به نام خدا

تمرینات حساب تغییرات - سری اول (موعد تحویل ۹۱/۸/۱)

منحنی های اکسترمال مربوط به functionalهای زیر را به دست آورید.(ذکر تمام مراحل محاسبات و فرضیات مورد استفاده ضروری است)

۱) $I=\int_{-1}^{0}(12xy+y'^2)dx \qquad y(-1)=1, \qquad y(0)=0$

۲) $I=\int_{1}^{2}(y^2+2yy'^2+y'^2)dx \qquad y(1)=1, \qquad y(2)=0$

۳) $I=\int_{0}^{1}\sqrt{y(1+y'^2)}dx \qquad y(0)=y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

۴) $I=\int_{0}^{1}yy'^2dx \qquad y(0)=1 \qquad y(1)=\sqrt[3]{4}$

۵) $I=\int_{1}^{\pi/2}(4y\cos x+y'^2-y^2)dx \qquad y(0)=0, \qquad y(\pi/2)=0$

۶) $I=\int_{0}^{1}e^{2x}(y'^2-y^2-y)dx \qquad y(0)=0, \qquad y(1)=e^{-1}$

۷) $I=\int_{-1}^{1}(y'^2-2xy)dx \qquad y(-1)=-1, \qquad y(1)=0$

۸) $I=\int_{-1}^{0}(y'^2-2xy)dx \qquad y(-1)=0, \qquad y(0)=2$

۹) $I=\int_{0}^{1}(y^2+y'^2)dx \qquad y(0)=0, \qquad y(1)=1$

۱۰) $I=\int_{0}^{1}(3x+y'^2)dx \qquad y(0)=1, \qquad y(1)=2$

۱۱) $I=\int_{0}^{\pi/4}(y'^2-y^2)dx \qquad y(0)=1, \qquad y(\pi/4)=\sqrt{2}/2$

۱۲) $I=\int_{0}^{\pi}(y'^2-y^2)dx \qquad y(0)=1, \qquad y(\pi)=-1$

۱۳) $I=\int_{-1}^{e}(xy'^2+yy')dx \qquad y(-1)=0, \qquad y(e)=1$

۱۴) $I=\int_{0}^{1}(e^y+xy'^2)dx \qquad y(0)=0, \qquad y(1)=2$

۱۵) $I=\int_{a}^{b}((x^2+e^y)y'+2xy)dx$

۱۶) $I=\int_{a}^{b}f(x,y)\sqrt{(1+y'^2)}dx$

$f(x,y)=e^x,\ \sqrt{x},\ x,\ \frac{1}{x},\ \sqrt{\frac{1}{x}},\ \frac{1}{y},\ \sqrt{\frac{1}{y}}$

۱۷) $I=\int_{a}^{b}x^n y'^2dx$

$I=\int_2^3 (1-y'^2)y^2\,dx \quad y(2)=1,\ y(3)=\sqrt{3}$ (١٨

$I=\int_a^b (y'^2+yy'')\,dx$ (١٩

$I=\int_a^b (yx^2e^x+y'')\,dx$ (٢٠

$I=\int_0^1 (y'^2+y''^2)\,dx \quad y(0)=0,\ y(1)=\sinh 1,\ y'(0)=1,\ y'(1)=\cosh 1$ (٢١

$I=\int_0^1 (y'^2+4y^2)\,dx \quad y(0)=e^2,\ y(1)=1$ (٢٢

$I=\int_a^b (y'^2+y^2+2ye^x)\,dx$ (٢٣

$I=\int_0^1 (2y'^2+y''^2+y^2)\,dx \quad y(0)=0,\ y(1)=0,\ y'(0)=1,\ y'(1)=-\sinh 1$ (٢٤

$I=\int_0^1 (\frac{1}{2}y''^2+2xy\cos x)\,dx \quad y(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(0)=0,\ y'(1)=1$ (٢٥

$I=\int_{-1}^0 (240y-y'''^2+2yxe^x)\,dx \quad y(-1)=1,\ y(0)=0,\ y''(-1)=16$
$y'(-1)=-4.5\ ,y'(0)=0\ ,y''(0)=0$ (٢٦

