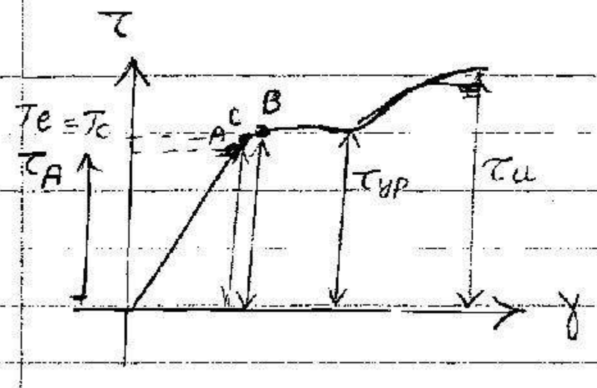



قسمت خطی را اثبات کردیم ولی بقیه منحنی
با تجربه ثابت می شود قسمت آخر منحنی
دیگر روند پایین نداریم روند بالا است !

* $\tau_A$ حد تناسب برشی

* $\tau_{yp}$ تنش تسلیم برشی

* $\tau_u$ تاب برشی - مقاومت نهایی برشی - تنش نهایی برشی

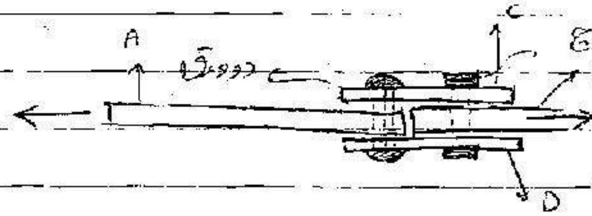
* $\tau_c = \tau_e$ حد الاستیک برشی

این مقادیر در کتب مختلف متفاوت

* تجربه نشان داده که این مقادیر بین ۰/۵۵ تا ۰/۶ مقادیر مربوط به نمودار تنش کششی هستند

۸۴,۱۲,۲۲ به نام خدا

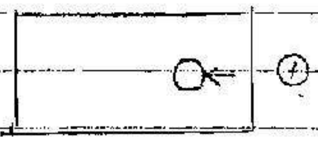
پیچ ها، پرچ ها :



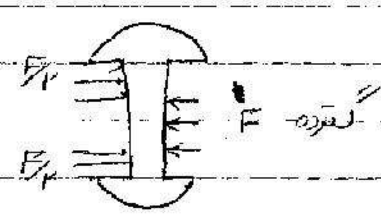

یک صفحه با طول زیاد امکان ندارد که به طور پیوسته ساخته شود باید از اتصال تعداد قطعات ساخته شود.

وقتی نیروی محوری به پرچ وارد داریم :

نیرو در سطح پیچ به پیچ وارد می شود :



بنابراین بقیه صفحه نیرو نخواهد داشت :

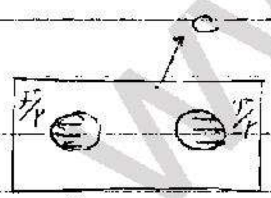



بین صفحه و پیچ هنگامی که $F/2$ به پیچ وارد شود

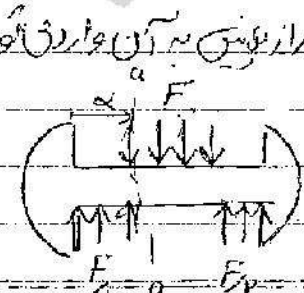
به صفحه تکه های نیرو در خلاف جهت وارد می شود :

①


نیرو از طریق پیچ به صفحه وارد می شود.

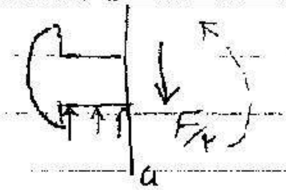



چون پیچ شکل یک تیر عمل می کند که یک مقدار نیرو از بالا و یک مقدار از پایین به آن وارد می شود :




در هر مقطع تیر نیروی برشی داریم :

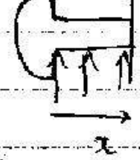
در برش a-a بیشترین نیروی برشی را داریم با اندازه $F/2$




درست در وسط پیچ نیروی برشی صفر می‌شود چون $F$ و $F/2$ اثر هم را از بین می‌برند :

اگر فرض کنیم تنش برشی در مقطع یکنواخت است داریم : مگر اگر نیروی برشی یکنواخت باشد !

$$\tau = \frac{F/2}{A}$$




$$\Rightarrow V = \frac{x}{a} \cdot \frac{F}{2}$$

$x = a$ نیروی برشی $F/2$ است و max می‌شود

یک نوع تنش در اینجا تنشی است که از پیچ به ورق یا از ورق به پیچ وارد می‌شود :

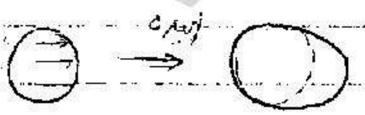
این تنش را تنش لهیدگی گویند که بین دو جسم اثر می‌کند معمولاً از جنس فولاد است تنش یا می

نیست : bearing stress

معمولاً جنس ورق نرم‌تر است بنابراین لهیدگی بیشتر ورق را له می‌کند مگر اینکه جنس ورق و پیچ یکی

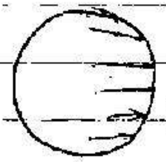
باشد :

پیچ‌های فولادی معمولاً نسبت به فولاد ورق‌ها سخت‌ترند.





وقتی قطر پیچ درست مساوی سوراخ نباشد سوراخ بزرگتر از پیچ :



$\sigma_b = \frac{F'}{tD}$ تنش لهیدگی

t ضخامت ورق
D قطر دایره ؛

$F'$ نیروی متناظر با ورقی است که می‌خواهیم لهیدگی آن را محاسبه کنیم ؛

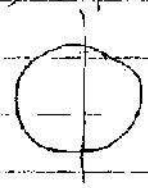
مثلا در مورد ورق B می‌شود F در مورد دو ورق بالا و پایین می‌شود $\frac{F}{2}$

اگر ۳ پیچ داشته باشیم نیروی F تقسیم می‌شود هر کدام $\frac{F}{3}$ در این صورت نیروها به $\frac{F}{6}$ و $\frac{F}{6}$ دیگر تقسیم می‌شود

پیچ نباید خیلی نزدیک به لبه ورق باشد چون ممکن است باعث ایجاد ترک در ورق شود ؛
آیین نامه آن را تعیین می‌کند ؛

تنش لهیدگی یکنواخت نیست غیر یکنواختی آن از تنش برشی بیشتر است ؛

در تنش لهیدگی ما صفحات فرضی را در نظر گرفتیم تصور کنیم پیچ توانسته را صفحه داشتیم در نظر بگیریم ؛
یک مستطیل ایجاد می‌شود .



n پیچ یا ۳ تا پیچ $= \tau = \frac{F}{2An}$

ممکن است در دو ردیف پیچ بگذاریم

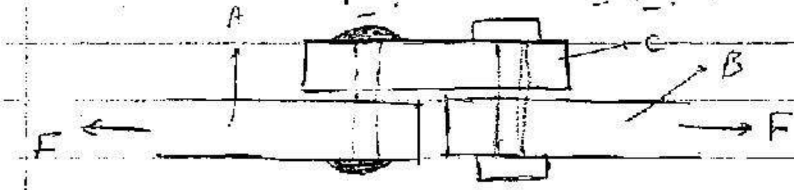
$\tau = \frac{F}{2n}$

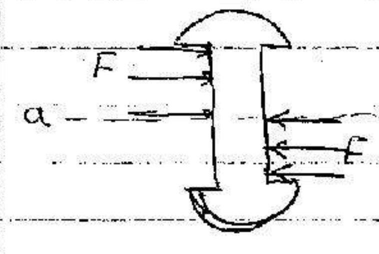
همیشه نصف نیرو در یک مقطع پیچ وارد می‌شود ؛

در شکل قبل برای ورق های A و B: $F' = F/n$

D و C ״: $F' = \frac{F}{2n}$

ممکن است به جای این که دو طرف ورق بگذاریم یک طرف ورق بگذاریم ؟



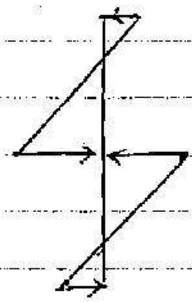

در این مقطع تمام نیروی F را داریم

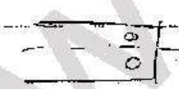
$$\tau = \frac{V}{A}$$

$$\tau = \frac{F}{An}$$

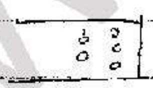
این اتصال ، اتصال خوبی نیست ؛ چون ورق را زیر اثر یک لنگر قرار می دهند ؛
تعادل لنگری ندارد .

بنابراین ، این توزیع عوض می شود ؛ به طوری در می آید که توزیع متقارن شود

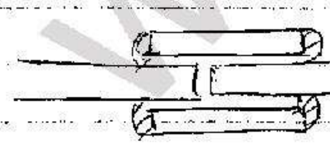




همه این پیچ ها در حالت متقارن اند .

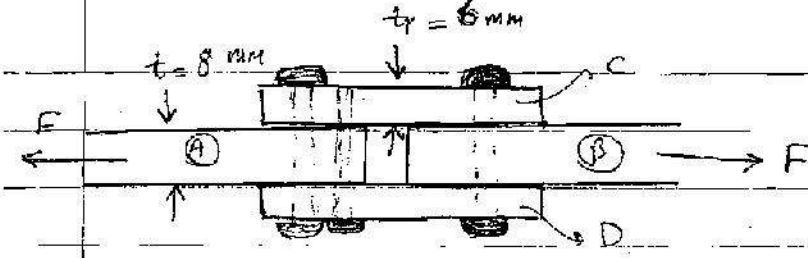


لازم است که پیچ ها در یک امتداد باشند ؛



ممکن است به جای پیچ از جوش استفاده شود .

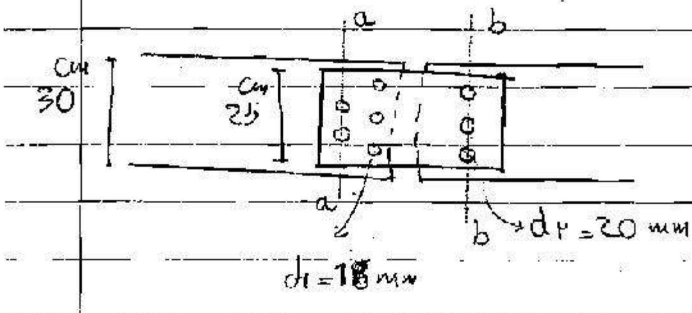
مثال 6 حداکثر F ؟




ورق‌ها (A,B) $\sigma_w = 1500\ kg/cm^2$

پیچ‌ها (A,B) $\tau_w = 1200\ kg/cm^2$

لهیدگی (A,B) $\sigma_{bw} = 1800\ kg/cm^2$




حل — A:

اول محاسبه در مورد ورق‌ها :

نیرو بین پیچ‌ها تقسیم می‌شود $\frac{1}{5}$ به هر پیچ

یعنی به دو پیچ اول می‌رسیم $\frac{2}{5}F$ می‌رود و بقیه $\frac{3}{5}$ بین سه تا پیچ تقسیم می‌شود.

مقطع a-a خطرناکترین مقطع است.

$$\sigma_w \geq \frac{F}{A}$$

$$1500 \geq \frac{F}{(30-\underbrace{2\times 1.6}_{\text{جای دو تا پیچ}})\times 0.8} \Rightarrow F \leq 32160$$

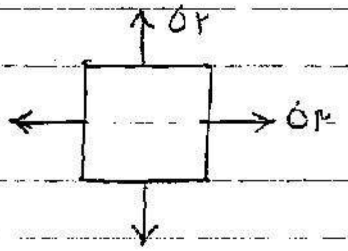
B

$$1500 \geq \frac{F}{(30-3\times 2)\times 0.8} \Rightarrow F \leq 28800$$

با توجه به محاسبات بالا معلوم می‌شود که سمت راست اتصال از نظر تنش خطرناکتر است.

بنابراین سمت راست و قطعات C ، D را در نظر می‌گیریم.

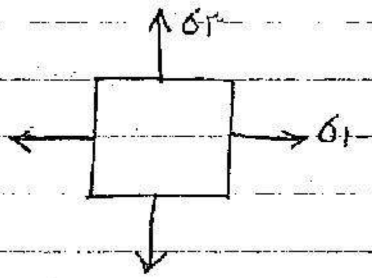
$$1500 \geq \frac{F/2}{(25-3\times 2)\times 0.6} \Rightarrow F \leq 34200$$



$A$ یا $C\,|\,\begin{smallmatrix}\sigma_3\\0\end{smallmatrix}$ , $B\,|\,\begin{smallmatrix}\sigma_2\\0\end{smallmatrix}$

دایره مور آن را می کشیم

حال اگر از بعد دیگر به المان نگاه کنیم:



$A\,|\,\begin{smallmatrix}\sigma_1\\0\end{smallmatrix}$ , $C\,|\,\begin{smallmatrix}\sigma_3\\0\end{smallmatrix}$

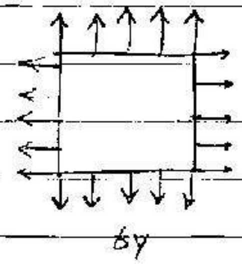
دایره جدید شامل هر دو دایره است:

اگر یک صفحه دلخواه عمود بر این صفحه رسم کنیم تمام تنش های آن روی دایره بزرگ قرار دارد:

اگر یک صفحه ای شامل هر ۳ امتداد باشد نقطه نظیر آن در دایره مور در بخش هاشور خورده خواهد بود.

بزرگترین تنش برشی $\tau_{max} = \pm \dfrac{\text{کوچکترین تنش اصلی} - \text{بزرگترین تنش اصلی}}{2}$ ← شعاع دایره بزرگ

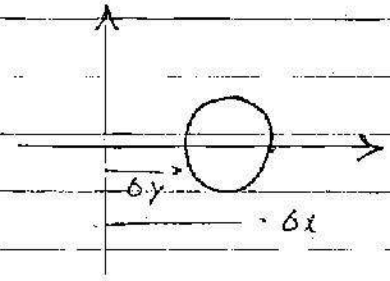
به طور کلی در هر حجمی یا هر المانی که به شکل دو بعدی می کشیم در واقع ۳ بعدی است مثلاً در مسئله دو بعدی تنش صفر است یا در برش خالص تنش های اصلی را حساب کردیم یک تنش اصلی بوده صفحه است که تنش آن صفر است.




یک ورق نازک فولادی
را از دو طرف می‌کشیم

$\sigma_z = 0$

$$* \quad \text{بزرگترین تنش برشی} = \frac{\text{کوچکترین تنش اصلی} - \text{بزرگترین تنش اصلی}}{2}$$



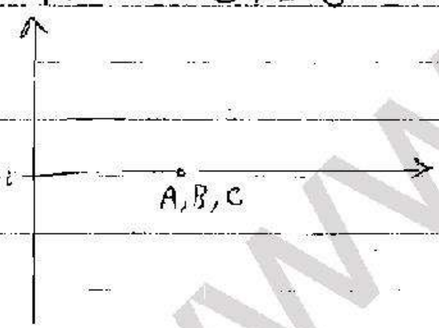

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_x - 0}{2}$$

حتماً به مؤلفه سوم توجه شود!

