود معمولاً بتن برای فشار سپرده می‌شود

معمولاً در محاسبات می‌گویند بتن کشش را تحمل نمی‌کند این جور مسئله بیشتر تحت اثر فشار است

مثل ستون‌های ساختمان‌های بتن آرمه . معمولاً متقارن هستند بنابراین مرکز ثقل در مرکز هندسی

است اگر فرمول‌های محاسبات را انجام دهیم :

$$\sigma_c = \frac{F}{A_c + A_s\frac{E_s}{E_c}}$$

تمرین

www.tthar.ir

$$\sigma_s \Rightarrow \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_s}{E_s} \rightarrow$$

$* \quad E_s \simeq ۲\times۱۰^{۵}\ \text{MPa} \simeq ۲\times۱۰^{۶}\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^۲}$

بتن بسته به مصالحی که در آن ریخته می شود متفاوت است مقدار و جنس سیمان و ... طرز عمل آوری :

* E_c عدد ثابت برای تمام بتن ها نیست . از ۶ تا ۱۲ یا ۱۴ برابر کمتر از فولاد است ← بتن خوب

مساحت فولاد در حدود ۱ تا ۴ درصد تمام سطح بتن است معمولاً در A_c تمام سطح را می گذاریم بدون فولاد : از طرفی ضریب $\frac{E_s}{E_c}$ نیز دقیق نیست .

معمولاً در این قضاوت تنش بتن هست که زودتر به مقدار مجازش می رسد مثلاً تنش مجاز بتن :

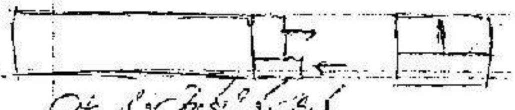
$$* \quad \sigma_{cw} = \underset{\frac{E_s}{E_c} \simeq ۱۲}{50} \longrightarrow \underset{\frac{E_s}{E_c} \simeq ۶}{150}$$

فولاد $\sigma_{yp} = ۳۰۰۰ - ۴۰۰۰$

$\frac{\sigma_{yp}}{S.F} = ۱۸۰۰ - ۲۴۰۰$.

تنش فولاد در چنین بتنی معمولاً کمتر از تنش مجاز آن است :

در مسئله های چند جسمی باید اثر تغییر درجه حرارت را در نظر داشته باشیم گفتیم که هر مسئله ای که هیپراستاتیک باشد با تغییر حرارت نیروهای آن تغییر می کند . در مسئله های این نوع . از نظر تنش نامعین اند :

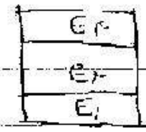


اگر مسئله معین باشد تغییر حرارت باعث جمع شدن یا طویل می شود

یکی تحت کشش یکی تحت فشار باشد
اگر بگذاری شود سیخ خم می شود .

بی متال یک صفحه دو فلزی است که برای قطع و وصل (اتصال) استفاده می‌شود که با تغییر درجه حرارت کار می‌کند :

اگر صفحه متقارن باشد



خم نمی‌شود ولی تنش‌هایی در آن ایجاد می‌شود چون به طور یکسانی

تغییر طول نمی‌دهند : به دلیل تعادل نیروها اثر روی خم شدن صفحه نمی‌گذارد

یک نوار لاستیکی ؟ [illegible] های مساوی زیادی در تنش ثابت آن [illegible] ؟

① در γ α آسان است

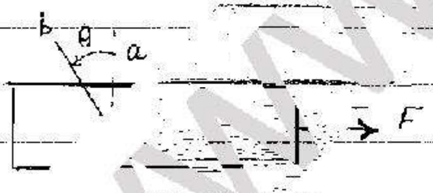
② تنش به آسانی را [illegible] می‌کند فقط یک قسمت کوچکی از تنش این تغییر را می‌پذیرد و در سطح آن

