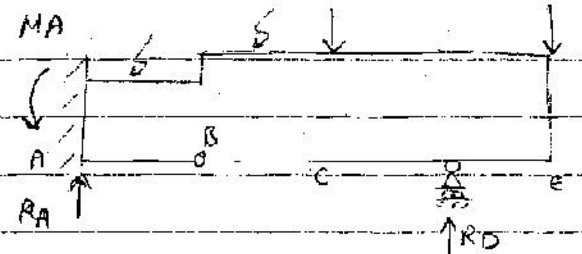


در نقطه B، لنگر خمشی صفر است
چون از این طرف به آن طرف
لنگری منتقل نمی‌شود

$\sum F_y = 0$

$\sum M = 0$

لنگر خمشی $M_B = 0$

$$+\ M^R_B{}_{(\text{راست})} = -1000\times10 + 8R_D - 2000\times12 - (800\times10)(5) = 0$$

بار گسترده

به سمت داخل منفی

$$\Rightarrow \{R_D = 7000\,kg\}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - (500\times2) - (800)(10) - 2000 - 1000 + 7000 = 0$$

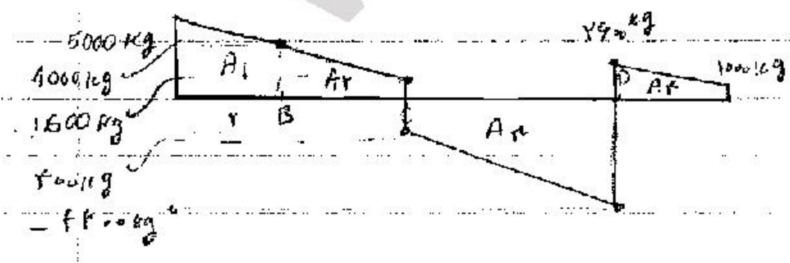
$$\Rightarrow \{R_A = 5000\,kg\}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \sum M^L_B{}_{(\text{چپ})} + \underbrace{\sum M^R_B{}_{(\text{راست})}}_{} = 0$$

این قسمت را
صفر قرار داده شده
فقط سمت چپ را لازم داریم

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \sum M^L_B = 0 \Rightarrow M^L_B = 5000\times2 - MA - (500\times2)\overset{\text{بازو}}{(1)} = 0$$

$$\Rightarrow \{MA = 9000\,kg.m\}$$



نمودار برشی

از A تا B بار گسترده یکنواخت داریم

پس یک خط مایل با شیب = 500

در ۲ متر از 5000 تا ۲۰۰۰ کم می‌شود

4000 kg

در ادامه یک خط مایل با شیب به اندازه ۲×۸۰۰ کم می‌شود

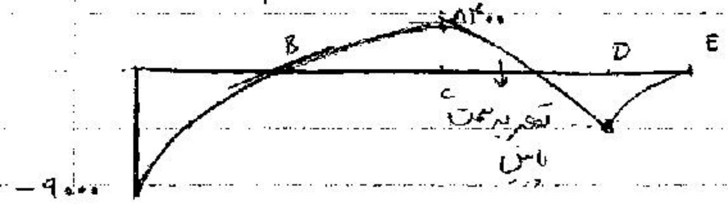
از C تا D یک خط با شیب −800 ؛ و سپس نمودار برشی به صفر می‌رسد

$A_1 = \frac{1}{2}(5000 + 4000) \times 2 = 9000$

$A_2 = \frac{1}{2}(4000 + 1600) \times 3 = 8400$

در اینجا که یک لنگر متمرکز داریم

به اندازه ‎-9000



در محل B لنگر صفر باید شود

پس A_1 حتماً باید 9000 در آید

تا با 9000- شود صفر

در غیر این صورت اشتباه است.

در نقطه B شیب منحنی یکسان است

شکست در نقطه B می‌شود ارتفاع منفی V در آن نقطه

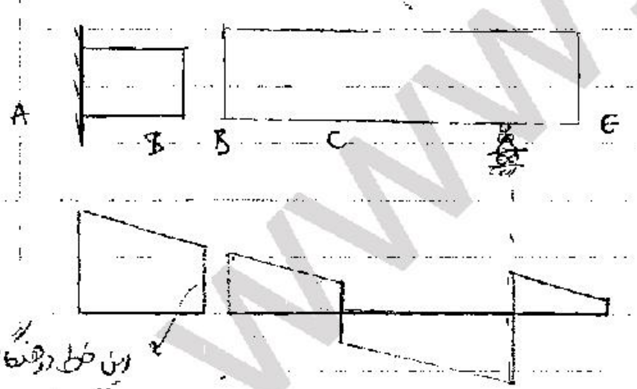
$A_3 = \frac{1}{2}(400 + 4400) \times 5 = 12000$

سپس به اندازه 12000 از 8400 کم می‌شود.

در نقطه E شیب منحنی صفر است چون نیروی مرکزی داریم.

تقعر رو به پایین چون مساحت V منفی است و M در حال کاهش است

$$\left\{ \frac{d^2M}{dx^2} = q \right. \longrightarrow$$ چون q منفی است پس تقعر رو به پایین است



این خط در هنگام رسم در منحنی حذف می‌شود

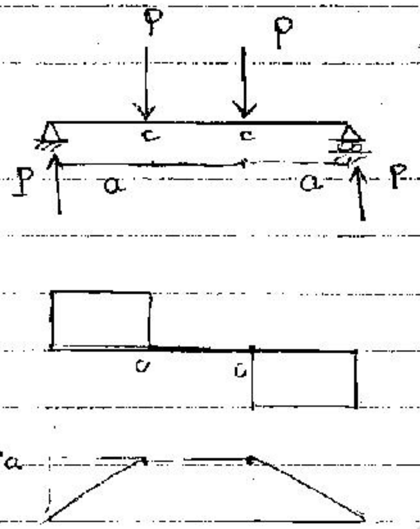
خمش 8 bending

تنش برشی را معرفی کردیم اکنون به بررسی تنش خمشی می‌پردازیم ؛

نیروی برشی اکنون نداریم در هر مقطع فقط لنگر خمشی داریم ؛

« خمش خالص »

« Pure bending »



در قسمت c نیروی برشی صفر است

از طرفی لنگر خمشی هم ثابت است

ولی حالت غالب این است که خمش خالص نیست

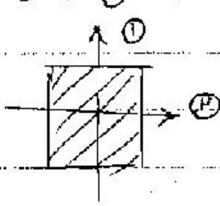
بلکه همراه با نیروی برشی است که به آن خمش ساده یا « simple bending » گویند ؛

V و M

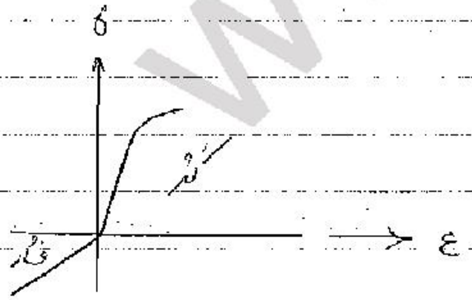
فرض 8

* لنگر خمشی حول یکی از محورهای اصلی مرکزی اینرسی مقطع باشد ؛

مثلاً در مقطع مستطیل



لنگر خمشی حول ① یا ② خواهد بود ؛



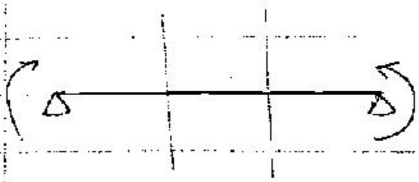
* مدول الاستیسیته در کشش و فشار یکی است

یعنی اجسام ممکن است در کشش و فشار نمودار σ-ε آنها متفاوت باشد ولی چون E ضریب زاویه این خط است

73

* تنش ها و تغییر شکل ها در محدوده خطی منحنی تنش تغییر شکل قرار دارند

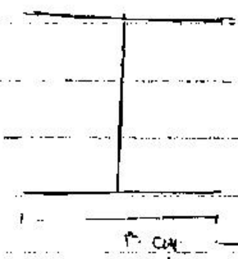
* تغییر شکلها کوچکند

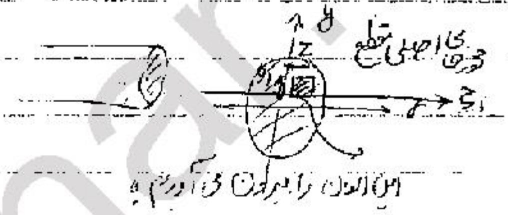


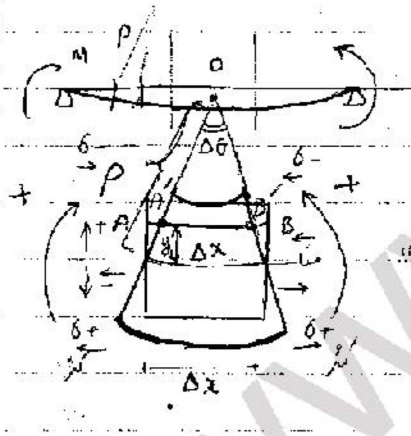
* مقطع دچار تاب خوردگی نمی شود ؛ مقاطع عمود بر محور میله مسطح باقی می مانند ؛

این فرضیه به نام « فرضیه سن ونان » معروف است ؛ Saint Venent

این فرضیه در اکثر موارد درست است مگر این که مقطع جدار نازک خیلی نازک باشد ؛







تیر زیر لنگر خمش خم خواهد شد

« تغییر شکل تیر »

چون تغییر شکلها کوچکند طول تار وسطی را با طول اولیه یکی می گیریم ؛ (Δx)

مثلا AB طولش از Δx به $A'B'$ رسیده است ؛

ρ شعاع انحنای تار خنثی تیر است ؛

* $\overline{\Delta x} = \rho \Delta \theta$

* $\overline{A'B'} = (\rho - y_1)\Delta\theta$

* $\varepsilon_x = \dfrac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \dfrac{(\rho - y_1)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} = \dfrac{-y_1}{\rho}$

* تغییر کرنش به طور خطی ؛ دور از سطح تار خنثی زیاد می شود در بالا کم در پایین زیاد می شود ؛

* $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma}{E} \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon$ پس σ هم به طور خطی تغییر می کند

$$\sigma_x = -\frac{E y_1}{\rho}$$

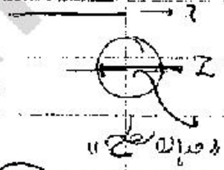
$* \text{ محور } N = \int \sigma \, dA = 0$ چون نقطه خنثی داریم

$$* \int -\frac{E y_1}{\rho} dA = 0 \Rightarrow -\frac{E}{\rho} \int y_1 \, dA = 0$$

چون این انتگرال صفر شده پس y_1 باید در نقطه c باشد یعنی y_1 باید نسبت به Z که از مرکز مقطع می‌گذرد سنجیده شود؛

در واقع یک سطح است که محور x عمود بر آن است؛ = از این رو همان محور Δx است که به صورت یک خط دیده می‌شود؛ = میان تار یا میان سطح

* در واقع سطحی است که از محور z و x تشکیل می‌شود؛

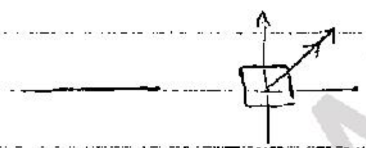


$$* \quad M_y = \int_A (\sigma \, dA) z = 0$$

$$= \int -\frac{E y z}{\rho} dA = 0 \Rightarrow -\frac{E}{\rho} \int y z \, dA = 0$$

چون I حاصلضرب صفر شده پس y و z محورهای اصلی مقطع‌اند

همچنین پس فرض کردیم که گشتاور خمشی حول یکی از محورهای اصلی مرکزی باشد



اگر گشتاور حول محور اصلی نباشد در مقاومت (۲) با تجزیه آن روی محورهای اصلی استفاده می‌کنیم

گشتاور حول z: $M_z = -\int_A (\sigma \, dA) y = -\int -\frac{E y^2}{\rho} dA$ — با توجه به شکل: $-y , +\sigma$ ؛ $+y , -\sigma$

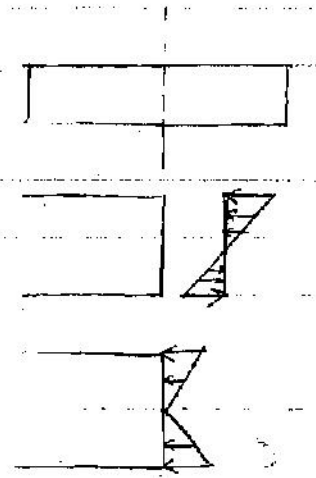
$$= +\frac{E}{\rho} \int y^2 \, dA$$

$$\Rightarrow \boxed{M_z = \frac{E I_z}{\rho}}$$

* $\varepsilon = -\frac{y}{\rho}$ * $\sigma = -\frac{Ey}{\rho}$ * $M_z = \frac{EI_z}{\rho}$

با حذف $\frac{E}{\rho}$ داریم

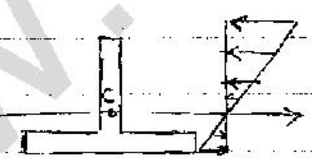
$$\boxed{\sigma = \frac{-M_z y}{I_z}}$$



اگر مقطع نسبت به محور z متقارن باشد.

تنش های بالا و پایین با هم برابرند!

و اگر نامتقارن باشد.

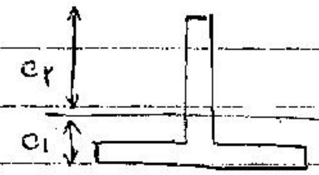


هم‌تراز نخواهد بود

مقطع متقارن

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_z y_{max}}{I_z} = \pm \frac{M_z C}{I_z}$$

$$\boxed{\sigma_{max} = \pm \frac{M_z}{W_z}} \quad * \quad \underset{}{\overset{\text{اساس مقاومت}}{W_z}} = \frac{I_z}{c} \quad *$$



مقطع نامتقارن 8 در اینجا ۲ مدول مقطع خواهیم داشت

$$W_{1z} = \frac{I_z}{c_1}$$

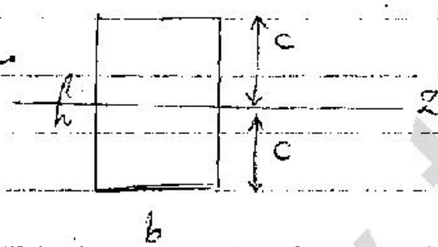
$$W_{2z} = \frac{I_z}{c_2}$$

$$\sigma_{1max} = \frac{M_z}{W_{1z}}$$

$$\sigma_{2max} = \frac{M_z}{W_{2z}}$$

اگر جنس تیر رفتار یکسان تحمل نکند مثل گچ یا بتن که فشار را بهتر تحمل می کند بنابراین اگر مقطع مثل بالا داشته باشیم بهتر است

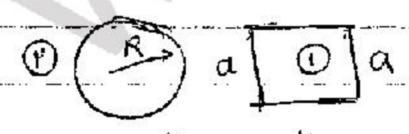
مستطیل



$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_z = \frac{\pi R^3}{4}$$

* در مقطع داریم یک دایره و یک مستطیل با مساحت مساوی می خواهیم ببینیم کدامیک مقاومت خمشی بیشتر دارند؟



باید ببینیم کدامیک تنش کمتری دارد؛

$A = a^2 = \pi R^2$

با گشتاور مساوی هر کدامیک چون مدول بیشتری داشته باشد تنش کمتر و مقاومت بیشتر دارد؛

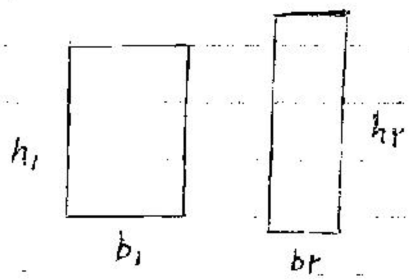
* $a = R\sqrt{\pi}$ $\qquad$ $w_1 z = \frac{a^3}{6} = \frac{R^3 \pi \sqrt{\pi}}{6}$

$$w_2 z = \frac{\pi R^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{w_1 z}{w_2 z} = \frac{4\sqrt{\pi}}{6} = 1/19$$

* مدول مقطع مربع حدود ۲۰٪ بیشتر از مدول مقطع دایره است پس با سطح مساوی مربع برای تحمل تنش بهتر است .