تنش کروی:

حالتی که هر ۳ مؤلفه عمودی تنش با هم مساوی باشند:

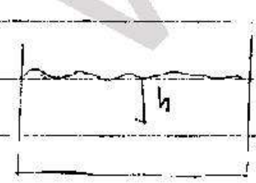
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$




هر صفحه‌ای در این حالت بگیریم
T صفر است:

تنش عمودی در هر صفحه‌ای همان σ است

به این تنش، تنش هیدرواستاتیک هم گفته می‌شود:




$\text{فشار} = \gamma h$

فشار در مایع به امتداد
بستگی ندارد

رابط بین تنش و کرنش در حالت کلی 8

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

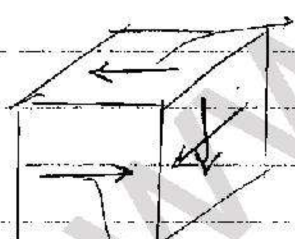
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$



این تنش زاویه قائم را تغییر می‌دهد

این τ زاویه صفحه خودش را تغییر نمی‌دهد بلکه زاویه صفحه بالایی را تغییر می‌دهد

در تنش سطح اصلی ۳ بعد توجه کنیم ۳ جهت ε داریم کوچکترین بیشترین تا $\tau_{max}$ درست آید.

تنش کروی $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma - \nu(\sigma+\sigma)\right]$$

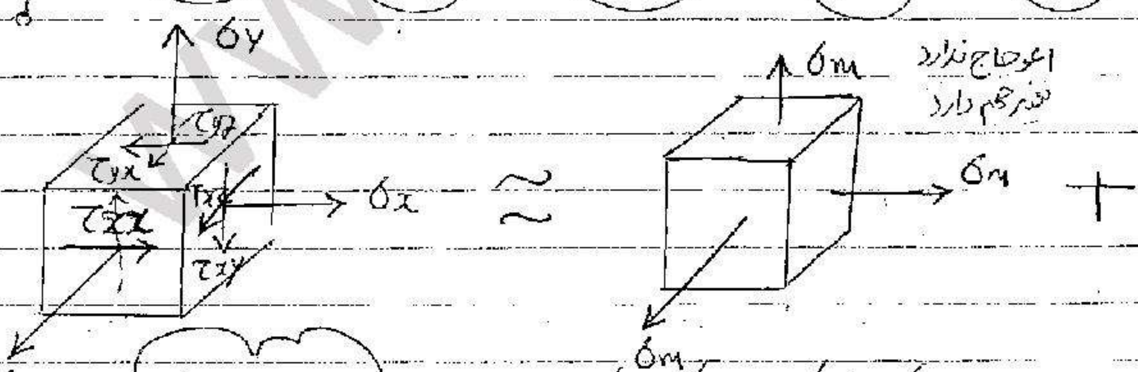
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_x = \frac{\sigma}{E}(1-2\nu)$$

تغییر حجمی $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \dfrac{3\sigma}{E}(1-2\nu)$ *

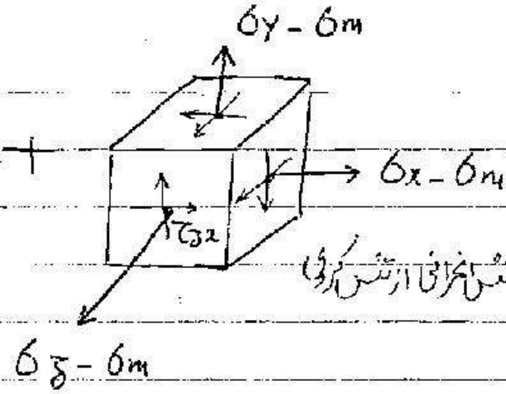
رابطه بین تنش کروی و تغییر حجمی

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma}{K} \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

* K : مدول ارتجاعی حجمی یا ضریب الاستیسیته حجمی



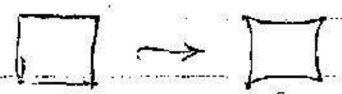

x می‌توان به صورت یک تنش کروی در نظر گرفت که $\sigma_m$ برابر است با $\dfrac{\sigma_z+\sigma_x+\sigma_y}{3}$.




تغییر حجم ندارد
اعوجاج دارد
تنش انحرافی از تنش کروی

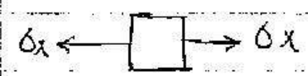
* تنش کروی فقط تغییر حجم دارد اعوجاج ندارد .

* برش (دو) تغییر حجم ندارد و اعوجاج دارد .

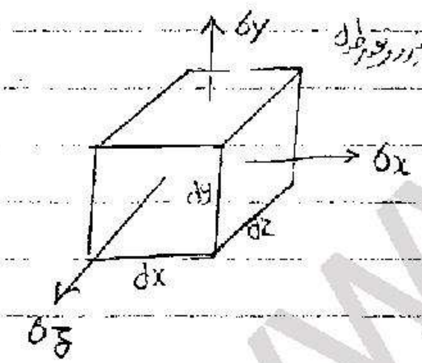


اعوجاج
ناشی از تغییر شکل جزئی است
(Distortion)

انرژی کرنشی تحت تنش‌ها :




$$u = \frac{\sigma_x^2}{2E}$$ انرژی کرنشی واحد حجم




به خاطر خطی بودن نیرو و تغییر طول — نیرو — مقدار تغییر طول

$$\frac{1}{2}\sigma_x (dy\,dz) \times \varepsilon_x\,dx + \frac{1}{2}\sigma_y (dx\,dz)\cdot \varepsilon_y\,dy$$

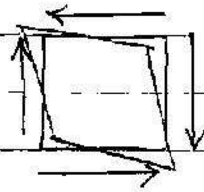
$$+\frac{1}{2}\sigma_z (dx\,dy)\cdot \varepsilon_z\,dz = U$$ کل انرژی داخل المان

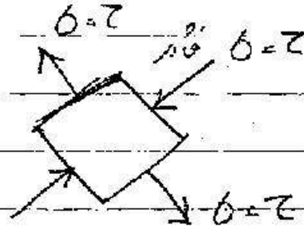
انرژی در واحد حجم $u = \frac{U}{dx\,dy\,dz} = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z)$

$$\boxed{u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\right]}$$

ناشی از تنش عمودی

انرژی ناشی از تنش برشی

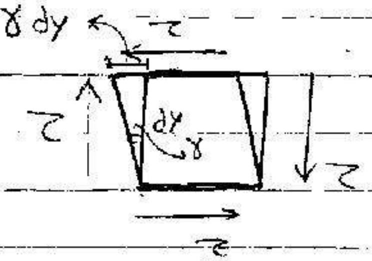



می شود المان ۴۵° در نظر گرفت

با استفاده از فرمول بدست آمده انرژی کششی می شود

در روش دوم شکل تغییر شکل یافته را طوری دوران می دهیم که ضلع پایینی منطبق بر شکل اصلی شود؛




فقط نیروی بالا کار انجام می دهد با اندازه $\gamma dy$

$$U = \frac{1}{2}(\tau\, dx\, dy)\cdot \gamma\, dy$$

در حالت برش خالص

در واحد حجم $u = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$ ← مدول الاستیسیته برشی

ناشی از ۳ تا برش $u = \frac{1}{2G}\left[\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right]$

کل $u = u_1 + u_2$

* فقط تنش برشی هست که اعوجاج ایجاد می کند یعنی جسم را از ۳ طرف با تنش های یکسان بکشیم یا فشار بدهیم

در حالت های بالا فقط در محور عمودی اعوجاج نداریم در صفحات دیگر اعوجاج داریم؛

۸۳/۱/۲۷ به نام خدا ج ۳

آنالیز تنش :

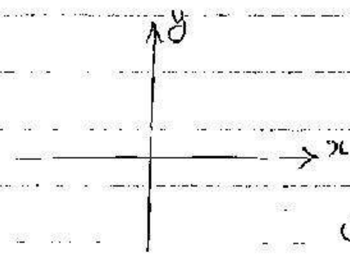
تنش ۹ مؤلفه دارد ۳ تا تنش از نوع خطی : $\varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z$

۶ تا تنش برشی : $\gamma_{yx} , \gamma_{xy}$

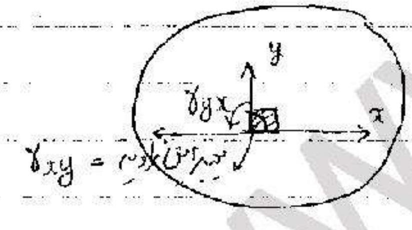
$\gamma_{yz} , \gamma_{zy}$

$\gamma_{zx} , \gamma_{xz}$

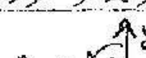
* فرق $\gamma_{xy}$ , $\gamma_{yx}$ :

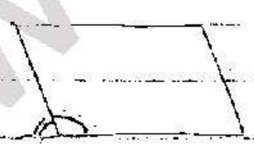



* $\gamma_{xy}$ تغییر زاویه قائمه که بین امتداد اول x و y است




* $\gamma_{yx}$ اول محور y بعد محور x را عمود کنیم بر آن در جهت مثلثاتی



این دو زاویه همیشه با هم تغییر می‌کنند پس $\gamma_{yx}$ و $\gamma_{xy}$ با هم مساوی ولی در خلاف جهت هم اند

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = -\gamma_{yx} \\ \gamma_{yz} = -\gamma_{zy} \\ \gamma_{zx} = -\gamma_{xz} \end{cases}$$

* محور اول اشغال می‌شود محور دوم فقط امتداد را نشان می‌دهد بطوریکه از محور اول در جهت (پادساعتگرد) مثلثاتی حرکت کنیم محور دوم بدست می‌آید .

می‌توان ثابت کرد که تنش هم ۳ امتداد اصلی دارد مثل تنش که در آن امتدادها تنش برشی نداریم.

یعنی این ۳ امتداد عمود بر هم تحت هر نوع تغییر شکلی، زاویه بین آنها تغییر نمی‌کند.

کرنش خطی در امتداد یکی از آنها بیشترین و در امتداد یکی دیگر کوچکترین مقدار است.

در حالت کلی امتدادهای اصلی تنش و کرنش بر هم منطبق هستند.

* برای موادی که تنش کرنش خطی دارند در محدوده خطی محورهای اصلی تنش و کرنش با هم برابرند.

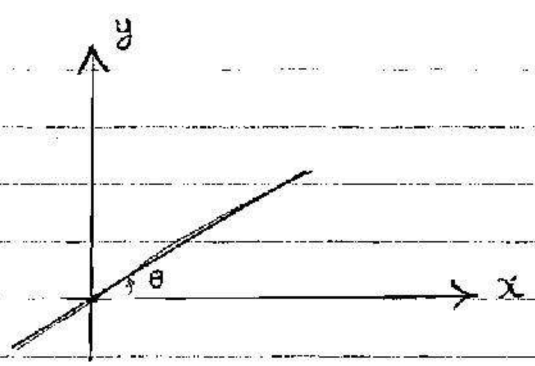
* کرنش مسطح & plane strain

حالتی از کرنش است که $\varepsilon_x$ , $\varepsilon_y$ , $\gamma_{xy}$ , $\gamma_{yx}$ داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon_x , \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} = -\gamma_{yx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{yz} = -\gamma_{zy} = 0 \\ \gamma_{zx} = -\gamma_{xz} = 0 \end{cases}$$

در روابط مربوط به تنش مسطح اگر $\sigma \to \varepsilon$ و $\tau \to \gamma/2$ تبدیل شود همه روابط درست خواهند بود



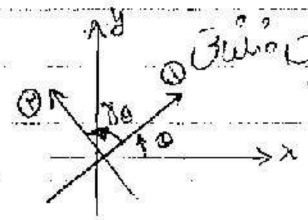
- حالا می توانیم در یک امتداد دیگر که با $x$ زاویه $\theta$ می سازد کرنش ها را بیابیم $\varepsilon$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$\gamma_\theta$ یعنی محور اول با زاویه $\theta$ انتخاب شده است محور دوم عمود بر آن در جهت مثلثاتی



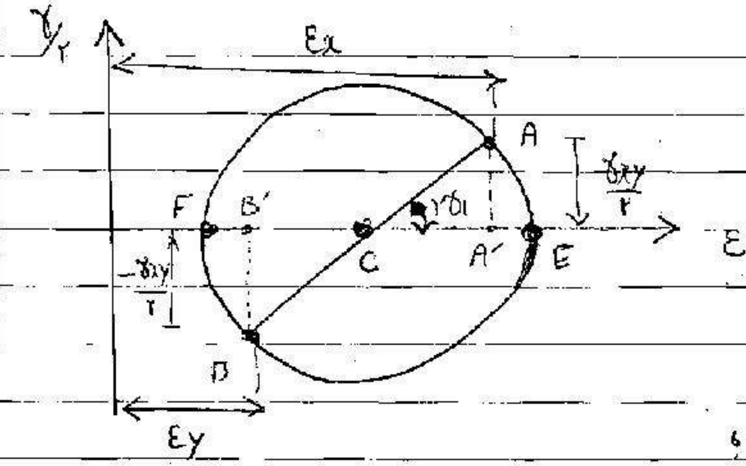
$$\tau \rightarrow \gamma/2$$

$$\frac{\gamma_\theta}{2} = \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

برای کرنش هم می توانیم دایره مور داشته باشیم $\varepsilon$

$A \left| \begin{matrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right. \quad ; \quad B \left| \begin{matrix} \sigma_y \\ -\tau_{xy} \end{matrix} \right.$

حال $\Rightarrow \quad A \left| \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{matrix} \right. \quad$ و $\quad B \left| \begin{matrix} \varepsilon_y \\ -\frac{\gamma_{xy}}{2} \end{matrix} \right.$




نقاطی که روی دایره اند نظیر محورها هستند ؛

مرکز دایره $C \left| \begin{array}{l} \dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \\ 0 \end{array} \right.$

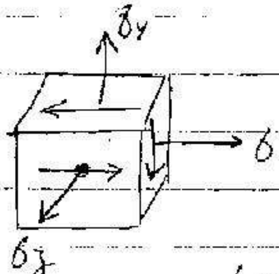
$$R=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\tan 2\theta_1=\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}$$

$$* \quad \varepsilon_{max}=\overline{OC}+R=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}+\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}$$

$$* \quad \varepsilon_{min}=OF=\overline{OC}-R=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

* اگر $\varepsilon_x , \varepsilon_y$ و $\varepsilon_z$ را داشته باشیم تنش دیگر مسطح نیست ولی می‌توان روابط را بکار برد $\gamma_{xz}$ - $\gamma_{xy}$




* اندازه گیری کرنش «کرنش سنج» (strain guage)

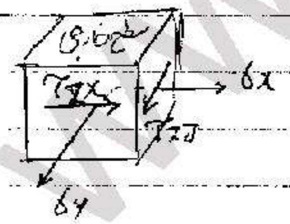
یک سیمی را به جسمی که می‌خواهیم کرنش آن را اندازه بگیریم در همان جهت می‌چسبانیم وقتی طول زیاد شود مقاومت سیم زیاد و شدت جریان کم می‌شود طول سیم باید کوچک باشد وگرنه تغییر طول متوسط را به ما می‌دهد؛ هنوز دستگاهی اختراع نشده که کرنش برشی را اندازه بگیرد؛

می‌توانیم $\varepsilon$ را در ۳ امتداد اندازه بگیریم $\varepsilon_x$ و $\varepsilon_y$ و $\varepsilon_\theta$ را داریم $\gamma_{xy}$ بدست می‌آید؛

معمولاً سیم را روی سطح سازه می‌گذارند وگرنه باید هنگام ساخته شدن سیم را داخل بگذاریم

جایی که کرنش را اندازه می‌گیریم تنش مسطح خواهیم داشت، چون سیم را به سطح خارجی وصل می‌کنیم

و اگر در سطح خارجی نیرویی وارد نشود تنش برشی موجود در آن صفر است.