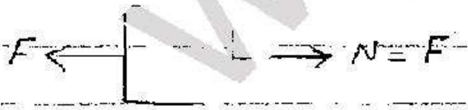
است : بر خلاف [illegible] تا ۵۰ - ۶۰ درصد تغییر درجه حرارت داشته باشد :

* آنالیز تنش :

کششی +
فشاری −

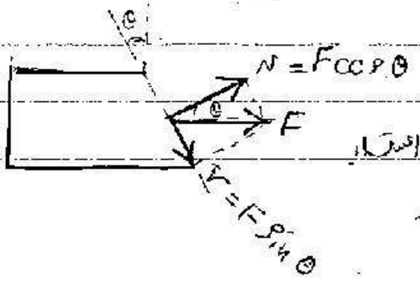
θ مثلثاتی +
در جهت حرکت عقربه ساعت −





$\sigma_x = \frac{F}{A}$ در نقاط تمام این مقطع در امتداد محور x است

اگر مقطع را با زاویه θ در نظر بگیریم :



در تمام نقاط مقطع b-b یک کشش مربوط به N و یکی هم مربوط به V است.

تنش عمود بر سطح مقطع $\left\{ \sigma_\theta = \frac{N}{A_1} = \frac{F\cos\theta}{A/\cos\theta} = \sigma_x . \cos^2\theta \right.$

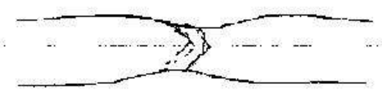
سطح مقطع مورب (A_1)

بر حسب این که این مقطع عوض شود تنش طبق رابطه بالا تغییر می کند

با تغییر امتداد در یک نقطه معین تنش عوض می شود ؛

تنش برشی $\tau_\theta = \frac{V}{A_1} = \frac{F\sin\theta}{A/\cos\theta} = \sigma_x \sin\theta\cos\theta = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta$

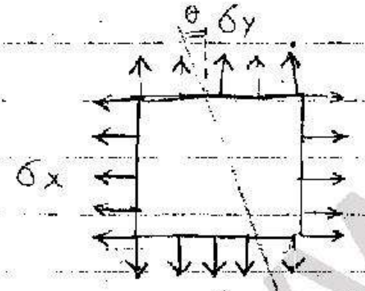
* اگر $\theta = ۴۵$ باشد تنش برشی ماکزیمم یعنی $\frac{\sigma_x}{2}$ است ؛



میله وقتی بارگذاری شده قطع می شود به شکل روبرو در می آید یعنی فقط تنش عمودی نیست که باعث قطع شدن می گردد بلکه یک تنش برشی هم در آن نقش دارد ؛

تنش دو محوری

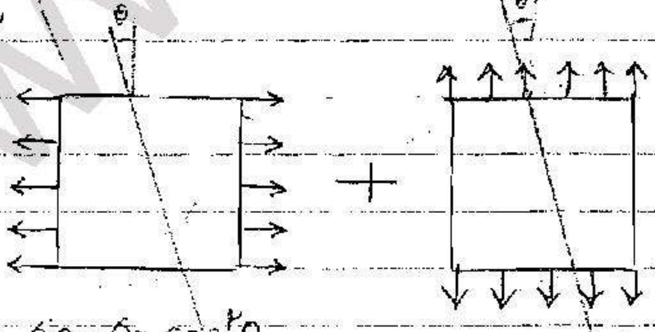
* فرض کنیم یک حجم مکعب مستطیلی داریم (تنش دو محوری)



* $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

* $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$

= از ۲ تا شکل تشکیل



مثل رابطه قبلی است ؛

* $\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta$

* $\tau_\theta = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta$

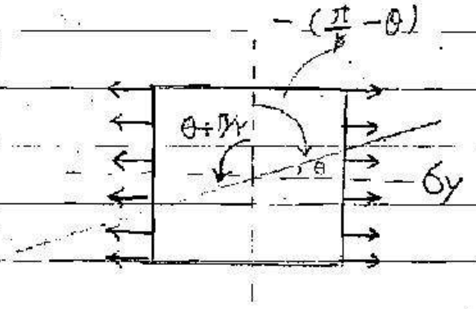
* $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