* در برش برعکس بود مقطع مدور بهتر از مربع بود .



$$A = bh = cte$$

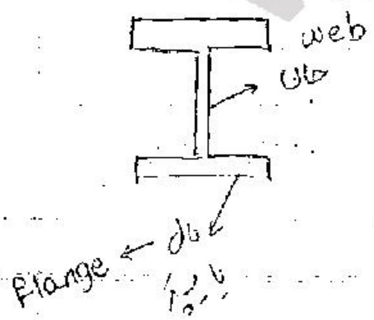
* $wz = \frac{bh^2}{6} = A\frac{h}{6}$

* با مقطع ثابت هرچه ارتفاع بیشتر باشد مدول مقطع بیشتر است یعنی مقطع دوم بهتر است چون $h_2 > h_1$ است

ولی از نظر پایداری حدی دارد .

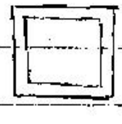
این تیر با این مقطع نازک از نظر پایداری دچار اشکال است

* برای این که این مشکل را حل کنیم مقطعی به شکل زیر ایجاد کنیم .

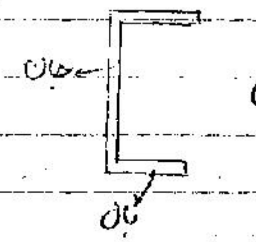


مقطع I $\qquad$ مصالح در بالا و پایین تیراند .

چون در مقطع I زیاد شده w هم اضافه می‌شود .

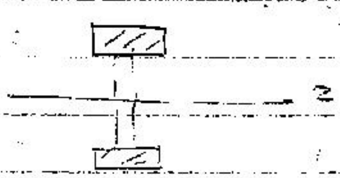


در اینجا هم مصالح در بالا و پایین اند
ولی از دو طرف به هم وصل شدند
برای تحمل لنگر خمشی مقطع خوبی است

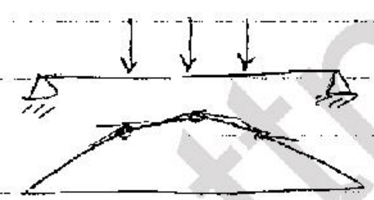


برای تحمل خمش باید مصالح را دور از محور خمش ببریم :
در پیچش امکان پذیر بود که می توانستیم یک لوله درست کنیم

ولی در خمش نمی توان این کار را کرد باید یک اتصالی بین آنها برقرار باشد



اگر خمش ساده باشد :

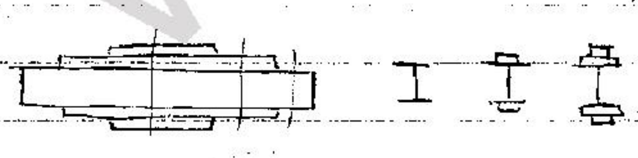


$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_{z\,max}}{W_z}$$

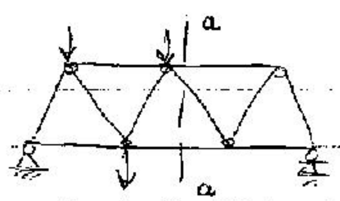
اگر مقطع متغیر باشد W هم متفاوت خواهد بود باید از مشتق گیری استفاده شود .

این فرمولها در حوالی بارهای متمرکز خطا دارد اما قابل صرفنظر کردن است .

گاهی اوقات یک تیر را در قسمت هایی از آن تقویت می کنند هر جا لنگر خمشی زیاد شود اتصال یا زیاد می کنیم
بیشتر از نظر اقتصادی این کار انجام می شود



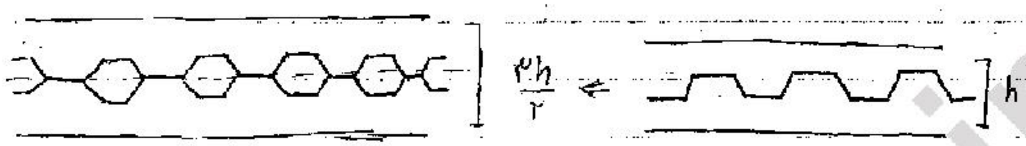
در بعضی موارد که دهانه خیلی زیاد است از خرپا استفاده می شود :



دو قسمت بالا و پایین را با استفاده از اتصالات داخلی به هم متصل می کند.

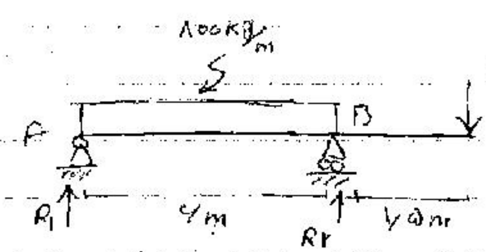
اتصال داخلی را دیگر به حساب نمی آوریم فقط بالا و پایین را نگه می داریم.

* تنش از بالا تا پایین مطابق رابطه تنش خطی تغییر می کند.



ارتفاع زیادتر می شود پس ممان زیادتر و در نتیجه S زیادتر می شود ولی نکته این است که فرمول خمش را نباید برای تیرهای لانه زنبوری استفاده کرد.

در ساختمان های معمولی بکار بردن لانه زنبوری اشتباه است.
در حالی که مدام استفاده می شود در حالتی که تکرار می شود از آن ها استفاده کرد در ساختمان های مسکونی و تالارها حق استفاده را نداریم.

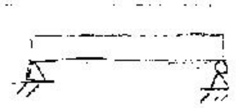


مثال ۶

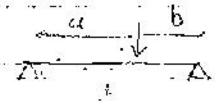
مقدار h را بیابید که

$$\sigma_w = 100\ \frac{kg}{cm^2}$$

باید لنگر max تیر را بدست بیاوریم؛ برای ممان های خطی از قبل می دانیم که $M = \frac{q l^2}{8}$



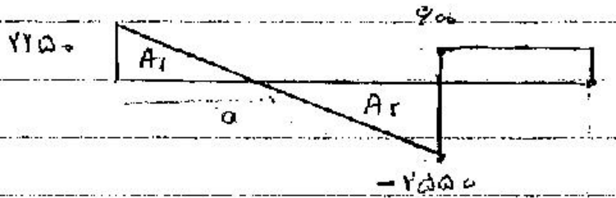
$\frac{q l^2}{8}$



$\frac{Pab}{L}$

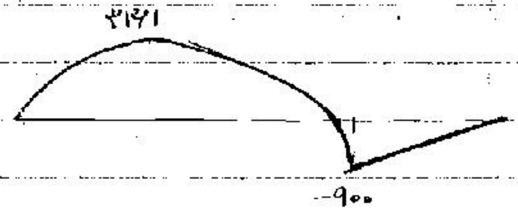
$* \quad \sum M_A = 800 \times 6 \times 3 - 6R_2 + 900(7.5) = 0 \Rightarrow R_2 = 3150\ kg$

$* \quad \sum F_y = R_1 + 3750 - (800)(6) - (900) = 0 \Rightarrow R_1 = 2250\ kg$



نیروی برشی

$$a = \frac{2250}{800} = 2.81\ m$$



$$A_1 = \tfrac{1}{2}(2.81)(2250) = 3161\ kg\ m$$

A_2 باید ۹۰۰ تا بیشتر از ۳۱۶۱ باشد ؛

اگر max دیگر فرقی ندارد که + یا − باشد ؛ هرکدام بزرگتر بود (از نظر قدر مطلق) .

$$\underbrace{\sigma_{max}}_{\sigma_w} = \pm \frac{M_{z max}}{W_z} \qquad |\sigma_{max}| \leq \underset{\text{مجاز}}{\sigma_w}$$

$$100 \geq \frac{|M_{z max}|}{W_z}$$

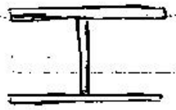
$$100 \geq \frac{3161 \times 100}{W_z} \Rightarrow W_z \geq 3161\ cm^3$$

$$\frac{bh^2}{6} \geq 3161\ cm^3$$

$$\frac{15}{6} h^2 \geq 3161$$

$$\boxed{h \geq 35.6\ cm}$$

با این مقدار یا بزرگتر از آن قطعه پاسخگو می‌باشد



تیر آهن

مثلاً تیر مثال قبل را می‌خواهیم با INP یا IPE طراحی کنیم :

$\sigma_w = 1500 \frac{kg}{cm^2}$

$|M_{max}| = 3161 \times 100 \ kg \cdot cm$

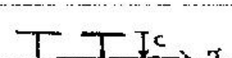
$|\sigma_{max}| \le \sigma_w \Rightarrow 1500 \ge \frac{3161 \times 100}{W_z}$

$W_z \ge 211 \ cm^3$

در جدول نگاه می‌کنیم که W_z که 211 است که می‌شود INP 200mm $\left\{ \begin{array}{l} 26.2 \ kg/m \\ w = 214 \ cm^3 \end{array} \right.$

برای IPE داریم که IPE 220 با $w = 252 \ cm^3 \ \left\{ 26.2 \ kg/m \right.$

* قاعدتاً IPE در خمش بهتر است زیرا هم w IPE بیشتر از w INP است پس باربری را به مقدار ناچیزی می‌شود اضافه کرد . مخصوصاً در شماره‌های بالاتر بهتر در برابر خمش عمل می‌کند .

*  $W = \frac{I_{کل}}{c} = \frac{2 I_{یکی از آنها}}{c} = 2W_1$

سپس در مثال بالا باید W_z را نصف کنیم :

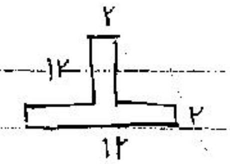
$2 \ I \ 160^{mm} \rightarrow W = 2(117) \ cm^3 \rightarrow G = 17.9 \ kg/m \times 2$

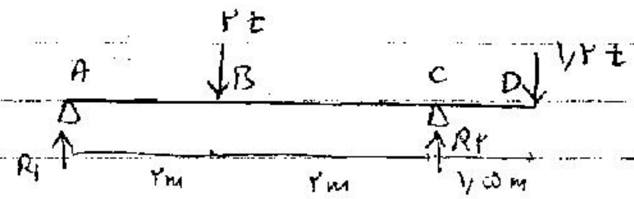
$2 \ IPE \ 160^{mm} \rightarrow W = 2(109) \ cm^3 \rightarrow G = 15.8 \ kg/m \times 2$

بنابراین کاربرد دو تا تیر به صرفه نیست چون وزن بیشتری خواهد داشت .

$\frac{W}{G}$ هر کدام بیشتر بود بهتر است

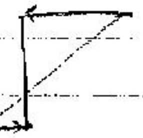
مثال 8



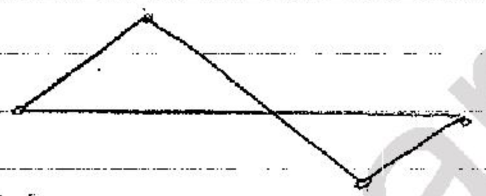


تنش های max کششی و فشاری را بیابید ؟

حل ـ مقطع یک مقطع نامتقارن است ، اگر لنگر همه مثبت باشد در بالا بیشترین کشش را خواهیم داشت ولی اینجا هم لنگر + داریم هم -



$2R_1 = 2(0.55) = 1.1\ t\cdot m$



1.2×1.5

= 1.8 در C

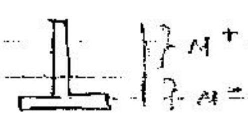
$$\sum M_C = 4R_1 - 2\times2 + 1.2\times1.5 = 0$$

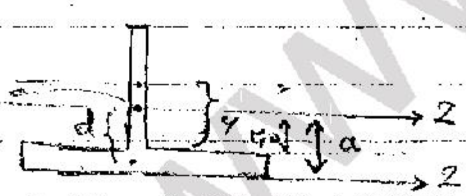
$$R_1 = 0.55\ t$$

مهم) * در این مسئله چون نامتقارن است max تنش ممکن است از هر کدام ناشی شود ، هر دو را باید حساب کرد !

$$M^+_{max} = 1.1\ t\cdot m$$

$$M^-_{max} = 1.8\ t\cdot m$$





$$a = \frac{(12\times2)\times1 + (12\times2)\times8}{(12\times2)\times2} = 4.5\ cm$$

ما می‌توانستیم بگوییم مقطع تا مرکز در 6 cm مقطع افقی است مقطع پایین در 1 cm می‌شود $\frac{7}{2} = 3.5$ که با 1 جمع شود می‌شود 4.5

$$A \quad d^2$$

مستطیل پایینی $I_z = \frac{(12)(2^3)}{12} + (2\times12)(3.5)^2$

مستطیل بالا $I_z = \frac{(2)(12)^3}{12} + (2\times12)(3.5)^2$

$$\Rightarrow I_{z\,\text{کل}} = 884\ cm^4$$

بالای مقطع B فشاری $\sigma = \frac{1.1\times10^{5}\times 9.5}{884} = 1182\ kg/cm^2$ در تار B

پایین مقطع C فشاری $\sigma = \frac{1.8\times10^{5}\times 4.5}{884} = $ ——

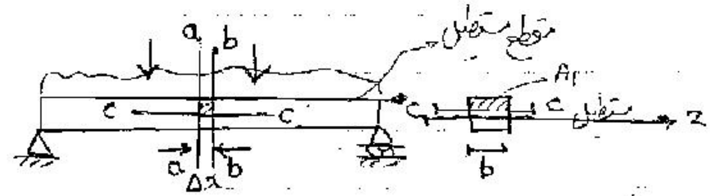
گر مثبت بالای تیر را فشاری کند
گر منفی پایین تیر را فشاری می‌کند

بالای مقطع C $= \frac{1.8\times10^{5}\times 9.5}{884} = 1934.4\ \frac{kg}{cm^2}$

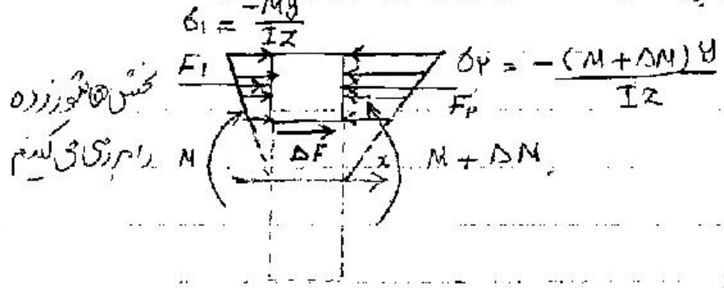
علیرضا جوادیان -

۸۴،۲،۲۴ به نام خدا ج ۲۱

تنش برشی در خمش ساده تیرها :



این روش را اولین بار یک مهندس روسی به نام جوراوسکی در سال ۱۸۷۵ ارائه داد :



به خاطر وجود گشتاور M تنش عمودی داریم :

$$F_1 = \int_{A_1} \sigma_1 dA \quad ; \quad F_2 = \int_{A_1} \sigma_2 dA$$

* F_1 با F_2 مساوی نیست چون گشتاور تغییر کرده است بنابراین برای تعادل نیاز به ΔF داریم :

$$* \quad \Delta F = F_2 - F_1$$

* ΔF به صورت یک نیروی برشی در مقطع c-c عمل می کند و یک تنش برشی ایجاد می شود :

$$* \quad \Delta F = \int_{A_1} -\frac{(M+\Delta M)y}{I_z} dA - \int_{A_1} -\frac{My}{I_z} dA$$

$$* \quad \Delta F = \int_{A_1} -\frac{(\Delta M)y}{I_z} dA = -\frac{\Delta M}{I_z} \int_{A_1} y dA = -\frac{\Delta M}{I_z} \underbrace{Q_{1z}}$$

مربوط به سطح A_1 است

* می دانیم $\frac{\Delta M}{\Delta x \to 0} = V$ نیروی برشی

$$\Delta F = \frac{\Delta M Q_{1z}}{I_z}$$

جهت ΔF را از روی شکل بدست می آوریم با توجه به جهت F_1، F_2 :

