به نام او

Subject ①
Date

ارتعاشات
دکتر : مرادی

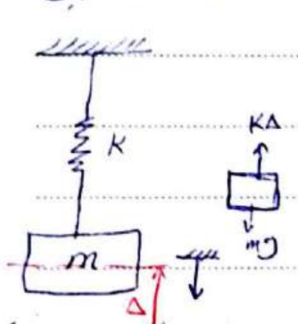
ارتعاشات : تحلیل رفتار نوسانی (تکرار یک حرکت دینامیکی) یک جسم

نوسان گرک تیر حدود (+) ، نوسان آونگ (+) ، زلزله (-) ، نوسان اولتراسونیک در سنگ شکن (-) ، جذب انرژی از امواج

ارتعاشات خطی ← فرض خطی بودن آن در نوسانات کوچک اعتبار دارد.

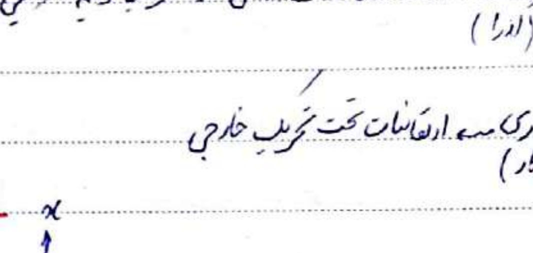
ارتعاشات غیرخطی ← در پدیده‌ای با دامنه‌ی نوسانی بزرگ رخ می‌دهد، مثلاً تخریب سازه غیرخطی است.

ارتعاشات:
- آزاد ← ارتعاشات ناشی از شرایط اولیه (یعنی دیگر نیرویی به آن اعمال وارد نمی‌شود) که به علت میرایی بعد از مدتی از بین می‌رود (گذرا)
- اجباری ← ارتعاشات تحت تحریک خارجی (ماندگار)

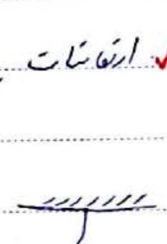


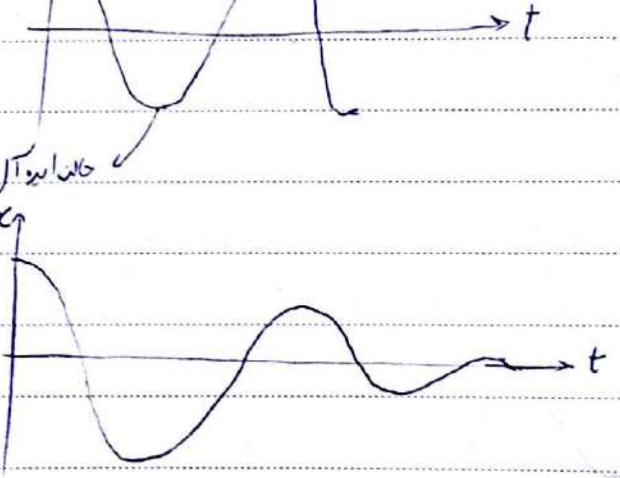
$$mg = k\Delta \rightarrow \Delta = \frac{mg}{k}$$

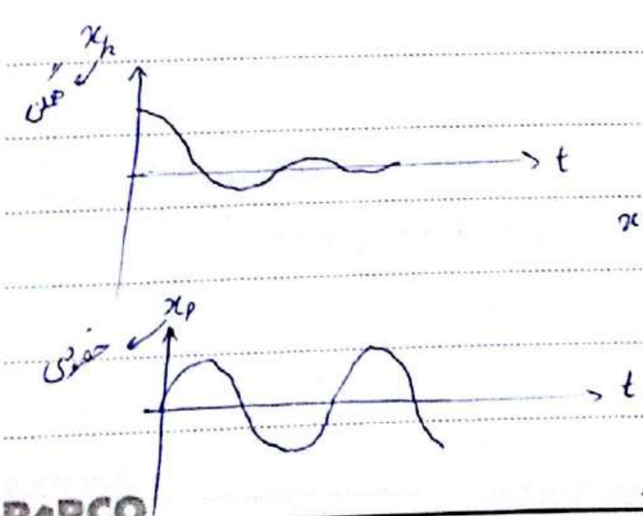
$$\begin{cases} x(0) = 5cm \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$



حالت ایده‌آل

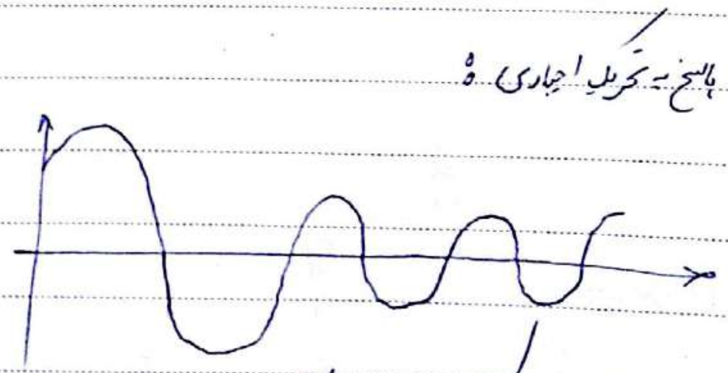






$x = x_h + x_p$

پاسخ به تحریک اجباری :



ارتعاشات گذرا (آزاد) پس از مدتی از بین می‌روند

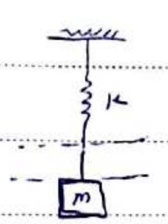
و ارتعاشات اجباری (ماندگار) باقی می‌مانند

PAPCO

مولد ارتعاشات آزاد همیشه شرایط اولیه نیست !

ارتعاشات آزاد یا گذرا : ناشی از شرایط اولیه (I.C) و یا برخی از عوامل داخلی ایجاد حرکت می‌باشد.

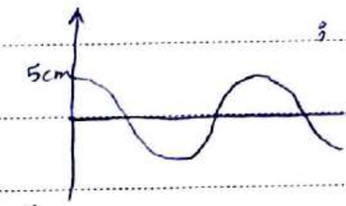
← مثلاً آزاد شدن یک فنر بسته



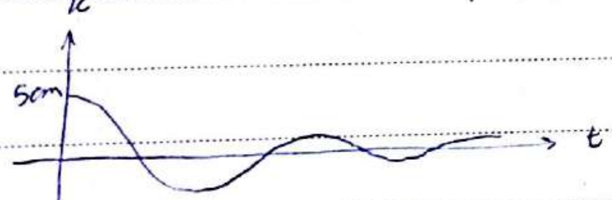
I.C : $x(0) = 5\,cm$

$\dot{x}(0) = 0$

حالت ایده‌آل :

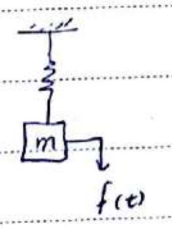


میرایی (استهلاک)
- اصطکاک بین سطوح و یا بین اجزاء داخلی یک سیستم
- سایر عواملی که باعث اتلاف می‌شوند در هر رشته‌ای مثل برق و یا صدا و گرمای ناشی از شکست یک چوب



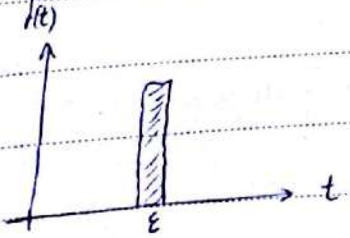
حالت واقعی (با میرایی)

ارتعاشات اجباری (پایدار | Steady state ← ارتعاشات ماندگار با دامنه‌ی تغییر هم داریم.

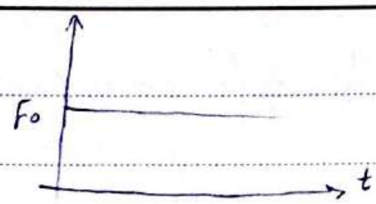


تحریک :
- نیرو (عمدتاً)
- جابه‌جایی ← مثلاً سرعتگیر

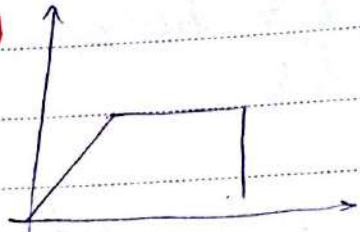
1) تحریک ضربه (Impulse)

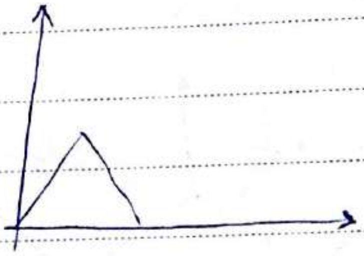


2) (Step تحریک پله)

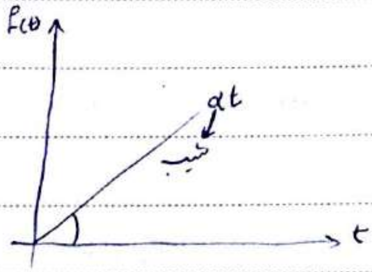


5)

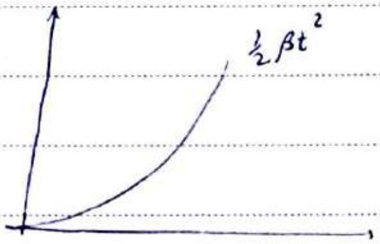




3) Ramp تحریک رمپ)

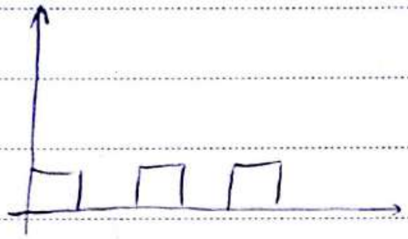


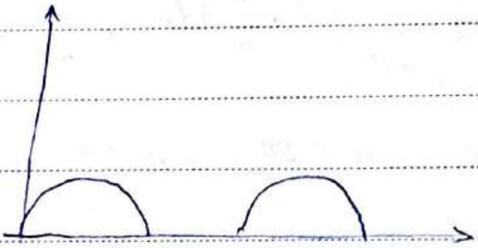
4) تحریک سهمی



* موارد 1 تا 5 تحت عنوان ارتعاشات گذرا بحث می‌شوند

6) Periodic

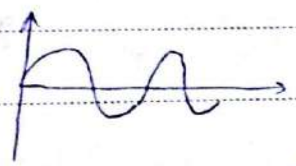




7) Harmonic ← هر هارمونیکی پریودیک است ولی برعکس نه

→ Sin , Cos

$F_0 \sin(\omega t) \rightarrow \boxed{\text{sys}} \rightarrow x_0 \sin(\omega t)$



نکته: در تحریک‌های هارمونیک، فرکانس تحریک و پاسخ یکسان است. *

برای یافتن پاسخ یک سیستم به تحریک پریودیک: تحریک پریودیک را به کمک بسط فوریه به صورت جمعی از هارمونیک‌ها مدل سازی می‌کنیم (تا زمانی که فرض خطی بودن داریم جمع آثار برقرار است)

یادآوری ریاضی:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

$\omega_n = n\omega_0$ ← فرکانس پایه (همان فرکانس تحریک)

Subject
Date

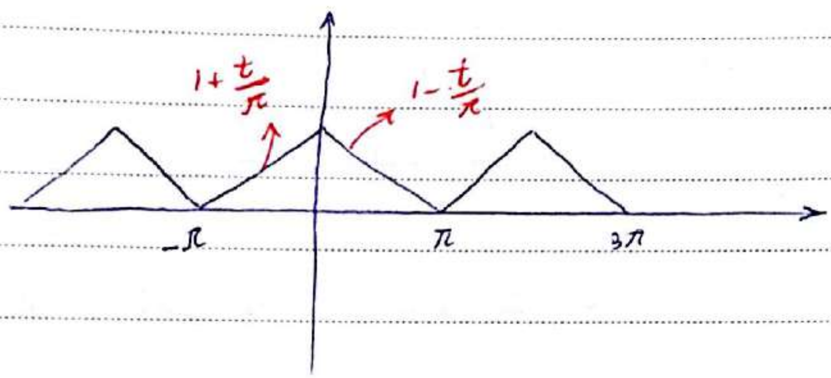
به نام او
4

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(\omega_n t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin(\omega_n t)\,dt$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_m t)\sin(\omega_n t)\,dt \quad \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

به طور مشابه برای cos

مثال: $T = 2\pi$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{t}{\pi}\right)dt + \int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{t}{\pi}\right)dt\right\} = 1$$

چون تابع زوج است $b_n = 0$,

$$\omega_n = n\omega_0 = n\left(\frac{2\pi}{T}\right) = n\left(\frac{2\pi}{2\pi}\right) = n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{t}{\pi}\right)\cos(nt)\,dt + \int_{0}^{\pi}\left(1-\frac{t}{\pi}\right)\cos(nt)\,dt\right\} = \frac{2}{(n\pi)^2}\left\{(-1)^n - 1\right\} \begin{cases} 0 & \text{n زوج} \\ \frac{-4}{(n\pi)^2} & \text{n فرد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{\text{n فرد}} \frac{1}{n^2}\cos(nt) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\Big[\underbrace{\cos t}_{\text{هارمونیک اول}} + \underbrace{\tfrac{1}{9}\cos 3t}_{\text{هارمونیک دوم}} + \dots\Big]$$

* پاسخ کل = جمع پاسخ به هارمونیک ها به شرط رفتار خطی (اصل جمع آثار برای سیستم خطی اعتبار دارد.

نکته: در ارتعاشات آزاد، sys با فرکانس طبیعی نوسان می‌کند.

نکته: در ارتعاشات اجباری، sys با فرکانس تحریک نوسان می‌کند.

نکته: فرکانس یا فرکانس‌های طبیعی یک سازه، تنها تابعی از جرم و سختی (صلبیت، stiffness) سازه می‌باشند.
یا $\omega_n = f(k, m)$

PAPCO

$f = \nu = \frac{1}{T}$ (Hz)

(rad/s) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi f$

مثال: نوسانات مدل آونگ مانند تاب: حالت اول: ارتعاشات آزاد (یک کردن)

حالت دوم: اجباری (هل دادن هر 2 تا 3 بار یک بار)

حالت سوم: رزونانس (هل دادن هر یک بار)

نکته: اگر فرکانس تحریک با یکی از فرکانس های طبیعی سازه برابر باشد پدیده رزونانس با دامنه ی زیاد ارتعاشات داریم.

رزونانس: اگر فرکانس تحریک سازه به یکی از فرکانس های طبیعی سازه نزدیک باشد پدیده تشدید داریم که همراه با دامنه ی بزرگ نوسان می باشد

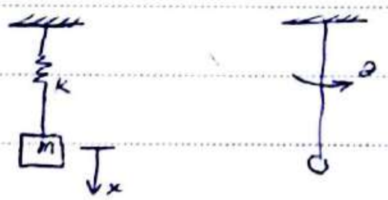
درجات آزاد: به تعداد درجات (راستاهای) حرکت ارتعاشی که جهت توصیف نوسانات جسم به طور مستقل نیاز است

جسم صلب در فضای سه بعدی ← حداکثر 6 درجه آزادی

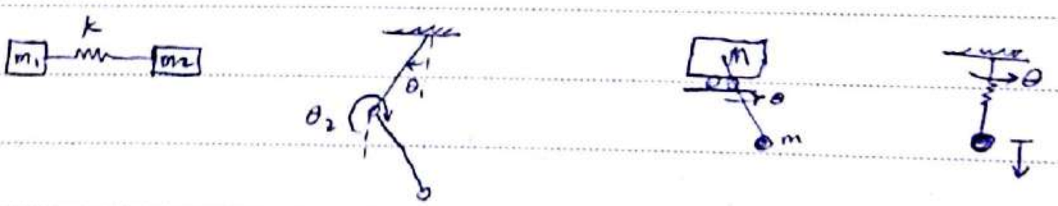
← اما در اکثر مسائل ممکن است ارتعاشات در تعداد درجات آزاد کمتری انجام شوند ← قید

دامنه ی نوسانات در سایر جهات نسبت به جهات دیگر خیلی کم باشد

سیستم یک درجه آزادی: SDOF



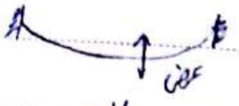
سیستم دو درجه آزاد: 2DOF



سیستم های پیوسته: بی نهایت درجه آزادی

چند مثال از سیستم های پیوسته:

1 طناب

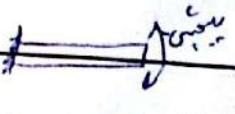


PDE (2)

2 میله

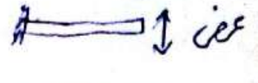
PDE (2)

3 شفت



PDE (2)

4 تیر



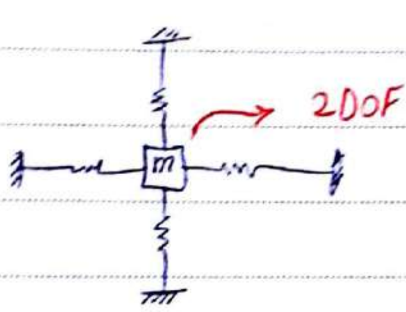
PDE (4)

Subject ω_n : 1, 3, 7, 20, 100, 2000...

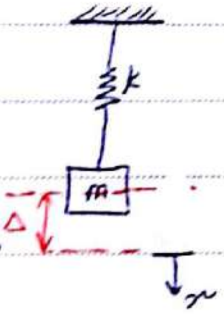
Date ω های تحریک : 2, 5 ← مثلاً دارای سیستم دوران سه درجه آزادی

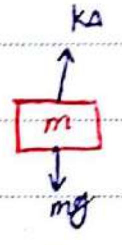
نکته : یک سیستم به تعداد درجات آزادی اش فرکانس طبیعی دارد

نکته : یک سیستم پیوسته در حالت کلی به صورت یک سیستم بی‌نهایت درجه آزادی مدل می‌شود، اگر در طبیعت ممکن است تنها تعداد محدودی از فرکانس‌های طبیعی تحریک شوند (مثلاً 2، 3، ...، 16...) بنابراین معمولاً تعداد درجات آزادی را هم تعداد فرکانس‌های تحریک شده می‌گیرند.