$I=\int_a^b (p(x)y'+q(x)y+w(x))\,dx \qquad I=\int_a^b (\frac{1+y'^2}{y''^2})\,dx$ (٢٧

$I=\int_a^b (xy'+y'''^2)\,dx$ (٢٨

$I=\int_0^1 (y''^2-2py)\,dx \quad y(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(0)=0,\ y'(1)=1$ (٢٩

$I=\int_0^1 (2e^y-y'^2)\,dx \quad y(0)=1,\ y(1)=e$ (٣٠

$I=\int_0^1 y'\sqrt{1+y''^2}\,dx \qquad y(0)=0\ ,\ y'(0)=0,\ y(1)=1\ ,\ y'(1)=2$ (٣١

$I=\int_{x_1}^{x_2} (\frac{ye^x}{1+e^x}+\frac{y^2}{2}-\frac{y'^2}{2})\,dx \quad , \quad y(x_1)=A \quad , \quad y(x_2)=B$ (٣٢

$I=\int_{x_1}^{x_2} (\frac{2ye^x}{1-e^{2x}}+y^2-y'^2)\,dx, \quad y(x_1)=A,\ y(x_2)=B$ (٣٣

$I=\int_{x_1}^{x_2} (\frac{2y}{1-x^2}+4y^2-2y'^2)\,dx, \quad y(x_1)=A,\ y(x_2)=B$ (٣٤

$I=\int_{x_1}^{x_2} (\frac{2y}{x}+y^2-y'^2)\,dx, \quad y(x_1)=A,\ y(x_2)=B$ (٣٥

$I=\int_{x_1}^{x_2} (y\ln x+\frac{x^2y}{2}+xy'-y'^2)\,dx, \quad y(x_1)=A,\ y(x_2)=B$ (٣٦

$I=\int_1^2 (y\,\mathrm{Ln}\,x+\frac{y^2}{2}-xy'+y'^2)dx \quad , \quad y(1)=0 \qquad y(2)=5$ (٣٧

$I=\int_1^2 (y+x^2y'^2)dx \quad , \quad y(1)=2 \quad , \quad y(2)=1$ (٣٨

$I=\int_0^{\pi/2} (y^2-y'^2-8y\cosh x)dx \quad y(0)=2,\ y(\pi/2)=2\cosh(\pi/2)$ (٣٩

$I=\int_a^b (2x^3y+y''^2-y^2)dx$ (٤٠

$I=\int_a^b (y^2+y'^2-2y\sec x)dx$ (٤١

$I=\int_a^b y'\sqrt{1+y''}dx$ (٤٢

$I=\int_1^2 (\frac{(xy')^2}{2}+x^2y+y^2)dx \quad y(1)=1 \quad , \quad y(2)=\frac{5}{4}$ (٤٣

$I=\int_0^1 (y'^2-4xy'^3+4x^2y'^4)dx \quad , \quad y(0)=y(1)=0$ (٤٤

$I=\int_1^3 (\frac{y'^2}{x^4}-\frac{6y^2}{x^6}+\frac{8y}{x^5})dx \quad , \quad y(1)=2 \quad , \quad y(3)=6$ (٤٥

$I=\int_{x_1}^{x_2}\left[20xy(y+xy')+c(y)\sqrt{1+y'^2}\right]dx \ , \ y(x_1)=A,\ y(x_2)=B,$

$a)-c(y)=y \ , \ b)-c(y)=\sqrt{y} \ , c)-c(y)=k$ (٤٦

$I=\int_{x_1}^{x_2}\left[f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\right]dx \ , \ y(x_1)=A,\ y(x_2)=B,$

$f(x,y)=\sqrt{y+x} \ , \ f(x,y)=\sqrt{y} \ , f(x,y)=x, f(x,y)=y, f(x,y)=x^2,$

$f(x,y)=y^2, f(x,y)=\frac{1}{x}, f(x,y)=\frac{1}{y}, f(x,y)=\sqrt{\frac{y}{x}}, f(x,y)=\sqrt{\frac{x}{y}},$ (٤٧