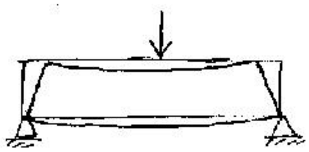
$$\Delta F = \frac{V\,\Delta x}{I_z} Q_{1z}$$

مقدار نیروی برشی در واحد طول را شار برشی گویند :

شدت نیروی برشی است

$$q = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{V}{I_z} Q_{1z}$$

شار برشی در واحد طول کم



به صورت برشی

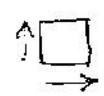
بالای تیر باید فشرده و طول آن کم شده و پایین تیر باید کشیده و طول آن زیاد شده است پس در صفحات در تمام لایه ها روی یکدیگر می لغزند اگر آزاد بود حرکت می کرد اما چون یک جسم یکپارچه اند یک نیرویی به وجود می آید که نیروی برشی است

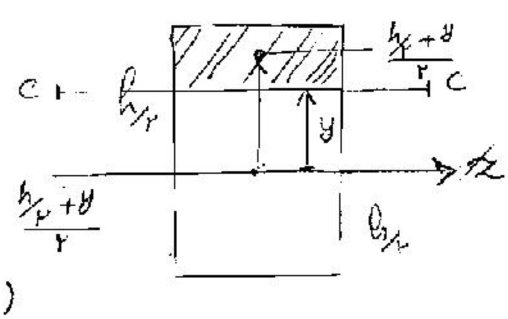
تنش برشی افقی و قائم

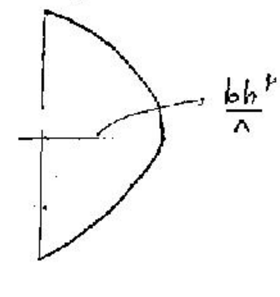
$$\tau = \frac{\Delta F}{b\,\Delta x} = \frac{q}{b} = \frac{V Q_{1z}}{I_z b} \qquad \text{یا} \quad \frac{V Q_{1z}}{I_z t}$$

در یک مقطع V و I و b ثابت اند فقط Q تغییر می کند که بستگی به مقطع C-C دارد

در یک المان تنش برشی در دو سطح عمود بر هم با هم برابرند







$$Q_{1z} = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \times \frac{\frac{h}{2}+y}{2}$$

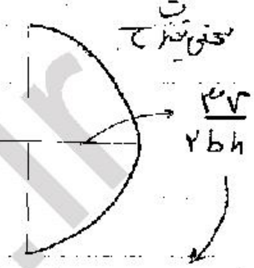
$$* \; Q_{1z} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$\frac{1}{2} \times b \times 2 (\frac{h}{2} - y)$
$+ 2b(\frac{h}{2} - y)(\frac{h}{2} \dots$

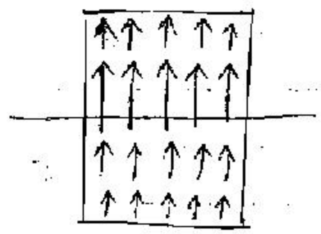
وقتی c-c به محور z میرسد بیشترین Q_z را داریم اگر مقطع c-c پائین محور z بیاید همان بالای جان
+ وقتی پائین جان - دارد که در مجموع Q_z کم می‌شود در پائین هم Q_z صفر می‌شود چون مقدار نسبت به محور مرکزی صفر است

* در بالا و پائین Q_z صفر است. تنش برشی در محور z max است و در بالا و پائین صفر است.

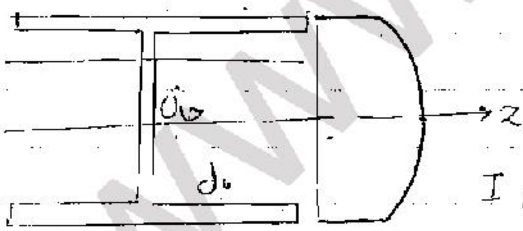
$$\tau = \frac{V \cdot b/2 \,(\frac{h^2}{4} - y^2)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$



* مقدار max تنش برشی می‌شود = $\frac{3}{2}\tau_m$ (متوسط)



* برای یک مقطع I :

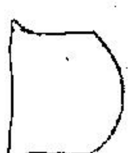


در بال تیر به علت پهنای زیاد نمی‌شود رابطه بالا را بکار برد

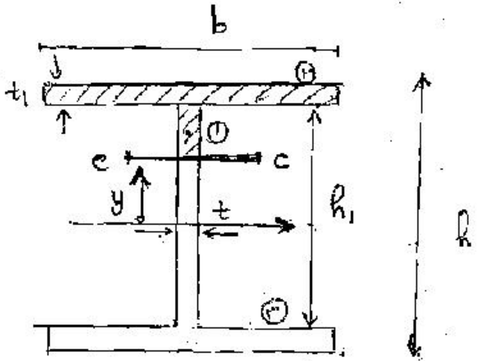
اما در جان تیر می‌شود این رابطه را بکار برد پس برای تیر با مقطع I سطح A_1 می‌شود سطح هاشور زده .

اگر نمودار آن را بکشیم یک سهمی خواهد بود ولی مقدار آن در بال صفر نخواهد بود .

در محور zها max است ولی تغییرات آن از بالا تا پائین تیر زیاد نیست



این منحنی درست نیست
تنش در بال‌ها نمی‌شود منحنی را همین
در نظر گرفت



$t_1 = \frac{h-h_1}{2}$ معمولاً $t_1 > t$ است ؛

* معادله های تغییرات Q و τ را بیابید ؟

① ⇒ $Q_{1z} = t\left(\frac{h_1}{4}+\frac{y}{2}\right)\left(\frac{h_1}{2}-y\right) = \frac{t}{2}\left(\frac{h_1}{2}+y\right)\left(\frac{h_1}{2}-y\right) = \frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y^2\right)$ *

② ⇒ $Q_{2z} = t_1(b)\left(\frac{h_1}{2}+\frac{t_1}{2}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{h-h_1}{2}$

$\Rightarrow Q_{2z} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2-h_1^2}{4}\right)$

$\Rightarrow \boxed{Q_t = \frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y^2\right)+\frac{b}{8}\left(h^2-h_1^2\right)}$

① $I_z = \frac{1}{12}(t)(h_1^3)$

②③ $I_z = 2I_{z2} \Rightarrow I_{z2} = \frac{1}{12}(b)(t_1^3)+(bt_1)\left(\frac{h_1}{2}+\frac{t_1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow I_{z2} = \frac{1}{12}b\left(\frac{h-h_1}{2}\right)^3+b\left(\frac{h-h_1}{2}\right)\left(\frac{h_1}{4}+\frac{h}{4}\right)^2$

$\Rightarrow I_{z2} = \frac{b}{24}(h-h_1)\left[\frac{1}{4}\left[h-h_1\right]^2+(h+h_1)^2\right]$

$\Rightarrow I_{zt} = I_{z1}+2I_{z2} = \frac{1}{12}th_1^3+\frac{b}{12}(h-h_1)\left[\frac{1}{4}(h-h_1)^2+(h+h_1)^2\right]$ *

* نکته 8

یک تقریب برای محاسبات این است که جان را یک ارتفاع در نظر بگیریم (h_1) ؛ یعنی تنش برشی در جان یکنواخت است ؛
تقریب دوم این است که بگوییم ۹۰ ٪ نیروی برشی در جان تیر است ؛ البته بسته به انواع مقطع متفاوت است ؛
ما فرض می کنیم که تمام نیروی برشی در جان است ؛

جان → web

فرمول تقریبی * $\tau_{web} = \frac{V}{t\,h_1} = \frac{V}{A_{web}}$

در سازه های فولادی از این رابطه استفاده می شود.

با تقریب خوبی τ_{web} نزدیک به τ_{max} جان در می آید اما خطا دارد و مقدار دقیق نیست ؛

$* \quad V_{max} = \frac{ql}{2}$

درتمام تیرها τ ماکزیمم است که V هم max باشد.

برش: $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V_{max}}{bh} = \frac{3ql}{4bh}$

$\tau_{max} = \tau_w$ مجاز

$* \quad M_{max} = \frac{ql^2}{8} \qquad \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{\frac{ql^2}{8}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3ql^2}{4bh^2}$

$\sigma_{max} = \sigma_w$

نتیجه: $\frac{L}{h} = \frac{\sigma_w}{\tau_w}$

مثلاً فولاد نسبت تنش عمودی به برشی مجاز آن حدود $\frac{5}{2}$ است

در مقطع مستطیل $\sigma_w = \frac{3}{2}\sigma_{yp}$

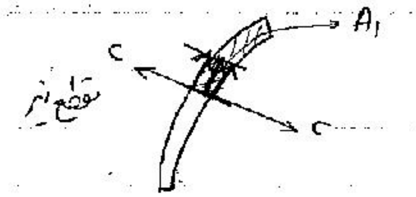
$\tau_w = 0/6\,\sigma_{yp}$ $\Rightarrow \frac{\sigma_w}{\tau_w} = \frac{5}{2}$

یعنی طول تیر از ۲ برابر ارتفاع کمتر است.

* اگر $\frac{L}{h}$ از حد مجاز بیشتر باشد، $\underline{\sigma}$ مورد نظر مقدار مجاز را رد می‌کند چون با توان دوم $\frac{L}{h}$ ارتباط دارد.

معمولاً تیرها با تنش خمشی محاسبه می‌شوند.

در حالتی اگر یک جدار نازک باز داشته باشیم :



تنش برشی در هر نقطه در لبه جدار مماس بر جدار است

چون جدار نازک است می‌توانیم روی ضخامت جدار تنش برشی را یکسان بگیریم :
در مقطع مستطیلی هم می‌توان این فرض را کرد خطایی ایجاد نمی‌شود

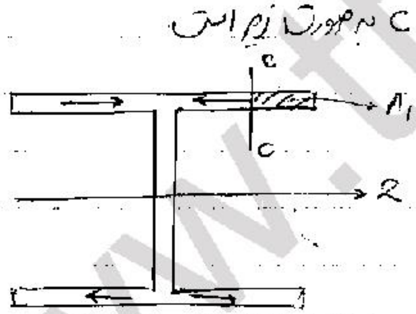
پس داریم

$$\tau = \frac{V Q_z}{I_z \cdot t}$$

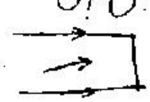
مقطع C-C باید روی
عمود بر جدار است

در بال تیر می‌شود جریان را انگاریم روی مقطع C - C به صورت زیر است

A_1 مساحتی که با C-C
قطع شده است.



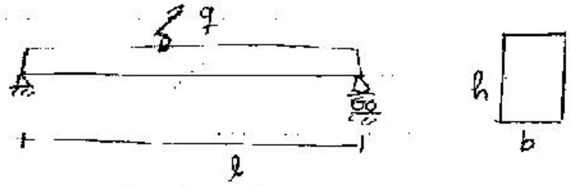
تیر به طور تقریبی تنش برشی را در بال موازی
بال‌ها می‌گیریم :
تیر با تغییر مقطع C-C می‌توانیم تنش برشی
را با تقریب در بال حساب کنیم



البته دقیقاً درست نیست چون در مقطع بال y. تنش‌های قائم برشی هم می‌توانیم داشته باشیم ولی با تقریب می‌توانیم آن را یکنواخت بگیریم

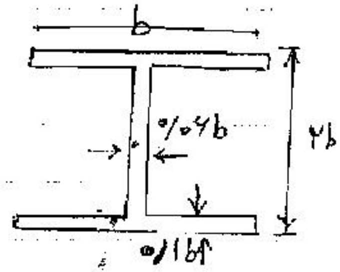
در بال Q_z به صورت خطی خواهد بود چون فاصله مرکز مقطع A_1 تا z تغییر نمی‌کند بلکه ثابت است

* مثال 8



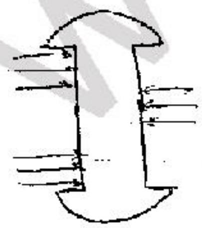
ابعاد تیر چه نسبتی داشته باشند تا تنش خمشی و تنش عمودی (برشی) هر دو با هم به مقدار مجاز خود برسند ؟

در مقاطع I با جان نازک «اقتصادی تر»، تنش برشی نسبت به مقطع مستطیل خیلی بیشتر می‌شود بنابراین نسبت $\frac{L}{h}$ دیگر $\frac{5}{3}$ نیست تا حدود ۱۰ ادامه می‌شود.



مثال 8 $\frac{L}{h}$ ؟ مثل مثال قبل حل شود.

* اگر طول تیر حدود ۱۰ برابر و بیشتر باشد نسبت به h معمولاً خمش حاکم است برای طراحی تیر ولی کمتر از آن برش حاکم است در نزدیکی ۱۰ هر دو را باید حساب کنیم.



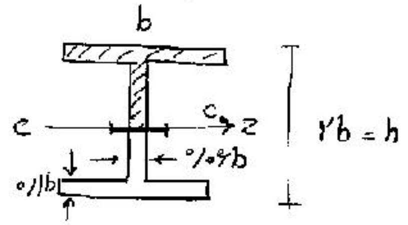
در پیچ‌ها و پرچ‌ها در واقع با یک تیر سروکار داریم که هم تنش خمشی دارد هم تنش برشی!

اگر طول پیچ کمتر باشد نسبت به قطر تنش عمودی را باید در نظر نگرفت

برای مقاطع I

دقیق جان * $\tau_{max} = \dfrac{VQ_{12}}{I_z . t}$

تقریبی جان * $\tau_{web} = \dfrac{V}{A_w}$



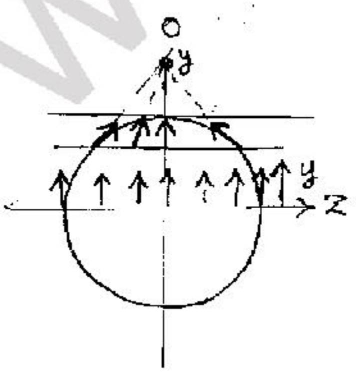
$$* \quad Q_{12} = (b \times 0/1b)(0/95b) + (0/06b)(0/9b)(0/45b) = 0/119\, b^3$$

$$* \quad I_z = \frac{b\,(2b)^3}{12} - 2\left(\frac{0/47b \times (1/8b)^3}{12}\right) = 0/209$$

$$* \quad \tau_{max} = \frac{V \times 0/119\, b^3}{0/209\, b^4 \times 0/06b} = 9/489\, \frac{V}{b^2}$$

$$* \quad \tau_w = \frac{V}{1/8b \times 0/06b} = 9/259\, \frac{V}{b^2}$$

$$\frac{\tau_w}{\tau_{max}} = \frac{9/259}{9/489} = 0/975$$



* مقطع دایره 8

روی محور y به علت تقارن تنش برشی باید قائم باشد

در فرضی که در اینجا می‌شود این است که مولفه‌های قائم تنش برشی باید مساوی باشند.