ارتعاشات آزاد سیستم یک درجه آزاد بدون میرایی :

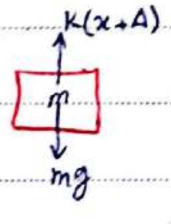




معادله استاتیکی :

$$\Sigma F_x = m a_x = 0$$

$$\Rightarrow mg - k\Delta = 0$$



معادله دینامیکی :

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow mg - k(x+\Delta) = m\ddot{x}$$

جایگزینی معادله استاتیکی در معادله دینامیکی :

نیروی اینرسی   نیروی بازگرداننده

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

یادآوری ریاضی : معادله دیفرانسیل مرتبه 2 با ضرایب ثابت :

$$ay'' + by' + c = 0$$

معادله مشخصه

$$aD^2 + bD + c = 0 \rightarrow D_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Subject به نام دوست
Date 7

1) $D_{1,2} = P_1 , P_2 \Rightarrow y(x) = C_1 e^{P_1 x} + C_2 e^{P_2 x}$

2) $D_{1,2} = P \Rightarrow y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{Px}$

3) $D_{1,2} = P \pm jq \Rightarrow y(x) = e^{Px}\left(C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx)\right)$

شکل معادل : $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$

النظ : $m\ddot{x} + kx = 0 \rightsquigarrow mD^2 + k = 0 \rightarrow D_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$

$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

$\boxed{x(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)} \longleftrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$x(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t)$

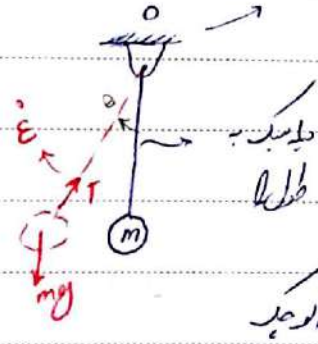
$x(0) = 10\ cm$, $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, $C_2 = 10\ cm \Rightarrow x(t) = 0.1 \cos(\omega_n t) \Rightarrow x(t) = 0.1 \cos(10 t)$

$k = 1000\ N/m$
$m = 10\ kg \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10$

در حالت کلی : مسائل یک درجه آزادی (بدون میرایی) دارای معادله حاکم به فرم $\ddot{X} + \omega_n^2 X = 0$ و پاسخ به فرم $x(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t)$ می باشد

چون در ابتدا تعادل استاتیکی دارد نیاز به معادله‌ی استاتیکی نیست

مثال :



$\sum M_{G\ \text{مرکز جرم} \ \text{دوران}} = I_{G\ \text{مرکز جرم} \ \text{دوران}}\ \ddot{\theta}$

$\Rightarrow \sum M_O = I_O \ddot{\theta} \Rightarrow -mgl\underbrace{\sin\theta}_{\text{nonlinear}} = I_O \ddot{\theta}$

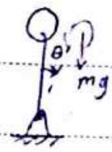
$\xRightarrow{\text{با } \theta \text{ کوچک}} ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

PAPCO

$I_O = I_{\text{مرکز گلوله}} + md^2 = \frac{2}{5}m\cancel{r^2} + ml^2$ $\qquad \omega_n^2 = \frac{g}{l}$

0 ، چون شعاع کوچک

مثال:



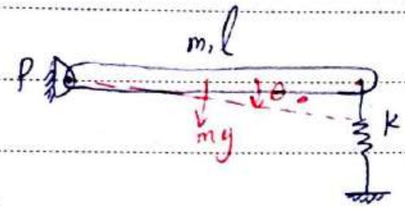
$\sum M_o = I_o\ddot{\theta} \to mgl\theta = ml^2\ddot{\theta} \to \ddot{\theta} - \frac{g}{l}\theta = 0$

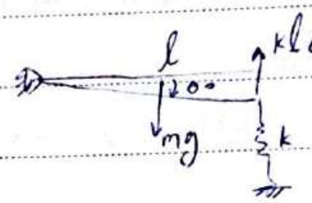
حرکت نوسانی نیست!!

$\to \theta(t) = C_1 e^{\omega_n t} + C_2 \cancel{e^{-\omega_n t}}$

$\underset{t\to\infty}{0}$

مثال:





معادله استاتیکی $\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_p = 0 \longrightarrow -K(l\theta_0)l + mg\frac{l}{2} = 0$

جهت مثبت $\ddot{\theta}$ ؟

معادله دینامیک: $mg(\frac{l}{2}) - kll(\theta_0+\theta) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}$

$\theta_0 \to \theta + \theta_0$

جایگزینی معادله استاتیک در دینامیک:

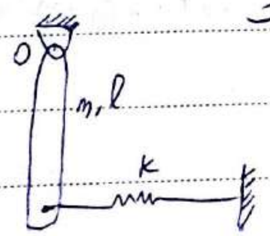
$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + kl^2\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{3K}{m}}$

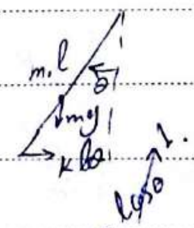
یادآوری: کره حول مرکز $I = \frac{2}{5}mr^2$ میله حول نقطه وسط $I = \frac{1}{12}ml^2$

دیسک حول مرکز $I = \frac{1}{2}mr^2$ میله حول انتها $I = \frac{1}{3}ml^2$

نیم دیسک حول مرکز $I = \frac{1}{2}mr^2$ جرم نیم دیسک

مثال: در اینجا نیازی به معادله استاتیکی نیست چون سیستم در ابتدا در حال تعادل است





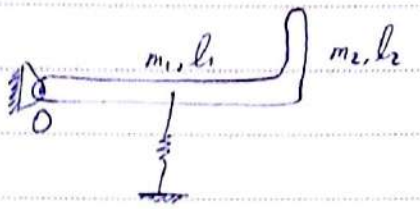
$\sum M_o = I_o\ddot{\theta} \Rightarrow -mg\frac{l}{2}\theta - (kl\theta)l = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}$

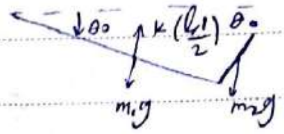
$\Rightarrow \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + (mg\frac{l}{2} + kl^2)\theta = 0 \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{mg\frac{l}{2} + kl^2}{\frac{ml^2}{3}}$

Subject
Date

نکته: در مسائلی که وزن مجموعه توسط حداقل یک فنر تحمل شود، عبارت مربوط به وزن در ω_n ظاهر نمی‌شود و در مسائلی که وزن توسط فنر تحمل نمی‌شود عبارت وزن در ω_n ظاهر می‌شود.

مثال:





معادله استاتیکی: $\sum M_o = 0 \Rightarrow m_1 g \frac{l_1}{2} + m_2 g\left(l_1 + \frac{l_2}{2}\overset{\sin\theta_0}{\theta_0}\right) - \left(k\frac{l_1}{2}\theta_0\right)\left(\frac{l_1}{2}\right) = 0$

معادله دینامیکی: $\sum M_o = I_o\alpha = I_o\ddot{\theta} \xrightarrow{\theta_0 \to \theta + \theta_0} m_1 g\frac{l_1}{2} + m_2 g\left(l_1 + \frac{l_2}{2}(\theta_0 + \theta)\right) - \left(k\frac{l_1}{2}(\theta_0+\theta)\right)\left(\frac{l_1}{2}\right) = 0$

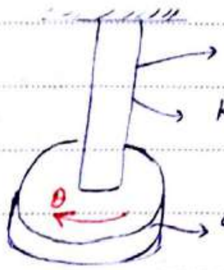
جایگذاری معادله استاتیکی در دینامیکی $\Rightarrow m_2 g\frac{l_2}{2}\theta - k\frac{l_1^2}{4}\theta = I_o\ddot{\theta}$

$I_o\ddot{\theta} + \left(k\frac{l_1^2}{4} - m_2 g\frac{l_2}{2}\right)\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{k\frac{l_1^2}{4} - m_2 g\frac{l_2}{2}}{I_o}$

چون m_2 به طور مستقیم توسط فنر تحمل نمی‌شود

$I_o = \frac{m_1 l_1^2}{3} + \frac{1}{12}m_2 l_2^2 + m_2\left(l_1^2 + \frac{l_2^2}{4}\right)$

مثال: ارتعاشات پیچشی



شفت قطر d

(ممان اینرسی قطبی) I_p (m^4)

k_t (سختی پیچشی)

دیسک: ممان اینرسی جرمی J $(kg\,m^2)$

کل اتصال شفت و دیسک: $-k_t\theta = J\ddot{\theta}$

$\Rightarrow J\ddot{\theta} + k_t\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J}}$

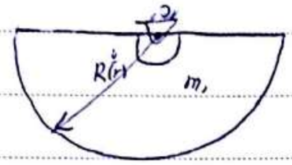
$J_{دیسک} = \frac{1}{2}mr^2 \Rightarrow \theta = \frac{Tl}{G\underset{I_p}{J}} \Rightarrow T = k_t\theta \Rightarrow k_t = \frac{T}{\theta}$

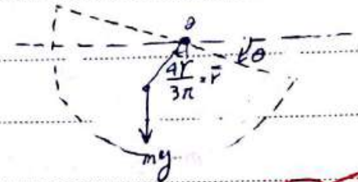
$\Rightarrow k_t = \frac{G J_{\to I_p}}{l}$

کاربرد ۵: یافتن J اجسام با هندسه پیچیده ← برعکس با اطلاعات معلوم حل می‌کنیم و یک θ_0 به جسم می‌دهیم و رها می‌کنیم

← مقدار نوسانات در ۱ ثانیه را می‌شماریم ← Hz ← ω_n ← $\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{J}}$

مثال ۵: نیم استوانه بین شده.





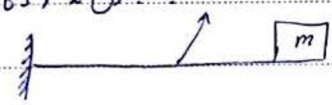
$$\Sigma M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow -mg\bar{r}\sin\theta = \left(\frac{1}{2}mr^2\right)\ddot{\theta}$$

θ

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{8g}{3r\pi}\theta = 0 \quad , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{8g}{3r\pi}}$$

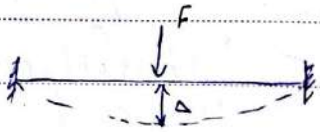
مثال ۵: اگر میله به صورت یک جسم یک درجه آزاد مدل شود. (نه پیوسته)

میله یک به طول l , EI



$\Delta = \frac{Fl^3}{3EI}$ → $k = \frac{3EI}{l^3}$ حفظ شود

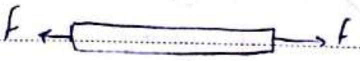
* در این مثال مستقیماً حل حالت دینامیک می‌نویسیم



$\Delta = \frac{Fl^3}{48EI}$

$m\ddot{x} + kx = 0$

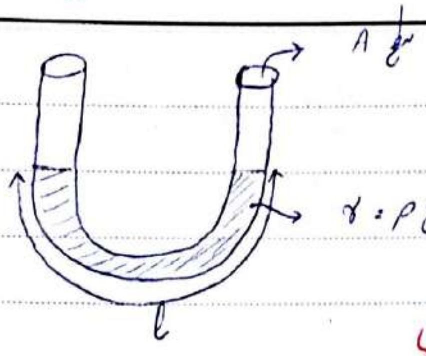
$k = \frac{3EI}{l^3}$

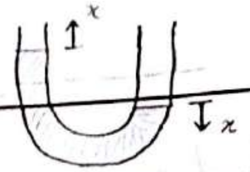


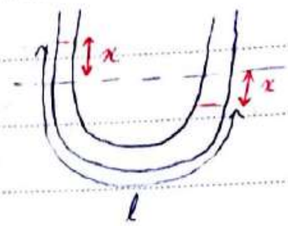
$\delta = \frac{Fl}{EA}$

حالت ۴ مختلف مدلساز فنر در کتاب

مثال:





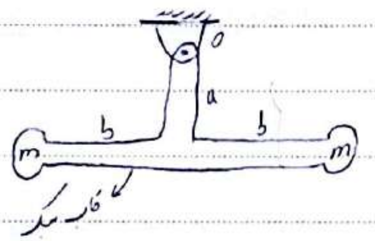


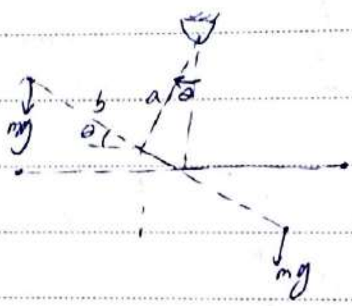
جبر ؟؟

$\underset{\text{نیروی عامل حفظ نوسان}}{\Sigma F} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \underbrace{-2Ax\rho g}_{\text{جرم اختلاف سطح}} = (\rho A l)\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2g}{l}x = 0 \ , \ \omega_n = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

مثال:





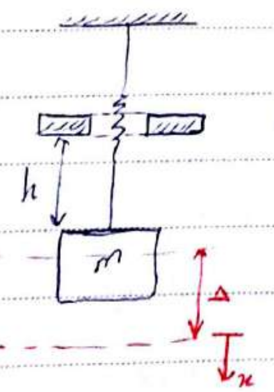
$d^2 = a^2 + b^2$

$$\overset{+}{\curvearrowright}\ \Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow -mg(b\cos\theta + a\sin\theta) + mg(b\cos\theta - a\sin\theta) = 2md^2\ddot{\theta}$$

$$-2mga\theta = 2md^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{ga}{d^2}\theta = 0 \ , \ \omega_n = \sqrt{\frac{ga}{d^2}}$$

در حالت حدی : $b \to 0$ ، $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{a}}$ (همان آونگ ساده به طول a)

مثال: حلقه به جرم m_p از ارتفاع h رها می‌شود، بیشترین دامنه نوسان را بیابید
(بعد از برخورد m_p به m می‌چسبد)



تعادل استاتیکی : $mg = k\Delta$

$$(m+m_p)g - k(x+\Delta) = (m+m_p)\ddot{x}$$

$$\Rightarrow (m+m_p)\,\ddot{x} + kx = m_p g \quad \rightsquigarrow \quad x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\text{همگن}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{خصوصی}}$$

$$x_h(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)$$

$$x_p(t) : \quad x = A \xrightarrow{\text{subs}} A = \frac{m_p g}{k} = x_p$$

$$\Rightarrow x(t) : \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t) + \frac{m_p g}{k}$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = ? \end{cases}$$

!! زور دینامیک

مومنتوم خطی : $G\big|_a = G\big|_b \Longrightarrow 0 + m_p(\sqrt{2gh}) = (m+m_p)\,\dot{x}(0) \longrightarrow \dot{x}(0) = \dfrac{m_p\sqrt{2gh}}{m+m_p}$

(a: قبل از برخورد ، b: بعد از برخورد) — صرفنظر از δ

شرایط اولیه : $C_1 = \dfrac{-m_p g}{k}$, $C_2 \omega_n = \dot{x}$

محتوی فرکانسی ضربه شامل همه فرکانس ها می شود چون بی نهایت است ولی چون در زمان بسیار کوتاه وارد می شود مشکل ندارد

X_{max} را یافتن : $\dot{x}(t) = 0 \longrightarrow t = t_{max} \xrightarrow{\text{subs}} x_{max}$

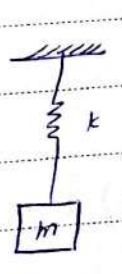
$\longrightarrow \dfrac{m_p g}{k} + \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ روش دوم

روش انرژی : بعضی گاهی اوقات در ظاهر مسئله تعداد درجه آزادی زیادی دارد ولی این درجات مستقل نیستند و به دلیل قیود هستند

مثلاً سیستم در واقع یک درجه آزادی است، در این مسائل یک درجه آزاد استفاده از روش انرژی توصیه می شود.

$$T + U = cte \Longrightarrow \frac{d}{dt}(T+U) = 0 \longrightarrow \text{معادله حاکم}$$

مثال :



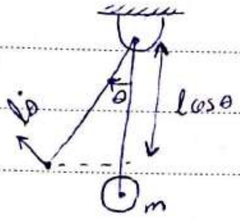
$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \;/\; U = \frac{1}{2} k x^2$$

mg را ننوشتیم چون با جابجایی st در دینامیک حذف می شود.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2\right) = 0 \longrightarrow m\cancel{\dot{x}}\ddot{x} + kx\cancel{\dot{x}} = 0$$
$$\longrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

Subject
Date

مثال :



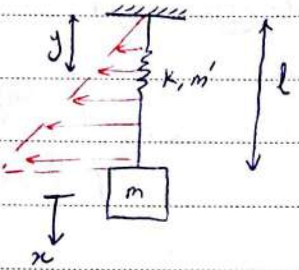
$$T = \frac{1}{2} m (l\dot\theta)^2$$

$$U = mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \longrightarrow ml^2 \cancel{\dot\theta}\,\ddot\theta + mgl \overset{\theta}{\sin\theta}\, \cancel{\dot\theta} = 0$$

$$\longrightarrow \ddot\theta + \frac{g}{l}\theta = 0$$

مثال: فنر به طول l جرم m' داشته باشد

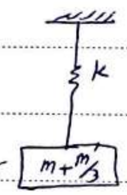


$$\rho = \frac{m'}{l} \qquad U = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{v}{\dot x} = \frac{y}{l} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot x^2 + \frac{1}{2}\int_0^l (\rho\, dy)\left(\frac{\dot x y}{l}\right)^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}\left[m + \frac{m'}{3}\right]\dot x^2$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Rightarrow \left(m + \frac{m'}{3}\right)\ddot x + kx = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + m'/3}}$$

جرم موثر فنر $= \frac{m'}{3}$



$$m_{eff}\ddot x + k_{eff} x = 0$$

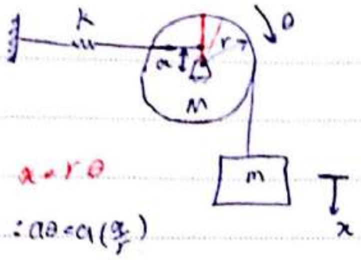
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}$$