$f(x,y)=\sqrt{\frac{1}{x}}, f(x,y)=\sqrt{\frac{1}{y}}, f(x,y)=\sqrt{y+x}, f(x,y)=\sqrt{1+x^2}, f(x,y)=x+a,$

$f(x,y)=y+b, f(x,y)=\frac{1}{v_0(1-ky)} \ , \ f(x,y)=\frac{1}{v_0(1-kx)}$

$I=\int_1^2 (x^2y'^2+2y^2)dx \quad , \quad y(1)=4 \quad , \quad y(2)=1$ (٤٨

$I=\int_0^1 (y^2-yy'^2+y')dx \quad y(0)=1 \quad , \quad y(1)=0$ (٤٩

$I=\int_1^3 (x^2y'^2-yy')dx \quad y(1)=1 \quad , \quad y(3)=2$ (٥٠

$I=\int_2^3 y^2(1-y')^2dx \quad , \quad y(2)=1,\ y(3)=3$ (٥١

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx \quad , \; y(x_1)=A,\; y(x_2)=B,$$

$$f(x,y)=y^2+y'\tan^{-1}y-\ln\sqrt{1+y'^2} \quad , \; f(x,y)=\frac{y'^2}{2}+yy'+y+y'$$

۵۲) $$f(x,y)=(y'^2-1)\exp(-2y^2),\; f(x,y)=a(x)y'^2-b(x)y^2,$$

$$f(x,y)=xy'^2-y'y+y,\;\; f(x,y)=y'^2+y'y+y^2,\; ,f(x,y)=xy(x+y),$$

$$f(x,y)=y'^2-y^2+2ye^x$$

۵۳) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y'^2-4y^2-8y)dx \quad , \quad y(0)=-1 \quad , \quad y(\frac{\pi}{4})=0$$

۵٤) $$I=\int_0^1 \frac{dx}{y'^2}, \quad y(0)=0 \quad , \quad y(1)=1$$

۵۵) $$I=\int_0^{\pi/4}(2x-4y^2-\dot{x}^2+\dot{y}^2)dt \quad y(0)=0,\; y(\pi/4)=1 \quad x(0)=0\,,\; x(\pi/4)=1$$

۵٦) $$I=\int_0^{\pi/2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2-2xy)dt \quad y(0)=0,\; y(\pi/2)=1 \quad x(0)=0\,,\; x(\pi/2)=0$$

۵۷) $$I=\int_0^1(\dot{x}^2+\dot{y}^2+2y)dt \quad y(0)=1,\; y(1)=3/2 \quad x(0)=0\,,\; x(1)=1$$

ممکن است در برخی از مسایل تغییراتی با تعویض متغیر بتوان مساله را ساده تر نموده و جواب ان را بدست آورد.

در $I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx$ با استفاده از روابط $x=x(u,v)\;,\; y=y(u,v)$ نشان دهید که معادله اویلر-لاگرانژ تغییرناپذیر است و بصورت $\frac{\partial\phi}{\partial v}-\frac{d}{du}(\frac{\partial\phi}{\partial v'})=0$ در می آید که در آن ϕ ضابطه حاصل از تعویض متغیر است. مسایل زیر را با استفاده از مطلب مذکور حل نمایید.

۵۸) $$I=\int_{x_1}^{x_2}(\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

۵۹ $$I=\int_0^{\ln 2}\left(e^{-x}y'^2-e^{x}y^2\right)dx$$

٦۰) $$I=\int_{\phi_1}^{\phi_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\phi \quad r=r(\phi)$$

٦۱) $$I=\int_{\phi_1}^{\phi_2} r\sin\phi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\phi \quad r=r(\phi)$$

٦۲) $$I=\int_{\phi_1}^{\phi_2} f(r\sin\phi)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\phi \quad r=r(\phi)$$

٦۳) معادله اویلر – لاگرانژ را برای تمام حالتهای خاص و ممکن $I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y',y'')dx$ بدست آورید.

٦٤) معادله اویلر – لاگرانژ را برای تمام حالتهای خاص و ممکن $I=\int_{t_1}^{t_2} f(x,y,x',y')dt$ بدست آورید