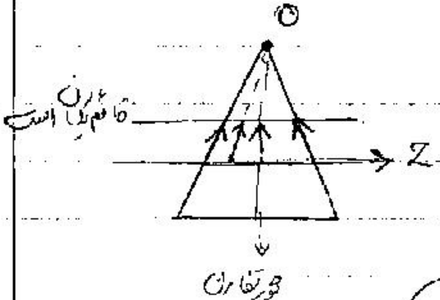
فرض یکنواخت بودن تنش برشی قائم خطایی را ایجاد می‌کند در روی محور z بیشتر است ولی این تقریب که تراز آن مایوس می‌آورد

برای هر نقطه τ در نقطه‌ای از نقطه O به آن وصل کرده و با خط تنش های قائم تقاطع می دهیم تا هم جهت و هم مقدار آن بدست آید

$$\tau = \frac{V Q_z}{I_z b}$$

* b در اینجا متغیر است ؛

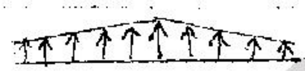
در مقاطع مثلث هم می‌شود از این روش استفاده کرد ؛



متساوی الساقین

* در مقطع دایره τ_{max} روی محور Z می‌شود $\frac{4}{3}\tau_m$ متوسط

تئوری ارتجاعی ولی تنش برشی را یکنواخت نمی‌داند روی محور Z

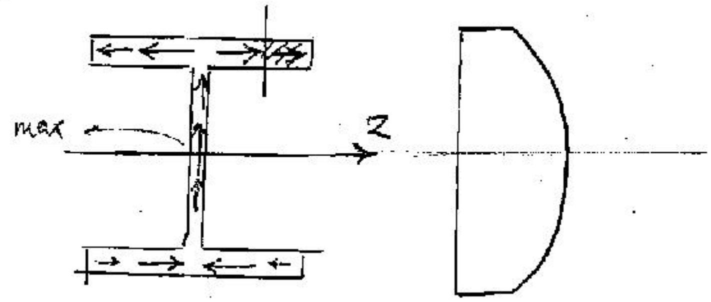


$$\begin{cases} \tau_{max} = 1.38\ \tau_m \\ \tau_{\text{سطح}} = 1.23\ \tau_m \end{cases}$$

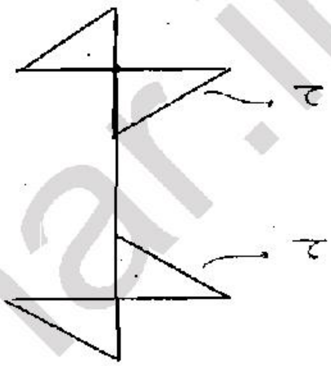
ولی در مقاومت مصالح τ را یکسان می‌گیرند ؛

* برای max شدن τ باید $\frac{Q_z}{b}$ را نسبت به ... مشتق بگیریم و مقدار max را بدست آوریم
مثلاً در مثلث حساب کنید روی محور Z نمی‌شود بلکه بالاتر از محور Z می‌شود ؛

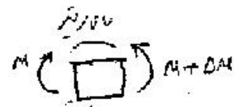
چرا ما از محاسبات استفاده را حساب می‌کنیم که از ... ؟



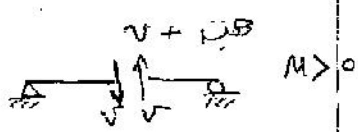
$$\tau_{\text{بال}} = \frac{VQ_z}{tI_z}$$



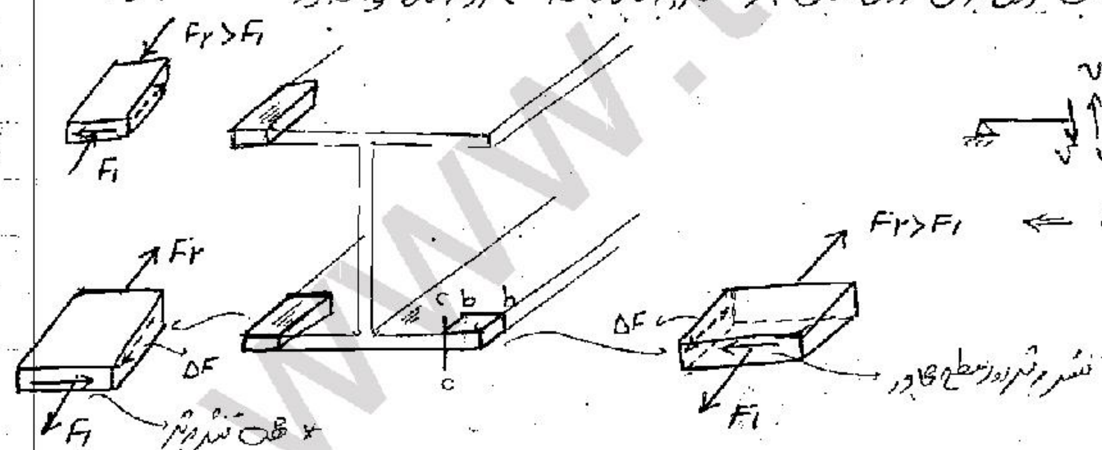
* روی بال به طور خطی از لبه به طرف جان زیاد می‌شوند



برای تعیین جهت نیروی برشی روی جان اگر V رو به بالا باشد τ رو به بالا خواهد بود — بالای تیر نیروی کشش دارد

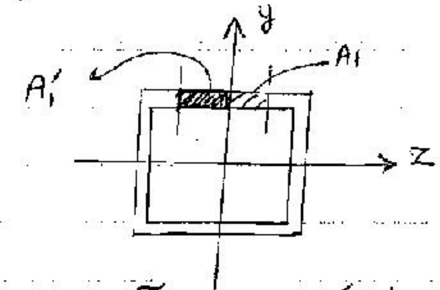


* چون $\Delta M > 0 \Leftarrow F_2 > F_1$



برای تعادل دو مقطع نزدیک به هم گرفتیم و یک مقطع عمود بر آن گرفتیم در مقطع مستطیل عمود بر دو مقطع a و b می‌شود

در جدارهای نازک τ همیشه موازی جدار است.



Done

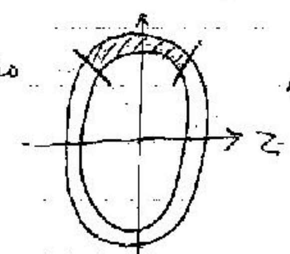
* جدار نازک بسته متقارن 8

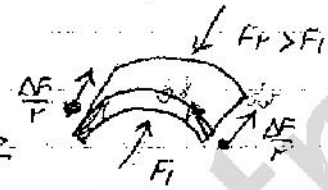
متقارن نسبت به محور برش ((محور y))

تفاوت جدار نازک بسته و باز در این است که در جدار نازک باز با ۱ مقطع یک تکه از تیر بیرون می آید

ولی در جدار نازک بسته باید به جای یک مقطع C-C دوتا مقطع بزنیم. در این صورت باید بدانیم ΔF را چطور

تقسیم کنیم ولی اگر نسبت به محور y متقارن باشد می توانیم ΔF را به طور مساوی تقسیم کنیم.



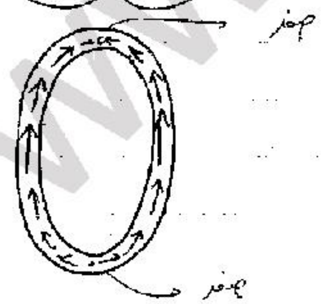


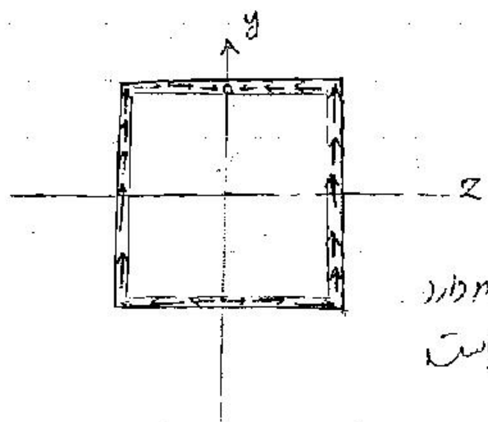
نصف ΔF به هر سطح طرفین می رسد

$$\boxed{\tau = \frac{V Q_z}{2 I_z t}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{V Q'_z}{I_z t}}$$

$Q'_z \longrightarrow A'_1$ در مورد نصف سطح   از محور تقارن تا مقطع برش

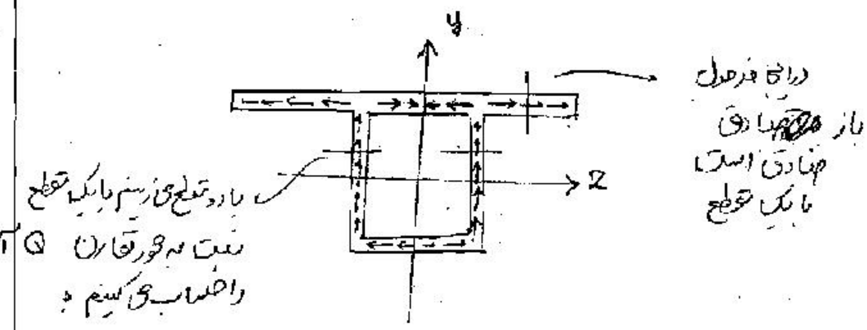


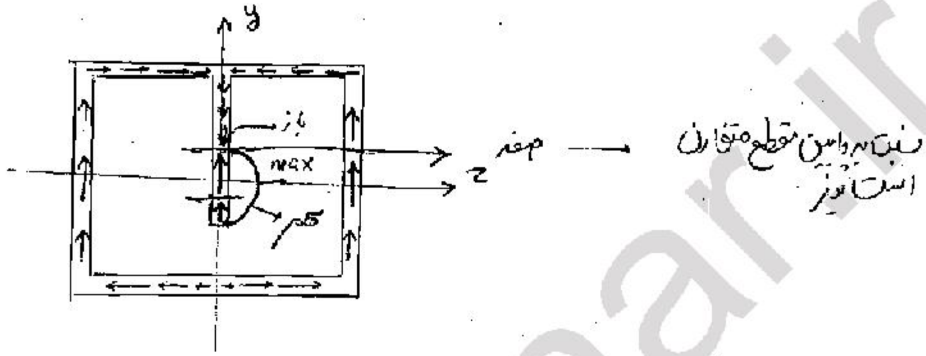


روی محور z، τ مقدار max دارد.

روی محور تقارن τ صفر است

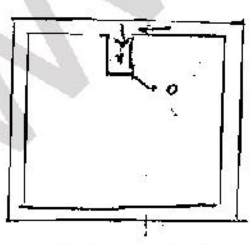
مقاطع مرکب از بسته و باز

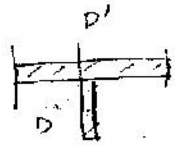




برای تعیین جهت می‌توان حکم کرد که نسبت به محور z هرگاه از دورترین نقاط شروع کنیم شار مثل جریان یک رودخانه است که از دورترین نقاط جریان به تدریج زیاد می‌شود تا این که در انتها جریان به تدریج مصرف و به صفر می‌رسد.

در گوشه‌های قائم همیشه نمودار τ عوض می‌شود. اگر با محور z تقاطع داشته باشد.





برای محاسبه Q_E یا Q_F باید مقطع T شکل معادل آن را بیابیم :

$$Q_{zE} = Q_{zF} = \frac{۱}{۲}\left(۱\times ۲۰ \times ۳/۷۵ + ۱۹ \times ۱ \times ۱۴/۲۵ \right) = ۱۷۲/۸۷$$

$$* \quad \tau_E = \tau_F = ۳/۴۴۳ \times ۱۷۲/۸۷ = ۵۹۵/۱۹ \ \frac{kg}{cm^۲}$$

$$Q_a = Q_F + (۱ \times ۱ \times ۱۴/۲۵) = ۱۷۲/۸۷ + ۱۴/۲۵ = ۱۸۷/۱۲$$

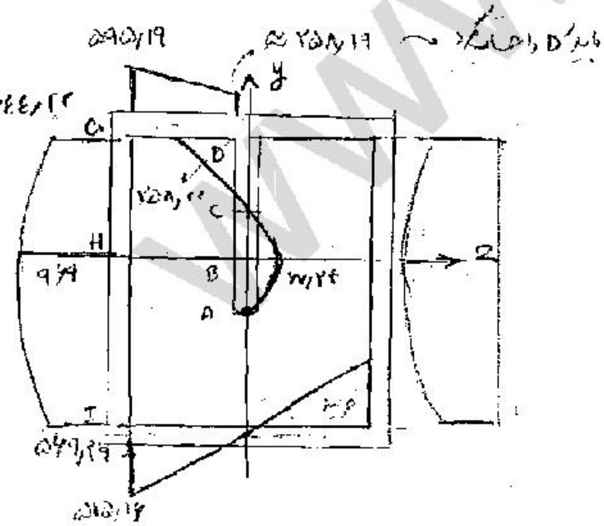
$$* \quad \tau_a = ۳/۴۴۳ \times ۱۸۷/۱۲ = ۶۴۴/۲۵ \ \frac{kg}{cm^۲}$$

$$* \quad \tau_H = ۳/۴۴۳ \times (Q_a + \underbrace{Q_{aH}}_{\text{اتصال جوش‌دار}}) = ۳/۴۴۳ \times \left[(۱۸۷/۱۲ \times ۱) + (۱۳/۷۵)\left(\frac{۱۳/۷۵}{۲}\right) \right]$$

$$= ۹۶۹/۷۳ \ kg/cm^۲$$

$$* \quad \tau_I = ۳/۴۴۳ (۱۰/۵ \times ۱ \times ۱۵/۷۵) = ۵۶۹/۳۹ \ kg/cm^۲$$

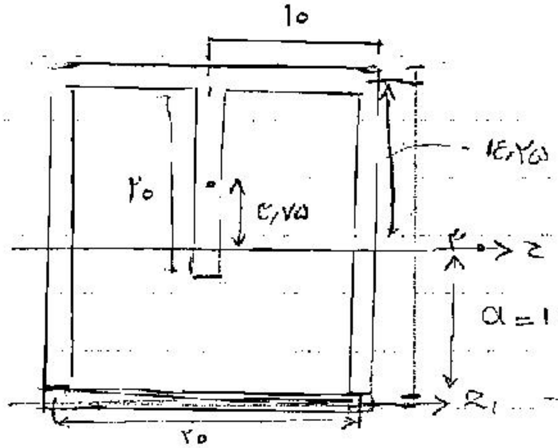
$$* \quad \tau_J = ۳/۴۴۳ (۹/۵ \times ۱ \times ۱۵/۷۵) = ۵۱۵/۱۴ \ kg/cm^۲$$



مثال ۸ محل مرکز برش کجاست؟

$t = 1\ cm$

$V = 50\ t$



اول باید محور z تعیین شود

$$a = \frac{(2\times(29\times1)\times15) + (21\times30) + (20\times1\times19.5)}{2\times30 + 2\times10 + 20} = 15.75\ cm$$

بال پایین — بال بالا

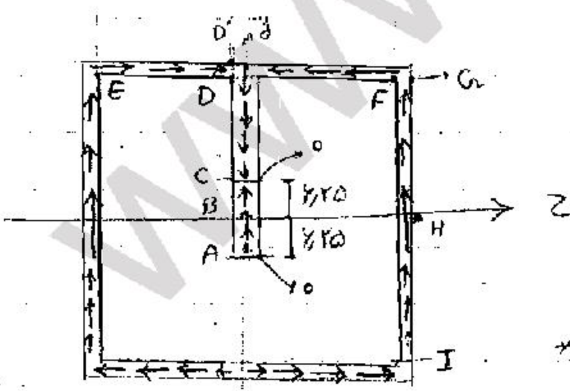
$$* \quad I_z = \frac{21\times1^3}{12} + (21\times1)(15.75)^2 + \frac{21\times1^3}{12} + (21\times1)(14.25)^2$$

$$+ 2\left[\frac{1\times29^3}{12} + (1\times29)(0.75)^2\right] + \frac{1\times20^3}{12} + (1\times20)(3.75)^2$$

دیواره‌ها

$$\Rightarrow I_z = 14520\ cm^4$$

ممان‌های بال‌ها را می‌توان صرف نظر کرد چون ناچیز است



در گاه بالا و پایین τ صفر می‌شود چون تقارن دارد

$$* \quad \tau_A = 0$$

$$* \quad \tau = \frac{VQ_z}{I_z\, t} = \frac{50000\, Q_z}{14520\, (t=1)} = 3.443\, Q_z$$