نکته : در برخی مسائل به ظاهر چند درجه آزادی اند ولی به علت قیود هندسی یک درجه آزادی است که می توان معادله کلی سیستم را به صورت زیر نوشت :

$$m_{eff}\ddot x + k_{eff} x = 0 \quad \text{یا} \quad I_{eff}\ddot\theta + \overset{\text{پیچشی}}{k_{eff}}\theta = 0$$

Subject
Date

مثال :



$x = r\theta$

جابجایی فنر : $a\theta = a(\frac{x}{r})$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[m + \frac{1}{2}Mr^2 \cdot \frac{1}{r^2}\right]\dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{ax}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ka^2}{r^2}\right)x^2$$

نکته : اگر در یک سیستم وزن یک المان حداقل توسط یک فنر تحمل شود، $mg\Delta h$ آن المان در U ظاهر نمی‌شود

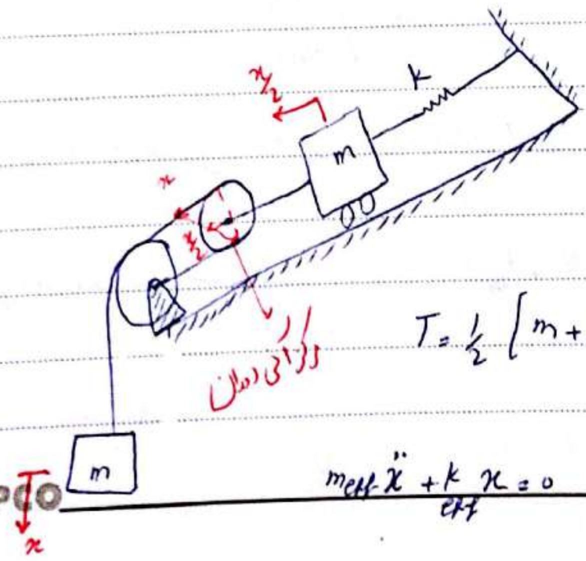
$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \longrightarrow \underbrace{\left(m + \frac{M}{2}\right)}_{m_{eff}}\ddot{x} + \underbrace{\frac{ka^2}{r^2}}_{k_{eff}}x = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{ka^2/r^2}{m + M/2}}$$

نوشتن برحسب θ :

$$T = \frac{1}{2}\overbrace{\left[mr^2 + J_0\right]}^{I_{eff}}\dot{\theta}^2 \Rightarrow I_{eff}\ddot{\theta} + k_{eff}\theta = 0$$

$$U = \frac{1}{2}\underbrace{(ka^2)}_{k_{eff}}\theta^2 \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{ka^2}{mr^2 + \frac{Mr^2}{2}}}$$

مثال :



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

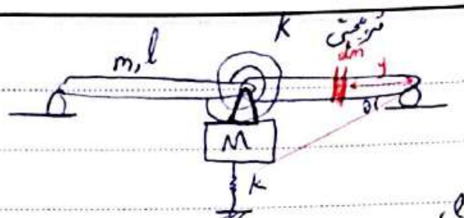
$$T = \frac{1}{2}\left[m + \frac{m}{4}\right]\dot{x}^2 \quad , U = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{4}\right)x^2$$

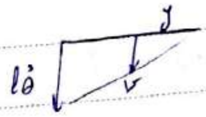
$$m_{eff}\ddot{x} + k_{eff}x = 0 \quad / \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k/4}{m + m/4}}$$

میزان او

Subject
Date

مثال :





$\rho = \frac{m}{l}$

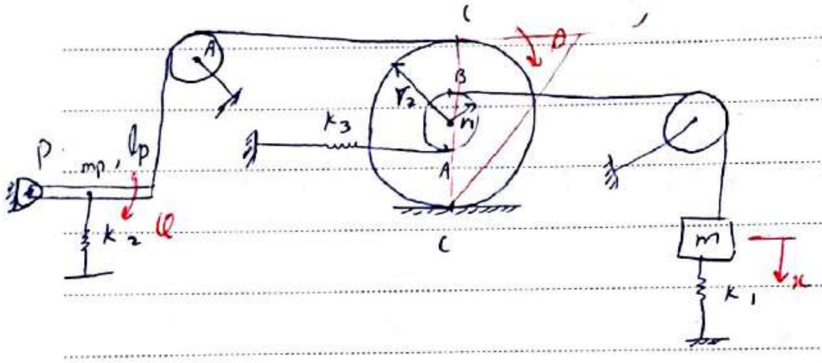
$\frac{v}{l\dot\theta} = \frac{y}{l}$

$$T = \frac{1}{2} M (l\dot\theta)^2 + 2 \times \frac{1}{2} \int_0^l (\rho dy)(y\dot\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[Ml^2 + 2 \times \frac{1}{3}(\rho l)\, l^2\right]\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\left[Ml^2 + \frac{2}{3} m l^2\right]\dot\theta^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_t \theta^2 + \frac{1}{2} k (l\theta)^2 , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_t + k l^2}{Ml^2 + \frac{2}{3} m l^2}}$$

مثال :



$x = x_B = (r_1 + r_2)\theta$, $x_C : 2r_2\theta = l_p \varphi$

$$T = \frac{1}{2} m \dot x^2 + \frac{1}{2} I_C \dot\theta^2 + \frac{1}{2} \underbrace{I_p}_{\frac{1}{3} m_p l^2} \dot\varphi^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{l_p}{2}\varphi\right)^2 + \frac{1}{2} k_3 \left((r_2 - r_1)\theta\right)^2$$

$\theta, x, \varphi \rightarrow$ برحسب θ :

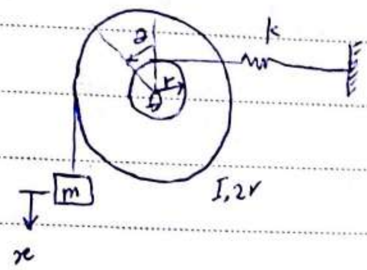
$$T = \frac{1}{2}\left[\overbrace{m(r_1+r_2)^2 + I_C + I_p\left(\frac{2r_2}{l_p}\right)^2}^{I_{eff}}\right]\dot\theta^2$$

$$U = \frac{1}{2}\left[\underbrace{k_1(r_1+r_2)^2 + k_2 r_2^2}_{k_{eff}}\right]\theta^2$$

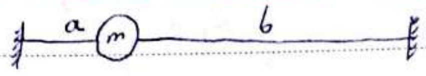
Subject
Date

به نام او

(16)

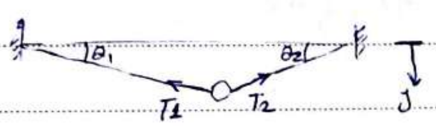


مثال :



$mg <<$ کشش کابل

$w_n = ?$



θ_1 , θ_2 کوچک $\quad \Sigma F_x = 0 \longrightarrow T_2 \cos\theta_2 = T_1 \cos\theta_1$

$T_2 = T_1 = T$

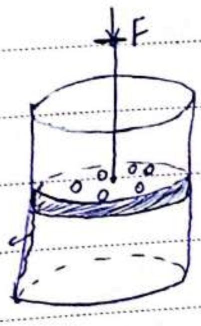
$$\Sigma F_y = m\ddot{y} \implies -T(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \tan\theta_1 = \theta_1 = \frac{y}{a} \\ \tan\theta_2 = \theta_2 = \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -T\left(\frac{y}{a} + \frac{y}{b}\right) = m\ddot{y} \implies m\ddot{y} + \underbrace{\left(\frac{T}{a} + \frac{T}{b}\right)}_{\text{معادل } k} y = 0$$

دو فنر موازی

$$\Rightarrow k_{\text{کابل}} = \frac{T}{\ell}$$

میرایی :

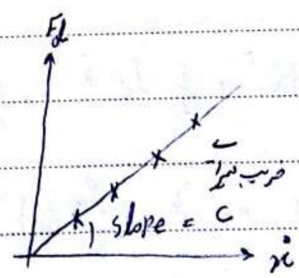


نیروی مقاوم به حرکت $F_d \propto -\dot{x}$

از سمت میرا روغن

$c = f(\mu, \varepsilon, \dots)$

پارامتر هندسی ...



$\Rightarrow F_d = -c\dot{x}$

(viscous damping میرایی ویسکوز)

میرایی غیرخطی هم داریم !!

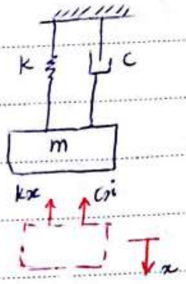
$[c] = \frac{N.s}{m}$

بنام او

Subject (۱۴)
Date

فصل ۵ :

(نیروهای فنر و دمپر در یک جهت اند
چون هر دو مقاوم اند)



Dyn Eq

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow mD^2 + cD + k = 0 \rightarrow D_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

تعریف دمپر بحرانی : میزان میرایی که سبب تکراری شدن ریشه‌های معادله می‌شود

$$C_{cr} : \quad c^2 - 4mk = 0 \rightarrow c = 2\sqrt{mk}$$

تعریف نسبت میرایی :

$$\xi = \frac{c}{C_{cr}}$$

فرم مودال :

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2} x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{c}{C_{cr}} \cdot \frac{C_{cr}}{m} = \xi \cdot \frac{2\sqrt{mk}}{m} = 2\xi\omega_n$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$D^2 + 2\xi\omega_n D + \omega_n^2 = 0 \rightarrow D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

I) $\xi < 1 \Rightarrow c < c_{cr}$: under damped $\Rightarrow D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[C_1 \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t\right) + C_2 \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t\right)\right]$$

فرکانس نوسانات دمپ شده : $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ / $\omega_d < \omega_n$ $\quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \rightarrow T_d > T_n$

P4PCO

برای ξ های کوچک : $\omega_d \simeq \omega_n$

Subject

Date

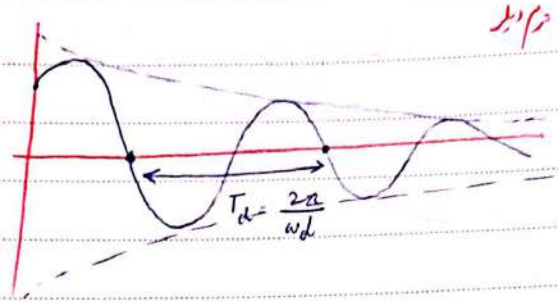
فرم دیگر ٢ : $x(t) = X_0 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t - \varphi)$

$X_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$

بجز در علامت فاز

مثلاً اینجا اشتباه نوشتم



کاهش لگاریتمی :

$\ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = \delta$

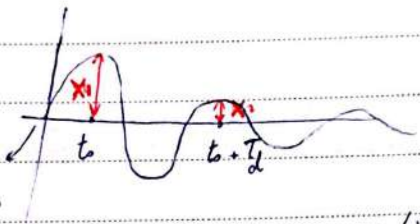
$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \delta$

$\vdots$

$\ln\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = \delta$

$\ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) = n\delta$

$x(t) = X_0 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t)$



$C_2 = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$$\ln\frac{X_1}{X_2} = \ln\left(\frac{X_0\, e^{-\xi\omega_n t_0}\sin(\omega_d t_0)}{X_0\, e^{-\xi\omega_n (t_0+T_d)}\sin(\omega_d (t_0+T_d))}\right)$$

$$= \ln e^{\xi\omega_n T_d} = \xi\omega_n \cdot \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \delta = \ln\frac{X_1}{X_2} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \xrightarrow{\xi \text{ خیلی کوچک}} \delta = 2\pi\xi$$

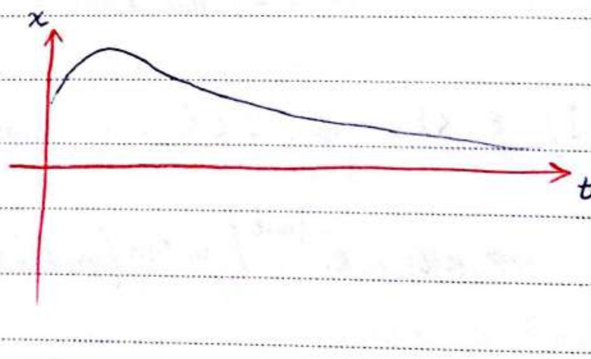
کاهش لگاریتمی فقط تابع ξ :

II) $\xi = 1 \Rightarrow$ Critically damped $\Rightarrow D_{1,2} = -\xi\omega_n = -\omega_n$ ریشه منفی حقیقی تکراری

III) $\xi > 1 \Rightarrow$ over damped $\Rightarrow D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$ ریشه منفی حقیقی متمایز $\xi > 1$

II) $x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\omega_n t}$

III) $x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}$

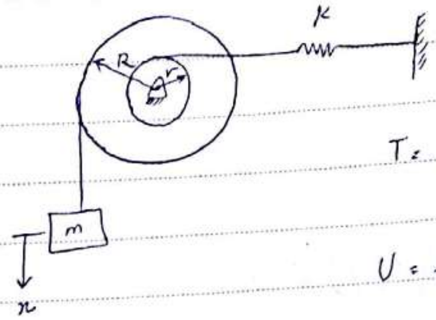


Subject: به نام او

Date: 19

تی ای

مثال ۹ حل را از هر دو روش انجام دهید.



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$$

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{r x}{R}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Rightarrow m\ddot{x}\cancel{\dot{x}} + I \frac{\ddot{x}}{R}\frac{\cancel{\dot{x}}}{R} + k\left(\frac{r x}{R}\right)\left(\frac{r\cancel{\dot{x}}}{R}\right) = 0$$

$$\left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\ddot{x} + \left(\frac{k r^2}{R^2}\right) x = 0$$

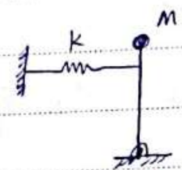
روش نیوتن :

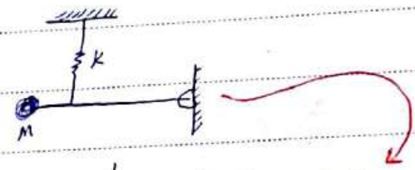
$$-T = mR\ddot{\theta}$$

$$-T = m\ddot{x} \quad , \quad \Sigma M_0 = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow TR - k\Delta r = I_0 \ddot{\theta}$$

$$x = R\theta \quad , \quad \Delta = r\theta \Rightarrow \quad -mR^2\ddot{\theta} - kr^2\theta = I_0\ddot{\theta} \Rightarrow \checkmark$$

مثال :

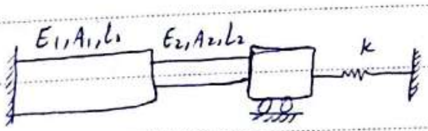




در حالت تعادل تیر از حالت طبیعی اش خارج می‌شود پس mg را در نظر نمی‌گیریم

در حالت تعادل فنر از حالت طبیعی اش خارج نشده است پس mg را در نظر می‌گیریم

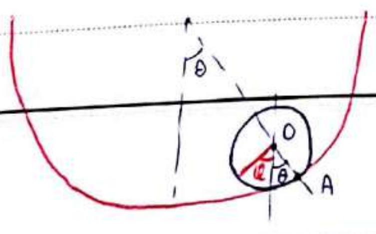
مثال :



$$k_1 = \frac{A_1 E_1}{L_2} \qquad k_2 = \frac{A_2 E_2}{L_2} \Rightarrow k_{eq} = k + \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

مثال ۸

$\dot{\varphi}$ سرعت زاویه‌ای دیسک



$$r(\varphi + \theta) = R\theta$$

$$\varphi = \left(\frac{R - r}{r}\right)\theta$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\theta}}$$

Subject
Date

به نام او
(20)

$m\ddot{x}+kx=0$ → ناپایدار

درحالت پایدار معادله به فرم است ولی ناپایدار خیر

روش دوم محاسبه : محاسبه سرعت از مرکز آنی دوران ، در مرکز انحنا

سرعت O : $(R-r)\dot{\theta} = r\dot{\varphi}$

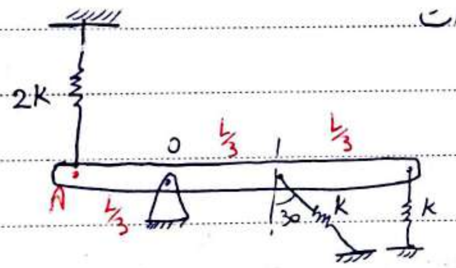
لاگرانژ : $T=\frac{1}{2}I_A\dot{\varphi}^2 \quad / \quad U=-mg(R-r)\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}mr^2\left(\left(\frac{R}{r}-1\right)\dot{\theta}\right)^2-mg(R-r)\cos\theta\right]=0 \longrightarrow$$

بعد از مشتق گرفتن $\sin\theta \simeq \theta$

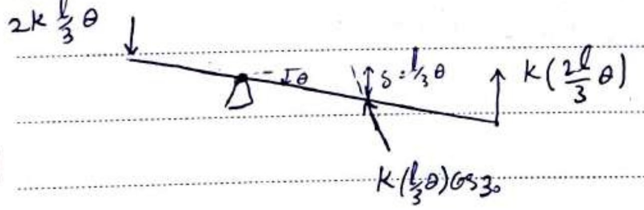
روش نیوتن $\quad \Sigma M_A = I_A\ddot{\varphi} \longrightarrow -mgr\theta=\frac{3}{2}mr^2\left(\frac{R}{r}-1\right)\ddot{\theta}$

مثال ۵ : فنر زاویه دار → ظاهر شدن $\cos^2$ در معادلات



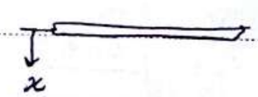
$$I_0\ddot{\theta}+2k\left(\frac{l}{3}\theta\right)\frac{l}{3}+k\frac{l}{3}\theta\cos^2(30)\frac{l}{3}+\frac{2kl}{3}\theta\times\frac{2l}{3}=0$$

K یعنی معادل در نقطه ی A



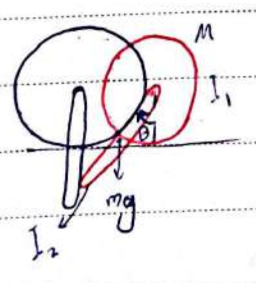
مثلا اگر فنر معادل در نقطه ی A را خواسته بود

این مسئله را حل می کنیم



در مکان های مختلف k و m مختلف داریم ولی $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ثابت می ماند

مثال : $-mg\frac{l}{2}\theta=\left[I_1+Mr^2+I_2+m\left(r^2+\frac{l^2}{4}-\frac{2rl}{2}\cos\theta\right)\right]\ddot{\theta}$



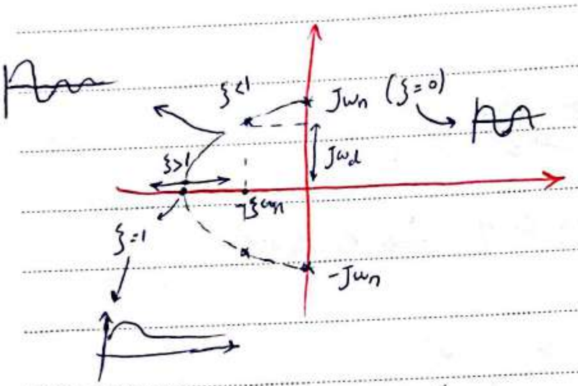
TA - پایان

مکان قرارگیری ریشه‌ها $\underset{sys}{m-k-c}$:

فرم نرمال : $\rightsquigarrow \quad mD^2 + CD + k = 0 \quad \equiv D^2 + 2\xi\omega_n D + \omega_n^2 = 0$

$D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$: $\xi<1 \Rightarrow -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

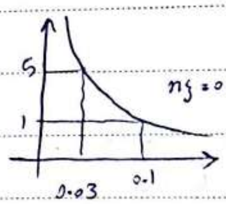
$Re^2 + Im^2 = \omega_n^2 \rightarrow$ دایره به شعاع ω_n



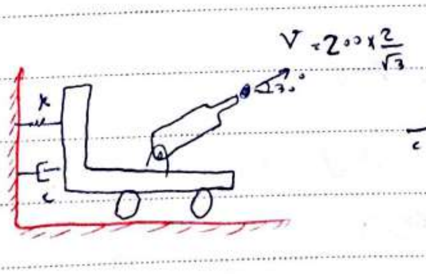
مثال : تعداد سیکل‌های لازم برحسب ξ که دامنه نوسان $\underset{sys}{m-k-c}$ به نصف کاهش یابد.