$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_z + \sigma_y)\right)$$

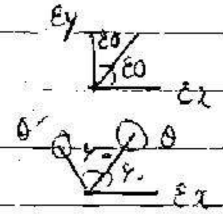
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

* وقتی تنش مسطح باشد کرنش مسطح نیست برعکس

چون $\varepsilon_z$ داریم.



کرنش سنج ها را به صورت زاویه ۴۵° یا ۶۰° به هم وصل می کنند

در ۴۵ می شود یکی را $\varepsilon_x$ و $\varepsilon_y$ و دیگری را بدست آورد

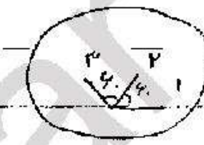
در حالت ۶۰° رابطه را دو بار می توان نوشت و $\varepsilon_y$ و $\gamma_{xy}$ را بدست آورد .

مثال ۸ در یک نقطه از سازه ای کرنش ها را در ۳ امتداد با زاویه ۶۰° اندازه گرفتیم و مقادیر زیر بدست آمده است ؛

$\varepsilon_1 = 200 \times 10^{-6}$ یا ۲۰۰ میکرواسترین micro strain $= 10^{-6}$

$\varepsilon_2 = -400 \times 10^{-6}$

$\varepsilon_3 = 300 \times 10^{-6}$



$\left\{ \begin{array}{l} E = 2 \times 10^{6} \ \frac{kg}{cm^2} \\ \nu = 0.3 \end{array} \right.$

حل – تنش های اصلی را می خواهیم پیدا کنیم ؛ تنش برشی max ؟

اول باید در دو امتداد x و y کرنش ها را داشته باشیم تا بتوانیم دایره مور را رسم کنیم ؛

$\varepsilon_x = \varepsilon_1 = 200 \times 10^{-6}$

دو بار رابطه $\varepsilon_\theta$ را می نویسیم ؛

$$\varepsilon_{60} = \varepsilon_2 = \frac{200 \times 10^{-6} + \varepsilon_y}{2} + \frac{200 \times 10^{-6} - \varepsilon_y}{2} \cos 120 - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 120 = -400 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{120} = \varepsilon_3 = \frac{200 \times 10^{-6} + \varepsilon_y}{2} + \frac{200 \times 10^{-6} - \varepsilon_y}{2} \cos 240 - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 240 = 300 \times 10^{-6}$$

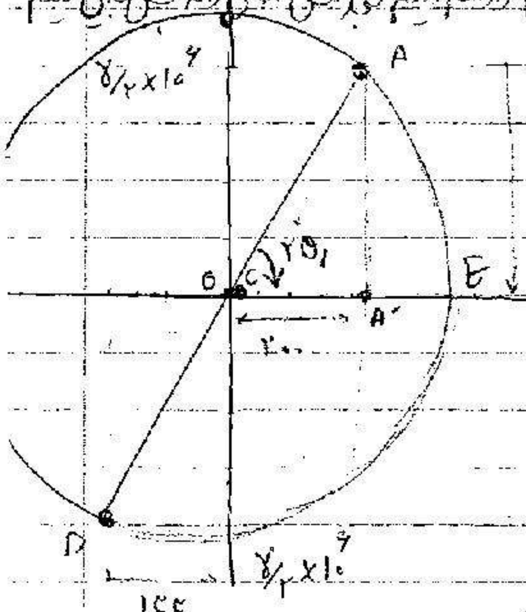
$$\Rightarrow -400 \times 10^{-6} = 50 \times 10^{-6} + \frac{3}{4} \varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy}$$

$$300 \times 10^{-6} = 50 \times 10^{-6} + \frac{3}{4} \varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_y = -133 \times 10^{-6} \qquad \gamma_{xy} = 808 \times 10^{-6}$$

دو راه حل داریم: یکی این که کرنش های اصلی را به دست آوریم بعد تبدیل به تنش کنیم

یا از اول به تنش تبدیل کنیم و دایره مور تنش را رسم کنیم بعد تنش اصلی را به کرنش تبدیل کنیم




ساعتگرد

$$A \left| \begin{array}{ll} 200\times10^{-6} = 200 & \varepsilon_x \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} = 404 & \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{array}\right.$$

$$B \left| \begin{array}{ll} -133 & \varepsilon_y \\ -404 & \frac{\gamma_{yx}}{2} \end{array}\right.$$

* C و O منطبق نیستند:

$$\overline{OC} = \frac{200-133}{2} = 33.5$$

$$AB \text{ یا } \overrightarrow{CA'} = \frac{200+133}{2} = 166.5$$

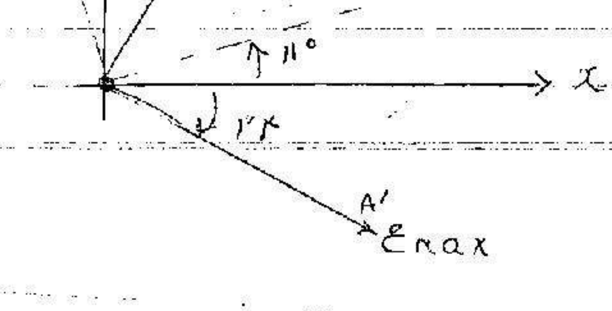
$$R = \sqrt{\overline{CA'}^2 + AA'^2} = \sqrt{166.5^2 + 404^2} = 437$$

$$10^{6} \times \varepsilon_{max} = 33.5 + 437 = 470.5$$

$$10^{6} \times \varepsilon_{min} = 33.5 - 437 = -403.5$$

$$10^{6} \times \frac{\gamma_{max}}{2} = 437 \Rightarrow \gamma_{max} = 874 \times 10^{-6}$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{404}{166.5} \Rightarrow \theta_1 = 34$$




کرنش برشی بین دو خط چون max مقدار را دارد

چون A و A' در دایره ۹۰° اختلاف دارند پس در صفحه ۴۵° پس زاویه ... می شود

$\Rightarrow 11°$

$\varepsilon_{max} = ۴۷۰٫۵ \times 10^{-6}$

$\varepsilon_{min} = -۲۰۲٫۵ \times 10^{-6}$

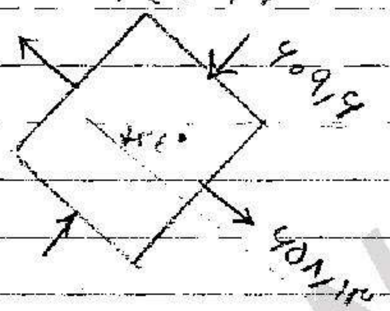
$\gamma_{max} = ۸۷۴ \times 10^{-6}$

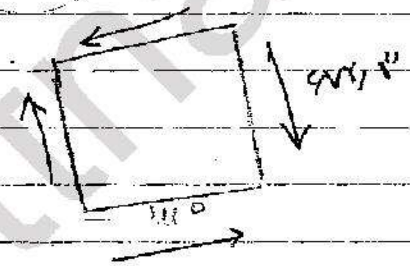
(۱) $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \Rightarrow ۴۷۰٫۵ \times 10^{-6} \times ۲ \times 10^{6} = \sigma_{max} - ۰٫۳\sigma_{min}$

$\varepsilon_2 = \dfrac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \Rightarrow -۲۰۲٫۵ \times 10^{-6} \times ۲ \times 10^{6} = \sigma_{min} - ۰٫۳\sigma_{max}$

$\gamma_{max} = \dfrac{\tau_{max}}{G}$ که $G = \dfrac{E}{۲(1+\nu)}$

$\Rightarrow \dfrac{۸۷۴ \times 10^{-6} \times ۲ \times 10^{6}}{۲(1+۰٫۳)} = \tau_{max}$





از نظر E تا $\tau_{max}$ در دایره ۹۰° یعنی در واقع ۴۵° اختلاف وجود دارد

که در این جهت در واقع عمود بر آن نشان می‌دهد + است که این‌ها متفاوت است:

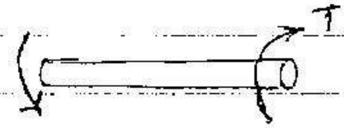
* چون از E تا B′ باید ۴۵° در جهت:

حرکت پس در جهت عقربه‌های ساعت +

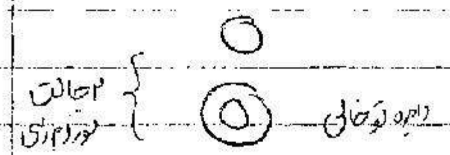
است.

۸۴/۱/۲۹ بنام خدا 14 C

# Torsion پیچش




شرایط مسئله :




۱- تغییر شکلها کوچکند

۲- تنش ها (پیچش ها) در محدوده خطی منحنی تنش - کرنش قرار دارند

* اگر چنین وضعیتی را داشته باشیم با تجربه و مطالعات دقیقتر نشان می‌دهد که :

۱- محور میله مستقیم باقی می‌ماند

۲- مقطع میله به صورت مدور باقی می‌ماند

۳- طول میله تغییر نمی‌کند

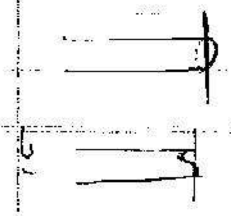
۴- (اندازه قطر) میله تغییر نمی‌کند

۵- مقاطع اولیه عمود بر محور میله ، مسطح باقی می‌مانند شکل تغییر شکل

* نقاط مختلف مقطع حرکت عمود بر مقطع ندارند

warping عدم تغییر شکل

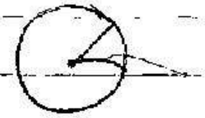
تاب برداشتن مقطع
یعنی مقطع از حالت
مسطح خارج می‌شود
از حالت عمود خارج شود



اعوجاج یا تاب برداشتن متفاوت است

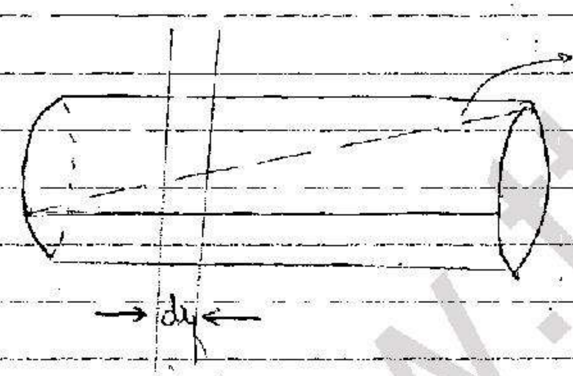
اعوجاج تغییر زاویه قائمه ناشی از تنش برشی است ولی تاب برداشتن فقط مقطع از حالت مسطح خارج می شود

۶ـ هر قطر یا هر شعاع به صورت شعاع یا قطر باقی می ماند 8

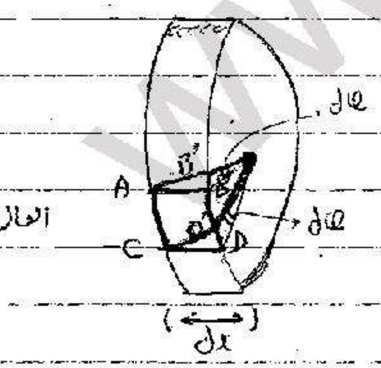


این حالت پیش نمی آید

دلیل این است که میله از بی نهایت صفحه نازک صلب تشکیل شده که هنگام پیچش این صفحات روی هم دوران می کنند خود صفحات هیچ تغییر شکلی ندارند فقط نسبت به هم دوران می کنند



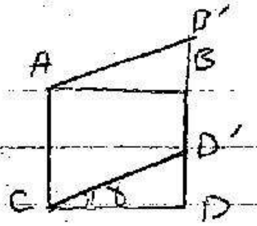

بعد از تغییر شکل
خط افقی به صورت
خط چین در می آید




المان ABCD به صورت AB'D'C در آمده است

چون صفحه صلب است همه نقاط به صورت صلب یک دوران دارند $d\varphi$

$$\overline{BB'} = \overline{DD'} = R\,d\varphi \Longrightarrow \boxed{\overline{B'D'} = \overline{BD}}$$




به دلیل کوچکی تغییر شکل‌ها $DD'$ یا $BB'$

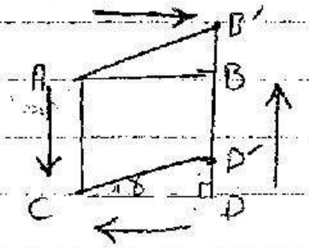
نسبت به $DC$ و $BA$ ؛

زاویه $\gamma$ زاویه کوچکی خواهد بود نسبت داریم ؛

$$D'C = DC$$

* نتیجه: در این المان بعد از تغییر شکل تغییر طولی اتفاق نیفتاده است ؛

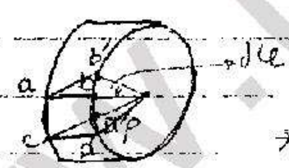
چون فقط تغییر زاویه قائمه داریم و برشی است پس المان تحت برش خالص است.