* $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$

* $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$

* $\varepsilon_x = \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$

www.ttrar.ir



برای حالت تنش برشی در شکل ۲ داریم :

نکته اگر بردار τ نسبت به نقطه‌ای درون
با فاصله و در نزدیکی مقطع در جهت حرکت
عقربه‌های ساعت باشد τ مثبت است

$$* \quad \sigma_\theta = \sigma_y \cos^2(\theta + \pi/2) = \sigma_y \sin^2\theta$$

$$* \quad \tau_\theta = \frac{\sigma_y}{2} \sin[2(\theta + \pi/2)] = -\frac{\sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

با توجه به روش جمع آثار داریم :

$$* \quad \sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$$

$$* \quad \tau_\theta = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta$$

$$* \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$* \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$* \quad \varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

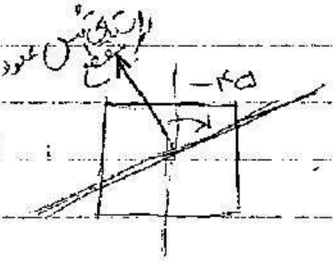
تنش دو محوری با مقادیر σx ، σy در هر نقطه داریم :

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

اگر $\theta = ۰$ باشد $\sigma_\theta = \sigma_x$

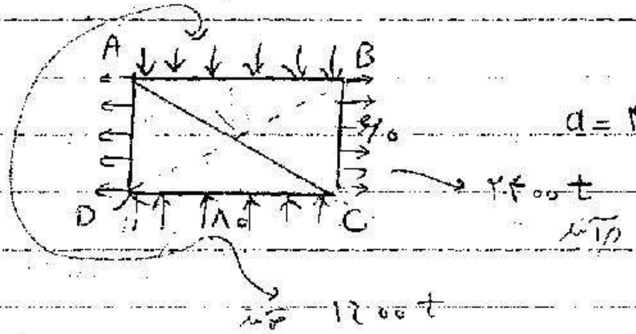
اگر $\theta = ۴۵ \rightarrow \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{۲}$

$\theta = -۴۵$:



$\theta = ۰$ یا $\theta = ۹۰$ تنش برشی صفر است ؛

مثال ۵ یک مکعب مستطیل

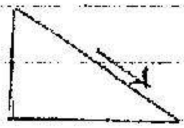


$a = ۴۰ \text{ cm}$

تنش در امتداد AC و BD ؟

تغییر ابعاد را هم حساب کنید ؟

$$\begin{cases} E = ۲ \times ۱۰^{۶} \dfrac{kg}{cm^۲} \\ \nu = ۰/۳ \end{cases}$$



تنش برشی مثبت
توجه است ؛
در امتداد قطع ؟

فشاری

$\sigma_x = \dfrac{۲۴۰۰۰۰۰}{۶۰ \times \underbrace{۴۰}_{a}} = ۱۰۰۰ \dfrac{kg}{cm^۲}$ $\qquad \sigma_y = \dfrac{-۱۲۰۰۰۰۰}{۸۰ \times ۴۰} = -۵۰۰ \dfrac{kg}{cm^۲}$

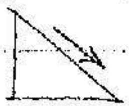
$AC = ۱۰۰ \text{ cm} \qquad \sin\theta = ۰/۸ \qquad \cos\theta = ۰/۶$

$* \ \sin ۲\theta = ۲ \times ۰/۸ \times ۰/۶ = ۰/۹۶$

$\rightarrow \underset{\text{امتداد } AC}{\tau_\theta} = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{۲} \sin ۲\theta = \dfrac{۱۰۰۰ + ۵۰۰}{۲} \times ۰/۹۶ = ۷۵۰ \times ۰/۹۶$

$= ۷۲۰ \dfrac{kg}{cm^۲}$

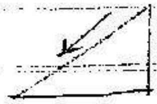
چون مثبت است تنش ساعتگرد است .