$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln\frac{x_0}{x_1}$ $\quad$ کم $\xi \Rightarrow \delta = 2\pi\xi$ $\quad$ * $\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_0}{x_n}$

$2\pi\xi = \frac{1}{n}\ln 2 \longrightarrow n\xi = 0.11$



* مثال :



$M = 500\ kg$ کل خودرو و توپ

$m = 50\ kg$ گلوله

$k = 1\ \frac{kN}{m}$, $C = 2000\ \frac{N.s}{m}$

$M\ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0$ $\qquad$ X_{max} تعداد سیکل ؟

شرط $\Delta = 0 \rightarrow C_{cr} = 2\sqrt{mk} = 2\sqrt{500 \times 10^3}$

$\xi = \frac{c}{C_{cr}} = \frac{2000}{1414} = 1.41 > 1$ over damped

Subject
Date

$D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{500}} = 1.4 \ \frac{rad}{s}$

$D_{1,2} = -1.41\,(1.41) \pm 1.41 \ \begin{cases} -3.4 \\ -0.58 \end{cases}$

$x(t) = C_1 e^{-3.4t} + C_2 e^{-0.58t}$

$C_1, C_2 = ?$ $\quad x(0) = 0$

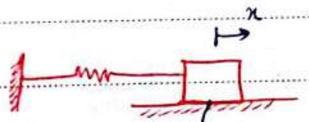
$\dot{x}(0) = ? \longrightarrow \underset{\text{بعد از شلیک}}{G_x} = \underset{\text{قبل شلیک}}{G_x}$

$5(200) = 500\,(\dot{x}(0)) \longrightarrow \dot{x}(0) = 20 \ \frac{m}{s} \Longrightarrow C_1, C_2 = \checkmark$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 0 \longrightarrow t_{max} = \checkmark \xrightarrow{subs} x_{max} = \checkmark$

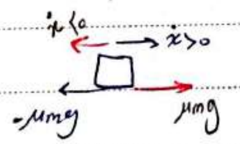
اصطکاک خشک :

Dry friction (Coloumb)



μ ضریب اصطکاک

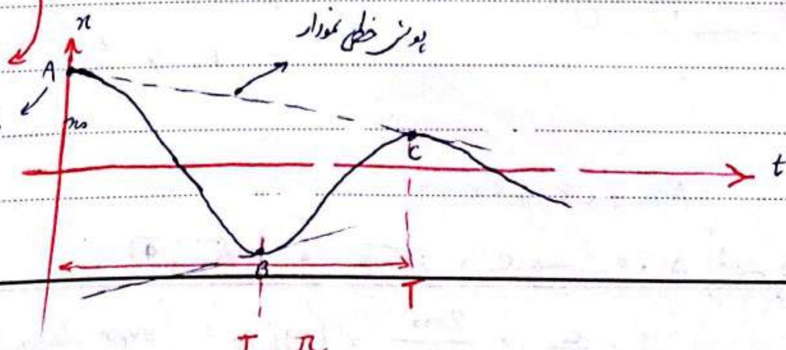
رفت و برگشت .



$\begin{cases} \dot{x} > 0 & : -\mu mg \\ \dot{x} < 0 & : \mu mg \end{cases}$

$m\ddot{x} + kx = \pm\mu mg \ \begin{cases} \dot{x} < 0 & : \mu mg \\ \dot{x} > 0 & : -\mu mg \end{cases}$

به دلیل دو ضابطه‌ای بودن گاهی غیرخطی خوانده می‌شود



$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_n}$

به یار او

(23) ✓

Subject

Date

$A \to B \;:\; \dot{x} < 0 \qquad m\ddot{x} + kx = \mu mg$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t) + \frac{\mu mg}{k}$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \longrightarrow C_2 = x_0 - \dfrac{\mu mg}{k} \\ \dot{x}(0) = 0 \longrightarrow C_1 = 0 \qquad x(t)_{A\to B} = \left(x_0 - \dfrac{\mu mg}{k}\right)\cos(\omega_n t) + \dfrac{\mu mg}{k} \end{cases}$$

$B \to C \;:\; \dot{x} > 0 \qquad m\ddot{x} + kx = -\mu mg$

$$x(t) = C_3 \sin(\omega_n t) + C_4 \cos(\omega_n t) - \frac{\mu mg}{k}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(\overset{\pi/\omega_n}{T/2}) = 0 \longrightarrow C_3 = 0 \\ x(T/2)_{B-C} = x(T/2)_{A-B} \end{cases}$$

$$x_B = \left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right)\cos\left(\omega_n \frac{\pi}{\omega_n}\right) + \frac{\mu mg}{k} = \frac{2\mu mg}{k} - x_0$$

$$x_B = -C_4 - \frac{\mu mg}{k} = \frac{2\mu mg}{k} - x_0 = x_B \implies -C_4 = \frac{3\mu mg}{k} - x_0$$

$$\implies x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu mg}{k}\right)\cos(\omega_n t) - \frac{\mu mg}{k}$$

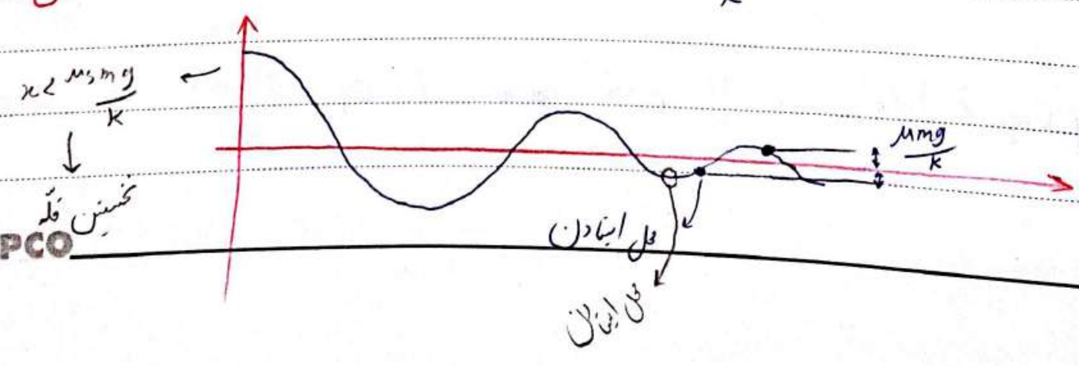
$|x_C| = x_0 - \dfrac{4\mu mg}{k} \qquad // \qquad |x_B| = x_0 - \dfrac{2\mu mg}{k}$

$\downarrow t = T = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$

کاهش به‌طور خطی است

Stop حل :

$$kx < \mu mg \longrightarrow x < \frac{\mu mg}{k}$$



$A \rightarrow B$: work-energy $\quad \Delta T = 0$

$$w = -\mu m g (X_0 + X_1) = \frac{1}{2} k (X_0^2 - X_1^2) \Rightarrow \Delta x = \frac{2\mu m g}{k}$$

1 ببینیم با فرکانس طبیعی ω_n نوسان می‌کند

2 کاهش دامنه خطی بود و در یک دوره به اندازه $\frac{4\mu m g}{k}$ کاهش می‌یابد

3 برای $kx < \mu m g$ حرکت متوقف می‌شود

4 میرایی معادل ویسکوز آن ← صفحه بعد

دمپینگ معادل ویسکوز : جهت سهولت در کار کردن با میرایی خشک، معادل میرایی ویسکوز آن را ارائه می‌دهیم (مدل)

اتلاف انرژی :

$$\int_0^T \underbrace{(c_{eq}\dot{x})}_{F_d}\, dx = \int_0^T \mu m g\, dx \rightarrow W_d = W_f$$

W_f ← کار انجام شده توسط اصطکاک خشک

از لحاظ ریاضی صفر است ولی از لحاظ فیزیکی خیر

$$x = X \sin(\omega t) \Rightarrow dx = X\omega \cos(\omega t)\, dt \quad , \dot{x} = X\omega\cos(\omega t) \qquad dx = \dot{x}\, dt$$

$$4\int_0^{\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}} \mu m g\, dx = 4\mu m g X$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c_{eq} (X\omega \cos(\omega t))^2 dt = \pi c_{eq} X^2 \omega \Rightarrow c_{eq} = \frac{4\mu m g}{\pi X \omega}$$

X ← دامنه حرکت

مثال : معادل سازی برای میرایی $F = a\dot{x}^2$.

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{(c_{eq}\dot{x})\, dx}_{\pi c_{eq} X^2 \omega} = \int_0^{2\pi} \underbrace{(a\dot{x}^2)\, dx}_{\text{جزء به جزء}} \Rightarrow c_{eq} = \frac{8 a \omega X}{3\pi}$$

Scanned by CamScanner

بنام دوست

Subject 25

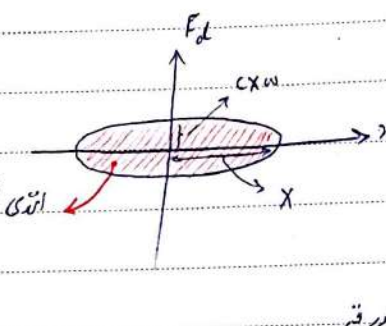
Date

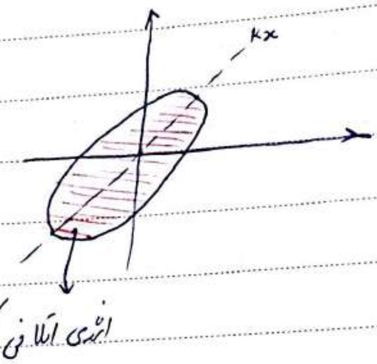
بحث درباره‌ی اتلاف انرژی :

$F_d = -c\dot{x}$

$x = X\sin(\omega t) \Rightarrow F_d = -cX\omega\cos(\omega t)$

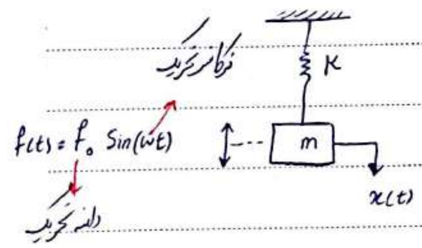
$\Rightarrow |F_d| = cX\omega\sqrt{1-\left(\frac{x}{X}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{|F_d|}{cX\omega}\right)^2 + \left(\frac{x}{X}\right)^2 = 1$





chap. 3) Forced Vibration

ارتعاشات اجباری سیستم یک درجه آزادی بدون میرایی :



سازه در ارتعاش اجباری با همان فرکانس تحریک نوسان می‌کند

$x(t) = X_0\sin(\omega t)$

هر تحریک پریودیک $\xrightarrow{\text{بسط فوریه}}$ Σ ترم‌های هارمونیک

$* \quad m\ddot{x} + kx = F_0\sin(\omega t) \quad / \quad x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$\Rightarrow x(t) = C_1\sin(\omega_n t) + C_2\cos(\omega_n t) + X_0\sin(\omega t) + X_0'\cos(\omega t)$

جایگذاری x_p در * $\Rightarrow (k - m\omega^2)X_0\sin\omega t + (k - m\omega^2)\cancel{X_0'}\cos\omega t = f_0\sin\omega t$

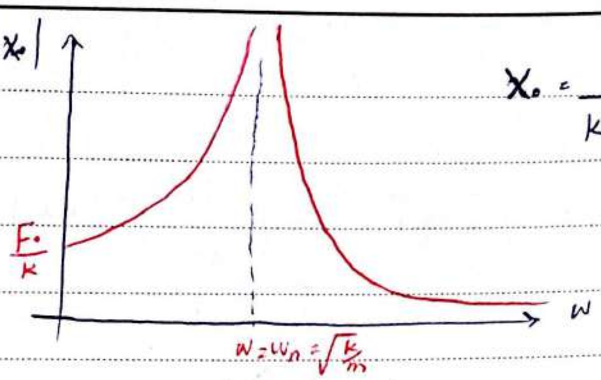
دامنه ارتعاشات اجباری (پایا) $\quad X_0 = \dfrac{F_0}{k - m\omega^2}$

PAPCO

Subject
Date

پاسخ فرکانسی :

$$X_0 = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$



در فرکانس پایین $(\omega \to 0) \Rightarrow (X_0 \to \frac{F_0}{k})$

در فرکانس بالا $(\omega \to \infty) \Rightarrow (X_0 \to 0)$

$F_0 \sin(\omega t)$ → [m-k sys] → $X_0 \sin(\omega t)$

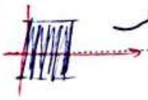
ω کوچک — دامنه محدود $\frac{F_0}{k}$

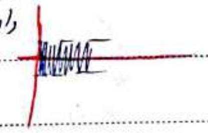
$F_0 \sin(\omega t)$ → [m-k sys] → $X_0 \sin(\omega t)$

$\omega \simeq \omega_n$ — دامنه خیلی بزرگ (∞)

$F_0 \sin(\omega t)$ → [m-k sys] → $X_0 \sin(\omega t)$

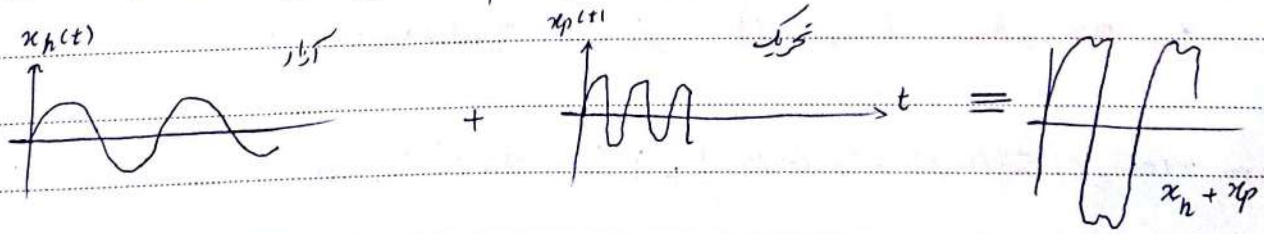
ω بزرگ — دامنه کوچک



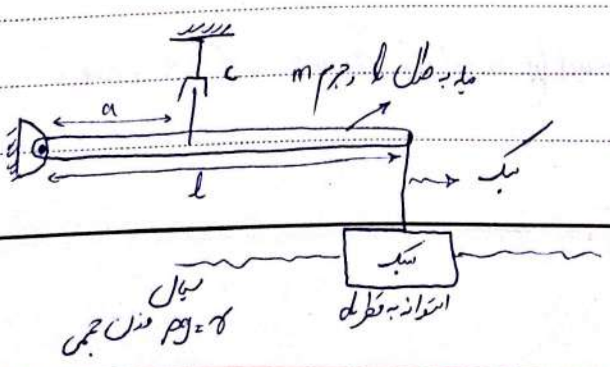


پاسخ کل : $x(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t) + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin(\omega t)$

پیدا کردن C_1 ، C_2 از شرایط اولیه ← برای این کار تحریک را هم در نظر بگیرید یعنی در کل $x(t)$ قرار دهید.