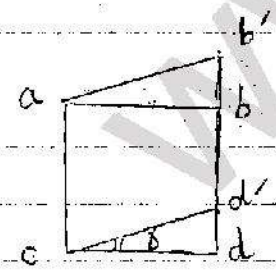

$$\boxed{\gamma = \frac{DD'}{DC}} = \frac{R\,d\varphi}{dx}$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ را دوران در واحد طول گویند ؛

* اگر به جای حلقه با شعاع $R$ یک حلقه با شعاع $\rho$ در نظر بگیریم ؛




* $\overline{bb'} = \overline{dd'} = \rho\, d\varphi$
* $\overline{b'd'} = \overline{bd}$
* $cd = cd'$




$\gamma$ با لایه‌ها متفاوت است $\gamma = \frac{\overline{dd'}}{cd} = \frac{\rho\, d\varphi}{dx}$ تا برحسب دوران در واحد طول بدست آید

* یعنی مقدار γ در دوران با فاصله از مرکز مقطع متناسب است

$\frac{d\varphi}{dx}$ برای تمام نقاط مقطع مقدار ثابتی است ؟

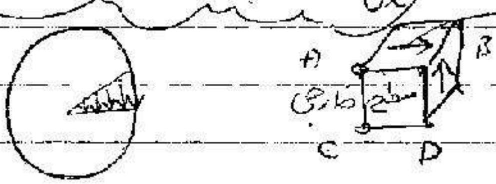
تنش برشی در مرکز صفر است هر چه از مرکز دور شویم به طور خطی زیاد می‌شود

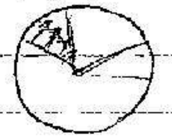
* یعنی وقتی میله را می‌پیچانیم محور میله تحت پیچش قرار می‌گیرد وقتی از محور دور شویم تنش برشی زیاد می‌شود ؟

$$* \quad \tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

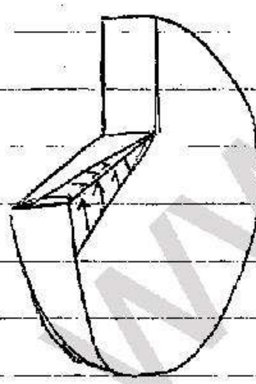
عمود بر مقطع است

شامل محور میله



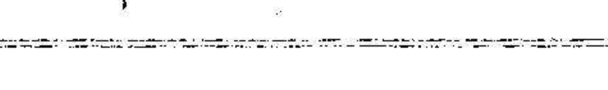
عمود بر شعاعی است که از آن نقطه رد می‌شود



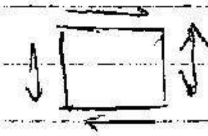
یک مؤلفه در امتداد طول میله

یک مؤلفه عمود بر محور میله

مثلاً در طول وقتی تحت پیچش قرار می‌گیرد با یک مقطع سطح قطع خواهد شد



اگر استوانه چوبی باشد الیاف چوب در امتداد طول مقاومت زیاد دارند ولی چسبندگی در این راستا کمتر است



الیاف از هم جدا می‌شوند تحت برش بالا و پایین

در زوایای ۴۵° ما کشش max داریم یا همان مقدار برش max

" -۴۵ فشار " " "

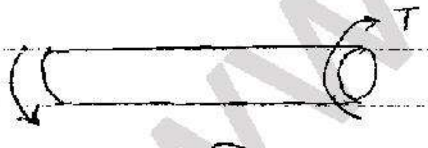
گچ و آهک در مقابل کشش ضعیف اند یک میله گچی تحت پیچش قاعدتاً باید تحت کشش از بین برود

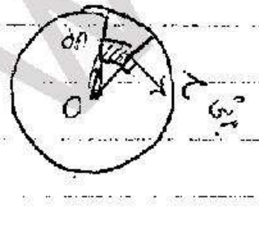
زاویه قطع میله گچی تقریباً ۴۵° خواهد بود چون تحت کشش قطع می‌شود

در مورد فشار اجسام خیلی نازک فشار را تحمل نمی‌کنند و تحت فشار خم می‌شوند

* وقتی جسم قطع یا خراب شد دیگر روابط برقرار نخواهد بود.

محاسبه توزیع 8.





$$dF = \tau \, dA$$

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

$$dF = G\rho \frac{d\varphi}{dx} \cdot dA$$

حول o: $dM_o = (dF)\rho = G\rho^2 \frac{d\varphi}{dx} dA$

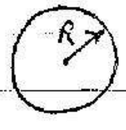
$$T = \int_A dM_o = \int G\rho^2 \frac{d\varphi}{dx} dA = G\frac{d\varphi}{dx} \int_A \underbrace{\rho^2 dA}_{\text{ممان اینرسی}}$$

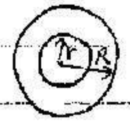
$$\boxed{I_o \text{ یا } J_o = \int_A \rho^2 dA}$$

گشتاور ماند ۲
یا قطبی
نسبت به O

$$\boxed{T = G J_o \frac{d\varphi}{dx}} \quad (۳)$$

$$\text{تنش} \quad \boxed{\tau = \frac{T\rho}{J_o}} \quad (۲)$$

توپر  $* \quad J_o = \frac{\pi R^4}{2}$

توخالی  $J_o = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$

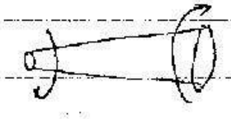
$\tau_{max} = \frac{TR}{J_o} \quad r = R$

۲ تنش توی مقطع است
max به مقطع نیروی
مقطع

فرمول دوران
تغییر زاویه

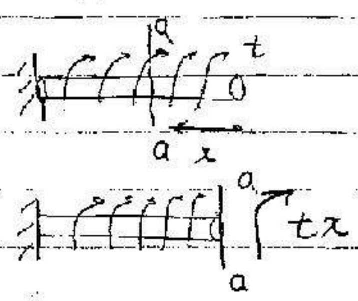
$$* \; d\varphi = \frac{T\,dx}{GJ_0} \Rightarrow \varphi = \int_0^L \frac{T\,dx}{GJ_0} \Rightarrow \varphi = \frac{TL}{GJ_0}$$

وقتی قطر ثابت باشد یا T ثابت باشد



مثل رابطه $\delta = \frac{FL}{EA}$ است

در روابط $GJ_0$ را صلبیت پیچشی گویند




T گسترده و ثابت نیست

یک میله تحت پیچش است کدام مقطع بهتر است


* مساحت یکی دارند

$$A' = A$$

$$\pi R'^2 = \pi(R^2 - r^2) \Rightarrow R' = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$J_0' = \frac{\pi R'^4}{2}$$

$$J_0 = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$$

$$\tau'_{max} = \frac{TR'}{J_0'}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau'_{max}}{\tau_{max}} = \frac{R'}{J_0'} \times \frac{J_0}{R} = \frac{R'(R^4 - r^4)}{R'^4 \cdot R} = \frac{(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)}{R'^3 \cdot R}$$

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J_0}$$

$$= \frac{R^2 + r^2}{RR'}$$

از رابطه $R' = \sqrt{R^2 - r^2}$ می‌توان نتیجه گرفت $R > R'$ پس $R^2 > RR'$

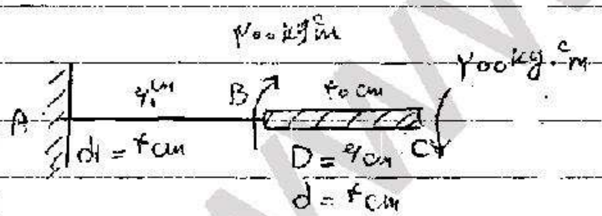
پس $\frac{R^2+r^2}{RR'} > 1$ است پس مقطع دوم محکم‌تر است چون تحت T یکسان مقطع دوم $\tau_{max}$ کمتری را تحمل می‌کند ؟

$$\theta = \frac{TL}{GJ_0} \qquad \theta' = \frac{TL}{GJ'_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta'}{\theta} = \frac{J_0}{J'_0} \quad \frac{R^4 - r^4}{R'^4} \quad \frac{R^2+r^2}{R'^2} > 1$$

* پس میله اول هم تنش برشی کمتری دارد پس مقاومت آن کمتر است
* کلاً جسمی که تحت بارگذاری یکسان تنش برشی می‌گیرد مقاومت آن کمتر است ؟
* هر جسمی که تحت اثر بارگذاری یکسان تغییر شکل برشی داشته باشد سختی بیشتر است ؟

بارگذاری هر محوری باشد چه پیچشی ← تنش برشی ایجاد می‌شود



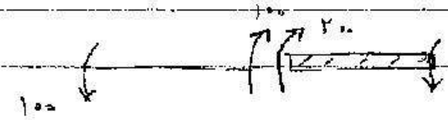

مثال 8 دیاگرام تنش‌های max هر قطعه میله را بیابید و دوران نقاط C , B را بیابید ؟

$G = 0/8 \times 10^6$

$$\text{kg.cm}$$

حل - $\tau_{max} = \frac{TR}{J_0} = \frac{(100)(2)\times 100}{\pi/2\,(2)^4} = \frac{2500}{\pi}$ AB

$$\tau_{max} = \frac{200 \times 100 \times 3}{\pi/2\,(3^4 - 2^4)} = \frac{120000}{65\pi}$$




$$\varphi_{AB} = \frac{TL}{GJ_0} = \frac{100 \times 100 \times 60}{0.8 \times 10^{6} \times \frac{\pi (2^4)}{32}} = \frac{3}{32\pi} \approx 0.0298 \text{ Rad}$$

برحسب رادیان باید باشد؛

اگر برحسب درجه بخواهیم در $\frac{180}{\pi}$ ضرب می‌کنیم؛

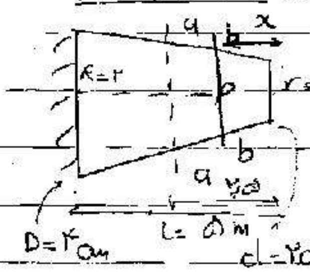
$$\varphi_{BC} = \frac{TL}{GJ_0} = \frac{200 \times 100 \times 40}{0.8 \times 10^{6} \times \frac{\pi}{2}(3^4 - 2^4)} = 9.792 \times 10^{-3}$$

$\theta_B = \varphi_{AB}$ چون A ثابت است
هر قدر میله دوران کند
نقطه B هم همان قدر دوران می‌کند

$\theta_C = \varphi_{AB} - \varphi_{BC} =$ چون در جهات مخالف هستند؛ $= 0.02$

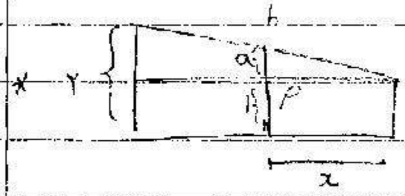
۸۴/۲/۳ $t = ۲۰\ kg\,m/m$ سه‌شنبه ۱۵

مثال ۸ تنش ماکزیمم bb و دوران میله حول محورها؟




$G = ۷۸\ MPa$

$$\begin{cases} T_{bb} = tx = 20\ kg\,m/m = 20\ kg\,cm/cm \\ T_{bb} = 20x \end{cases}$$




$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{1}{500} \Rightarrow a = \frac{x}{500} = 0.002x$$

$$\rho = 1 + a = 1 + 0.002x$$

$$J_0 = \frac{\pi\rho^4}{2} = \frac{\pi}{2}(1+0.002x)^4$$

$$*\ \tau_{max} = \frac{T\rho}{J_0} = \frac{T\rho}{\frac{\pi\rho^4}{2}} = \frac{2T}{\pi\rho^3} \Rightarrow ①$$

در مقطع aa $= *\ \rho = 1 + (0.002)(250) = 1.5\ cm \Rightarrow \tau_{max} = \frac{(20\times 250)(2)}{\pi(1.5)^3}$

$$= 943.1$$

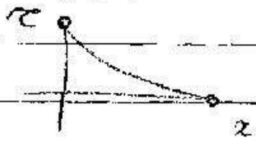
در مقطع bb $\Rightarrow \rho = 2\ cm \Rightarrow T = 20 \times 500 = 10000$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{2\times 10000}{\pi(2^3)} = 795.7\ kg/cm^2$$

برای بدست آوردن ماکزیمم $\tau_{max}$ در میله باید از رابطه ① نسبت به $x$ مشتق بگیریم

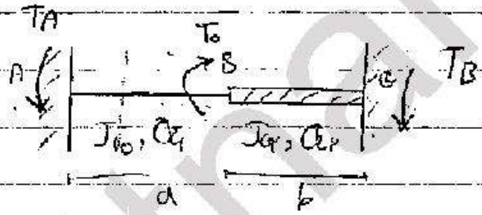
$$\tau_{max} = \frac{2\times 20x}{\pi(1+0/02x)^3} \Rightarrow \tau' = 0$$

ممکن است ماکزیمم جابجایی نداشته باشیم ولی داریم $x=250$ که همان وسطی است:




$$* \quad \varphi = \int_0^{500} \frac{T\,dx}{G J_0} = \int_0^{500} \frac{20x\,dx}{\frac{\pi}{32}(1+0/02x)^4} \times \frac{1}{G} = 0/34$$

مثال 8




عکس العمل در $A$ , $C$ را بیابید؟

مسئله هیپراستاتیک است بنابراین باید از قید شکل ببریم:

۱ درجه نامعین است

$$T_A + T_B - T_o = 0$$

سازگاری: $\varphi_{AB} + \varphi_{BC} = 0$ در حالت مختلف هم جهت بودند پس جمع شوند:

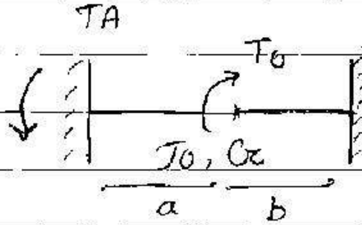
$$\varphi_{AB} = \frac{T_A a}{G_1 J_{1o}}$$

$$\varphi_{BC} = \frac{(T_A - T_o)}{G_2 J_{2o}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_A a}{G_1 J_{1o}} + \frac{(T_A - T_o) b}{G_2 J_{2o}} = 0$$

$$\Rightarrow T_A = \frac{T_o \frac{b}{G_2 J_{2o}}}{\frac{a}{G_1 J_{1o}} + \frac{b}{G_2 J_{2o}}}$$

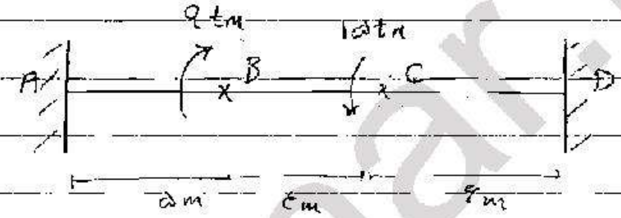
$$TB = \frac{T_0 \dfrac{a}{G_1 J_{10}}}{\dfrac{a}{G_1 J_{10}} + \dfrac{b}{G_2 J_{20}}}$$




* $TA = \dfrac{T_0 b}{a+b}$

* $TB = \dfrac{T_0 a}{a+b}$

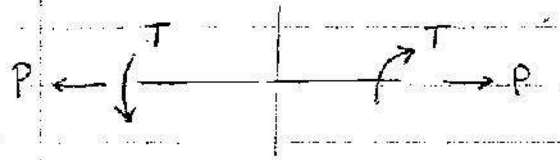
مثال :

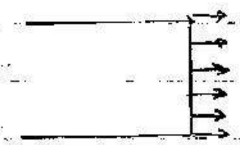



از دو روش یکی را با نوشتن روابط بالا و یکی با استفاده از جمع آثارها و سازگاری حل کنید؟

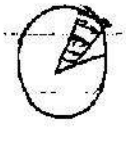
حل -

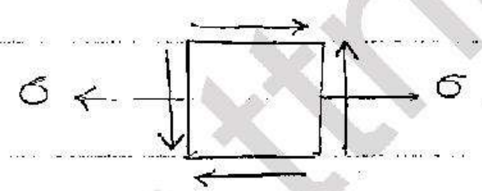
* اگر میله‌ای تحت اثر پیچش و بار محوری باشد 8



$$\sigma = \frac{P}{A}$$




در اثر بار محوری یک تنش عمودی است و در اثر پیچش یک نیروی باعث ایجاد تنش برشی در امتداد طول میله

و عمود بر طول می‌شود

تنش عمودی مقدار ثابت دارد ولی تنش برشی $\tau$ تغییر می‌کند و در دیواره بیشترین مقدار را دارد

$$\sigma_{1,2}^{max,min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

تنش‌های اصلی

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\sigma/2\right)^2 + \tau^2}$$

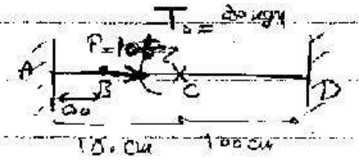
به علت وجود نیروی محوری تنش برشی موجود در میله افزایش می‌یابد

همچنین به علت وجود پیچش طبق رابطه بالا تنش عمودی اصلی از $\sigma$ بزرگتر خواهد بود

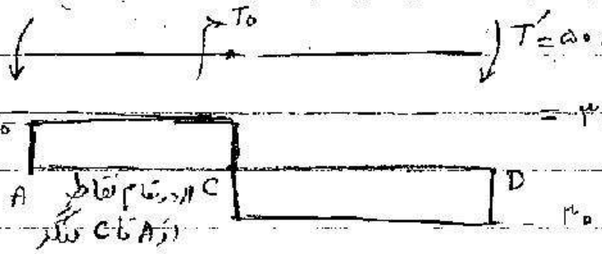
مثال 8:

بزرگترین تنش برشی و
بزرگترین تنش محوری P
هم فشاری هم کششی!