$\rightarrow \underset{BD}{\tau_\theta} \Rightarrow \sin\theta = -۰/۸ \quad \Rightarrow \tau_{BD} = -۷۲۰ \, kg/cm^۲$

$\cos\theta = ۰/۶$

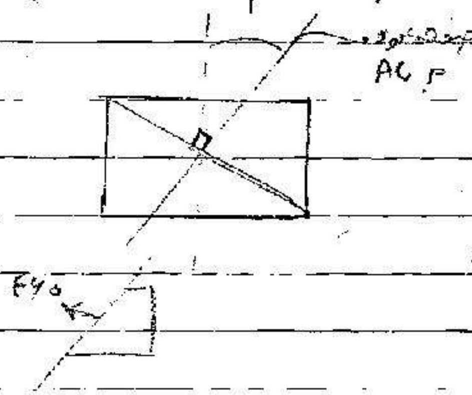
$\sin ۲\theta = -۰/۹۶$



σ_θ در صفحه عمود بر AC از رابطه بدست می‌آید اما در این جا تنش در امتداد AC خواسته است

$\theta_1 = -(\pi/2 - \theta)$

پس θ در صفحه ای عمود بر سطح AC است:



$$\sin\theta_1 = -\cos\theta = -۰/۶$$

$$\cos\theta_1 = \sin\theta = ۰/۸$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta_1 + \sigma_y \sin^2\theta_1$$

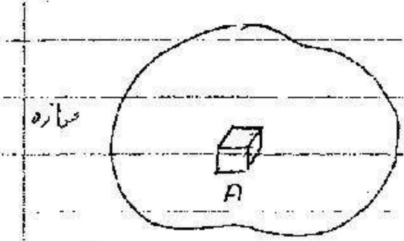
$$= ۱۰۰۰\,(۰/۸)^۲ + (-۵۰۰)(-۰/۶)^۲$$

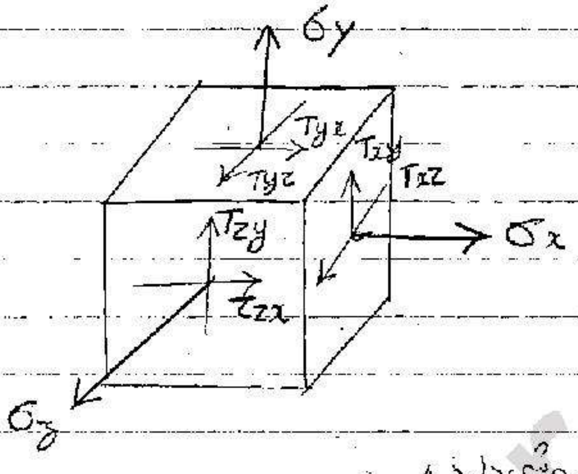
$$= ۶۴۰ - ۱۸۰ = +۴۶۰ \ \mathrm{kg/cm^۲}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{۲\times۱۰^۶}\left[۱۰۰۰ - ۰/۳(-۵۰۰)\right] = \frac{۵۷۵}{۱۰^۶}$$

$$\Delta x = \varepsilon_x \times ۸۰ = \frac{۵۷۵\times۸۰}{۱۰^۶}\ \mathrm{cm}$$

تانسور تنش




σ_y
τ_{yz}
τ_{xy}
τ_{yz}
τ_{xz}
τ_{zy}
σ_x
τ_{zx}
σ_z

هر تنش عمودی بر روی
این المان وجود دارد،

هر صفحه دو مؤلفه تنش برشی دارد .
در وجوه نامرئی تنش ها را در خلاف جهت این تنش ها داریم .

تنش برشی با دو اندیس نامگذاری می شود اندیس اول صفحه را نشان می دهد (صفحه عمود بر یک محور)
اندیس دوم امتداد خود تنش را نشان می دهد

جمعاً ۹ مؤلفه تنش داریم .