مثال : $C_{cr} = ?$



فنر ≡ آب ⟵ وزن میله را تحمل می‌کند

بر وزن در معادلات نمی‌آید

$$J\ddot{\theta},\quad F_B$$

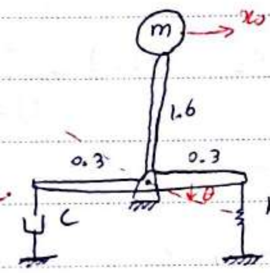
$$\Sigma M_o = I_o\ddot{\theta} \xrightarrow[Eq]{Dyn} -c(a\dot{\theta})\times a - \left[\left(\frac{\pi d^2}{4}\cdot l\theta\right)\gamma\right] l = I_o\ddot{\theta}$$

حجم داخل رفته در آب

$$\Rightarrow I_o\ddot{\theta} + Ca^2\dot{\theta} + \frac{\gamma\pi l^2 d^2}{4}\theta = 0$$

$$C_{cr} : \Delta = 0 \Rightarrow (Ca^2)^2 - I_o\gamma\pi l^2 d^2 = 0 \longrightarrow C_{cr} = \checkmark$$

سوال: $k = 1000\frac{N}{m}$, $C = 200\frac{N.s}{m}$, $m = 10\,kg$



وزن توسط فنر تحمل نمی‌شود

اگر گلوله m را 10 cm از حالت تعادل خارج کرده و رها کنیم بعد از چه مدتی اولین بار به وضعیت قائم باز می‌گردد؟

بر وزن در معادلات اثری می‌آید.

$$\Sigma M_o = I_o\ddot{\theta} \Rightarrow -k(0.3\theta)(0.3) - C(0.3\dot{\theta})(0.3) + mg(1.6\theta) = m(1.6)^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow 25.6\ddot{\theta} + 180\dot{\theta} + 740\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{7\dot{\theta}}_{2\xi\omega_n} + \underbrace{29\theta}_{\omega_n^2} = 0$$

$$\rightarrow \omega_n = 5.4\ ,\ \xi = 0.65 < 1$$

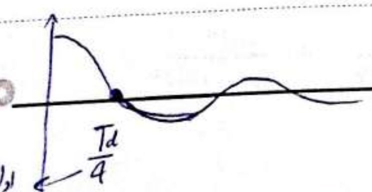
$$x(t) = X_o e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t - \varphi) \qquad (x = l\theta = 1.6\theta)$$

یا $\theta(t) = \theta_o e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t - \varphi)$

$$\begin{cases} x(0) = 0.1 \longrightarrow -X_o\sin\varphi = 0.1 \\ \dot{x}(0) = 0 \longrightarrow X_o\left[\xi\omega_n\sin\varphi + \omega_d\cos\varphi\right] = 0 \end{cases} \Longrightarrow X_o, \varphi = \checkmark$$

دو معادله و دو مجهول

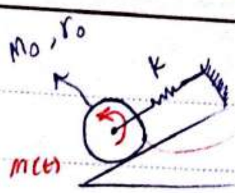
جواب مثلا ⟸ $x = 0$ (یعنی پیدا کردن اولین جا)



به نام او

Subject
Date

وزن توسط تر تحمل می‌شود.



مثال: غلتش کامل، گشتاور تحریک

$M(t) = 300 \sin 20t$

$\theta(t) = ?, \quad m_0 = 8\,kg, \quad r_0 = 1\,m, \quad J_0 = 4\,kg\,m^2, \quad k = 125\,N/m$

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot\theta(0) = 0.2\ \frac{rad}{s} \end{cases}$$

$\sum M_c = J_c \ddot\theta \Rightarrow (-k r_0 \theta) r_0 + M(t) = J_c \ddot\theta$

$J_c \ddot\theta + k r_0^2 \theta = 300 \sin(20t)$, $\omega_{\text{تحریک}} = 20\ rad/s$

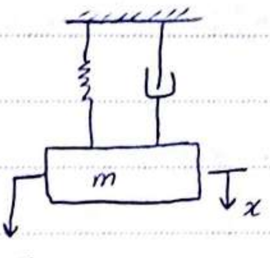
$12\ddot\theta + 125\theta = 300 \sin 20t$

$\omega_n = \sqrt{\frac{125}{12}} = 3.2 \longrightarrow \theta(t) = C_1 \sin(3.2t) + C_2 \cos(3.2t) + \frac{300}{125 - 12(20)^2} \sin(20t)$

$\theta(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0$

$\dot\theta(0) = 0.2 \longrightarrow 3.2 C_1 - 20(0.064) = 0 \longrightarrow C_1 = ✓$

ارتعاشات اجباری سیستم یک درجه آزادی با دمپینگ:



$f(t) = F_0 \sin(\omega t)$

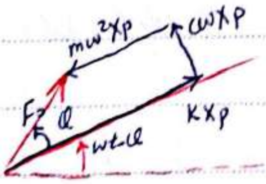
$\Rightarrow m\ddot x + c\dot x + kx = F_0 \sin(\omega t)$

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$x_h(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t - \varphi)$

$x_p(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) = X_p \sin(\omega t - \varphi_p) \rightarrow$ جایگذاری یا روش ترسیم بردارها

جایگذاری $x_p(t)$: $k X_p \sin(\omega t - \varphi_p) + c\omega X_p \cos(\omega t - \varphi_p) - m\omega^2 X_p \sin(\omega t - \varphi_p) = F_0 \sin(\omega t)$



$\Rightarrow \left[(k - m\omega^2) X_p\right]^2 + \left[c\omega X_p\right]^2 = F_0^2$

$\tan \varphi_p = \frac{c\omega X_p}{(k - m\omega^2) X_p} = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$

$\Rightarrow \boxed{X_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}}$, $\boxed{\varphi_p = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}}$

به نام دوست

Subject (29) ✓

Date

در صفحه قبل پیدا شد

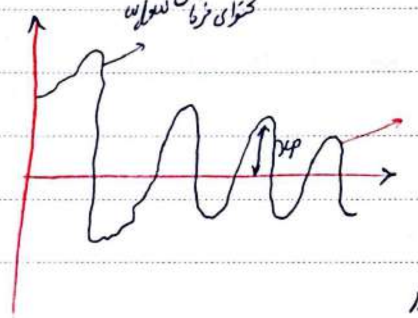
$$\Rightarrow x(t) = X_0 e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t - \varphi_0) + X_p\sin(\omega t - \varphi_p)$$

X_0, φ_0 از شرایط اولیه $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ بدست می آیند. (کل $x(t)$ را در شرایط اولیه جایگذاری می کنیم)

* در زمان های شروع (گذرا) هر دو فرکانس ω_d و ω وجود دارند. و در زمان های ماندگار ($t\to\infty$) تنها با فرکانس تحریک نوسان می کنند و داریم پاسخ ماندگار

$$x(t\to\infty) = x_{ss} = X_p$$

Steady state



در لغات بزرگتر ترسیم باید بی بعد کنید

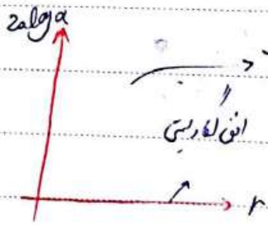
ترسیم : بی بعد سازی

$$\frac{m\omega^2}{k} = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = r^2$$

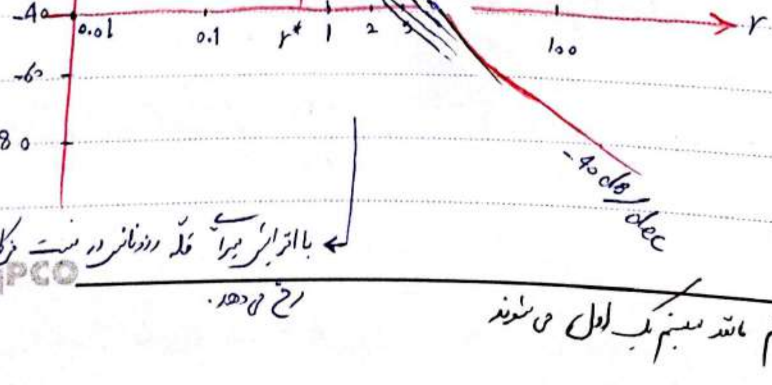
نسبت فرکانسی

$$\frac{c\omega}{k} = \xi \times 2 \times \sqrt{\frac{m}{k}}\,\omega = 2\xi r$$

$$\to \alpha = \frac{kX_p}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$



این گراف برای ξ کوچک صادق است برای $\xi < 0.707$



با افزایش میرایی قله رزونانس در نسبت فرکانسی پایین تر رخ می دهد.

① $\xi = 0$, $r \ll 1$ low freq

② $\xi = 0$, $r \simeq 1$ ($\omega \simeq \omega_n$)

③ $\xi = 0$, $r \gg 1$ (high freq)

$\hookrightarrow 20\log\alpha \simeq 20\log\frac{1}{r^2} = -40\log r$

شیب

نکته: یک سیستم مرتبه دو دارای میرایی اش را زیاد کنیم مانند سیستم یک اول می شوند

به نام او

Subject

Date

در سیستم های ارتعاشی :

1 فرکانس طبیعی (ω_n) $\qquad \omega_n = \omega_n(k, m)$

2 فرکانس طبیعی میرا شده (ω_d) $\qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

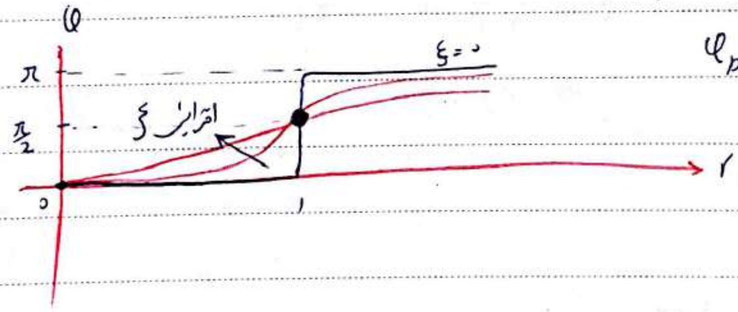
3 فرکانس تحریک (ω)

4 فرکانس قله (پیک) رزونانس (ω_r) $\qquad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

r^* : $\quad \frac{d\alpha}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_r}{\omega_n} = r^* = \sqrt{1-2\xi^2} \Rightarrow \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

$\omega_r < \omega_d < \omega_n \quad \xrightarrow{\xi \ll 1} \quad \omega_r \simeq \omega_d \simeq \omega_n$ در حالت بسیار میرا، رزونانس در $r=1$ رخ می‌دهد

قله رزونانس : $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \xrightarrow{\xi \ll 1} M_r \simeq \frac{1}{2\xi}$: sharpness (تیزی پاسخ)



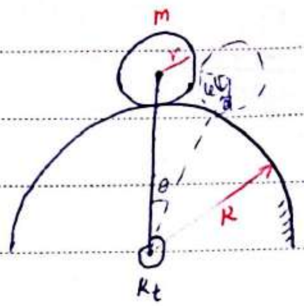
$\varphi_p = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2} = \tan^{-1}\frac{2\xi r}{1-r^2}$

at low freq : $\alpha \simeq 1 = \frac{kX_p}{F_0} \rightarrow X_p = \frac{F_0}{k}$

at $\omega \simeq \omega_r$: $\alpha \rightarrow$ large : $\frac{kX_p}{F_0} = \alpha = M_r \Rightarrow X_p = \frac{F_0 M_r}{k}$ بزرگ

at high freq : $20\log\alpha = -60 \rightarrow \alpha = 10^{-3} \Rightarrow \frac{kX_p}{F_0} =$ کوچک $\Rightarrow X_p$: کوچک

PAPCO



$r\varphi = R\theta$, $\omega = \dot{\varphi} + \dot{\theta} = \left(\frac{R}{r}+1\right)\dot{\theta}$

نسبت به یک خط ثابت در نظر گرفتم

$T = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} m r^2 \left(\left(\frac{R}{r}+1\right)\dot{\theta}\right)^2$

$U = \frac{1}{2} k\theta^2 + mg(R+r)\cos\theta$ چون در حالت تعادل فنر تغییر شکل نداده

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(T+U) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} m r^2 \left(\frac{R}{r}+1\right)^2 \ddot{\theta}\cancel{\dot{\theta}} + k\theta - mg(R+r)\sin\theta = 0$

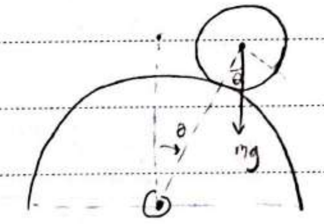
$\theta \ll \Rightarrow \frac{3}{2} m r^2 \left(\frac{R}{r}+1\right)^2 \ddot{\theta} + \underbrace{\left(k - mg(R+r)\right)}_{A}\theta = 0$

حل با روش نیوتن برای جلسه بعد

$A > 0 \rightsquigarrow$ پایدار

$A < 0 \rightsquigarrow$ ناپایدار

روش نیوتن

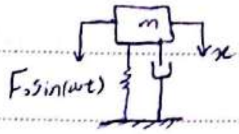


$\overset{+}{\sum \vec{M}_c} = I_c(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}) = I_c\left(\frac{R}{r}+1\right)\ddot{\theta}$

$-k\theta + mgr\sin\theta = \frac{3}{2} m r^2 \left(\frac{R}{r}+1\right)\ddot{\theta}$

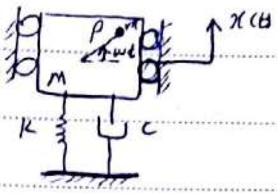
TA کلاس

1) مسئله پایه



$$X_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$$

2) unbalance mass ⟶ نابرابری دوار



M : جرم کل مجموعه

m : جرم نابرابری ⟹ دامنه ارتعاش ماندگار ؟ (X_p)

ω : ثابت

$$\Sigma F_x = (M-m)\ddot{x} + m\frac{d^2}{dt^2}\left(x+\rho\sin(\omega t)\right)$$

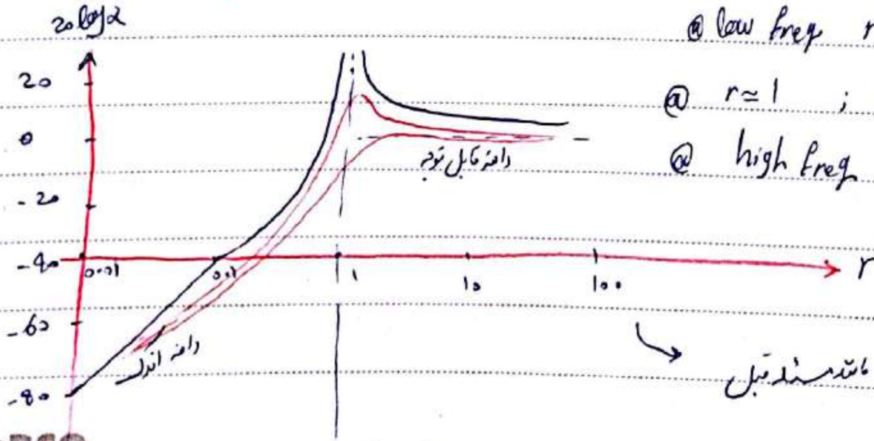
$$\Rightarrow -kx - c\dot{x} = (M-m)\ddot{x} + m\left(\ddot{x} - \rho\omega^2\sin(\omega t)\right)$$

$$\Rightarrow M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\rho\omega^2 \sin(\omega t)$$

در مقایسه با مسئله ① داریم $\quad F_0 = m\rho\omega^2$

$$x_p = \frac{m\rho\omega^2/k}{\sqrt{\left(\frac{k-M\omega^2}{k}\right)^2+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} \xrightarrow{\text{بی بعد سازی}} \frac{k}{M}=\omega_n^2, \quad \frac{\omega}{\omega_n}=r \Rightarrow \frac{X_p}{\rho} = \frac{\frac{m}{M}\frac{\omega^2}{k}M}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$$\Rightarrow (*) \quad \underbrace{\frac{X_p}{\rho}\frac{M}{m}}_{\alpha} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$



@ low freq $r \ll 1$: $20\log\alpha \simeq 20\log r^2 = 40\log r$

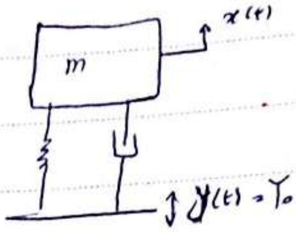
@ $r \simeq 1$; $20\log\alpha = \infty$

@ high freq : $r \gg 1$: $20\log\alpha = 0$

↳ مانند مسئله قبل

medium and high pass filter

3) Support motion → تحریک پایه



$y(t) = Y_0 \sin(\omega t)$ ← تحریک پایه داریم

پاسخ فرکانسی ؟!