$d = ۶\ cm$




$T = ۵۰ \times \frac{۱۰۰}{۲۵۰} = ۲۰$  $T' = ۵۰ \times \frac{۱۵۰}{۲۵۰} = ۳۰$




در تمام نقاط از A تا C گشتاور ۲۰ است

$10 \times \frac{۲۰۰}{۲۵۰} = R_1 = ۸t$  $P = 10t$  $R_۲ = 10 \times \frac{۵۰}{۲۵۰} = ۲t$


$$R_1 = \frac{Pb}{a+b} \quad , \quad R_۲ = \frac{Pa}{a+b}$$

$$\begin{cases} AB: & N = ۸\ ton\ , \quad T = ۲۰ \\ BC: & N = -۲\ ton\ , \quad T = ۲۰ \\ CD: & N = -۲\ ton\ , \quad T = -۳۰ \end{cases}$$

برای تنش T، مثبت یا منفی بودن آن تأثیری ندارد ولی در زاویه دوران باید نوشته شود

AB: تنش محوری $\sigma = \frac{۸۰۰۰}{\pi(۳)^۲} = ۲۸۲/۹\ kg/cm^۲$

تنش برشی $\tau_{max} = \frac{۲T}{\pi R^۳} = \frac{۲ \times ۲۰ \times ۱۰۰}{\pi(۳)^۳} = ۴۷/۲$

$$\tau_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{۲۸۲٫۹}{۲}\right)^{۲} + \underbrace{۴۷٫۲^{۲}}_{\text{ناشی از پیچش}}} = ۱۴۹٫۱ \ kg/cm^{۲}$$

$$\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} = \frac{۲۸۲٫۹}{۲} \pm ۱۴۹٫۱ \Rightarrow \begin{matrix}\sigma_1 = \text{کشش} = ۲۹۰٫۵ \\ \sigma_2 = \text{فشاری} = -۷\end{matrix}$$

$\overline{BC}$ :

$$\sigma = \frac{-۲۰۰۰}{\pi(۳)^{۲}} = -۷۰٫۷ \ kg/cm^{۲}$$

$$\tau = ۴۷٫۲ \ kg/cm^{۲}$$

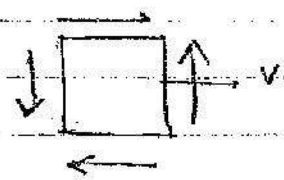
$$\Rightarrow \tau_{max} , \begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} =$$

$\overline{CD}$ : محوری

$$\sigma = \frac{-۲۰۰۰}{\pi(۳)^{۲}} = -۷۰٫۷ \ kg/cm^{۲}$$

$$\tau_{\text{برش در این قسمت}} = \frac{۲(۳۰)(۱۰۰)}{\pi(۳^{۳})} = ۷۰٫۷$$

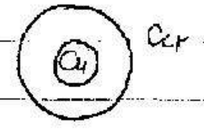
$$\Rightarrow \tau_{max} , \begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} =$$



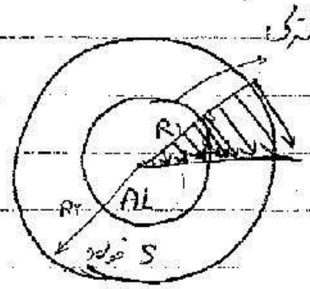

بین فشارهای، کشش‌هایی را انتخاب می‌کنیم !

نهایت تنش فشاری زیاد هم نیست

## * میله چند جنسی در پیچش 8




هر کدام از میله‌ها در هنگام اعمال پیچش در ناحیه مشترک
بین دو میله تنش‌ها یکی نیست این حجم مثل تنش عمودی، در ناحیه مشترک تنش‌ها به نسبت G ها
توزیع می‌شوند
ولی تنش جنس دو از ناحیه مشترک تابع تغییرات تنش خطی خواهد بود !




مثال: حداکثر بار پیچشی ای را که به میله می‌توان وارد کرد بیابید ؟

$G_s = 3 G_{Al}$

$\tau_w\, Al = 500 \ kg/cm^2$

$\tau_w\, s = 1000 \ kg/cm^2$

$R_1 = 3 \ cm$ کوچک

$R_2 = 4 \ cm$ بزرگ خارجی

$\theta_{AL} = \theta_s$ چون با هم دوران می‌کنند $\qquad \dfrac{TL}{GJ_0}$

$\dfrac{T_{Al} L}{G_{Al} J_{0Al}} = \dfrac{T_s L}{G_s J_{0s}} \qquad \theta = \int \dfrac{T\,dx}{GJ_0}$ یادآوری

$\Rightarrow \dfrac{T_a}{G_a J_{0a}} = \dfrac{T_s}{G_s J_{0s}} \Rightarrow \dfrac{T_a}{\pi/2\,(3^4)} = \dfrac{T_s}{3 \times \pi/2\,(4^4 - 3^4)}$

$\Rightarrow \boxed{T_s = 6.48\, T_a}$

$\tau_{al} = 500$ اگر باشد $\Rightarrow$ $\tau_s =$ از ۱۰۰۰ تجاوز می‌کند!

$$\tau_{al\,max} = \frac{2T_a}{\pi R^3} \Rightarrow 500 = \frac{2T_{al}}{\pi(3^3)} \Rightarrow 6750\pi$$

$$T_s = 137400 \text{ kg} \times \text{cm}$$

$$\tau_{s\,max} = \frac{T_s \times \overset{4}{R_{max}}}{\frac{\pi}{2}(4^4 - 3^4)} \cong 2000 \text{ kg/cm}^2$$

که این قابل قبول نیست

چون از تنش مجاز بزرگتر است و قابل قبول نیست؛

اگر $\tau_{s\,max} = 1000 \Rightarrow T_s = 68700 \text{ kg cm}$

$$T_a = 10600 \text{ kg cm}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_w = T_s + T_a = 79300 \text{ kg cm}}$$

چون دیدیم اگر تنش al را به مقدار مجاز برسانیم مقدار تنش فولاد از مجاز بیشتر می‌شود

پس آمدیم و تنش مجاز فولاد را به مجاز رساندیم و تنش al را حساب کردیم که از مقدار مجاز

کمتر بود پس جواب‌ها را یافتیم؛

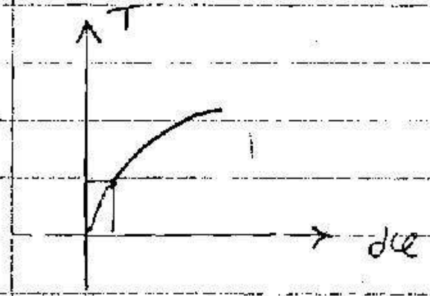
اگر $\tau_w^{\text{فولاد}} = 2000$ بود $\tau_{s\,max}$ قابل قبول بود و اگر Al را نداشتیم فولاد تنها مقدار گشتاور بیشتری

را نسبت به این مسئله می‌توانست تحمل کند. فولاد تنها می‌توانست گشتاور بیشتری را تحمل کند

انرژی تنش پیچشی

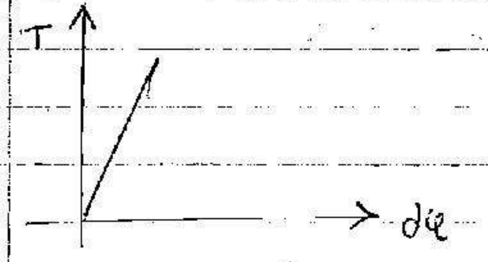
$T \quad , \quad d\varphi$

$\frac{1}{2} T \, d\varphi$



$$du = \frac{1}{2} T \, d\varphi$$

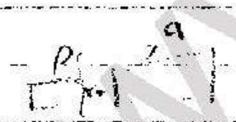
$$u = \int_0^L \frac{1}{2} T \, d\varphi$$

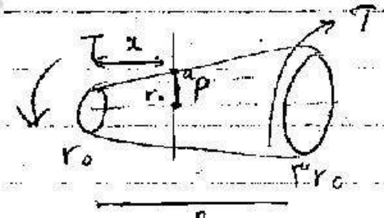


$$d\varphi = \frac{T\,dx}{G J_0}$$

$$u = \int_0^L \frac{T^2 \, dx}{2 G J_0}$$

مواد خطی $\quad u = \frac{T^2 L}{2 G J_0}$





مثال 8

$$\frac{a}{2r_0} = \frac{x}{L} \Rightarrow a = 2r_0 \frac{x}{L} \Rightarrow \rho = r_0 + a = r_0\left(1 + \frac{2x}{L}\right)$$

$$J_0 = \frac{\pi \rho^4}{2} \Rightarrow J_0 = \frac{\pi r_0^4}{2}\left(1 + \frac{2x}{L}\right)^4$$

$$U=\int_0^L \frac{T^2dx}{2GJ_0}=\frac{T^2}{2G}\int_0^L \frac{dx}{J_0}=\frac{T^2}{2G}\int_0^L \frac{dx}{\frac{\pi r_0^4\left(1+\frac{2x}{L}\right)^4}{2}}$$

$$=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}\int_0^L \frac{dx}{\left(1+\frac{2x}{L}\right)^4}=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}\left(1+\frac{2x}{L}\right)^{-3}\times\left(\frac{1}{-3}\times\frac{L}{2}\right)\Bigg|_0^L$$

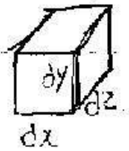
$$=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}\times\left[\frac{3^{-3}L}{-6}-\frac{1^{-3}L}{(-6)}\right]$$

$$=\frac{T^2}{G\pi r_0^4}\left[\frac{-L}{6\times 27}+\frac{L}{6}\right]$$

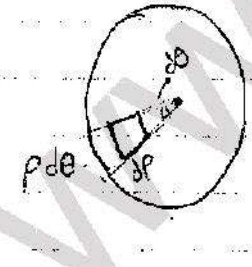
کل میله را در نظر می‌گیریم.

$$\tau=\frac{T\rho}{J_0}$$

المانی برمی‌داریم




$$*\ dU=\frac{\tau^2}{2G}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$$




$$dU=\frac{\tau^2}{2G}\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

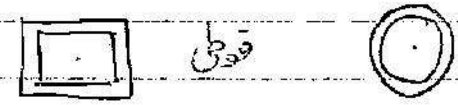
* با انتگرال‌گیری از این $dU$ باید به رابطه قبلی برای $U$ برسیم.

* پیچش در مقاطع جدار نازک بسته 8

تا اینجا در مورد مقاطع توپر و توخالی صحبت کردیم با مقطع مدور .

در اینجا مقطع میله می تواند هر مقطع نازک باشد که جداره اش کوچک باشد .

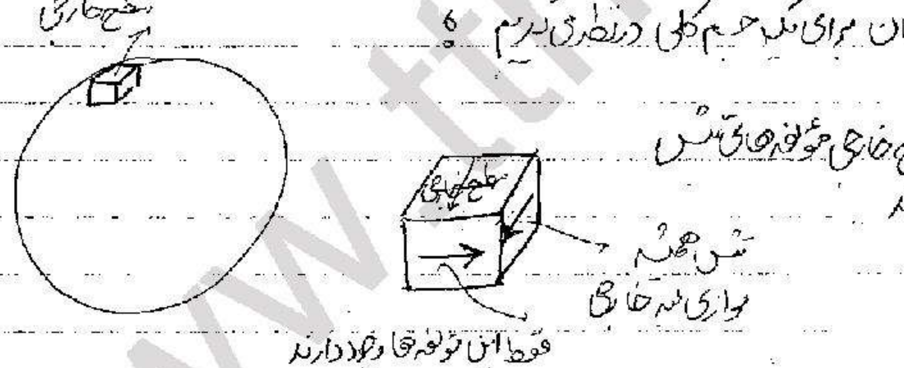
ضخامت جدار باید کم باشد .




در اینجا نمی توانیم بگوییم که تنش با فاصله از مرکز متناسب است برخلاف مقطع مدور که مسطح باقی

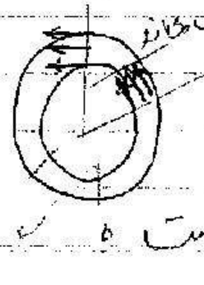
می ماند اینجا اینطور نیست چون مقطع تاب برمی دارد ولی عملاً مقطع مسطح باقی نخواهد ماند .

یک المان برای یک جسم کلی در نظر بگیریم .



(۷)

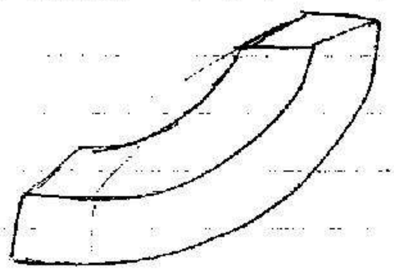
* در مقطع مدور هم اگر تنش برشی باشد باید موازی لبه خارجی باشد .

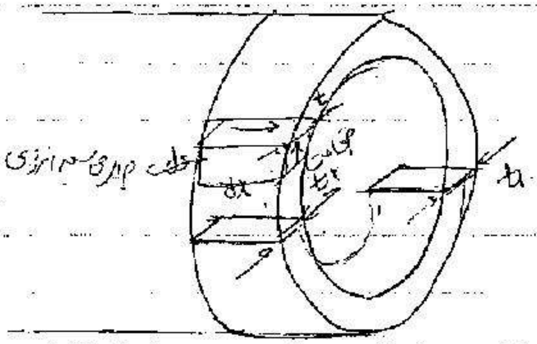


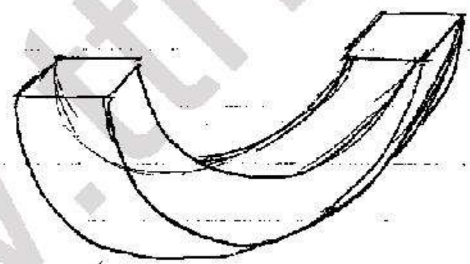
در این مقطع هم اگر تنش برشی باشد موازی جداره خواهد است

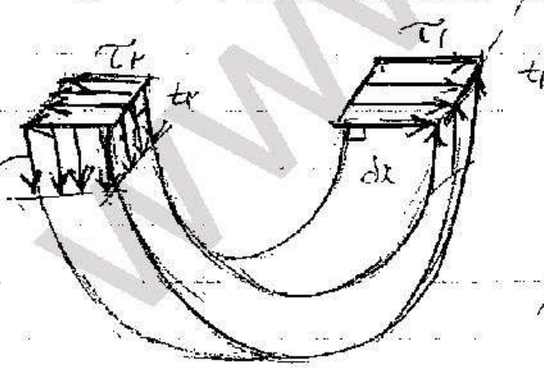
با تقریب نسبتاً خوبی می توانیم فرض کنیم تنش برشی ثابت باقی خواهد ماند و موازی لبه ها است .