کمیت هایی که مؤلفه دارند تانسور گویند

تانسور درجه ۰ مثل درجه حرارت که فقط با یک عدد نشان می دهند

هر چیزی که بشود با بردار نشان داد تانسور درجه یک است

آنهایی که ۹ مؤلفه دارند تانسور درجه دوم گویند پس تنش بردار نیست

اگر مقطع عوض نشود تنش بردار است منظور آنکه تنش در همان مقطع

اگر یک صفحه دلخواه در این المان ببینیم می توانیم مولفه های تنش را برحسب این مولفه ها بیان کنیم :

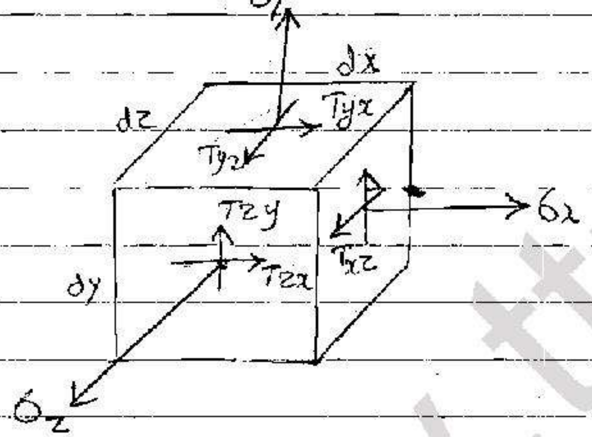
ولی در صفحات دوبعدی می توانیم :

تنش های عمودی در این المان هیچ ربطی به هم ندارند

ولی ثابت خواهیم کرد که تنش های برشی دوبدو با هم برابرند از نظر مقدار ،

$\tau_{yx} = \tau_{xy}$
$\tau_{yz} = \tau_{zy}$
$\tau_{zx} = \tau_{xz}$

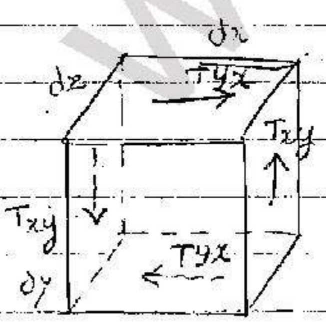
یعنی از ۹ مولفه ، ۶ مولفه از نظر مقدار عددی مستقل می شود :



گشتاور را حول محور z می گیریم :

σ_z ، σ_y و σ_x گشتاور صفر دارند :
τ_{yz}, τ_{xz} موازی محورند :
τ_{zx} ، τ_{zy} عمود محورند گشتاور صفر دارند

با گشتاور صفر از فقط این مولفه ها باقی می مانند :



$$\overbrace{(\tau_{xy})\,dy\,dz}^{dA}\ \overbrace{dx}^{\text{فاصله} \longrightarrow \text{مثل کوپل}}$$

$$(\tau_{yx})\,dz\,dx\ \ dy$$

برای این که گشتاور صفر شود باید این دو گشتاور مساوی هم باشند

این دو مقداراً مساوی اند از نظر علامت مخالف هم اند ؛

$* \quad \tau_{xy} = -\tau_{yx}$

$\Rightarrow \ * \quad \tau_{yz} = -\tau_{zy}$

$* \quad \tau_{xz} = -\tau_{zx}$

این ۹ تنش به صورت یک ماتریس ۳×۳ نوشته می شوند ؛

$\sigma_{xx} = \sigma_x$ — تنش نرمال در $\overset{\text{(محور)}}{\text{صفحه}}$ x و در راستای x