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y}) = m\ddot{x}$$

$$\rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$ (حل در دستگاه مطلق)

در دستگاه نسبی: $m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = mY_0\omega^2 \sin\omega t \Longrightarrow$ مانند مسئله اول و دوم فقط $F_0 = mY_0\omega^2$

$$\underset{\text{نسبی ماندگار}}{Z_p} \xrightarrow{\text{مقایسه با *}} \frac{Z_p}{Y_0} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (**)$$

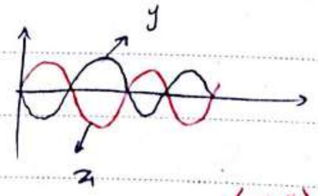
$$\Rightarrow \underset{\text{ماندگار}}{X_p} = Y_0 + Z_p$$

$$\text{if } r \ll 1 \Rightarrow \frac{Z_p}{Y_0} = r^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \Rightarrow Z_p\omega_n^2 = Y_0\omega^2$$

شتاب سنج ← دامنه شتاب نسبی — دامنه شتاب تحریک ← زمین

کاربرد در زلزله‌سنج ← در کتاب خوانده شود

$$\text{if } r \gg 1 \quad \begin{cases} \dfrac{Z_p}{Y_0} = 1 \\ \varphi = 180 \end{cases}$$



از (**)

$y(t) = Y_0 \sin\omega t \quad , \quad z(t) = z_h(t) + Z_p \sin(\omega t - \varphi) \rightarrow x(t) =$ ✓

به نام دوست

34 ✓

Subject

Date

روش مطلق :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky = Y_0\left(k\sin(\omega t) + c\omega\cos(\omega t)\right)$$

$$= \underbrace{\boxed{Y_0\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}}_{F_0}\sin(\omega t - \psi_0) \quad , \quad \psi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k}\right)$$

① در مقایسه با مسئله $\quad X_p = \dfrac{Y_0\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \quad , \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$

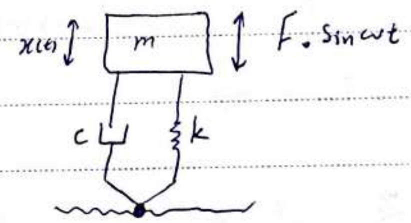
به علت تحریک

$$\Longrightarrow x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{0} + X_p\sin(\omega t - \varphi - \psi_0)$$

عقب افتادن به علت دمپر

(مهم است!!) بی بعد کردن : $\quad \dfrac{X_p}{Y_0} = \dfrac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$

4) Transmitted force



F_T منتقل شده به زمین ؟

$\dfrac{F_T}{F_0} = T.R$ ⤷ transmitted ratio

بدون در نظر گرفتن فاز

$$|F_T| = |c\dot{x} + kx| = |c\omega X_p\cos(\omega t) + kX_p\sin(\omega t)|$$

از مسئله ① $\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0\sin(\omega t) \\ X_p = \dfrac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \end{cases}$ اندازه

چون با اندازه کار داریم فعلاً فاز را نمی‌نویسیم و نیاز نداریم

$x = X_p\sin(\omega t) \quad , |F_T| = X_p\sqrt{k^2+(c\omega)^2}$

$$T.R = \frac{F_T}{F_0} = \frac{X_p\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{X_p\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

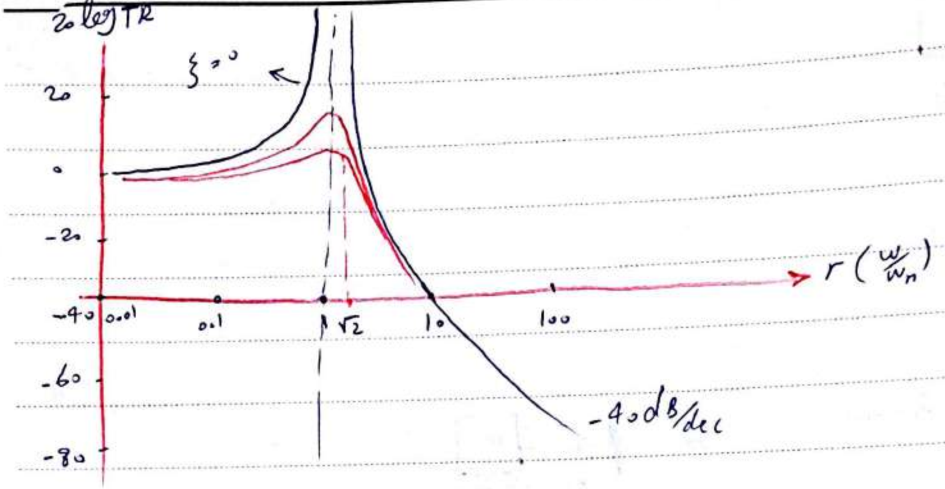
$\zeta = 0$

رسم نمودار $\quad r \ll 1 \rightsquigarrow 20\log T.R \simeq 0$

$r \simeq 1 \rightsquigarrow$ رزونانس

$r \gg 1 \rightsquigarrow 20\log T.R = 20\log\dfrac{1}{r^2} = -40\log r$

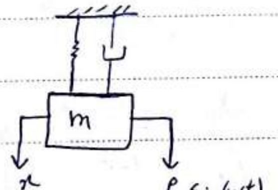
Subject ۳۵ بنام او
Date



$r \simeq \sqrt{2}$ with $\xi \neq 0$ ~ مستقل از ξ

$20 \log T.R \simeq 0$

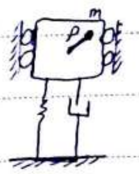
نوع اول :



$$X_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$$

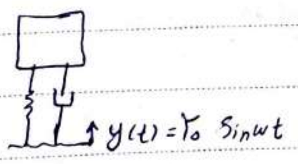
$$\frac{kX_p}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \quad , \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{2\xi r}{1-r^2}$$

نوع دوم :

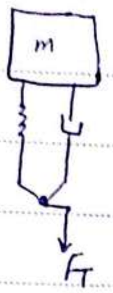


$F_0 = m\rho\omega^2$

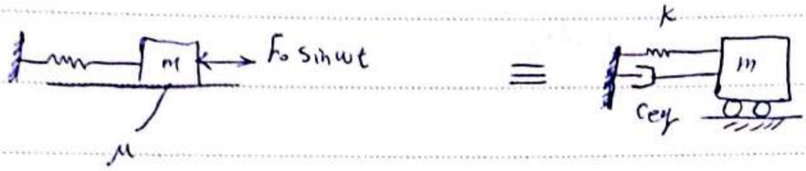
نوع سوم :



نوع چهارم :



نوع پنجم :



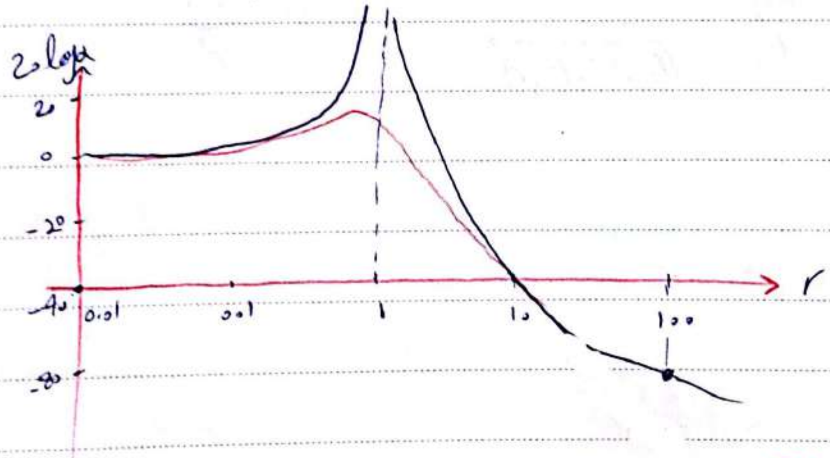
$$c_{eq} = \frac{4\mu mg}{\pi X \omega}$$

ادامه کار مانند مسئله نوع اول : $X_p = \dfrac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c_{eq}\omega)^2}}$

$$X_p^2 = \frac{F_0^2}{(k-m\omega^2)^2+\left(\frac{4\mu mg}{\pi X_p}\right)^2} \Rightarrow \left[X_p(k-m\omega^2)\right]^2+\left(\frac{4\mu mg}{\pi}\right)^2 = F_0^2$$

$$\Rightarrow X_p = \frac{\sqrt{F_0^2-\left(\frac{4\mu mg}{\pi}\right)^2}}{k-m\omega^2} \Rightarrow \frac{4\mu mg}{\pi F_0} = q \Rightarrow \frac{kX_p}{F_0} = \frac{\sqrt{1-q^2}}{1-r^2}$$

تنها r و q داریم که
حل r, q داریم



$$r \gg 1 \rightarrow 20\log a = 20 \log \frac{1}{r^2} = -40 \log r \quad \xrightarrow[r=100]{r=10}$$

Subject به نام او
Date (37)

مثال 1 : در مسئله نوع دوم

$X_{res} = 0.6\ cm$

$X_{\text{ماندگار}} = 0.08\ cm \Leftarrow @\ r \gg 1 \quad \xi = ?$

$$(*)\ \frac{mX}{m\rho} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \quad \begin{cases} @\ r=1 \rightarrow \dfrac{m(0.6)}{m\rho} = \dfrac{1}{2\xi} \\ @\ r \gg 1 \rightarrow \dfrac{m(0.08)}{m\rho} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{0.6}{0.8} = \frac{1}{2\xi} \Rightarrow \xi \simeq 0.067$$

در امتحان حتما باید به این معادلات برسید

مثال 2 : ماشین دوار با جرم 100 kg با سرعت 3000 rpm در حال کار است. اگر نیروی نامیزان 350 N باشد و سختی ماشین $K = 700\ \frac{kN}{m}$ و $\xi = 0.2$ باشد، مقادیر X_p ماندگار، T.R نسبت انتقال، و F_T نیروی منتقل به پایه ماشین را بیابید.

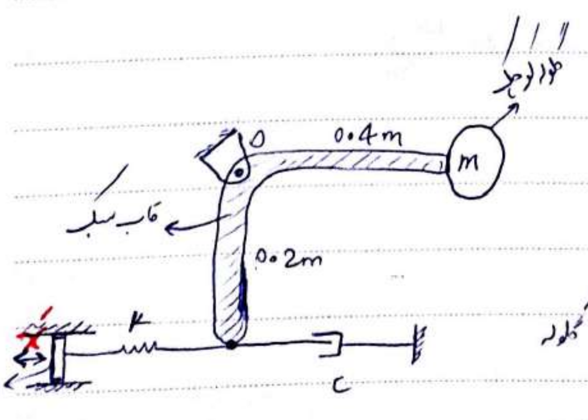
$$w = 3000\ rpm \times \frac{2\pi}{60} = 314\ \frac{rad}{s} = 50\ Hz$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{7000} = 83.7\ \frac{rad}{s} \qquad r = \frac{w}{w_n} = \frac{314}{84} = 3.75$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \frac{100\,X_p}{m\rho_{350}} = \frac{\frac{w^2}{w_n^2}}{\sqrt{(1-3.75^2)^2+(2\times0.2\times3.75)^2}} \rightarrow X_p = \checkmark$$

نوع دوم $T.R = \frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} = 0.14 \checkmark \Rightarrow 0.14 = \frac{F_T}{350} \Rightarrow F_T = 49\ N$

مثال 3 :



$x' = 30 \sin t\ (mm)$

$m = 15\ kg$

$k = 2500\ \frac{N}{m}$

$X_{ss} = 20\ mm$

مطلوب است c !

نوع مسئله ما Support motion است

Subject

Date

وزن گلوله وارد نمی‌شود . $\Rightarrow \Sigma M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow -c(0.2\dot{\theta})(0.2) - k(0.2\theta - x')(0.2) = I_o\ddot{\theta}$

$I_o = m(0.4)^2 = 2.4\ kgm^2 \overset{*}{\Rightarrow} 2.4\ddot{\theta} + 0.04c\dot{\theta} + 100\theta = 500\left(\frac{30}{1000}\right)\sin t$

ω تحریک $= 1\ \frac{rad}{s}$

اشتباه نکنید

$\omega_n = \sqrt{\frac{100}{2.4}} = 6.45\ \frac{rad}{s} \qquad r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1}{6.45} = 0.15$

K مقایسه با مسئله نوع اول

ماندگار $\frac{100\,\theta_p}{15} = \frac{1}{\sqrt{(1-0.15^2)^2 + (2\xi(0.15))^2}} \xrightarrow{\text{حل با } \xi} \xi = \checkmark$

F_o

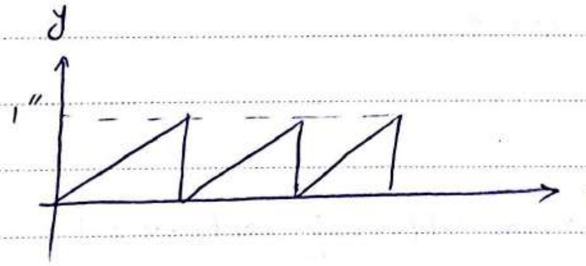
$20mm = X_{ss} = 0.4\theta_{ss} = 0.4\theta_p \rightarrow \theta_p = 0.05\ rad$

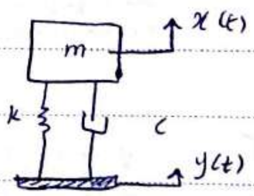
$\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \Longrightarrow c = \checkmark$

$0.04c \quad 2.4 \quad 100$

مقادیر را از معادله * بخوانید

مثال 3 :





$k = 40\ \frac{lb}{in} \quad , m = 10\ \frac{lb.s^2}{in} \qquad c = 20\ \frac{lb.s}{in}$

$y = \frac{a_o}{2} + \Sigma a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$

$a_o =$

$a_n =$

$b_n =$

برای دوست

Subject 39

Date

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(n\omega t)$$

$$\dot{y} = -\sum \left(\frac{\omega}{\pi}\right) \cos(n\omega t)$$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{y}) + k(x-y) = 0 \Longrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\left[-\sum\left(\frac{\omega}{n}\right)\cos(n\omega t)\right] + k\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum\frac{1}{n}\sin(n\omega t)\right]$$

$$= \frac{k}{2} - \frac{1}{\pi}\sum\frac{1}{n}\sqrt{k^2+n^2c^2\omega^2}\ \sin(n\omega t - \varphi) \quad , \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{cn\omega}{k}\right)$$

$$X(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum\left(\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{\frac{1+(2\xi rn)^2}{(1-n^2r^2)^2+(2\xi rn)^2}}\ \sin(n\omega t - \psi) \quad , \psi = \tan^{-1}\left(\frac{2n\xi r}{1-n^2r^2}\right) - \varphi$$

$$\Longrightarrow x(t) = 1 - 0.396\sin(6.24t - 7.1^\circ) - 0.225\sin(12.5t - 26.5)\cdots$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \ , \ r = \frac{\omega}{\omega_n} = \pi \quad , \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \ \mathrm{rad/s} \qquad \xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{2}{2\sqrt{\ }} = 0.5$$

P4PCO

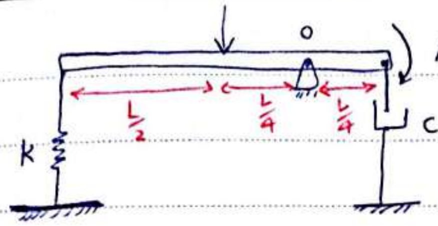
برنامه درست

(4-4) ✓

تمرای

$F_0 \sin(\omega t)$

① ✓

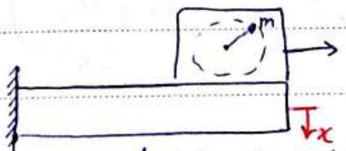


$$\Sigma M_o = I_o \ddot{\theta} \Rightarrow \frac{7}{48} m L^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{16} c l^2 \dot{\theta} + \frac{9}{16} k l^2 \theta = \left(M_0 - F_0 \frac{L}{4}\right) \sin(\omega t)$$

$\Longrightarrow$ برای حل معادله $\theta = A e^{i(\omega t - \varphi)}$ را جایگذاری می‌کنیم $\Rightarrow A = \checkmark \,,\ \varphi = \checkmark$

$\rightarrow \theta = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ روش دوم حل معادله جایگذاری

② ✓

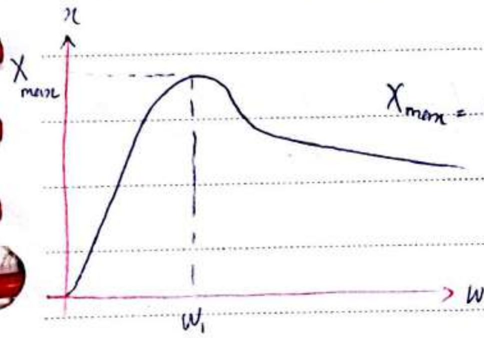


$M = 40\ kg$

$me = 0.1\ kg\,m \quad , \omega = 1000\ rpm$

$l = 1.2 ,\ E = 2 \times 10^{11}\ N/m^2$

$I = 1.3 \times 10^{-6}\ m^4$



$X_{max} = 20.3\ mm$

$$\Lambda = \frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad , r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

ξ مجهول $\Rightarrow \dfrac{d\Lambda}{dr} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 1 - r^2 + 2\xi^2 r^2 = 0 \Longrightarrow r^2 = \dfrac{1}{1 - 2\xi^2} \rightarrow \xi < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

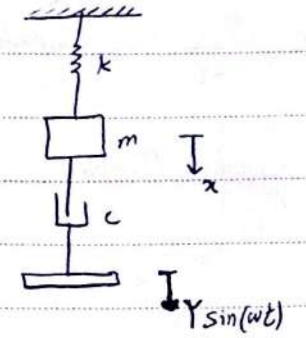
جایگذاری در Λ

$$\Lambda_{max} = \frac{MX_{max}}{me} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \xi = \begin{cases} 0.0617 \ \checkmark \\ 0.999 \end{cases}$$

$$k = \frac{3EI}{l^3} = 4.51 \times 10^5\ N/m \rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.986$$

به نام او
(41)

Subject
Date



$$W(r,\xi) = \frac{X}{Y} = ?$$

$$W_{max} = ?$$

$$m\ddot{x} + kx + c(\dot{x} - \dot{y}) = 0$$

$$\longrightarrow x = X e^{i(\omega t - \varphi)}$$

جایگذاری
$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \left[(k - m\omega^2) + ic\omega\right] X e^{-i\varphi} = cYi\omega \Longrightarrow$$ نرم بگیرید

$$\Longrightarrow \frac{X}{Y} = \frac{c\omega}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{2\xi r}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\frac{dw}{dr} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow r = 1 \overset{\text{جایگذاری}}{\Longrightarrow} W_{max} = 1$$

پایان حل

viscous damping :

بررسی مطالب مانده 5 ← درامتحان نمی آید

پاسخ اجباری
$$\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

معادله
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \sin\omega t \qquad \begin{cases} f(t) = f_0 e^{j\omega t} \\ x(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$ قسمت موهومی این را می‌گیریم

$$\Rightarrow \left[cj\omega + (k - m\omega^2)\right] X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = f_0 e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow X_0 = \frac{f_0}{k - m\omega^2 + jc\omega} e^{-j\varphi} \rightarrow \text{lag due to damping}$$

amplitude of complex form : $\alpha = \dfrac{kX_0}{F_0} = \dfrac{1}{1 - r^2 + 2j\xi r}$

$$Im(\alpha) = \frac{-2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \qquad Re(\alpha) = \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

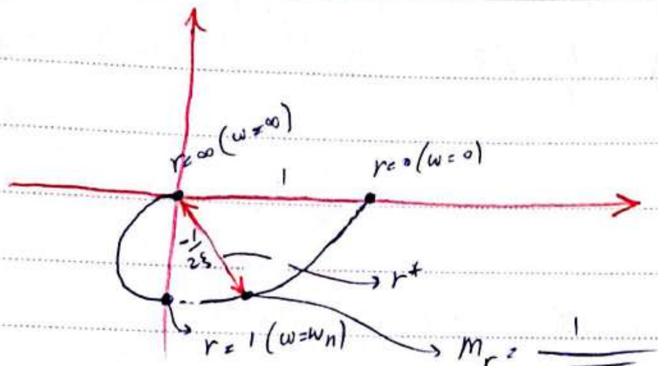
P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