این فرض خطا دارد








تنش برشی در پیچش هم در امتداد طول میله است هم در مقطع

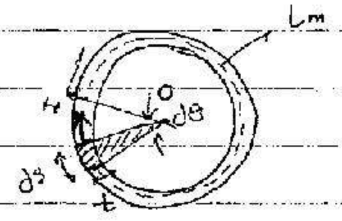
* $\tau_1$ و $\tau_2$ با هم الزاماً مساوی نیستند ولی با هم موازی اند

8 $\sum F_x = 0 \Rightarrow \tau_1 (dx\, t_1) - \tau_2 (t_2\, dx) = 0$

$$\boxed{\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2}$$

می توانیم رابطه را به صورت زیر بنویسیم 8

$$\tau t = cte$$




$$dF = \tau t \, ds$$

$$\int dM_o = \int \tau t \, ds \cdot \overline{OH}$$

برای هر شکل کلی

$$* \quad T = \oint \tau t \, ds \cdot \overline{OH}$$

$* \quad ds \cdot \overline{OH} = 2 \times$ مساحت مثلث هاشورخورده

$* \quad \tau t =$ مقدار ثابتی است

$$T \quad \tau t \oint ds \cdot \overline{OH}$$

$$\tau t \cdot 2A_m$$

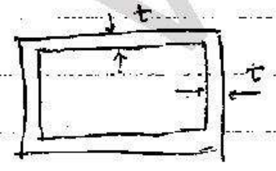
$A_m$ مساحت محصور در خط میانی

$A_m$ مساحت 〃 در جدار نازک

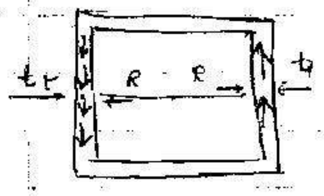
$$\tau = \frac{T}{2A_m t}$$

اگر ضخامت ثابت باشد تنش در همه جا یکی است

ولی اگر یک جدار ضخامت بیشتری داشته باشد تنش کمتر است



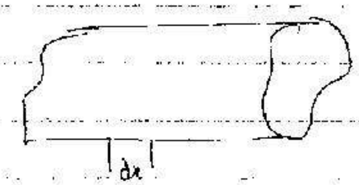
$\int^{L} \frac{T\,dx}{JG}$




$t_1 < t_2$

تنش دیگر به فاصله کاری ندارد با وجود این که
R ها بازوی اندازه‌ی تنش های ۲ طرف مانی هستند

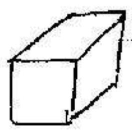
$$U = \frac{1}{2} T \varphi$$




$$du = \frac{1}{2} T\, d\varphi \quad (1)$$

برای یک حلقه

حال برای جزء کوچک dx



برای یک المان $\quad d(du) = \underbrace{\frac{\tau^2}{2G}}_{\text{در واحد حجم}} \cdot dv$

$$* \quad d(du) = \frac{\tau^2}{2G}\, dx \cdot t \cdot ds$$

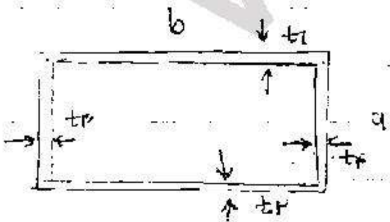
« شکل در صفحات قبلی »

$$* \quad du = \oint \frac{\tau^2}{2G}\, t\, dx\, ds$$

$\tau t = cte$

$$* \quad du = \frac{\tau^2 t^2}{2G} \oint_s \frac{ds}{t}\, dx = \frac{\tau^2 t^2\, dx}{2G} \oint_s \frac{ds}{t}$$

* چون dx برای المان حلقه مقدار ثابتی است :




$$* \quad \oint \frac{ds}{t} = \frac{b}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{a}{t_3} + \frac{a}{t_4}$$

اگر این را به اندازه تمام محیط را انجام جمع می کنیم :

$$* \quad dU = \frac{T^2}{4A_m^2 \, 2G} \, dx \oint \frac{ds}{t} \qquad (2)$$

از (1) و (2) می‌توان $d\varphi$ را حساب کرد $\Rightarrow$

$$d\varphi = \frac{T\,dx}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

در مقطع مدور $\quad d\varphi \quad \frac{T\,dx}{G J_0}$

در تمام مقاطع دیگر جدار نازک با فرمول بالا

$$d\varphi = \frac{T\,dx}{G J_t}$$

* ثابت پیچش : $J_t$

$$* \quad J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

$$du = \frac{T^2\,dx}{2G J_t}$$

* برای همه مقاطع (مرزی و دوران) از روابط بالا بدست می‌آید:

اگر $t$ ثابت باشد $\quad J_t = \frac{4A_m^2 t}{L_m}$

طول خط چین یا محیط خط چین

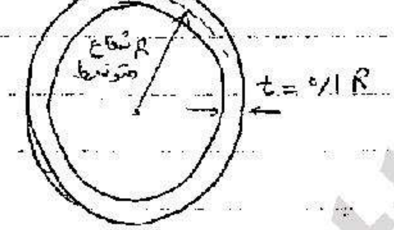
محیط جدار نازک یعنی متوسط آن را یک خط بکشیم و محیط آن را حساب کنیم:

$$\varphi = \int_0^L \frac{T\,dx}{G J_t} \qquad U = \int_0^L \frac{T^2\,dx}{2 G J_t}$$

اگر $T$ و $J_t$ هر دو ثابت باشند:

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{TL}{G J_t} \\[2ex] U = \dfrac{T^2 L}{2 G J_t} \end{cases}$$

مثال ۸: فرمولهای دقیق و تقریبی جدار نازک را در مورد مقطع نشان داده شده مقایسه کرده و خطای فرمولهای جدار نازک را تعیین کنید؟




حل - دقیق: $\tau = \dfrac{T \rho_{max}}{J_0}$ که $J_0 = \dfrac{\pi}{2}\left((1.05R)^4 - (0.95R)^4\right)$

$$J_0 = \frac{\pi}{2} \times 0.401 R^4$$

$$\Longrightarrow \tau = \frac{T(1.05R)(2)}{\pi \times 0.401 R^4} \quad ①$$

جدار نازک: $\tau' = \dfrac{T}{2A_m t} = \dfrac{T}{2\pi R^2 \times 0.1R} = \dfrac{T}{0.2\pi R^3}$

$$\Longrightarrow \frac{\tau'}{\tau} = \frac{\frac{1}{0.2}}{\frac{(1.05)(2)}{0.401}} = 0.954$$

خطا در حدود ۵٪ است

در فرمول جری ما تنش را در جدار نازک ثابت گرفتیم ولی در فرمول دقیق تنش در جدار حالت خطی دارد نه ثابت.

بنابراین یک خطایی داریم که در حدود ۵ ٪ است و در کارهای مهندسی قابل قبول است

و این ضخامت ۱۰ ٪ قابل قبول است یعنی ضخامت در حدود ۱۰ ٪ شعاع یا حتی کمتر باشد می‌توان

آن را جدار نازک گرفت و از فرمول‌های آن استفاده کرد

دیگر فقط شعاع را باید با نصف ضخامت کوتر مقایسه کرد و ۱۰ ٪ آن را در نظر گرفت ؟

ادامه حل :

$$\varphi = \frac{TL}{GJ_o} = \frac{TL}{G} \times \frac{1}{\frac{\pi}{2} \times 0.401 R^4} = \frac{2TL}{\pi G \times 0.401 R^4}$$

جدار نازک $\varphi' = \frac{TL}{GJ_t}$

$$\Rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{J_o}{J_t} = ?$$

$$J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4(\pi R^2)^2 \times 0.1R}{2\pi R} = 0.2\pi R^4$$

ضخامت

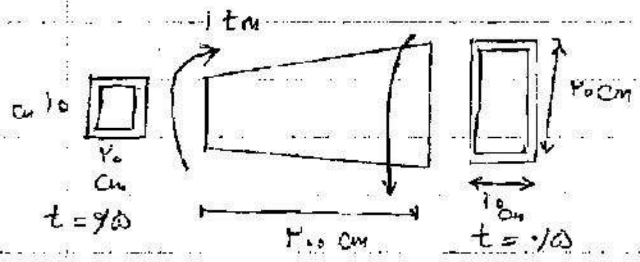
$L_m$ محیط دایره متوسط

$$\Rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi \times 0.401 R^4}{2 \times 0.2 \pi R^4} = 1.0025$$

خطا می‌شود ۲/۵ در ۱۰۰۰ که خیلی کم است و فرمول را می‌شود استفاده کرد

در حالت کلی $GJ_t$ را صلبیت پیچشی گویند

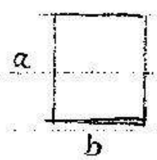
$\Delta = 20 + 5x$




$G = 0.8 \times 10^{6}\ kg/cm^2$

مثال ؟

شکل روبرو مقطع جدار نازکی را نشان می دهد که ضخامت آن ثابت و برابر ۰/۵ cm می باشد ابعاد مقطع مطابق شکل به طور خطی تغییر می کند حداکثر تنش برشی و مقدار دوران میله را بیابید ؟




$$\begin{cases} a = 10 + \dfrac{(20-10)}{200}x = 10 + 0.05x \\ b = 20 - 0.05x \end{cases}$$

مساحت داخل جدار نازک $A_m = ab = (10 + 0.05x)(20 - 0.05x)$

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{1 \times 10^{3} \times 10^{2}}{2(10 + 0.05x)(20 - 0.05x)(0.5)}$$

$\tau$ وقتی max است که مخرج min Am داشته باشد!

$$\frac{dA_m}{dx} = 10 - 0.1x = 0 \Rightarrow x = 100$$

$$\begin{cases} A_m \\ x = 0 \Rightarrow 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_m \\ x = 100 \Rightarrow 15 \times 15 = 225 \end{cases}$$

یعنی در این x مقدار Am ماکزیمم مقدار خود می شود

پس کمترین مقدار Am در انتها اتفاق می افتد ؟

$(A_m)_{min} = 200\ cm^2$

$$\tau_{max} = \frac{10^{5}}{2 \times 200 \times \frac{1}{2}} = 500\ kg/cm^2$$

اگر از $\tau$ مشتق بگیریم باید مقدار ... انتها را نیز کنترل کنیم و کمترین آنها را ...

$$\varphi = \int_0^{L} \frac{T\,dx}{G J_t} \qquad J_t = \frac{4 A m^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \rightarrow$$

$$* \quad \oint \frac{ds}{t} = \frac{2(a+b)}{0.15} = 120$$

t ثابت ، ds همان محیط می‌شود

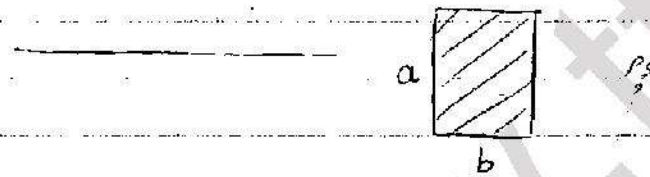
چون جمع a+b مستقل از x می‌شود +، − حذف می‌شود ؛

$$* \quad J_t = \frac{4(10 + 0.05x)^2 (20 - 0.05x)^2}{120}$$

$$\varphi = \frac{T}{G} \times 30 \int_0^{200} \frac{dx}{(10 + 0.05x)^2 (20 - 0.05x)^2} = 0.0160$$

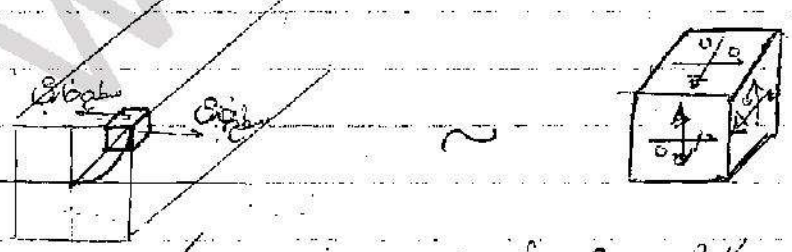
باید ۳ رقم معنی دار باشد ؛

* مقطع مستطیل 8




* با توجه به تئوری اینجا مقطع تاب بری دارد بنابراین فرمول مقطع مذکور در اینجا صادق نیست ؛

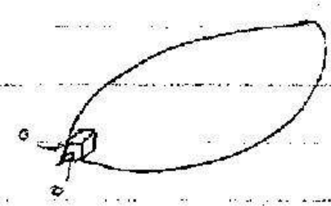
کلاً هرجا مقطع تاب بردارد نمی‌توان رابطه تنش با فاصله از مرکز را توجیه کرد ؛



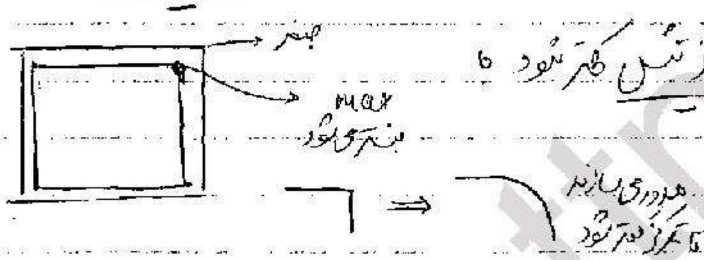

در دورترین نقطه مقطع مثل گوشه‌ها تنش برشی صفر است برخلاف مدور که معمولاً در دورترین نقطه ماکزیمم می‌شود ؛

به طور کلی هر جا که تکیه‌گاهی در گوشه داشته باشیم تنش برشی صفر است چون مولفه تنش برشی که عمود بر جدار بود صفر می‌شد پس دوتا مولفه در ۲ امتداد صفر می‌شود پس حتماً آن هم دارد صفر است.

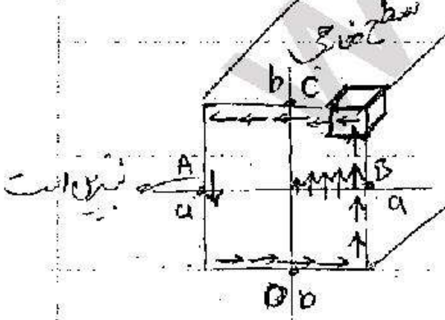
این مقوله همیشه صادق است و به پیچش مقطع‌های مختلف بستگی ندارد



در جدار نازک هم در گوشه‌های بالایی تنش برشی صفر است اما در گوشه داخلی تمرکز تنش max می‌شود معمولاً گوشه داخلی را مدوری می‌کنند تا تمرکز تنش کمتر شود.




وقتی بارگذاری دینامیکی باشد چون تنش‌ها هم مرتب عوض می‌شود یعنی مرتباً تغییر می‌کند دیگر فرصت تطبیق تنش‌ها با هم نیست در نتیجه قسمت گوشه خیلی سریع دچار ترک و شکست می‌شود.




در قطر افقی تنش از مرکز به طرف لبه رو به افزایش است اما مقدار آن خطی تغییر می‌کند

مهم * در قطر مورب هم این مقدار تنش زیاد می‌شود اما نه خطی.