~~σ_x~~	~~σ_y~~	~~σ_z~~

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

یا می توانیم تنش را با یک حرف و دو اندیس مشخص کنیم ؛
xx نیز σ و بقیه نیز τ

$$\text{یا} \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

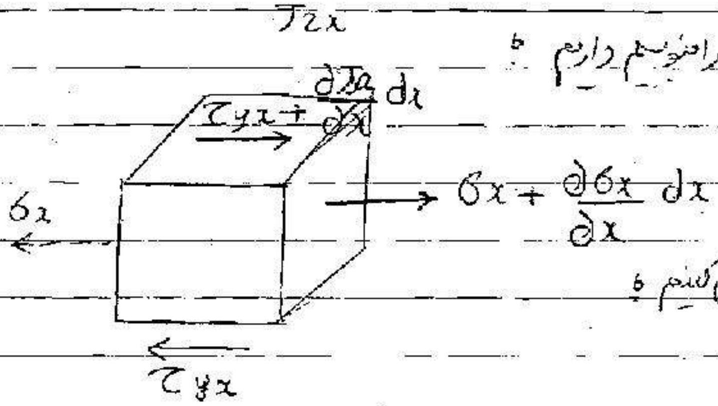
در قطر σ کشش + و فشار منفی است
ولی در مورد τ وقتی ماتریس نشان می دهیم جهت محور را به عنوان جهت τ داریم
نه ساعتگرد یا پادساعتگرد ؛

ماتریس σ ماتریس متقارن قطری است ؛

تنش در حالت کلی ۹ مؤلفه دارد

www.ttmar.ir

اگر بخواهیم روابط بین مشتقات تنش را بنویسیم داریم :

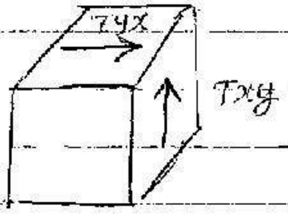

τ_{zx}
$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx$
$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$
σ_x
τ_{yx}

اگر معادله $\sum F_x = 0$ را بنویسیم :

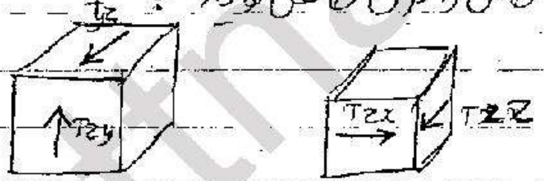
سپس σ را dA ضرب کنیم و روابطی پیدا کنیم :

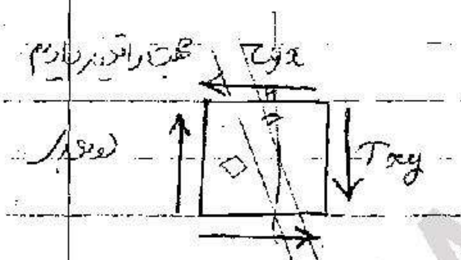
* برش خالص : Pure shear

در این برش ها ۲ مؤلفه های برش موجودند :


τ_{yx}
τ_{xy}

این حالت خاص را برش خالص گویند :

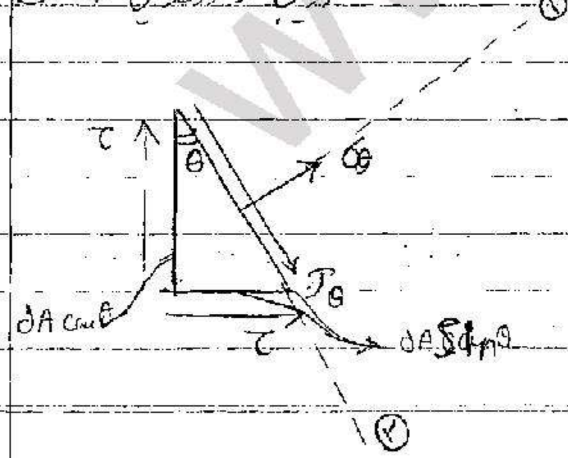

τ_{zy}
τ_{zy}
τ_{zx}
τ_{zz}


جهت را قرار داده ایم
τ_{yx}
دوران
τ_{xy}

عکس
حتماً باید یکی در جهت ساعت و دیگری در خلاف جهت عقربه ها است

* : برش خالص است

در اینجا τ در طرفین + است


①
τ
θ
σ_θ
τ_θ
$dA\cos\theta$
τ
$dA\sin\theta$
②

همه نیروها
در راستای [illegible]
محور صفر قرار دهیم

$$\sum F_{①} = 0$$

$$\sigma_\theta dA + \tau dA \cos\theta \sin\theta + \tau dA \sin\theta \cos\theta = 0$$