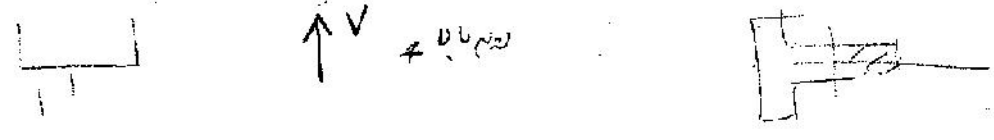
$$q = \tau t = \frac{VQ_z}{I_z}$$

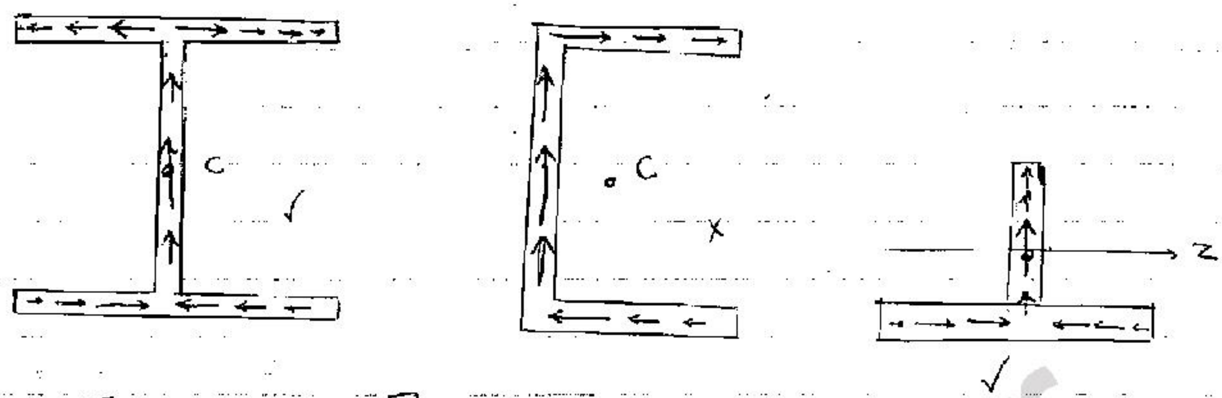
اگر t متغیر باشد، باید q شار برش را تعیین کنیم که در این حالت t ثابت است

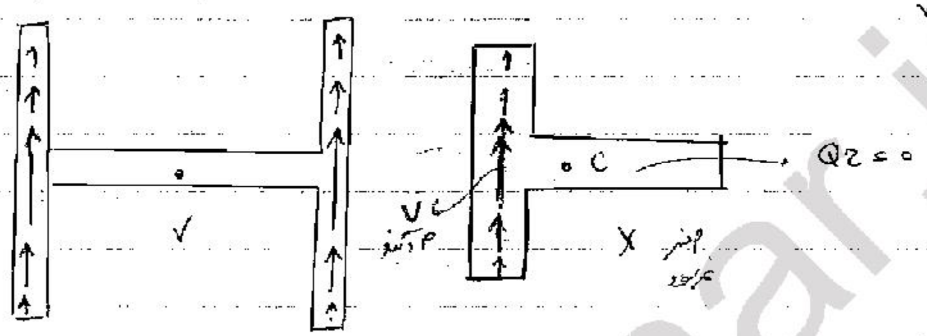
$$* \quad \tau_B = 3.443\,(1\times6.25)\left(\frac{6.25}{2}\right) = 67.44\ \frac{kg}{cm^2}$$

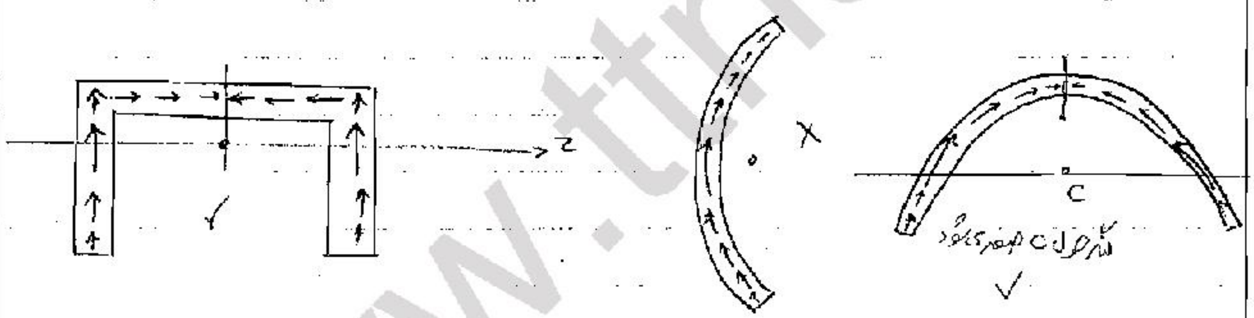
$$* \quad \tau_C = 0$$

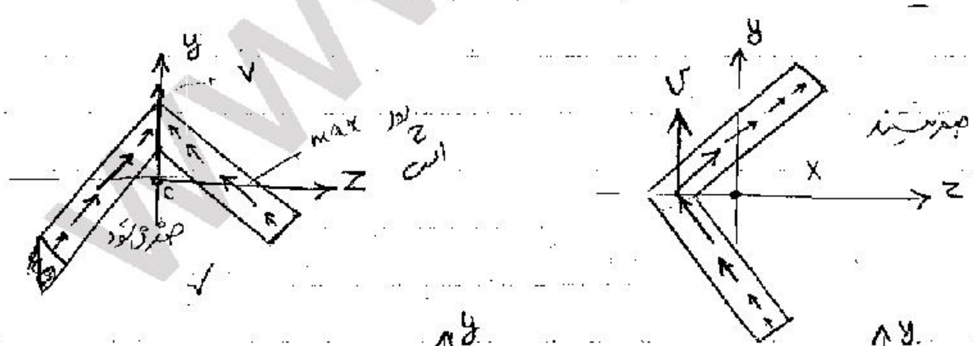
$$* \quad \tau_D = 3.44\times(1\times20)(3.75) = 258.22\ \frac{kg}{cm^2}$$

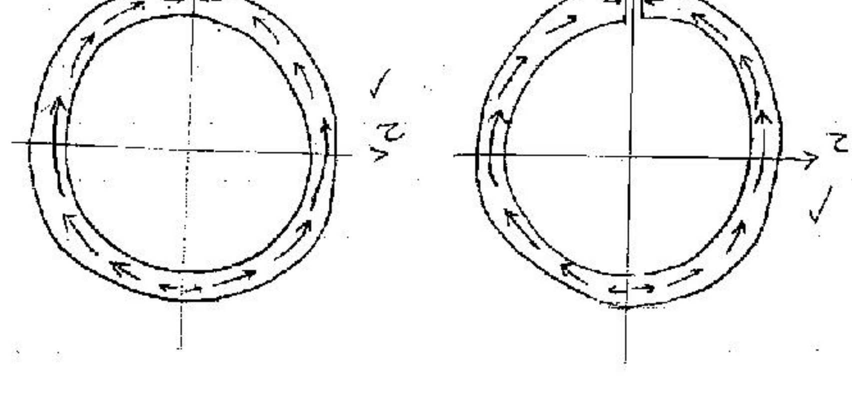






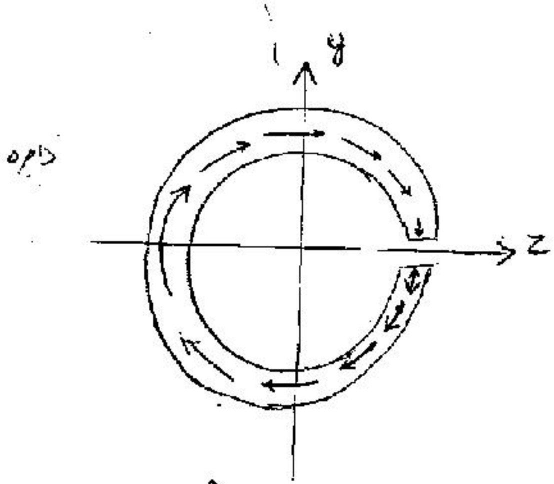


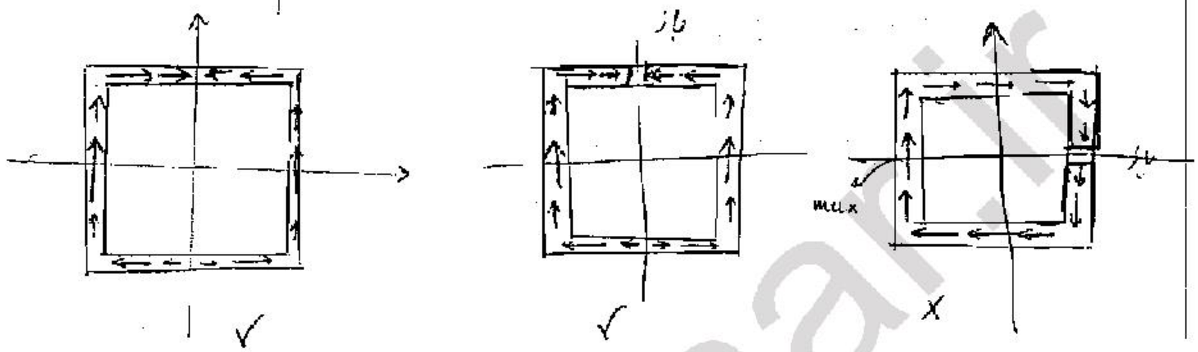




در همه جدار نازک‌ها:
هر کجا جدار باز است
τ صفر است.

چون محل اندازه‌گیری q
در جدار نازک باز اتفاقاً جایی
است که τ صفر می‌شود
پس عمود بر یکی است





اشکالی که گشتاور آنها حول مرکز سطح صفر می‌شود محور برش آنها محور تقارن است ؛

در غیر این صورت بقیه اشکال دارای یک گشتاوری نسبت به محور c یعنی محور z گذرنده از مرکز سطح هستند

یعنی یک گشتاور پیچشی دارند ؛

برآیند نیرو در حالت کلی همه اشکال بالا V است ؛

گشتاورهایی که بار زده در سطح اند:

در هر نقطه‌ای اگر برآیند همه نیروهایی را که وارد بر سطح را حساب کنیم همان V خواهد بود گشتاور را نسبت به c می‌گیریم

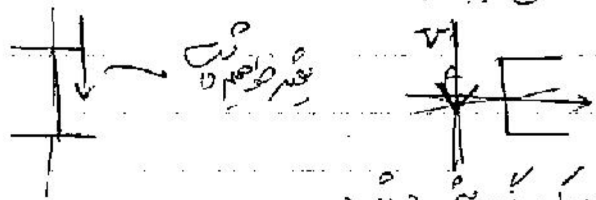
V را در جایی قرار می‌دهیم که همان گشتاور را نسبت به c ایجاد کند ؛

* $M_t = Ve$

فاصله V از مرکز سطح

اگر نیروی برشی چه در مقطع متقارن چه نامتقارن اگر نیروی برشی از نقطه مورد نظر عبور نکند چه باید بکنیم

در این صورت یک پیچش اضافی در مقطع ایجاد می شود



در اینجا نیروی V باید از
A بگذرد ولی نمی گذرد
در حالت دیگر برش اضافه که باعث ایجاد یک گشتاور پیچشی می شود

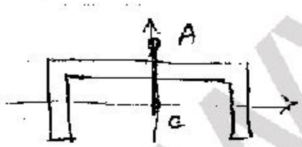
این عبارت نیز گفته شده بود

مرکز برش — Shear centre

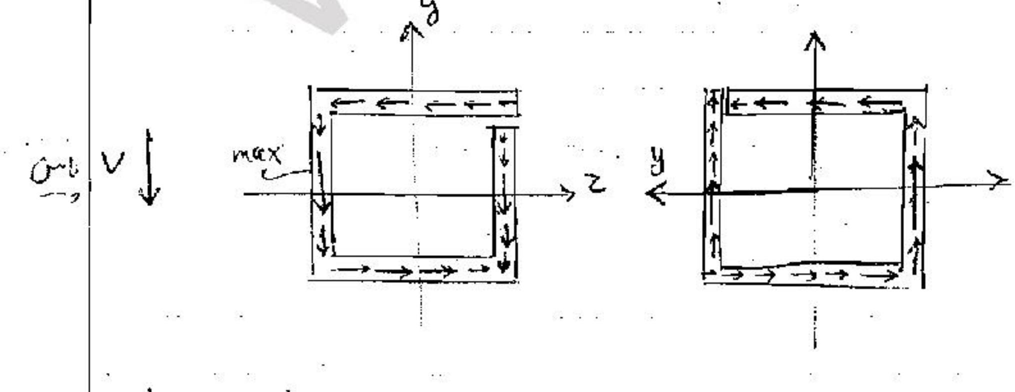
یا مرکز پیچش — centre of twist

تنش های برشی را در مقطع تعیین کردیم و مقدار را حساب کردیم که اگر مقطع متقارن نباشد و از آن باید از نقطه ای بگذرد که به آن مرکز برش گویند در مقطع متقارن همان C است

نیروی برشی نسبت به نقطه برش یک محور تولید نمی کند اما اگر از مرکز برش نگذرد پیچش اضافه داریم



در یک شکل کلی برای محاسبه
مرکز برش باید هم نسبت به
z و هم به y گشتاور بگیریم تا محل A بدست آید



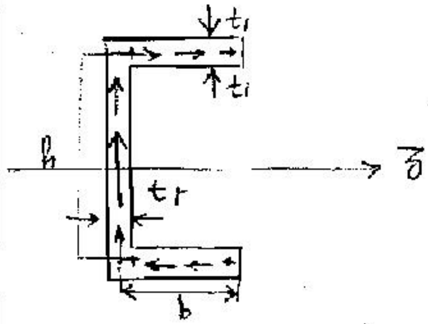
چون شکاف در هیچ کدام از محورها نیست
هیچ کدام محور تقارن نیستند و مرکز برش روی
هیچ محوری نیست

به نام خدا

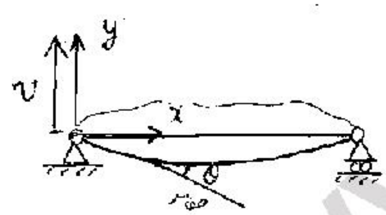
علیرضا جوادیان
۸۴/۲/۳۱

* در جدارهای نازک می‌شود مرکز برش را تعیین کرد :

اول باید توزیع تنش های برشی را تعیین کنیم :



تغییر شکل تیر :



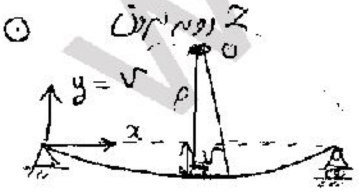
تیر در اثر بار تغییر شکل می‌دهد :
تیر در امتداد محور y چه تغییری می‌کند

محور تغییر شکل را محور v گویند :

$\xrightarrow{x}$ در امتداد تیر

$\uparrow y$ رو به بالا

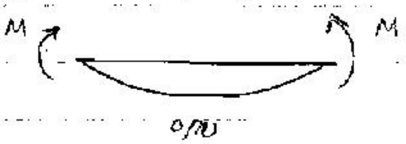
$\odot$ z رو به بیرون



* $\frac{EI}{\rho} = M$ ρ شعاع انحنای منحنی تغییر شکل تیر

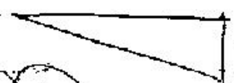
* اگر M ثابت باشد ρ هم ثابت خواهد بود یعنی تیر به صورت دایره خم خواهد شد :

$(1+v'^2)^{3/2} \simeq 1 + \frac{3}{2} v'^2$



ولی اگر M ثابت نباشد ρ هم تغییر خواهد کرد پس
مقطع دیگر دایره نخواهد بود ؛

فرض ما این است که تغییر شکلها کوچک است پس طول قوس با طول تیر یکی است به علت کوچکی v ؛



چون که کوچک است طول
۲ ضلع را یکی می گیریم ؛

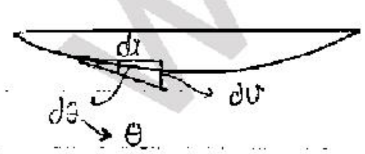
$$* \quad ds \simeq dx$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad , \quad \frac{EI}{\rho} = M$$

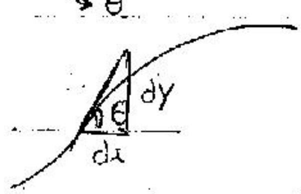
$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}}$$

$$* \quad \frac{EI\,v''}{(1+v'^2)^{3/2}} = M$$

حل این معادله به این شکل ساده نیست و به انتگرال های
بیضوی منجر می شود چون تغییر شکلها کوچکند , $dx = ds$ داریم $\tan\theta \simeq \theta$



$$\theta \leftarrow d\theta = \frac{dv}{dx} = v'$$



چون v' کوچک است پس از v'^2 در مقابل
1 صرفنظر می کنیم

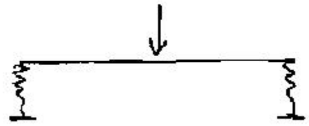
مثلاً اگر $v' = 0/1$ باشد $(1+v'^2)^{3/2} = 1/015$
یعنی خطا $0/015$ است ؛