* بیشترین مقدار تنش در مجاورت ضلع a از همه جا بیشتر است یعنی روی قطر افقی

$$(\tau_{max})_{A,B} = \frac{T}{\alpha\, a\, b^2}$$

| $\frac{a}{b}$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۰/۲۰۸ | ۰/۱۴۱ | ۱ |
| ۱/۵ | ۰/۲۳۱ | ۰/۱۹۶ | ۰/۸۵۹ |
| ۲ | ۰/۲۴۶ | ۰/۲۲۹ | ۰/۷۹۵ |
| ۳ | ۰/۲۶۷ | ۰/۲۶۳ | ۰/۷۵۳ |
| ۴ | ۰/۲۸۲ | ۰/۲۸۱ | ۰/۷۴۵ |
| ۶ | ۰/۲۹۹ | ۰/۲۹۹ | ۰/۷۴۳ |
| ۸ | ۰/۳۰۷ | ۰/۳۰۷ | ۰/۷۴۲ |
| ۱۰ | ۰/۳۱۳ | ۰/۳۱۳ | 〃 |
| $\infty$ | ۱/۳ = ۰/۳۳۳ | ۱/۳ = ۰/۳۳۳ | 〃 |

۵ ، $\frac{a}{b}$ از این معادلات مربوط به تئوری ارتجاعی بدست می آید

اگر اعداد بیان شده باید با درونیابی مقدار مورد نظر را یافت

$$\varphi = \int_0^L \frac{T\,dx}{G J_t}$$

$$J_t = \beta a b^3$$

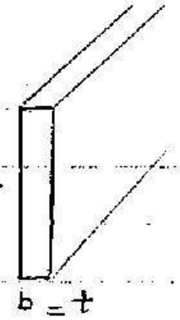
$\beta$ بدون بعد اما با $a$ تغییر می کند ؛

* تنش در نقاط C ، D و

$$\tau_{c,d} = \eta\, \tau_{max}$$

$\eta$ همواره از یک کوچکتر است وقتی مقطع مربع باشد

$\eta = 1$ است



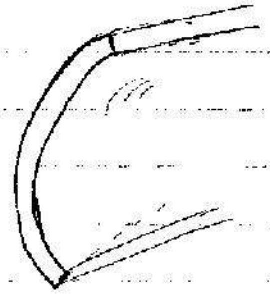

$a >> b$

* می‌توانیم b را برابر t بگیریم $\delta$

$$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{1}{3}at^3}$$

اگر حدود ۱۰ برابر باشد می‌شود از فرمول بالا استفاده کرد و خطا را صرف‌نظر کرد ؛

$$J_t = \frac{1}{3}at^3$$



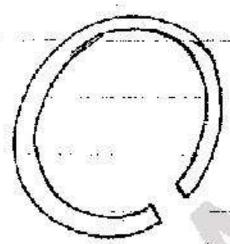
برای این مقطع هم می‌شود این فرمول‌ها را بکار برد

+

a محیط کامل است ؛

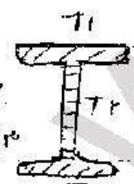
جدار نازک باز

+



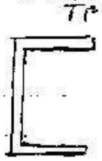
فرمول بالا در این مقطع هم صادق است

تقسیم به مستطیل می‌کنیم
جداگانه حساب می‌کنیم
$d\varphi_1 = d\varphi_2 = d\varphi_3$




$T = \sum_{i=1}^{3} T_i$

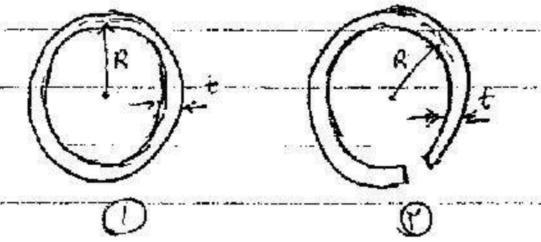
* توان تاب خوردن مقاطع جدار نازک باز زیاد است
* هرچه مستطیل باریک‌تر شود b کوچکتر شود تاب خوردن بیشتری شود



تیرآهن I در مقابل پیچش خیلی سریع از حالت مقطع خارج می‌شود ؛
جایی که پیچش داریم یا باید مقاطع مدور بکار ببریم یا مقاطع جدار نازک بسته که مقدار تاب خوردگی آن کم است .

فرمول‌هایی که برای مقاطع I و ... در کتاب‌ها است برای فقط یک حالت خاص است که پیچش در ۲ انتها وارد می‌شود یعنی پیچش یکنواخت است؛

uniform torsion



مثال: مقاومت و سختی ۲ لوله جدار نازک را که یکی بسته و یکی باز است مقایسه کنید؟

تحت پیچش یکنواخت کدامیک ضعیفتر و کدام یک قوی‌تر است!
با تنش ثابت: هر کدام که گشتاور بیشتری بگیرد قوی‌تر است و هر کدام که گشتاور کمتری بگیرد ضعیفتر است

$$\tau_1 = \frac{T}{2A_m t} \qquad \tau_2 = \frac{T}{\frac{1}{3}at^2}$$

$$\frac{\text{مقاومت مقطع } 1}{2 \;\; " \;\; "} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{2A_m t}{\frac{1}{3}at^2} = \frac{2(\pi R^2)}{\frac{1}{3}(2\pi R)t} = \frac{3R}{t}$$

جدار نازک را معمولاً زمانی می‌گیریم که $\frac{R}{t}$ از 10 بزرگتر باشد؛

* پس مقطع جدار نازک بسته قوی‌تر از مقطع جدار نازک باز است مثلاً حدود ۳۰ برابر $3 \times \overset{10}{\frac{R}{t}} = 30$ قوی‌تر است؛

* $d\varphi = \frac{T\,dx}{GJ_t}$

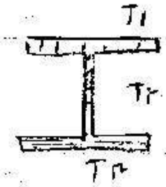
$$\frac{\text{سختی مقطع } 1}{2 \;\; " \;\; "} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\frac{4(\pi R^2)^2}{\frac{2\pi R}{t}}}{\frac{1}{3}(2\pi R)t^3} = \frac{3R^2}{t^2}$$

*

* سختی مقطع ① برای $\frac{R}{t} \approx 10$ حدود ۳۰۰ برابر سخت‌تر از مقطع باز است

یا به عبارتی ... آن کمتر است.

* در مقابل پیچش مقطع باز خیلی ضعیف عمل کرده و خیلی زود دچار ... می‌شود.




$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad ①$$

$$\underbrace{d\varphi_1 = d\varphi_2 = d\varphi_3 = d\varphi}_{(n-1)\ \text{رابطه}} = \frac{T\,dx}{G J_t}$$

n رابطه n مجهول

$$\boxed{\tau_{i_{max}} = \frac{T\,t_i}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} a_i t_i^3}}$$

$\varphi \rightarrow$

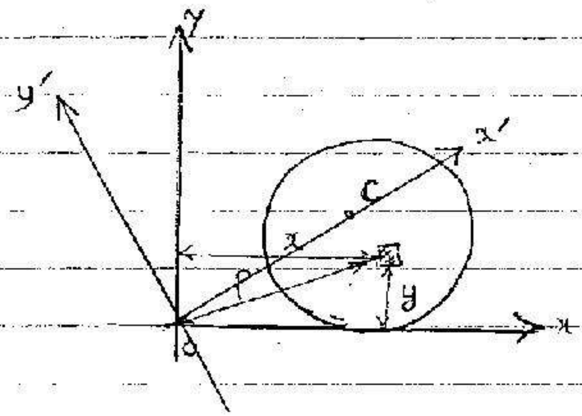
$$\boxed{\text{کل مقطع}\ J_t = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} a_i t_i^3}$$

* وقتی در مقطع بسته t متغیر باشد در t بیشتر تنش کمتر داریم ولی در حالت مقطع باز t در صورت کسر است یعنی هر چه t بزرگتر باشد تنش آن حداکثر است.

تنش‌های خمشی مقطع ... محورهای اصلی ... رسم ... ترسیم ...

۸۴/۲/۱۲ به نام خدا ج ۱۸

ممان سطح 8




ممان استاتیکی یا ممان اول یا گشتاور اول

مهم

$* \; Q_x = \int_A y\,dA$ ممان استاتیکی نسبت به محور x از بعد $(L)^3$

$* \; Q_y = \int_A x\,dA$

اگر یک نقطه به مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به صورت زیر تعیین کنیم

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int x\,dA}{A} \\[2ex] \bar{y} = \dfrac{\int y\,dA}{A} \end{cases}$$

این نقطه را مرکز مقطع گویند که

اگر مقطع یک سطح حجم دار یا وزن دار فرض شود با حجم مخصوص یکسان این نقطه همان مرکز جرم یا

مرکز ثقل آن است

در غیر این صورت آن را مرکز مقطع می گویند که C

* اگر نیروهای گسترده روی تمام سطح باشد و شدت آن یکسان باشد برآیند این بار از نقطه C عبور می کند که

ج) ممان اینرسی یا لنگر دوم یا گشتاور ماند

* نسبت به محور x $\quad I_x = \int y^2 dA \quad$ از بعد ($L^4$)

* نسبت به محور y $\quad I_y = \int x^2 dA$

حاصلضرب اینرسی نسبت به محورهای x و y $\quad * \quad I_{xy} = P_{xy} = \int xy\,dA$

ممان اینرسی نسبت به نقطه O یا ممان اینرسی قطبی $\quad * \quad \underset{J_o}{I_o} = \int_A \rho^2 dA$

Qx و Qy می توانند مثبت یا منفی باشند اما ممان اینرسی ها Ix ، Iy ، Io همیشه مثبت اند
اما Ixy می تواند مثبت یا منفی باشد

* $I_x + I_y = I_o \quad (1)$

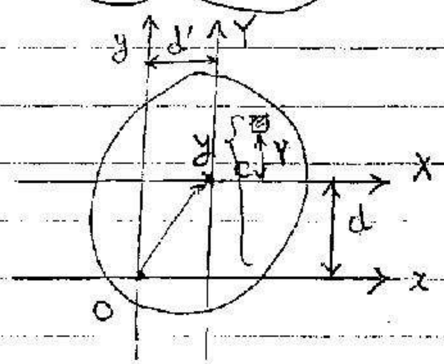
* $I_x + I_y = I_x' + I_y'$ $\quad$ برای دو دستگاه که از یک نقطه رد می شوند جمع ممان اینرسی ها با هم برابر است

* شعاع گردش یا شعاع ژیراسیون $\quad r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad$ از بعد (L)

* $r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad , \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad , \quad r_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}}$

با توجه به ① و تعمیم جزئین به A داریم :

$$r_x^2 + r_y^2 = r_o^2$$




$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (Y+d)^2 dA = \int_A Y^2 dA + \int_A d^2 \cdot dA + \int_A 2Yd\,dA$$

$$= I_X + d^2 \cdot A + 2d\cancel{\int YdA}_{0}$$

* ممان استاتیک نسبت به محوری که از مرکز (C) عبور می‌کند صفر است چون $\int YdA = 0 \Leftarrow \bar{Y} = 0$

$$* \quad I_x = I_X + A \cdot d^2$$

$$I_y = \int x^2 dA = I_Y + A \cdot d'^2$$

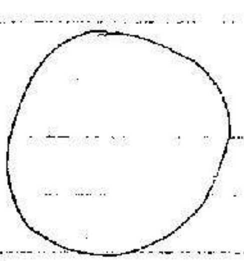
$$* \quad I_y = I_Y + A \cdot d'^2$$

$$* \quad I_O = I_C + \overline{OC}^2 \cdot A$$

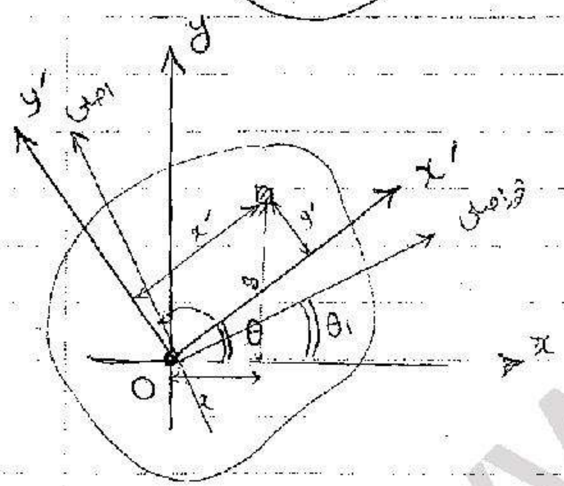
$*\quad r_{x'}^2 = r_x^2 + d^2$

$*\quad r_{y'}^2 = r_y^2 + d'^2$

$*\quad r_o^2 = r_c^2 + \overline{OC}^2$



$$P_{x'y'} = P_{xy} + A.x_c . y_c$$ علامت ورد مهم است




* روابط ممان از دوران شبیه روابط تنش و کرنش اند؟

$\sigma \to I$

$\tau \to P$ با تبدیل

$*\quad \sigma_\theta = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$

$*\quad \tau_\theta = \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$

$*\quad I_\theta = \dfrac{I_x+I_y}{2} + \dfrac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta - P_{xy}\sin 2\theta = I_{x'}$ *

$*\quad P_\theta = \dfrac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta + P_{xy}\cos 2\theta = P_{x'y'}$

پس محور اول $x'$ و $y'$ عمود بر آن در جهت مثلثاتی

می توان این روابط را به صورت زیر اضافه کرد :

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$I_x = \int y^2\, dA$

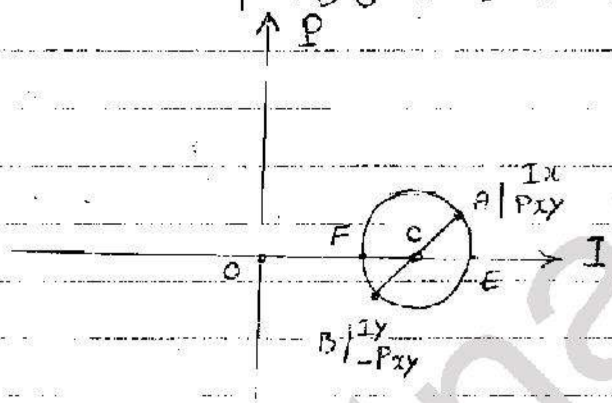
$I_y = \int x^2\, dA$

$I_{x'} = \int y'^2\, dA$

* در اینجا هم دایره مور را عیناً مثل دایره مور تنش می شود رسم کرد :

$\sigma \longrightarrow I$

$\tau \longrightarrow P$




$I_{max}$ OE

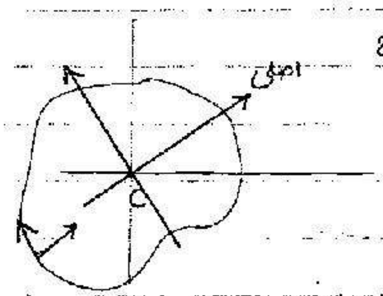
$I_{min}$ OF

* دو تا محور عمود بر هم داریم نسبت به هر نقطه که I حاصل ضرب در آن نقطه صفر است یعنی $P_{xy} = 0$ :

* $\tan 2\theta_1 = \dfrac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

* $\tan 2\theta_1 = \dfrac{-2P_{xy}}{I_x - I_y}$ زاویه محورهای اصلی

اگر این محورهای اصلی را نسبت به مرکز سطح تعیین کنیم :