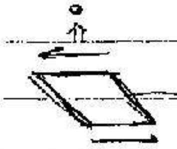
$$\sigma_\theta = -2\tau \sin\theta \cos\theta = -\tau \sin 2\theta$$

www.tfnar.ir

$\Sigma F^{(2)} = 0 \qquad \tau_\theta dA - \tau dA\cos\theta \cdot \cos\theta + \tau dA \sin\theta \cdot \sin\theta = 0$

$$\boxed{\tau_\theta = \tau\cos^2\theta - \tau \sin^2\theta} = \tau\cos 2\theta$$

در $\theta = 45^\circ$ تنش برشی نداریم :



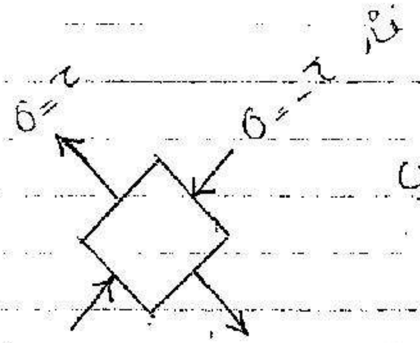
$\Rightarrow \quad \theta = 45$

* $\sigma_{45^\circ} = -\tau$
* $\sigma_{-45} = \tau$

$$\boxed{\tau_{\pm 45} = 0}$$

τ در عقربه ساعت +

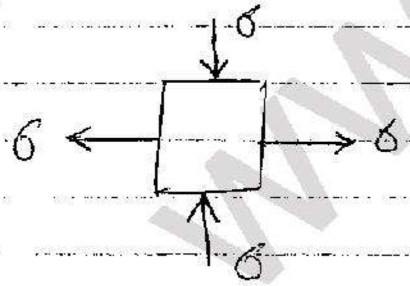
اگر المانی با زاویه ۴۵ درجه بیرون بیاوریم :



یک برش خالص در زوایای ۴۵° می شود یک تنش ۲ محوری

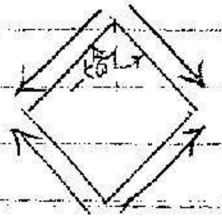
ولی با تنش کششی و فشاری مساوی ، تا برش خالص شود

ولی در تنش ۲ محوری در حالت کلی المانی با برش خالص نداریم :



$$\sigma_\theta = \frac{\sigma x + \sigma y}{2} + \frac{\sigma x - \sigma y}{2}\cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma x - \sigma y}{2}\sin 2\theta$$

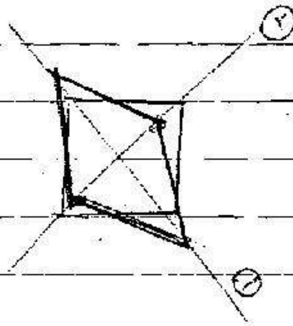


در این حالت

$\sigma_{\pm 45} = 0$

$\tau_{45} = \sigma$

$\tau_{-45} = -\sigma$



یک قطر بزرگتر و یک قطر کوچکتر می شود ؛

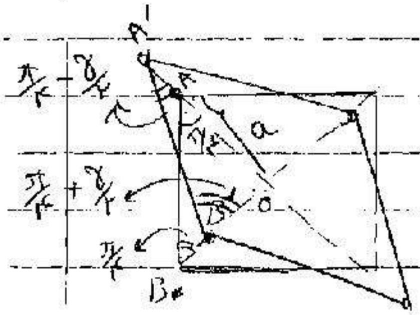
دو محوری

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)$$

$$* \ \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\Big[\overset{\text{در امتداد ①}}{\tau} - \nu(\overset{\text{در امتداد ②}}{-\tau})\Big] = \frac{\tau}{E}(1+\nu) = \varepsilon$$

$$* \ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\Big[-\frac{\tau}{E}(1+\nu)\Big] = -\varepsilon$$