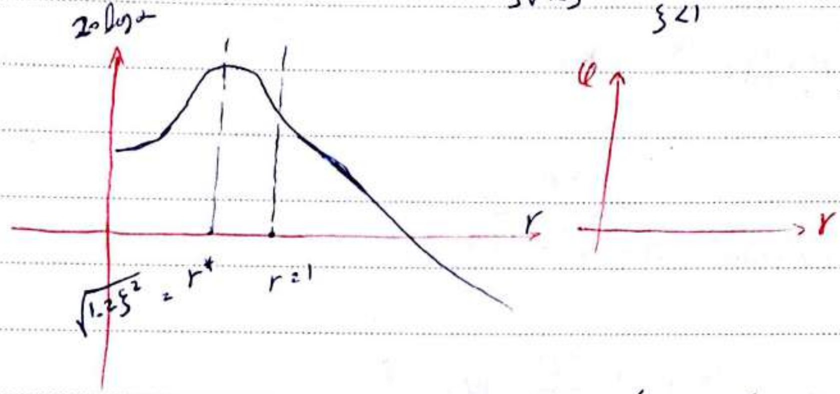
$r=1$ resonance $\to |\alpha_{max}| = \frac{1}{2\xi}$ ⇝ sharpness

: Nyquist Diagram



$\to M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} > \frac{1}{2\xi}$
$\xi<1$

: Bode Diagram



میرایی سازه‌ای :　　میرایی : ویسکوز ، خشک ، سازه‌ای

در کاربرد بسیاری از سازه‌ها مشاهده شده که میزان اتلاف انرژی در سازه متناسب با X^2 است و مستقل از فرکانس تحریک است
(البته به صورت صریح به فرکانس وابسته نیست)

$$W_{struc.damp} = \alpha X^2 \equiv \pi C_{eq} X^2 \omega$$

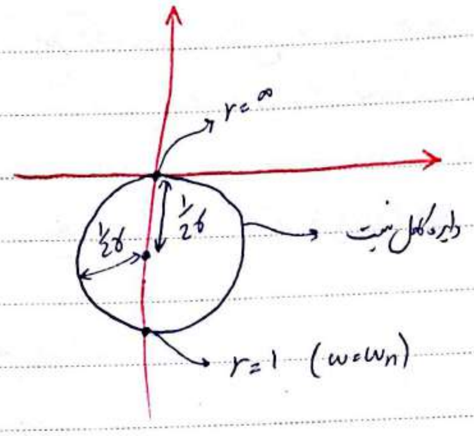
$$\Rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{\alpha}{\pi \omega}}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + C_{eq}\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \Rightarrow (k-m\omega^2)X_0 e^{j(\omega t-\varphi)} + j\frac{\alpha}{\pi}X_0 e^{j(\omega t-\varphi)} = F_0 e^{j\omega t}$$

$$X_0 = \frac{F_0}{k-m\omega^2+j\frac{\alpha}{\pi}} \Rightarrow \frac{kX_0}{F_0} = \frac{1}{1-r^2+j\gamma}, \quad \frac{\alpha}{\pi k} = \gamma$$

$$\to Re = \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2+\gamma^2} \qquad Im = \frac{-\gamma}{(1-r^2)^2+\gamma^2} \Rightarrow Re^2 + \left(Im + \frac{1}{2\gamma}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\gamma}\right)^2$$

Subject بنام دوست (43)
Date

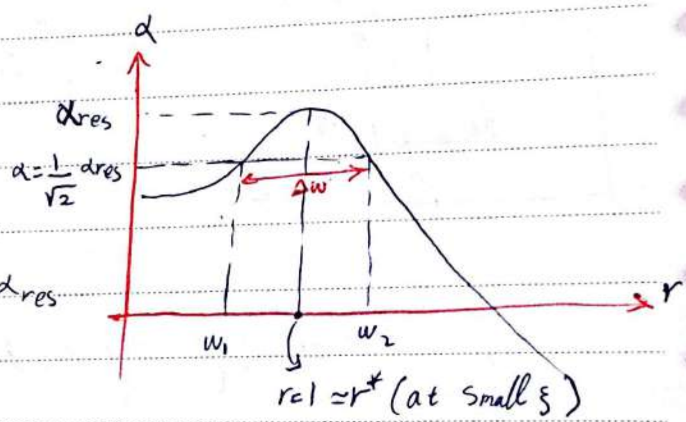


در حالت : Viscous

$$(*)\quad \frac{KX}{F_0} = |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$r=1,\quad \alpha_{res} = \frac{1}{2\xi}$$

half power : $x = \frac{1}{\sqrt{2}} X_{res}$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{res}$



Solve $*$ for $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{res} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\xi}$

$$\Rightarrow r^2 = 1-2\xi^2 \pm 2\xi\underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{1} \leftarrow \xi \ll 1$$

$$r^2 = 1 \pm 2\xi \begin{cases} r_1=\omega_1 \\ r_2=\omega_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_n^2} = 4\xi = \frac{2(\omega_2-\omega_1)}{\omega_n} = \frac{2\,\Delta\omega}{\omega_n}$$

قرائت از روی نمودار

حل پایه

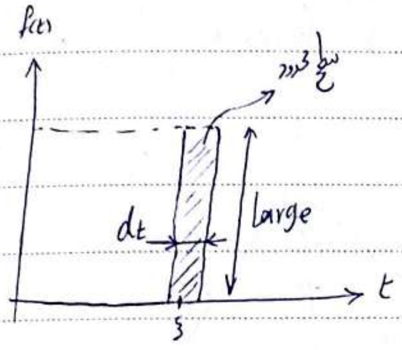
$$\frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\xi} = Q$$

chapter 4 : Transient Vibration

~> نوع تحریک به صورت اعمال در بازه زمانی محدود و مشخص است ، حالت هارمونیک ندارد

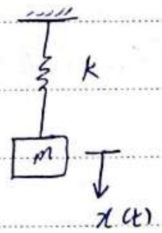
پایه این نوع تحریک های گذرا ، تحریک ضربه Impulse است . اعمال نیروی نسبتاً بزرگ در مدت زمان اندک به طوری که حاصل ضرب آن ها عددی محدود است .

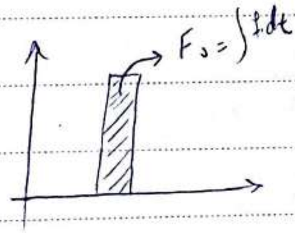
ضربه واحد : $\delta(t-\xi) = \begin{cases} 0 & t \neq \xi \\ 1 & t = \xi \end{cases}$



$$\int_0^\infty f(t)\,\delta(t-\xi)\,dt = f(\xi)$$

مثال : در موقعیت تعادل ضربه با دامنه F_0 به سیستم مقابل زده می شود ، پاسخ سیستم را بیابید :





$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\rightarrow x(t) = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0) = 0 \longrightarrow C_2 = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \longrightarrow \end{cases}$$

؟ ضربه - تکانه : $m\dot{x}(0) = F_0 \longrightarrow \dot{x}(0) = \frac{F_0}{m} \longrightarrow C_1 = \frac{F_0}{m\omega_n}$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\sin(\omega_n t) \xrightarrow{F_0 = 1}$$

پاسخ به ضربه واحد : $\boxed{h(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin(\omega_n t)}$

پاسخ سیستم m-k به ضربه واحد

$$G_1 + \int F\,dt = G_2$$

مثال دو : همان مثال قبل با میرایی ، $\xi < 1$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \longrightarrow x(t) = X_0 e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t - \varphi_0)$$

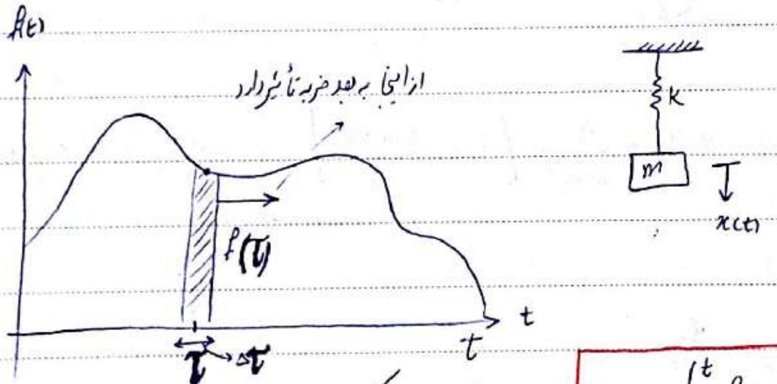
$$x(0) = 0 \longrightarrow \varphi_0 = 0$$

$$\dot{x}(0) = \frac{F_0}{m} \longrightarrow X_0 = \frac{F_0}{m\omega_d}$$

$$\longrightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t) \xrightarrow{F_0 = 1}$$

پاسخ سیستم m-k-c به تحریک ضربه واحد $h(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_n \omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t)$

علت بحث فوق : اگر پاسخ به ضربه را داشته باشیم پاسخ به هر تحریک گذرای دلخواه دیگر را می‌توان یافت

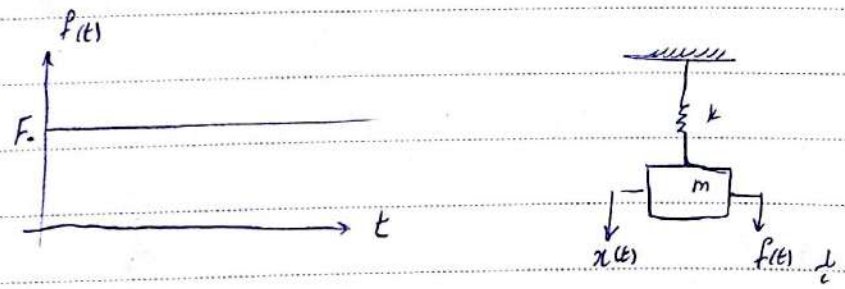


or convolution Integral
Duhammel "

$$\boxed{x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau}$$

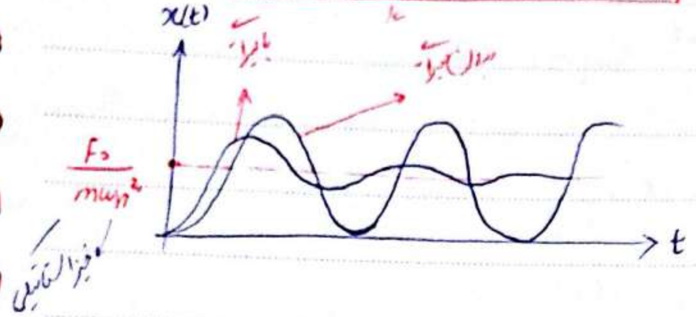
پاسخ سیستم به تحریک با دامنه $f(\tau)$

مثال : تحریک پله (step)

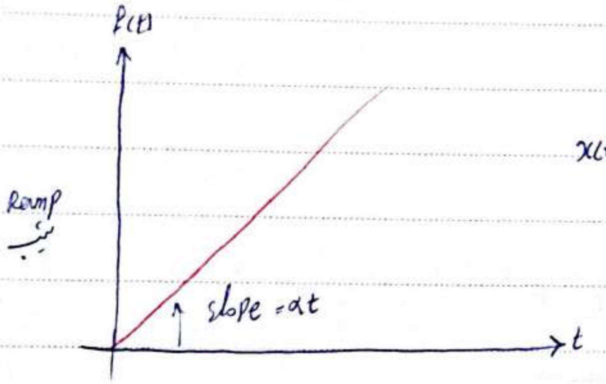


$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_n} \sin(\omega_n(t-\tau))\, d\tau = \frac{-F_0}{m\omega_n^2} \cos \omega_n(t-\tau) \Big|_0^t$$

پاسخ سیستم m-k به تحریک پله $\Rightarrow$ $$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1 - \cos\omega_n t\right]}$$ حفظ شود



مثال:



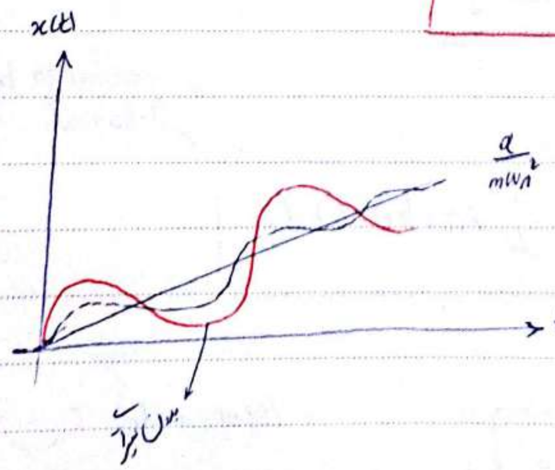
$$x(t) = \int_0^t \alpha\tau \,\frac{1}{m\omega_n}\, \sin(\omega_n(t-\tau))\, d\tau$$

$$= \frac{\alpha}{m\omega_n}\int_0^t \tau \,\sin\omega_n(t-\tau)\, d\tau$$

انتگرال جزء به جزء

$= \ldots$ $\Rightarrow$ $$\boxed{x(t) = \frac{\alpha}{m\omega_n^2}\left[t - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right]}$$ پاسخ m-k سیستم به رمپ

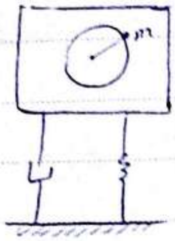
حفظ شود



بنزاد ثانی

Subject ۴۷ √
Date

√ (1)



$me = 0.2\ kg\,m \quad M = 80\ kg \quad X_{max} = 3.1\ mm \quad , \zeta = 0.07 \quad , 300 < \omega < 600\,rpm$

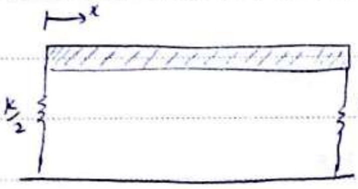
$$X = \frac{\left(\frac{me}{M}\right) r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} < X_{max}$$

$$\rightarrow \left(X_{max}^2 - A^2\right) r^4 + 2 X_{max}^2 \left(2\zeta^2 - 1\right) r^2 + X_{max}^2 > 0$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow r^2 > r_2^2 \quad \text{،} \quad r^2 < r_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{M\omega^2}{k} > r_2^2 \qquad \frac{M\omega^2}{k} < r_1^2$$

$$\Rightarrow k > 5.64 \times 10^5 \quad \text{،} \quad k < 1.52 \times 10^4$$



(2)

$\ddot{y} = \ddot{x}_g = A \cos \omega t$

$\vec{\ddot{x}_g} = A \cos(\omega t)$

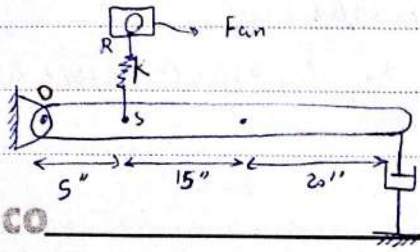
$$\dot{y} = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t) + B_1 \quad / \quad y = \frac{-A}{\omega^2} \cos \omega t + B_1 t + B_2$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0 \rightarrow y(t) = \frac{-A}{\omega^2} \cos \omega t$$

$$\rightarrow m\ddot{x} + k(x-y) = 0 \rightarrow m\ddot{z} + kz = -m\ddot{y} = -mA\cos(\omega t)$$

$$z(t) = \frac{-mA\cos(\omega t)}{k - m\omega^2} \quad , \quad x(t) = z(t) + y(t)$$

$$x(t) = -\left(\frac{m}{k - m\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\right) A \cos(\omega t)$$



$\omega = 750\,rpm \quad , m = 50\ lb$

(3)

$k = 200\ \frac{lb}{in} \quad e = 0.1\ in \quad , C = 40$

بنام او

ابتدا فرض می‌کنیم فن ثابت است

$F_0 = me\omega^2 = 89.8205\ lb \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_{fan}}} = 39.3197\ rad/s$

$x(t) = \dfrac{F_0 \cos(\omega t)}{|k - m\omega^2|} = 0.1334 \cos(78.54t)\ in \longrightarrow x(t) = X(t)$ درواقع حرکت پایه است

$\Sigma M_o = I_o \ddot{\theta} \quad , \quad I_o = 141.2612\ lb\,in\,s^2$

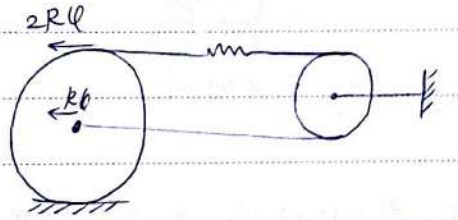
$\rightarrow I_o \ddot{\theta} + k(5\theta - x(t)) + c \times 4_0 \dot{\theta} = 0$

$\rightarrow 141.2612\ddot{\theta} + 200(5\theta - 0.1334 \cos\omega t) + 160\dot{\theta} = 0$

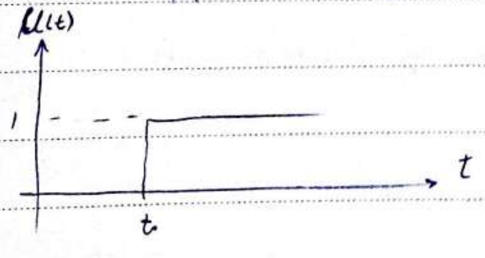
$\rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$

نکته :

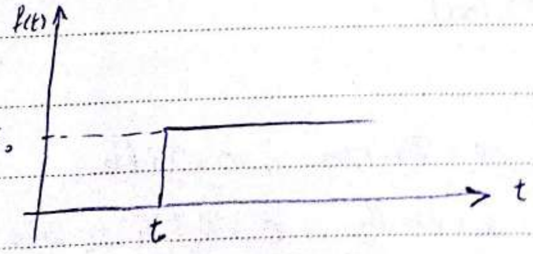
$\Delta_{فنر} = 3R\theta$



$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$: unitery function



مثال :