* پس می شود با یک خطای کوچک رابطه زیر را نوشت ؛

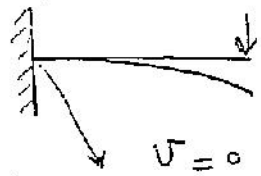
$$* \quad EI\,v'' = M$$

اگر تیر روی ۲ تکیه‌گاه باشد تغییر شکل آن یا صفر است یا معلوم است که در انتگرال‌گیری به عنوان مقدار اولیه در نظر گرفته می‌شود

اگر تکیه‌گاه فنری داشته باشیم در تکیه‌گاه ها در این صورت در تکیه‌گاه ها یک مقدار تغییر شکل به صورت تغییر مکان نقطه ناشی از نیروی فنر داریم که دیگر صفر نیست



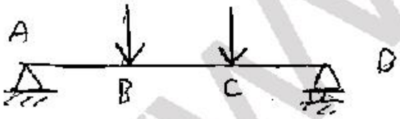
اگر تکیه‌گاه گیردار داشته باشیم مقادیر اولیه به صورت زیرند



$V = 0$

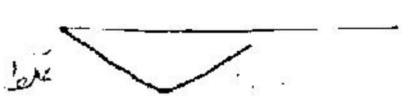
چون این نقطه قید گیردار دارد پس دوران نمی‌کند $\qquad \theta = V' = 0$ ← به خاطر کوچکی

* ممکن است تیر از چند بخش تشکیل شده باشد که برای هر بخش باید رابطه $EIV'' = M$ را حل کرد

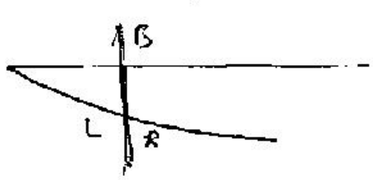


که شامل ۶ مقدار اولیه می‌شود

برای بدست آوردن آنها باید در نقطه B منحنی تغییر شکل پیوسته باشد



چون در B نمی‌توان V' متفاوت داشت



$$\begin{cases} V_L = V_R \\ V'_L = V'_R \end{cases}$$

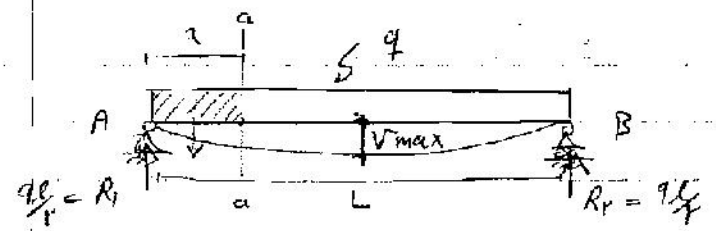
پس برای هر نقطه اتصال مشترک ۲ شرط به صورت زیر می‌شود ایجاد کرد

n بخش باشد $n-1$ نقطه پیوستگی که هر نقطه ۲ رابطه

$\longrightarrow \; ۲(n-1) + ۲_{\text{تکیه‌گاه}} = ۲n$ معادله لازم را می‌شود نوشت

$۲n =$ مجهول

مثال 8



حول مقطع aa

در aa — $M = (\frac{ql}{2})x - (qx)\frac{x}{2}$

$$EIV'' = \frac{ql}{2}x - \frac{(qx^2)}{2}$$

$$EIV' = \frac{ql}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + A$$

$$EIV = \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + Ax + B$$

۲ ثابت اولیه داریم که باید از روی نقطه‌ها استفاده کرد:

① در نقطه A $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow v = 0$
$\Rightarrow B = 0$

② در نقطه B $\Rightarrow x = l \Rightarrow v = 0$
$\Rightarrow 0 = \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + A(L) \rightarrow A = -\frac{ql^3}{24}$

معادله خیز تیر : $EIV = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 - \frac{ql^3}{24}x$

$EIV'' = M$ $\quad$ $EI\frac{d^2v}{dx^2} = M$ $\quad$ M = مشتق دوم

$V =$ مشتق ۳ $\quad$ $V = \frac{dM}{dx} = EI\frac{d^3v}{dx^3}$

$q =$ مشتق ۴ $\quad$ $q = \frac{dV}{dx} = EI\frac{d^4v}{dx^4}$

$$\theta = \frac{dv}{dx}$$

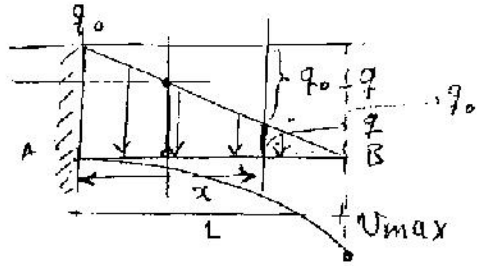
محاسبه v_{max} مثال قبل :

$$x = \frac{L}{2} \Rightarrow EIv_{max} = \frac{qL}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{q\left(\frac{L}{2}\right)^4}{24} - \frac{qL^3}{24}\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= -\frac{5qL^4}{384} \Rightarrow v_{max} = -\frac{5qL^4}{384EI}$$

* این v_{max} را می‌شود برای تیر با بار پیوسته بکار برد قابل قبول است
چون v رو به بالا را مثبت گرفتیم پس منفی می‌شود پس منفی نشان می‌دهد که تیر رو به پایین خم شده
است اگر v رو به پایین را مثبت می‌گرفتیم رابطه می‌شد : $EIv'' = -M$ *

مثال 8



حل - $\dfrac{q}{q_0} = \dfrac{L-x}{L}$ تشابه مثلث کلی یا $\dfrac{q_0-q}{q_0} = \dfrac{x}{L}$ تشابه مثلث قسمت بالایی

$$q = q_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

* $M =$ اگر از سمت چپ برویم باید گشتاور تکیه‌گاه و گشتاور ناشی از بار (عکس‌العمل A) دیگر بار ذوزنقه‌ای را حساب کنیم پس از راست می‌رویم

$$\Rightarrow M = -\frac{q(L-x)}{2} \times \frac{(L-x)}{3}$$

نقطه اثر بار مثلثی در $\frac{L}{3}$ است.

$$M = -q_0\frac{(L-x)^3}{6L}$$

$$* \quad EIv'' = -q_0 \frac{(L-x)^3}{6L}$$

$$EIv' = +q_0 \frac{(L-x)^4}{24L} + A$$

$$* \quad EIv = -\frac{q_0 (L-x)^5}{120L} + Ax + B$$

$$\underbrace{v' = 0}_{\text{دوران ندارد}} \quad , \quad \underbrace{v = 0}_{\text{خیز ندارد}} \qquad \& \quad x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{q_0 L^4}{120} + B \Rightarrow B = \frac{q_0 L^4}{120}$$

$$v' = 0 \Rightarrow \quad 0 = \frac{q_0 L^4}{24L} + A \Rightarrow A = -\frac{q_0 L^3}{24}$$

$$\Rightarrow \quad * \; EIv = \frac{-q_0 (L-x)^5}{120L} - \frac{q_0 L^3}{24}x + \frac{q_0 L^4}{120}$$

$*$ $x = L$ v_{max} از نظر ریاضی نیست بلکه بزرگترین مقدار خیز مطلق است
چون max تابع وقتی است که مشتق آن صفر شود :

$$\Rightarrow EIv_{max} = -\frac{q_0 L^4}{24} + \frac{q_0 L^4}{120}$$

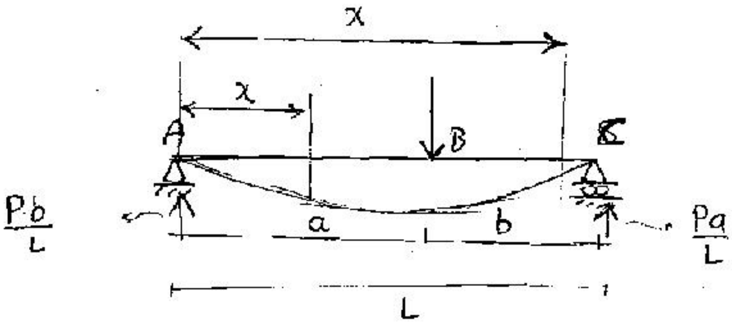
$$= -\frac{q_0 L^4}{30}$$

$*$ $x = L$

$$\Rightarrow \quad EIv'_{max} = A = -\frac{q_0 L^3}{24}$$

max مقدار θ :
تقسیم بر EI

مثال 8



حل -

(زیرا ۲ مجهول داریم ؛)

$AB: \quad 0 < x < a$

$BC: \quad a \leq x \leq \underbrace{b+a}_{L}$

$M = \left(\frac{Pb}{L}\right)x$

$M = \left(\frac{Pb}{L}\right)x - P(x-a)$

$EIV'' = \frac{Pb}{L}x$

$EIV' = \frac{Pb}{2L}x^2 + A_1$

$EIV = \frac{Pb}{6L}x^3 + A_1x + B_1$

$EIV'' = \frac{Pb}{L}x - P(x-a)$

$EIV' = \frac{Pb}{2L}x^2 - \frac{P}{2}(x-a)^2 + A_2$

$EIV = \frac{Pb}{6L}x^3 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + A_2x + B_2$

۲ تا شرط مربوط به تکیه‌گاه است ؛ ۲ تا معادله با استفاده از مفصل مشترک بدست می‌آید ؛

$* \quad x = a \Rightarrow \overset{\text{شیب نمودار در نقطه B}}{V'_L = V'_R} \Rightarrow A_1 = A_2$

$\quad\; x = a \Rightarrow \underset{\text{مقدار در نقطه B}}{V_L = V_R} \Rightarrow B_1 = B_2$

* در قسمت دوم تیر اثر (x−a) را نباید باز کرد تا تمام تیر را از سمت چپ بنویسیم تا بتوانیم معادلات را تکرار کنیم تا معادلات قبلی در مفصل مشترک بوجود آید به علاوه معادلات C اضافه که در مفصل مشترک با یکدیگر برابر شوند.

اگر معادلات مثل معادلات قبلی باشد به علاوه معادلاتی که در مفصل مشترک هم‌عرض‌اند را برابر بدانیم A_1 و A_2 یا B_1 و B_2 را برابر می‌توانیم از اول یک مقدار بگیریم

$* \quad x = 0 \rightarrow V = 0 \Rightarrow B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = B_2 = 0$

از معادله دوم استفاده کردیم ؛ $x = L \Rightarrow V = 0 \Rightarrow 0 = \frac{Pb}{6}L^2 - \frac{P}{6}b^3 + A_2L$

$\Rightarrow A_2 = -\frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2)$

$* \quad x = a \Rightarrow EIV_B = \frac{Pba^3}{6L} - \frac{Pba(L^2-b^2)}{6L} = -\frac{Pab}{6L}(-a^2 + L^2 - b^2)$

در هر دو معادله مشترک است. با استفاده از معادله یک ؛

= تغییر شکل نقطه B

* برای محاسبه بیشترین تغییر شکل max اول مقدار AB را بررسی می‌کنیم :

$$v' = 0 \Rightarrow \frac{Pb}{2L}x^2 - \frac{Pb}{6L}(L^2-b^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{L^2-b^2}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}} \qquad ①$$

دو حالت $a<b$ و $a \geq b$ هر دو یکی است پس روی $a \geq b$ بحث می‌کنیم :

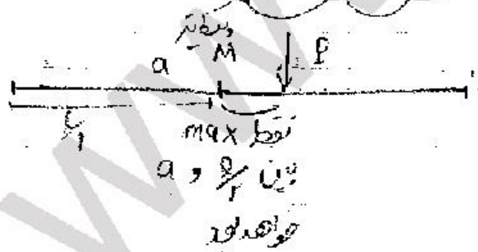
فرض $a \geq b \Rightarrow b \leq \frac{L}{2} \Rightarrow x > \sqrt{\frac{L^2-(\frac{L}{2})^2}{3}} = \frac{L}{2}$

* برای $a>b$ باید $x > \frac{L}{2}$ خواهد بود $\quad x > \frac{L}{2}$

$$x = \sqrt{\frac{(L-b)(L+b)}{3}} = \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}}$$

$$x < \sqrt{\frac{a(2a+a)}{3}} = a \qquad L=2a,\ b=a$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2} < x < a$$



① از جایگذاری $EIv_{max} = \frac{Pb}{6L}\left(\frac{L^2-b^2}{3}\right)^{3/2} - \frac{Pb}{6L}(L^2-b^2)\left(\frac{L^2-b^2}{3}\right)^{1/2}$

تغییر شکل max $= \frac{Pb}{6L}(L^2-b^2)^{3/2}\left[\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{-bP}{9\sqrt{3}L}(L^2-b^2)^{3/2}$

تغییر شکل وسط

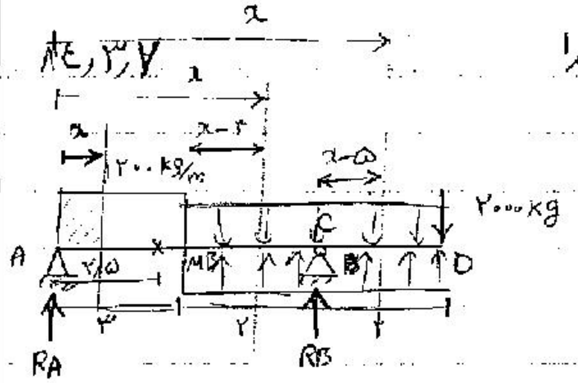
* $x = L/2$

* $EIv_M = \frac{Pb}{6}\left(\frac{L^2}{8}\right) - \frac{Pb}{6\times 2}(L^2-b^2) = \frac{Pb}{48}\left[L^2-4L^2+4b^2\right]$

$$\Rightarrow EIv_M = -\frac{Pb}{48}\left[3L^2-4b^2\right]$$

* همیشه اختلاف بین تغییر شکل وسط و تغییر شکل max کمتر از ۲/۵ درصد است
حتی برای چندبار هم تغییر شکل وسط را به عنوان تغییر شکل max می پذیرند.

۴۲٫۳۲٫۳۷ بنام خدا ج ۲۴



سوال: در شکل روبرو خیز مکان نقاط M وسط دهانه تیر و D انتهای آزاد را تعیین کنید

$I = ۵۰۰۰۰$

$E = ۲\times۱۰^{۶}$

AB , BC , CD معادلات جدا دارند

$* \quad \sum M_A = (۱۲۰۰)(۳)(۱/۵) + (-R_B)(۵) + (۲۰۰۰)(۷) = ۰$

$R_B = ۳۸۸۰\ kg$

$* \quad \sum F_y = (R_A) + ۳۸۸۰ - ۱۲۰۰(۳) - ۲۰۰۰ = ۰$

$R_A = ۱۷۲۰\ kg$

AB $\quad ۰ \leq x \leq ۳$

$M = (۱۷۲۰)x - (۱۲۰۰)(x)(x/۲)$

$EIv'' = M$

$EIv' = ۸۶۰x^۲ - ۲۰۰x^۳ + A$

$EIv = \frac{۸۶۰}{۳}x^۳ - ۵۰x^۴ + Ax + B$

$* \quad \begin{cases} x=۰ \\ v=۰ \end{cases} \Rightarrow B = ۰$

$\begin{cases} x=۵ \\ v=۰ \end{cases} \Rightarrow$ در ناحیه دوم

BC $\quad ۳ \leq x \leq ۵$

بار رو به بالا

$M = ۱۷۲۰x - ۶۰۰x^۲ + \frac{۱۲۰۰}{۲}(x-۳)^۲$

$EIv'' = M$

$EIv' = ۸۶۰x^۲ - ۲۰۰x^۳ + ۲۰۰(x-۳)^۳ + A$

$EIv = \frac{۸۶۰}{۳}x^۳ - ۵۰x^۴ + ۵۰(x-۳)^۴ + Ax + B$

$۰ = \frac{۸۶۰}{۳}(۵^۳) - ۵۰(۶۲۵) + ۵۰(۱۶) + A(۵) + B$

$\Rightarrow A = -۱۰۷۷$

CD $\quad ۵ \leq x \leq ۷$

$M = ۱۷۲۰x - ۶۰۰x^۲ + ۶۰۰(x-۳)^۲ + ۳۸۸۰(x-۵)$

$EIv'' = M$

$EIv' = ۸۶۰x^۲ - ۲۰۰x^۳ + ۲۰۰(x-۳)^۳ + ۱۹۴۰(x-۵)^۲ + A$

$EIv = \frac{۸۶۰}{۳}x^۳ - ۵۰x^۴ + ۵۰(x-۳)^۴ + \frac{۱۹۴۰}{۳}(x-۵)^۳ + Ax + B$

برای این حالت اگر تیر طراز شود فرض می‌کنیم بار گسترده تا D ادامه دارد و یک بار گسترده رو به بالا هم اعمال می‌کنیم.