A'
A
a
O
B'
B
B*
$\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{4}$
$\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$

$\overline{OA} = a$

$\overline{AA'} = \varepsilon a$

$\Rightarrow OA' = (1+\varepsilon)a$

$OB = b$

$BB' = -\varepsilon a$

$OB' = (1-\varepsilon)a$

زاویه عوض شده پس تنش برشی داریم   کل زاویه می شود $\frac{\pi}{2}+\gamma$ پس زاویه صاف می شود $\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{4}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{OA'}{OB'}$$

$$\frac{\overset{1}{\tan\frac{\pi}{4}} + \overset{\gamma/2}{\tan\frac{\gamma}{2}}}{1 - \underset{1}{\tan\frac{\pi}{4}}\,\underset{\gamma/2}{\tan\frac{\gamma}{2}}} = \frac{(1+\varepsilon)a}{(1-\varepsilon)a} \Rightarrow \frac{1+\gamma/2}{1-\gamma/2} = \frac{(1+\varepsilon)\cancel{a}}{(1-\varepsilon)\cancel{a}}$$

کوچک است

$\gamma/2 \quad \varepsilon$

$$\boxed{\gamma = 2\varepsilon = \frac{2\tau}{E}[1+\upsilon]}$$

تنش برشی در برش خالص از روابط بالا بدست می آید :

$$A'B' = \sqrt{\overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2}$$

$$= \sqrt{(1+\varepsilon)^2 a^2 + (1-\varepsilon)^2 a^2}$$

$$= a\sqrt{(1+\varepsilon)^2 + (1-\varepsilon)^2}$$

$$\boxed{= \underbrace{a\sqrt{2}}_{\text{طول اولیه}} \sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

سری ای $\Rightarrow \sqrt{1+\varepsilon^2} = (1+\varepsilon^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \cdots$

ε مقدار کوچک دارد پس می توانیم بنویسیم :

$$\sqrt{1+\varepsilon^2} = 1$$

* پس ضلع طولش عوض نمی شود :

نکته

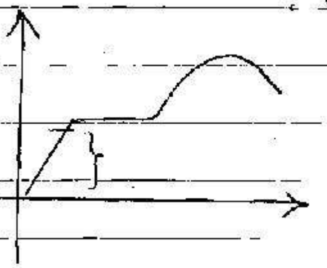
$$\boxed{\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 \quad \text{در برش خالص}}$$

$$\boxed{\varepsilon_z = -\frac{\upsilon}{E}(\tau - \tau) = 0}$$

www.tnar.ir

تنش خطی در برش خالص ε ها صفرند ولی تنش برشی داریم :

تمام محاسبات ما مربوط به قسمت خطی منحنی $\sigma - \varepsilon$ بوده است :



و از آنجا نتیجه گرفتیم که γ و τ هم رابطه خطی دارند :

با توجه به این رابطه : $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$

می توانیم رابطه زیر را برای γ و τ بنویسیم :

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

که $\Rightarrow G$ مدول الاستیسیته برشی

ضریب ارتجاعی برشی

مدول یانگ برشی

مثلاً در مورد فولاد :

$$G \simeq 0/8 \times 10^{5}\ \text{MPa}$$

$$\simeq 0/8 \times 10^{6}\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

E ، G و μ همه ثابتهای مختلف برای مصالح مختلف اند ؛ ولی یک معادله بین این ۳ هست که هر ۲ تا شان مستقل اند :

www.ttrar.ir