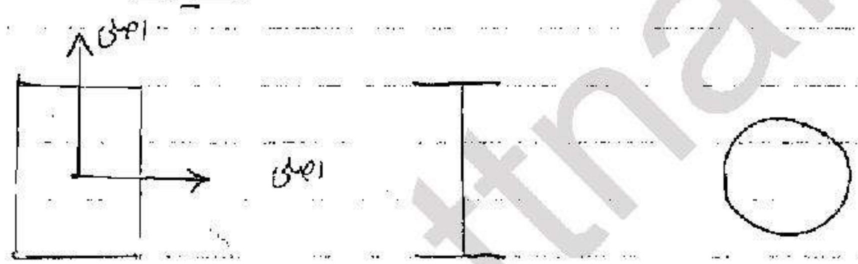



* به این محورها محورهای اصلی مرکزی اینرسی گویند :

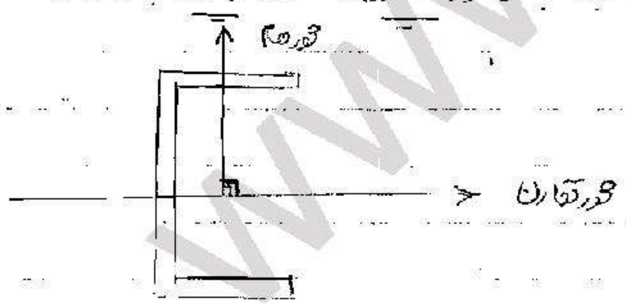
الزاماً با محورهای اصلی دیگر نقاط موازی نیستند
در هر نقطه امتداد دلخواهی دارند

در مقاومت محورهای اصلی مرکزی اینرسی اهمیت دارند :

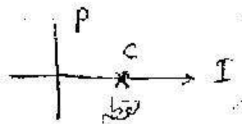
* اگر مقطع نسبت به هر دو محور قرینه باشد محورهای اصلی مرکزی همان محور تقارن شکل اند :



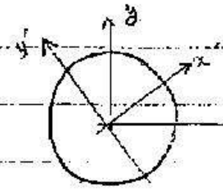

* اگر یک محور تقارن هم داشته باشیم : Pxy نسبت به آن محور صفر می شود محور دوم عمود بر آن می شود :

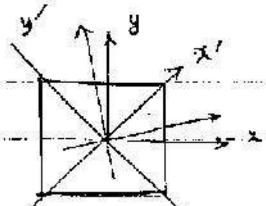



* در یک دایره هر محوری که رسم شود یک محور تقارن در نظر گرفته همه محورهای آن محور اصلی می شوند :



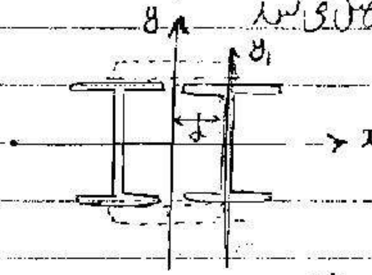

اگر دایره محور یک نقطه شود همه محورها محورهای اصلی می شوند





دایره محور آن یک نقطه می‌شود.

دراین تیرها از کنار هم قرار دادن دو تیر شبیه هم می‌سازند و به هم وصل می‌کنند

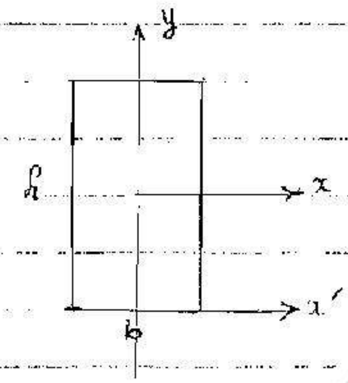


اگر ممان اینرسی یک را نسبت به محور x داشته باشیم: $I_{x_1}$

* ممان کل مقطع نسبت به محور x می‌شود: * $2I_{x_1}$

* ممان یک مقطع از این دو نسبت به محور y می‌شود: $I_1y = I_{y_1} + Ad^2$

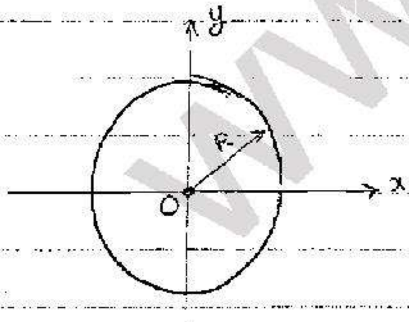
* ممان کل نسبت به محور y می‌شود: * $I_y = 2I_{1y} = 2I_{y_1} + 2A\cdot d^2$



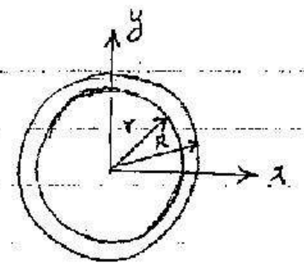
* $I_x = \frac{bh^3}{12}$ * $r_x^2 = \frac{h^2}{12}$

* $I_y = \frac{hb^3}{12}$ * $r_y^2 = \frac{b^2}{12}$

* $I_{x'} = \frac{bh^3}{3}$

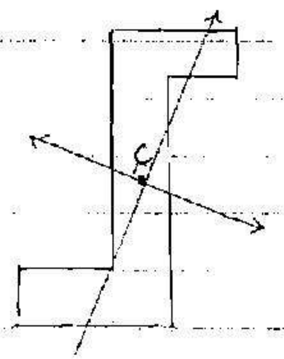


* $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$ * $r_x^2 = r_y^2 = \frac{R^2}{4}$



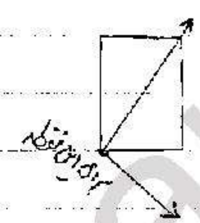

$$\boxed{I_x = I_y = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)}$$

$$* \quad r_x^2 = r_y^2 = \frac{R^2 + r^2}{4}$$



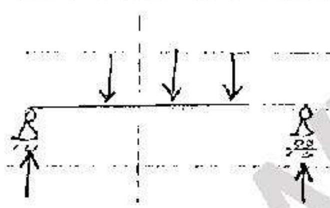

محور اصلی مرکزی

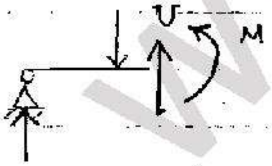
سطوح باید دورترین فاصله
را با محور داشته باشند




چون نسبت به یک محور ممان max و نسبت به یکی min است پس یک محور باید طوری باشد که تمامی سطوح را
کمترین فاصله را با آن داشته باشند.

* منحنی های نیروی برشی و لنگر خمشی 8

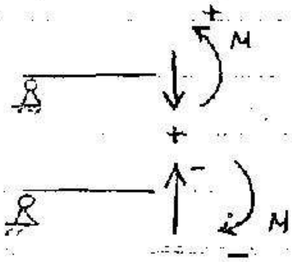




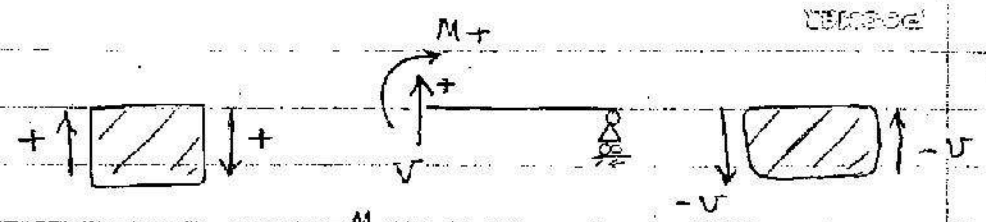

V نیروی برشی
M لنگر خمشی

قرارداد علامت V رو به پایین +

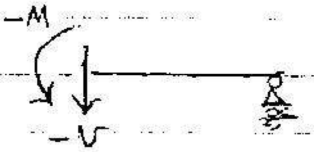
M در جهت مثلثاتی +



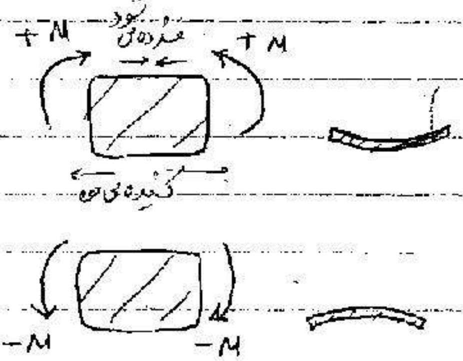
یک تکه از تیر را بیرون می آوریم



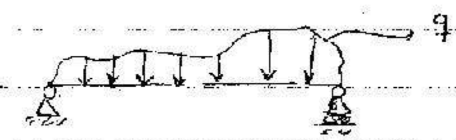

** V در جهت عقربه ساعت +




از راست در جهت تیر + است




* لنگر خمشی + بالای تیر را فشرده و پایین تیر را کشیده می کند.




شیب است

* $\frac{dV}{dx} = q$ ↑+ رو به بالا * $\frac{dV}{dx} = -q$ ↓+ رو به پایین

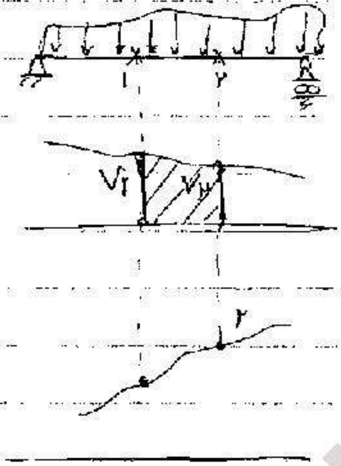
* $\frac{dM}{dx} = V$

* $\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = q$

اگر $q=0$ باشد V مقدار ثابت و M یک خط

" $q=cte$ " V یک خط و M منحنی است

$$* \quad V_2 - V_1 = \int_1^2 q \, dx$$



تغییر نیروی برشی از نقطه ① تا ② = مقدار بار وارده بین دو نقطه ① و ②

$$* \quad M_2 - M_1 = \int_1^2 V \, dx$$

تغییر لنگر خمشی از نقطه ① تا ② = مساحت سطح زیر منحنی نیروی برشی بین ① و ②

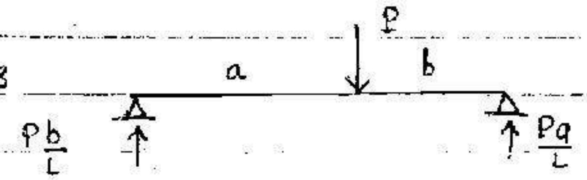
$$\begin{cases} V = + \left(\text{جمع نیروهای سمت چپ}\right) \uparrow \\ \quad = - \left(\text{جمع نیروی سمت راست}\right) \uparrow \end{cases}$$

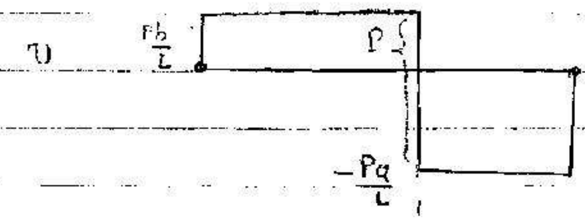
جهت V در این حالت رو به پایین است

$$\begin{cases} M = + \left(\text{جمع لنگرهای سمت چپ}\right) \curvearrowleft^{+} \\ \quad - \left(\text{جمع لنگرهای سمت راست}\right) \curvearrowleft^{+} \\ \quad \text{جمع لنگرهای سمت راست} \curvearrowright^{+} \end{cases}$$

M در جهت مثلثاتی + بدست می آید

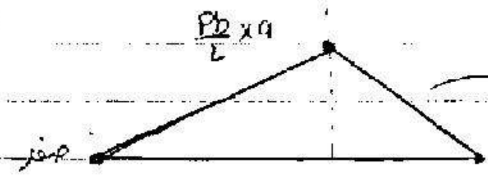
مثال 8




$dx_1$ $dx_2$

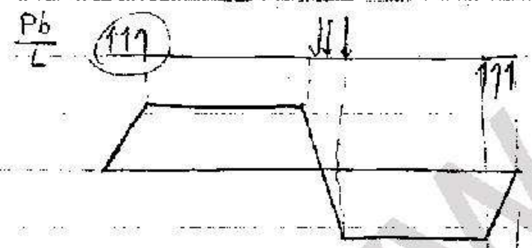
در نقطه P بین dx این طرف و dx در طرف مقابل برابر بار وارده است




تغییر گشتاور برابر مساحت زیر V است

تغییر گشتاور منفی است چون نمودار V زیر محور قرار گرفته

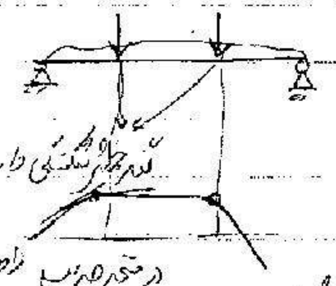
خطوط عمود نمودار نیروی برشی هستند باید پیوسته باشد روی خط قائم نیروی برشی هم هم است بنابراین بی‌شمار نیروی برشی خواهیم داشت




شکل حقیقی منحنی باید به این شکل باشد چون امکان ندارد که نیرو دقیقاً در یک نقطه وارد شود بنابراین به تدریج نیروی برشی افزایش می‌یابد تا به $\frac{Pb}{L}$ برسد

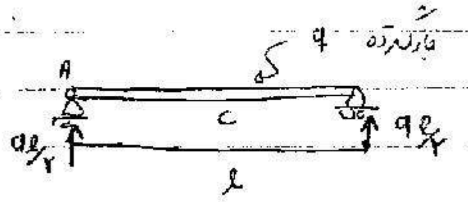
* وقتی بار متمرکز داشته باشیم نیروی برشی به اندازه بار متمرکز تغییر می‌کند

* گشتاور خمشی هم در نقطه بار متمرکز شکستگی دارد

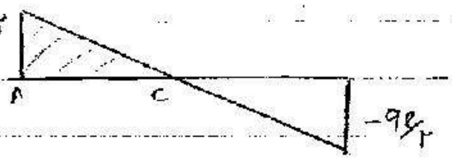



در متمرکز شیب زاویه در دو طرف بار متمرکز متفاوت خواهد بود ⟸ شکستگی گشتاور خمشی داریم

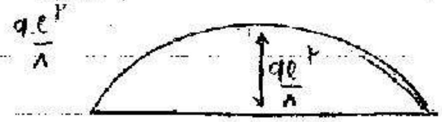
مثال:




شیب = شدت بار
$-q\ell$




$A_{A-C} = \frac{1}{2}\cdot\frac{q\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{q\ell^2}{8}$




درجه دو و سهمی شکل دارد

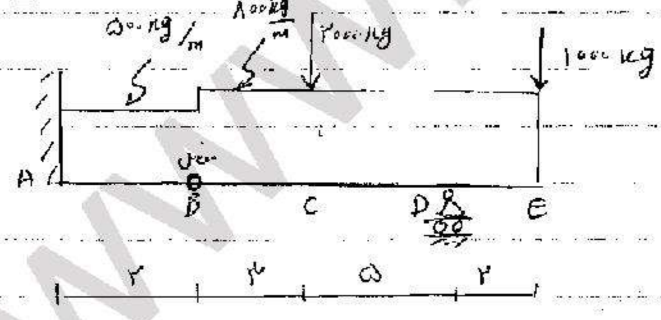
از A تا C مساحت مثبت است
در واقع به مقدار ممان اضافه
می‌شود !

$\max V = \frac{q\ell}{2}$

$\max M = \frac{q\ell^2}{8}$

* نتیجه این مثال و مثال قبل را می‌توان در مسائل بکار برد

مثال:




می‌توان مسئله را جدا جدا حل کرد با یک میله 8

اول باید عکس العمل را در مفصل بدست آورد