$M \Rightarrow x = ۲/۵ \Rightarrow EIv_M = \frac{۸۶۰}{۳}(۲/۵)^۳ - ۵۰(۲/۵)^۴ - ۱۰۷۷(۲/۵) = -۱۹۶$

$* \quad EI = ۲\times۱۰^۶ \times ۵۰۰۰۰\ kg\,cm^۲ = ۱۰^۶\ kg\cdot m^۲$

$* \quad v_M = -۰/۱۹۶\ mm$

$x = 7$ معادله سوم $\Rightarrow EIv_D = \frac{865}{3}(7)^3 - 50(7^4) + 50(4^4) + \frac{1940}{3}\times 8 - 1077\times 7$

$$EIv_D = -11289 \Rightarrow v_D = -11.29\ mm$$

اشکال این روش این است که مجبوریم برای قسمت های مختلف یک معادله بنویسیم با استفاده از قرارداد ماکالی می شود کرد می توان این معادلات را به حداقل رساند

ماکالی

تابع جدید به صورت $\langle x-a \rangle^n$ تعریف می کنیم :

$$\text{اگر}\begin{cases} x \leq a & \text{صفر} \\ x > a & (x-a)^n \end{cases}$$

در مثال قبل می توان معادله سوم را برای همه نقاط تیر بکار برد

چون در $x<3$ جملات $(x-3)^n$ حذف می شوند

$$* \quad EIv'' = 1720x - 900x^2 + 900\underbrace{\langle x-3 \rangle^2}_{\text{ماکالی}} + 3880\underbrace{\langle x-5 \rangle}_{\text{ماکالی}}$$

$x<3 \Rightarrow$ صفر

$x>3 \Rightarrow (x-3)^2$

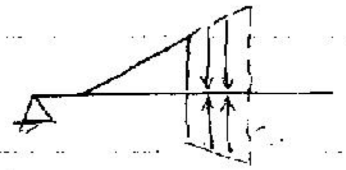
* تابع اولیه ماکالی : $\boxed{\frac{1}{n+1}\langle x-a \rangle^{n+1}}$

برای مقدار ثابت ها در EIv شرایط مرزی را می نویسیم $\begin{cases} x=0 \\ v=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=5 \\ v=0 \end{cases}$

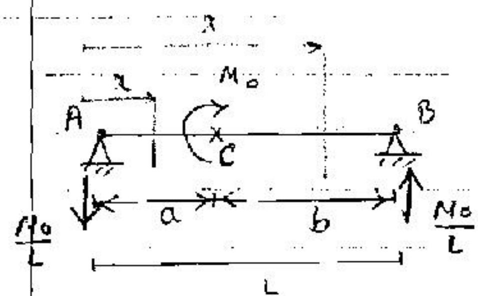
اول از همه تکیه گاه ها را می نویسیم

جمله $\langle x-3\rangle^{16}$ و $\langle x-5\rangle^{3}$ بازای $x=2/5$ صفر می‌شوند

در $x=7$ همه جملات حساب می‌شوند



* برای بار مثلثی هم برای این که معادلات تکرار شوند بار را ادامه می‌دهیم *

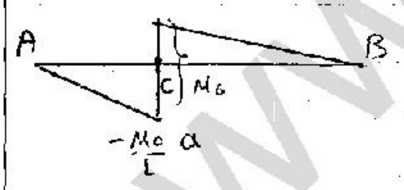


گشتاور متمرکز

چون M_0 در جهت ساعتی است پس نیروی در B و A باید در جهت عکس باشند * تا با هم باید کوپل نیرو باشند.

$$* \quad M = -\frac{M_0}{L}x \qquad 0 \leq x \leq a$$

$$* \quad M = -\frac{M_0}{L}x + M_0 \qquad a \leq x \leq L$$



برای این که جملات تکرار شوند و در ضمن هم صفر باشد M را می‌نویسیم

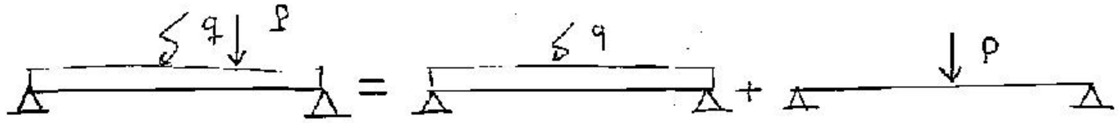
$$* \quad M = -\frac{M_0}{L}x + M_0\langle x-a\rangle^{0}$$

برای هر ۲ قسمت درست است

$$* \quad \ldots + M_0\langle x-a\rangle^{1} \quad \text{تابع اولیه}$$

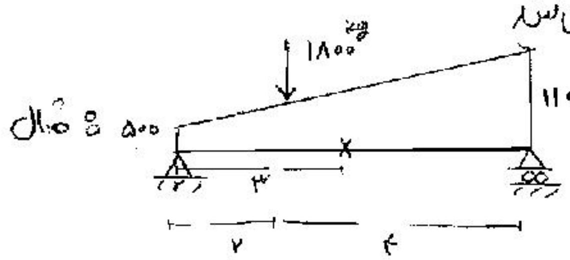
$$\ldots + \frac{M_0}{2}\langle x-a\rangle^{2}$$

روش جمع آثارها : Superposition



در این روش حالتهای ساده بارگذاری را از جداول استفاده می کنند

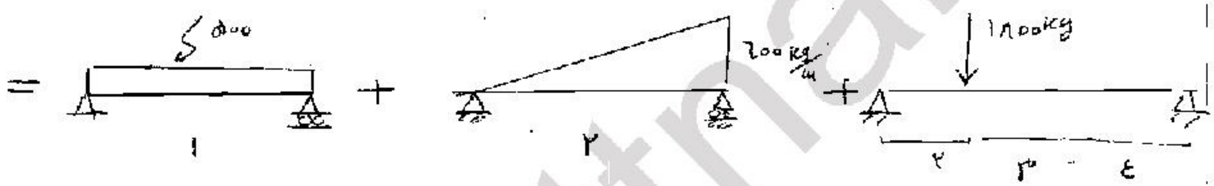
مثال :



EI 10^6 kgm^2

10^{10} kg cm^2

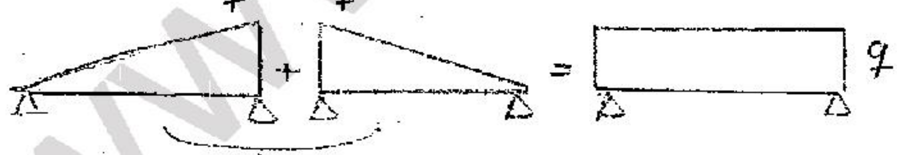
تغییر مکان وسط تیر را بیابید ؟



* تغییر مکان هر ۳ را با هم جمع کنیم تغییر مکان وسط تیر را بیابید ؟

$$v_{1M} = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5(500)(6^4)}{384\times10^6} = 8.4375\times10$$

برای ②

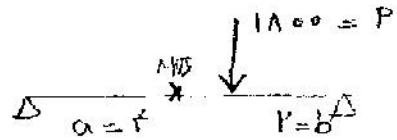


تغییر مکان وسط این دو با هم برابر است

پس تغییر مکان هر یک نصف تغییر مکان v_M است

$$v_{2M} = \frac{5q_2L^4}{768EI} = \frac{5(600)(6^4)}{768\times10^6}$$

③

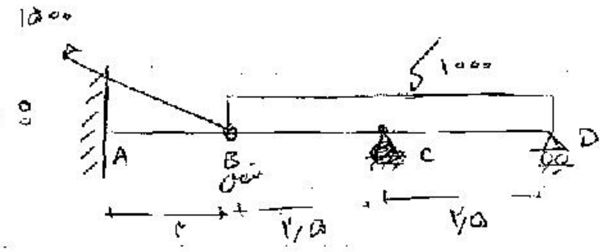


$$a \geq b \Rightarrow v_{3M} = \frac{Pb(3L^2-4b^2)}{48EI}$$

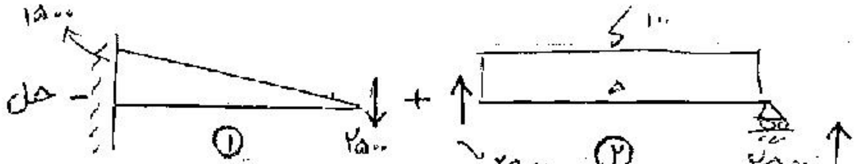
$$= \frac{1800\times2\times(3(36)-4(4))}{48\times10^6}$$

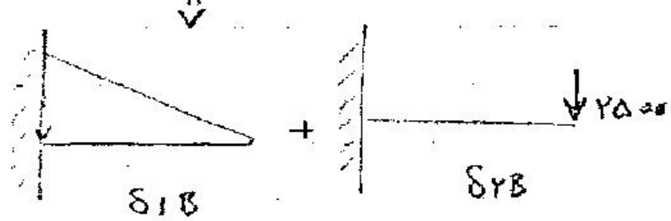
$v_M = \longrightarrow \Rightarrow 20.309\times10^{-3}$

مثال :



حل -





در مورد داریم

$$\delta B = \delta 1B + \delta 2B$$

تیر فرض می‌کنیم که تیر نداریم
ولی یک تغییر مکان داریم که
در مرحله قبل بدست آمد
از روی این شکل تغییر مکان
تمام نقاط بدست می‌آید.

پیچ‌ها $\tau_w \geq \frac{V}{A}$

سمت چپ : $1200 \geq \frac{F/10}{(/8)^2\pi} \Rightarrow F \leq$ ۲۴۱۳۰

سمت راست : $1200 \geq \frac{F/6}{(1)^2\pi} \Rightarrow F \leq$ ۲۲۶۲۰

ورق‌ها :

Ⓐ ورق $1800 \geq \frac{F/5}{/8 \times 1/6} \Rightarrow F \leq 11520$

Ⓑ ورق $1800 \geq \frac{F/3}{/8 \times 2} \Rightarrow F \leq 8640$

فقط ضخامت ورق

سمت چپ D,C : $1800 \geq \frac{F/10}{/6 \times 1/6} \Rightarrow F \leq$

سمت راست D,C $1800 \geq \frac{F/6}{/6 \times 2}$

$\Rightarrow F_w = 8640$ kg

معلوم می‌شود که ضعف از ورق‌ها است ؛

به طوریکه هر چه قطر پیچ را بزرگتر کنیم ؛ تعداد کمتر ؛ قطر زیاد هم باعث می‌شود که امنیت

و ضخامت قطر با ادغای ... محاسبه قطر سوراخ ... قطر به توان ۲

بهتر است تعداد پیچ‌ها را زیاد و قطر را کم کنیم ؛ تا توزیع بیشتر شود ؛

اشکال این اتصال این است که سطح پیچ‌ها کم است ؛

آنالیز تنش در ۳ بعد صورت گرفت :

تنش ناشی از بار محوری

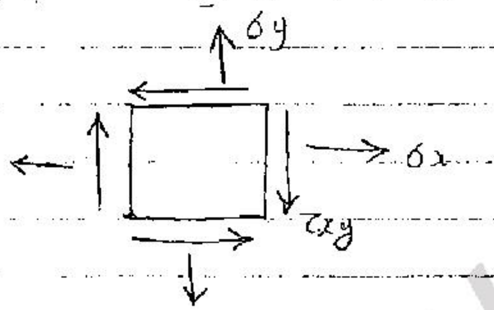
تنش دو محوری

برش خالص

حال به بررسی تنش مسطح می پردازیم :

تنش مسطح

حالتی از تنش است که مولفه های تنش در امتداد دو محور هستند تنش هایی که در امتداد بعد سوم هستند صفر می شوند :



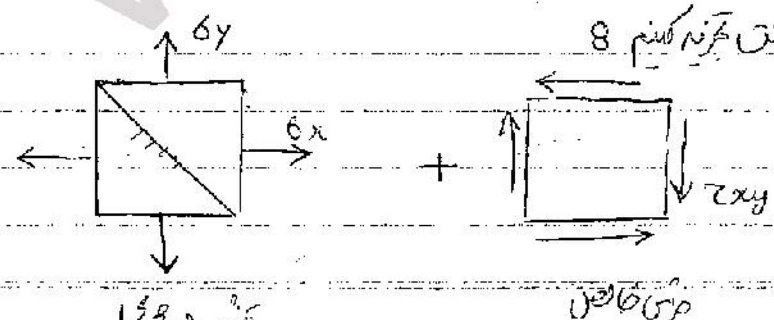
σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$

$\sigma_z = 0$

$\tau_{xz} = -\tau_{zx} = 0$

$\tau_{yz} = -\tau_{zy} = 0$

می توانیم تنش مسطح را به دو حالت تجزیه کنیم :



تنش دو محوری   برش خالص

کرنش صفحه

$\varepsilon_x = 0$

$\varepsilon_y = 0$

$\varepsilon_z = 0$

$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ *

$\gamma_{yz} = 0$ *

$\gamma_{zx} = 0$ *

تنش دو محوری

$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$

$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$

$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$

$\gamma_{xy} = 0$

$\gamma_{xz} = 0$ نیز از دو معادله بالا ناشی می شود

$\gamma_{zz} = 0$

$\gamma_{xy} = 0$

پس در تنش صفحه داریم 8

تنش صفحه

$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$

$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$

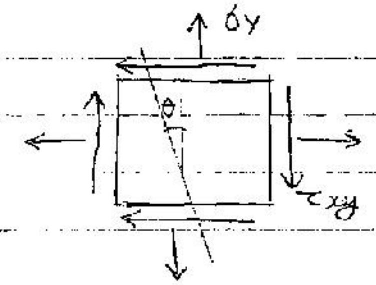
$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$

$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$

$\gamma_{yz} = 0$

$\gamma_{zx} = 0$

همه این روابط مربوط به
قسمت خطی منحنی تنش-کرنش است.



در این حالت باز هم به دو صورت تجزیه می‌کنیم .

تنش دو محوری

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta$$

برش خالص

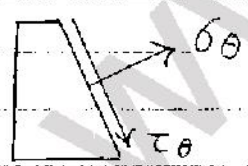
$$\sigma_\theta = -\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \tau_{xy}\cos 2\theta$$

تنش مسطح

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x \mp \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$



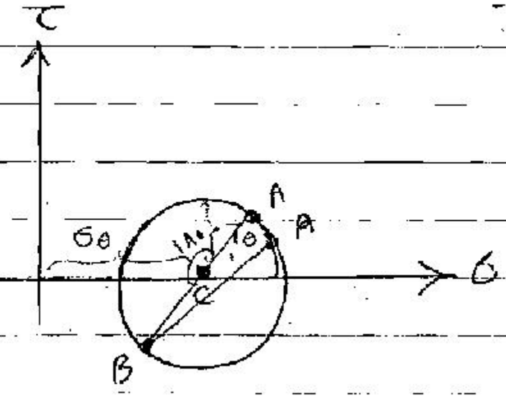
در سطح خارجی اگر نیروی خارجی وارد نشود تنش مسطح داریم

$$* \quad \left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

این رابطه مستقل از θ است و در واقع معادله یک دایره است .

$* \quad (X-\alpha)^2 + Y^2 = R^2$

یعنی تنش ها طوری تغییر می‌کنند که در معادله یک دایره صادق اند 8



O مرکز دایره $\left| \begin{array}{l} \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \\ 0 \end{array} \right.$

به این دایره، دایره مور برای تنش ها Mohr's circle for stresses

مور دانشمند آلمانی است

برای رسم دایره یکبار صفحه قائم و یکبار صفحه افقی را در نظر می‌گیریم

در صفحه افقی $\theta = 0$ است پس یک نقطه به این صورت است $A \left| \begin{array}{l} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{array} \right.$

〃 〃 قائم $\theta = 90$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $B \left| \begin{array}{l} \sigma_y \\ \tau_{yx} = -\tau_{xy} \end{array} \right.$

$\overline{AB}$ در واقع قطر دایره مور است چون O در وسط AB قرار می‌گیرد

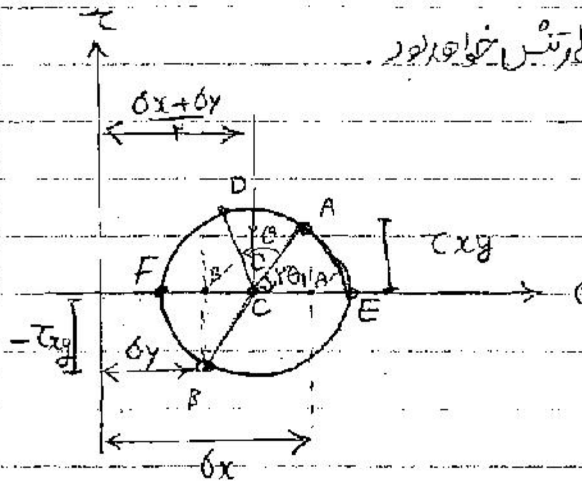
کافی AB را مشخص کرده و به قطر AB یک دایره بزنیم.

دو صفحه در المان به اندازه 90° اختلاف دارند ولی روی دایره مور به اندازه 180°

* به طور کلی اگر زاویه بین دو صفحه α باشد زاویه بین دو نقطه نظیر آنها در دایره 2α خواهد بود.

وقتی دایره مور رسم شد در یک صفحه با زاویه θ می‌خواهیم تنش‌ها را بیابیم از A در دایره مور با اندازه

2θ جدا می‌کنیم نقطه مورد نظر دارای مقادیر مورد نظر تنش خواهد بود.



E و F نقاطی هستند که $\max \sigma$ است و τ_θ نیز صفر است.

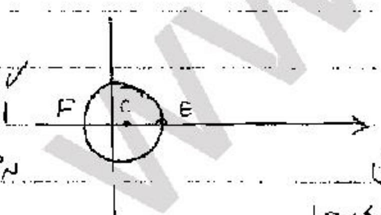
$$B'A' = \sigma_x - \sigma_y \quad , \quad AA' = \tau_{xy} \Rightarrow AC^2 = CA'^2 + AA'^2 = R^2$$

$$\sigma_{max} = \overline{OC} + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{min} = \overline{OC} - R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

تنش‌های اصلی

اگر دایره به صورت روبرو باشد



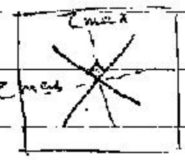
F دارای بزرگترین تنش فشاری است یعنی تنش منفی است و فشاری و بزرگترین برای فشاری‌ها.

E دارای بزرگترین تنش کششی است

با همان σ_{max} ، از نظر جبری ؛

جهت عقربه ساعت $\tan 2\theta_1 = \dfrac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

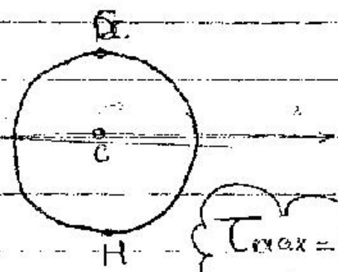
با مشخص شدن $2\theta_1$ می توان زاویه بین صفحات را در المان یافت
این صفحات را صفحات اصلی گویند که تنش های اصلی روی آنهاست



صفحات اصلی ⟵ principal planes
دو صفحه عمود بر هم اند

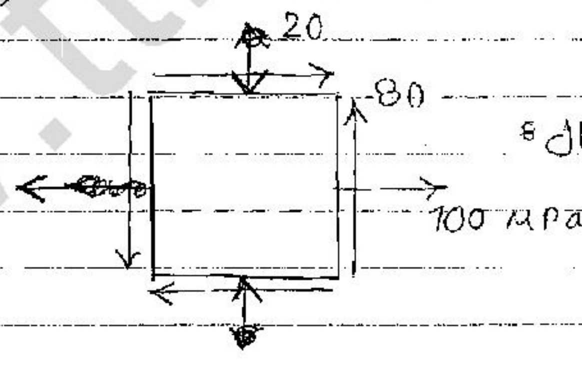
تنش برشی ندارند E و G

محورهای اصلی در واقع عمود بر صفحات اصلی در راستای دو تنش اصلی اند؛ principal axes



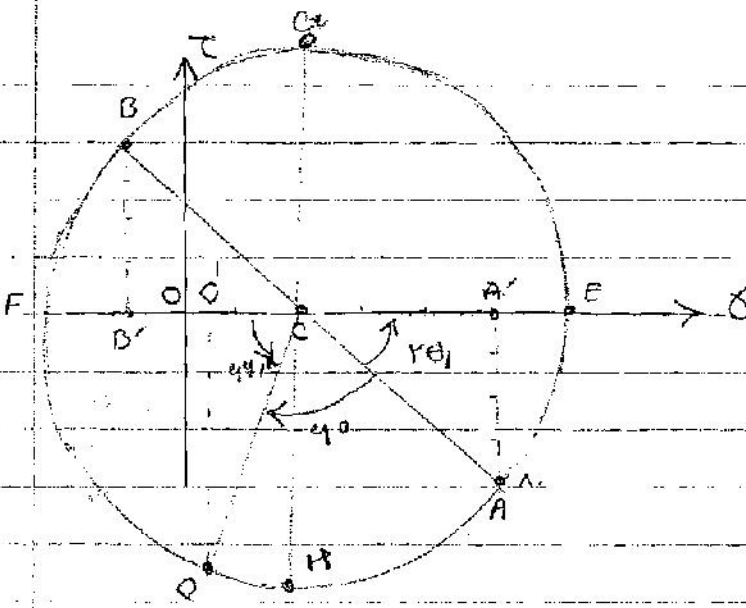
H و G دو صفحه ای هستند که تنش برشی max دارند که در واقع صفحات نیمساز صفحات اصلی اند
مقدار تنش برشی ماکزیمم برابر شعاع دایره است: $\tau_{max} = \pm R$

مثال:



- در نقطه ای از سازه که تنش مسطح است مؤلفه های تنش مطابق شکل می باشند اولاً صفحات اصلی و تنش های اصلی را بیابید؟ ثانیاً تنش برشی max و صفحاتی که دارای این تنش اند را معین کنید؟ ثالثاً تنش ها را در صفحه ای که زاویه $30°$ با جهت عقربه ساعت با صفحه قائم می سازد بیابید؟

حل — $A \left| \begin{array}{l} 100 = \sigma_x \\ -80 = -\tau_{xy} \end{array} \right.$ $\quad B \left| \begin{array}{l} -20 \\ 80 \end{array} \right.$ فشاری، در جهت عقربه ساعت



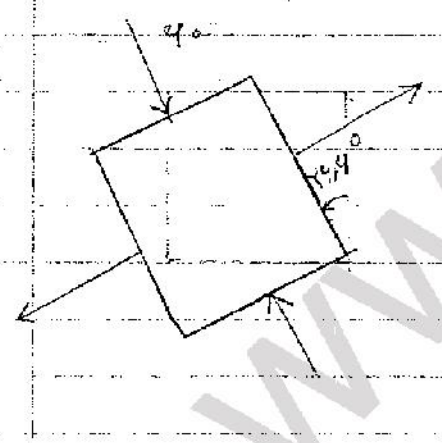
* $\overline{OA'} = 100$
* $\overline{CB'} = 20$
* $\overline{A'B'} = 120$
* $\overline{CA'} = 60$
* $R = \overline{CA} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{AA'}{CA'} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2\theta_1 = 53.2^\circ \Rightarrow \theta_1 = 26.6^\circ$$

* اگر از A' که در صفحه قائم است به اندازه 26.6° در جهت مثلثاتی دوران بدهیم به صفحه اصلی می‌رسیم

$\overline{OE} = \overline{OC} + R = 40 + 100 = 140$ کشش

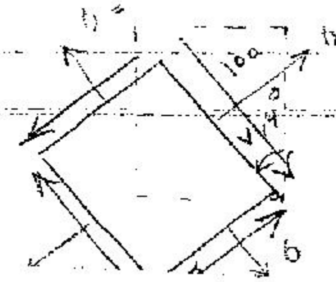
$\overline{OF} = 100 - 40 = 60$ فشار



ب) $\tau_{max} = \pm R = \pm 100$

صفحات آن بین صفحات اصلی اند

$\alpha = 26.6^\circ + 45^\circ = 71.6^\circ$



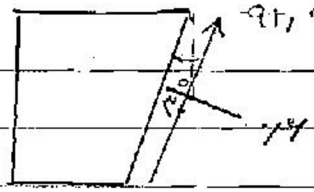
* در اینجا تنش عمودی هم داریم برخلاف قسمت قبل!

جهت τ از نقطه A در صفحه قائم تعیین شد

ج ۸ روی دایره از نقطه‌ای که نقطه نظیر روی صفحه قائم است
با اندازه 60° جدا می‌کنیم :

$$OD' = OC - CD' = 40 - 100 \cos 66.8 = 0.6$$

$$DD' = 100 \sin 66.8 = 91.9$$



۹۱٫۹ ← بار با عمود —

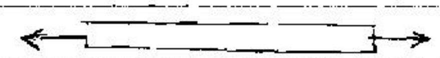
صفحه‌ای که به صفحه قائم نزدیکتر است تنش آن به تنش صفحه قائم نزدیکتر است
یعنی از فرمول استفاده می‌کنیم

در تنش جزئی هم یک صفحه‌ای به قائم نزدیکتر است تنشی که به صفحه قائم نزدیکتر است علامت تنش برشی
صفحه قائم را دارد .

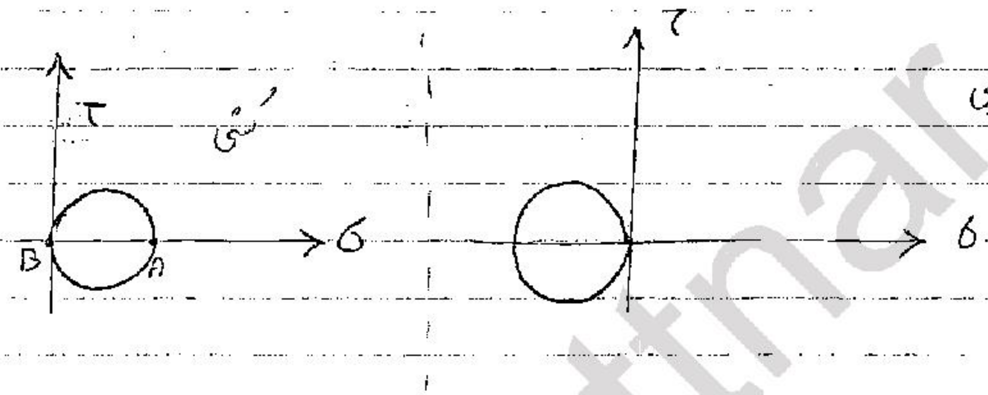
مثال ۱۲-۱۴٫۲ مسئله ۴

۸۴/۱/۲۲ بنام خدا مقاومت

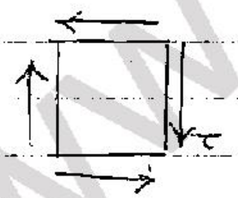
دایره موهر برای یک بار صفحه ای در یک صفحه



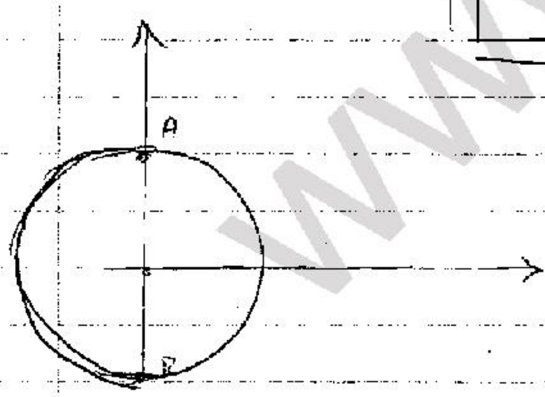
$\sigma_x \leftarrow \square \rightarrow \sigma_x$ $A \mid {}^{\sigma_x}_{0}$ $B \mid {}^{0}_{0}$



دایره موهر در برش خالص



$A \mid {}^{0}_{\tau}$ $B \mid {}^{0}_{-\tau}$



$O \mid {}^{0}_{0}$

اگر مرکز دایره موهر در ${}^{0}_{0}$ باشد حتماً برش خالص داریم

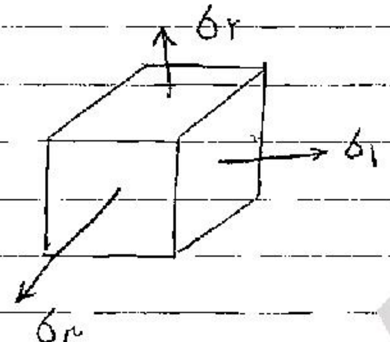
حالت کلی تنش همه مؤلفه ها را داریم در تنش مسطح دو صفحه عمود بر هم داشتیم که تنش های max و min روی آنها قرار داشت

در حالت کلی تنش ۳ صفحه عمود بر هم داریم که این صفحات تنش برشی ندارند و یکی بزرگترین تنش و یکی کوچکترین تنش را دارد

این صفحات را صفحات اصلی گویند ۳ صفحه اصلی داریم :

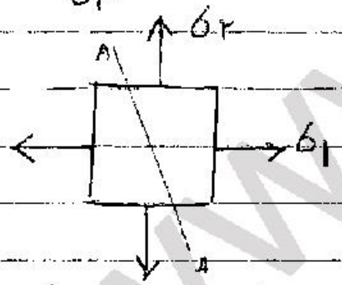
امتداد اصلی تنش با ۳ امتداد داریم : در مسطح ۲ تنش اصلی ۲ صفحه اصلی و ۲ امتداد اصلی داشتیم :

المان از ۳ بعدی



برای هر صفحه المان می توان دایره مور را رسم کرد

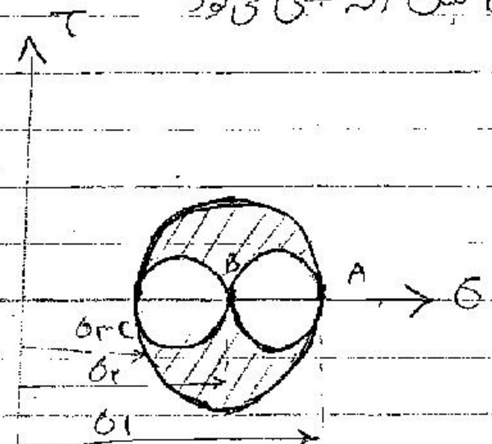
این تنش تنش مسطح نیست چون σ_3 را عمود بر صفحه داریم :



ولی این σ_3 در فرمولهایی که بدست آوردیم اثری ندارد

چون اثر آن با σ_3 شیب صفحه خنثی می شود

$A \left| \begin{matrix} \sigma_1 \\ 0 \end{matrix} \right.$, $B \left| \begin{matrix} \sigma_2 \\ 0 \end{matrix} \right.$



دایره مور برای دو بعد ۱ و ۲ است

تنش های صفحه A - A روی این دایره کوچک قرار دارند.