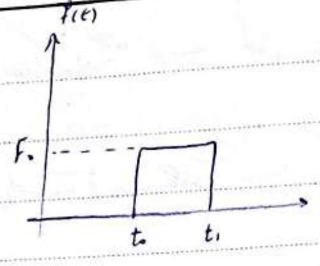


$f(t) = F_0\, u(t-t_0)$

$x(t) = \dfrac{F_0}{m\omega_n^2}\left(1 - \cos(\omega_n(t-t_0))\right) u(t-t_0)$

$= \dfrac{F_0}{m\omega_n^2} \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 - \cos(\omega_n(t-t_0)) & t \geq t_0 \end{cases}$

مثال : پاسخ سیستم m-k به تحریک مقابل



$$f(t) = F_0\left[U(t-t_0) - U(t-t_1)\right]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\left(1-\cos\omega_n(t-t_0)\right)u(t-t_0) + \left(1-\cos\omega_n(t-t_1)\right)u(t-t_1)\right]$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\begin{cases} 0 & t<t_0 \\ 1-\cos\omega_n(t-t_0) & t_0<t<t_1 \\ \cos\omega_n(t-t_1) - \cos\omega_n(t-t) & t>t_1 \end{cases}$$

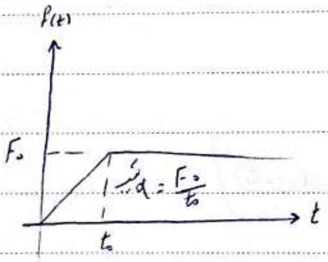
به عنوان نمونه :

for $t_0<t<t_1$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} F_0 \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \checkmark$$

مثال :

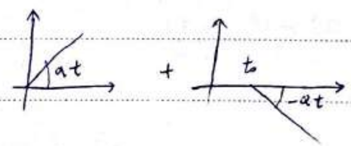
$$f(t) = \alpha(t-0)U(t-0) - \alpha(t-t_0)U(t-t_0)$$



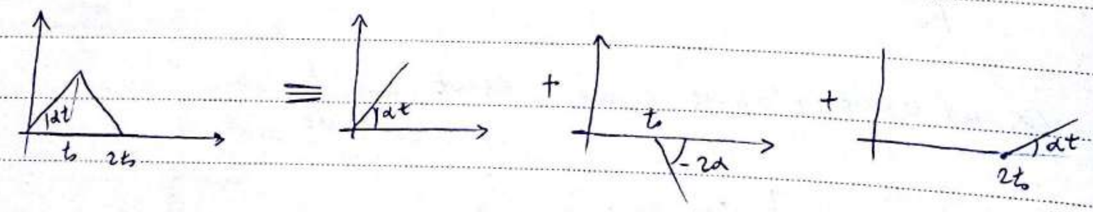
$$x(t) = \frac{\alpha}{m\omega_n^2}\left[\left[t-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right]u(t) - \left[(t-t_0) - \frac{\sin\omega_n(t-t_0)}{\omega_n}\right]u(t-t_0)\right]$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\alpha}{m\omega_n^2}\begin{cases} t-\dfrac{\sin\omega_n t}{\omega_n} & t<t_0 \\ t_0 + \dfrac{\sin\omega_n(t-t_0)}{\omega_n} - \dfrac{\sin\omega_n t}{\omega_n} & t>t_0 \end{cases}$$

$\equiv$



مثال :

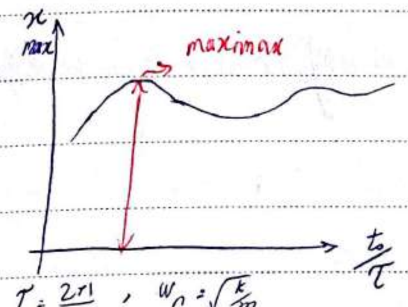


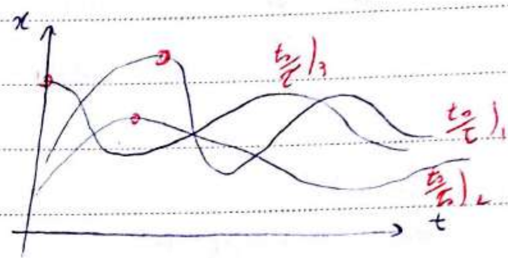
Subject

Date

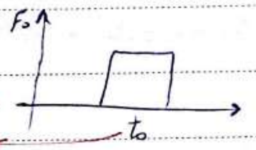
Shock Response Spectrum (SRS): طیف پاسخ شوک ← برای زمان های بعد از شوک مهم است

هدف این است که برای دوره های گوناگون تحریک (t_0) سیستم ببینیم که X_{max} (قله پاسخ) یا متناظراً $\ddot{X}_{max}$ چه خواهد بود.



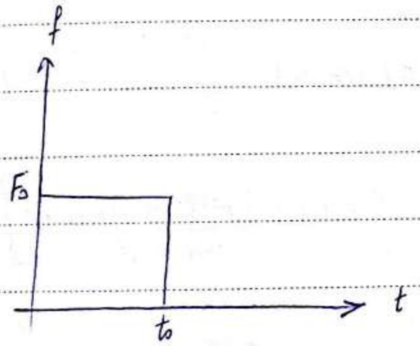


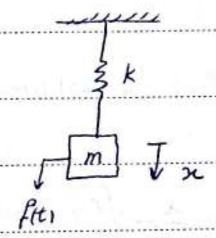
$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$



کوچک و بزرگ کردن t_0

مثال :





$$f(t) = F_0\left[u(t) - u(t-t_0)\right]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[(1-\cos\omega_n t)u(t) - (1-\cos\omega_n(t-t_0))u(t-t_0)\right]$$

چون پاسخ طیف شوک بعد از تحریک مهم است : $t > t_0 \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\cos\omega_n(t-t_0) - \cos\omega_n t\right]$

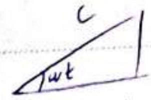
$$\Rightarrow \frac{kx}{F_0} = \alpha = \cos\omega_n(t-t_0) - \cos\omega_n t$$

$$\alpha = \cos\omega_n t \cos\omega t_0 + \sin\omega t \sin\omega t_0 - \cos\omega t \rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \sin\omega t\left[1 - \cos\omega t_0\right] + \cos\omega t \sin\omega t_0 = 0$$

Subject ۱۱ آبان

Date 51



$\sin\omega t_0 = b$ $\quad \rightarrow \sin\omega t = \frac{b}{c}$ $\quad / \cos\omega t = \frac{a-1}{c}$

$\cos\omega t_0 - 1 = a - 1$

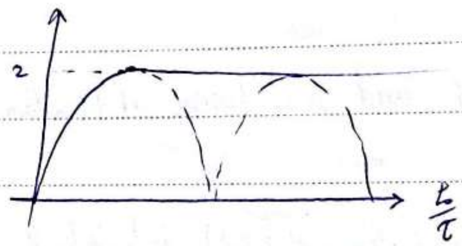
$$a_{max} = \frac{a-1}{c}a + \frac{b}{c}\cdot b - \frac{a-1}{c} = \frac{a-1}{c}(a-1) + \frac{b^2}{c}$$

$$\alpha_{max} = \frac{(a-1)^2 + b^2}{c} = c \rightarrow a_{max} = \frac{kX_{max}}{F_0} = \sqrt{(\cos\omega t_0 - 1)^2 + \sin^2\omega t_0}$$

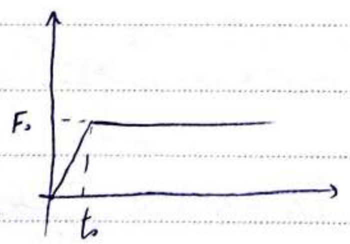
$$= \sqrt{2(1-\cos\omega t_0)} \quad , \left|\frac{kX_{max}}{F_0}\right| = \left|2\sin\frac{\omega t_0}{2}\right| , \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$= \left|2\sin\left(\pi\frac{t_0}{\tau}\right)\right|$$

$$\rightarrow X_{max} = \frac{2F_0}{k}$$

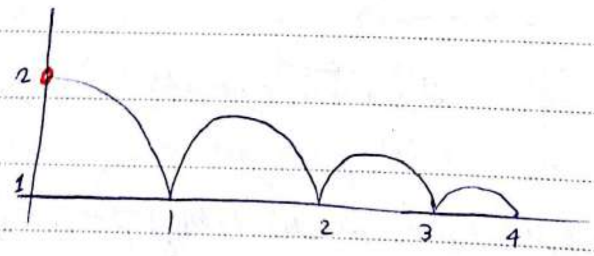


شکل ۸



$$\frac{kX_{max}}{F_0} = 1 + \frac{1}{\omega_n t_0}\left|2\sin\left(\pi\frac{t_0}{\tau}\right)\right|$$

$\omega_n = \frac{2\pi}{\tau}$



$\frac{kX_{max}}{F_0} = 2 \quad @ \; t = 0$

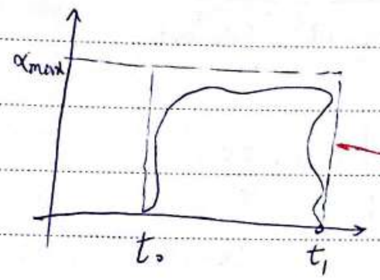
$\alpha_{max} = 1 + 1 = 2$

$\frac{t_0}{\tau_1} \rightarrow 0$

P4PCO

Shock Isolation ؛ سیستم را گارانتی دامنه مناسب پاسخ $|\alpha_{max}| < 1$

EX.1 → $\left|2\sin\left(\pi \frac{t_0}{\tau}\right)\right| < 1 \rightarrow \frac{t_0}{\tau} < \frac{1}{6}$



shock iso : $|\alpha_{max}| < 1$ ✓

ضریب اطمینان بالا و البته هزینه بیشتر در طراحی سازه

chp 5 : 2 DoF and more degree of freedom system

مسائلی که در MDoF مطرح می‌شوند درجات آزادی 2 و یا بیشتر دارند (درجه آزادی: تعداد جابجایی که به طور مستقل بیان کننده کامل یک حرکت هستند / قید هندسی بین آنها نداریم)

* سیستم با n درجه آزادی دارای n فرکانس طبیعی و n شکل مد هستند $\omega_i , \varphi_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$

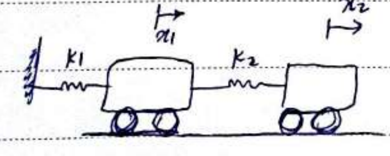
به لحاظ ریاضی ω_iها مقادیر ویژه و φ_iها بردارهای ویژه اند

فقط تابع جرم و سختی اند

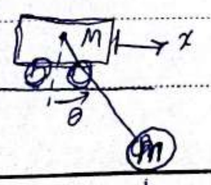
* اگر فرکانس تحریک به یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم (ω_{n_i}) نزدیک شود، تشدید (رزونانس) داریم. دامنه متناظر با آن فرکانس طبیعی تقویت می‌شود

البته دامنه بقیه فرکانس‌های طبیعی هم زیادتر می‌شوند اما نه در حد رزونانس

روش لاگرانژ مناسب تر است



حل حالت ↓ به روش ماتریسی خیلی راحت



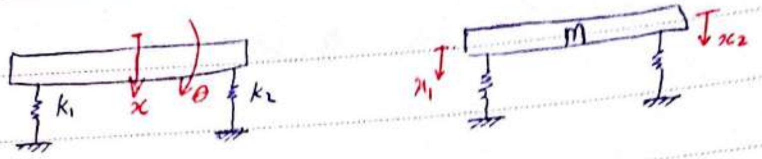
روش لاگرانژ مناسب تر است

به نام دوست

Subject ج۳

Date

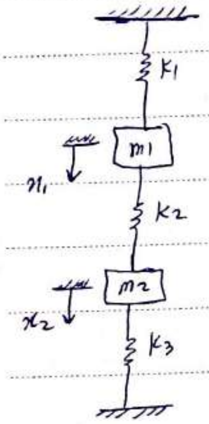
مدل نیم خودرو

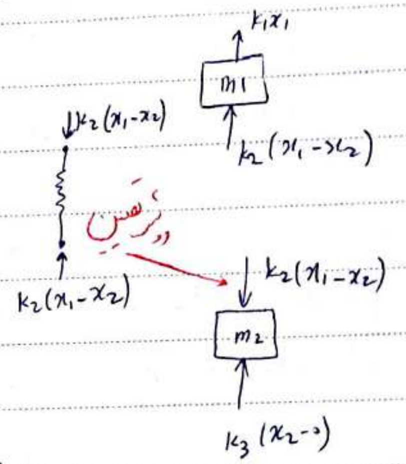


Free Vibration of 2DoF Undamped System

مثال :

چون فقط جرم‌ها را تحلیل می‌کنند معادلات استاتیکی را نمی‌نویسیم و مستقیماً دینامیک را می‌نویسیم





با فرض $x_1 > x_2$

$$\Sigma F_x = m_1\ddot{x}_1$$

$$\Longrightarrow -k_1x_1 - k_2(x_1-x_2) = m_1\ddot{x}_1$$

$$\Sigma F_x = m_2\ddot{x}_2 \Longrightarrow -k_3x_2 + k_2(x_1-x_2) = m_2\ddot{x}_2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2+k_3)x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

آزاد $(F=0)$

فرکانس طبیعی i ام

شکل مد طبیعی i ام

هدف : ω_{n_i} ، φ_{n_i} ، $x_i(t)$ ؟ $(i=1,2)$

به نام او

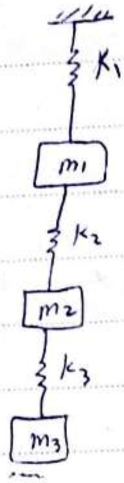
(54)

$HW \longrightarrow$ 15 آذر

Subject

Date

مثال :



$K_i = K \quad , m_i = m , \quad i = 1, 2, 3$

$\omega_{n_i} \ , Q_i = ? \quad x_i(t) = ?$

روش با دیاگرام آزاد :

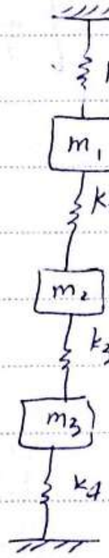
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| [K - m\omega^2] \right| = 0 \quad , \quad \frac{K}{m} = \alpha$$

پیدا کردن فرکانس طبیعی :

$$\begin{vmatrix} 2\alpha - \omega^2 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 2\alpha - \omega^2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

مثال :



$$\Rightarrow \left| [K - m\omega^2] \right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2K - m\omega^2 & -K & 0 \\ -K & 2K - m\omega^2 & -K \\ 0 & -K & 2K - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \frac{K}{m} = \alpha$$

$$\begin{vmatrix} 2\alpha - \omega & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 2\alpha - \omega^2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 2\alpha - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\alpha$$

$$\omega_2^2 = 2\alpha$$

$$\omega_3^2 = (2 + \sqrt{2})\alpha$$

از n-1 سطر استفاده می کنیم :

$$\begin{vmatrix} 2\alpha - \omega^2 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 2\alpha - \omega^2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 2\alpha - \omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = 0$$

Subject ادامه

Date (59)

row1 : $(2\alpha - \omega^2)X_1 - \alpha X_2 = 0$

row3 : $-\alpha X_2 + (2\alpha - \omega^2)X_3 = 0$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha}{2\alpha - \omega^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \left.\frac{X_1}{X_2}\right)_{@\omega_{n_1}} = \frac{\alpha}{2\alpha - (2-\sqrt{2})\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{X_2}{X_3} = \frac{2\alpha - \omega^2}{\alpha} \qquad\qquad \left.\frac{X_2}{X_3}\right)_{@\omega_{n_1}} = \sqrt{2}$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Φ_2 : $\frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha}{0}$, $\frac{X_2}{X_3} = \frac{0}{\alpha}$ $\rangle$ $x_2 = 0 \longrightarrow$ گره

$\Longrightarrow$ row2 : $-\alpha X_1 - \alpha X_3 = 0 \longrightarrow \frac{X_1}{X_3} = 1 \longrightarrow \Phi_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Φ_3 $\frac{X_1}{X_2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{X_2}{X_3} = -\sqrt{2}$ $\longrightarrow \Phi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Phi = P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

PAPCO

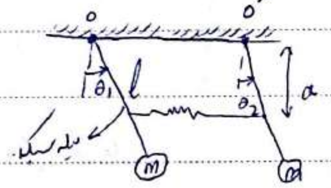
$$x_1 = x_{11}\sin(\omega_{n1}t-\boxed{\varphi_{11}}) + x_{12}\sin(\omega_{n2}t-\boxed{\varphi_{12}}) + x_{13}\sin(\omega_{n3}t-\boxed{\varphi_{13}})$$

$$x_2 = \overset{\sqrt{2}X_{11}}{\cancel{x_{21}}}\sin(\omega_{n1}t-\varphi_{21}) + \underset{0}{\cancel{x_{22}}}\sin(\omega_{n2}t-\varphi_{22}) + \underset{-\sqrt{2}X_{13}}{\cancel{x_{23}}}\sin(\omega_{n3}t-\varphi_{23})$$

$$x_3 = \overset{X_{11}}{\cancel{x_{31}}}\sin(\omega_{n1}t-\varphi_{31}) + \underset{-X_{12}}{\cancel{x_{32}}}\sin(\omega_{n2}t-\varphi_{32}) + \underset{X_{13}}{\cancel{X_{33}}}\sin(\omega_{n3}t-\varphi_{33})$$

$$\begin{cases}\varphi_{11}=\varphi_{21}=\varphi_{31}\\ \varphi_{12}=\varphi_{22}=\varphi_{32}\\ \varphi_{13}=\varphi_{23}=\varphi_{33}\end{cases} \Longrightarrow \text{مجهولات} \quad \begin{matrix}X_{11} & X_{12} & X_{13}\\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13}\end{matrix}$$

مثال ۶



$$\Sigma M_o = I_o\ddot{\theta} \rightarrow -ka^2\overset{(\theta_1-\theta_2)}{\cancel{\theta_1}} - mgl\theta_1 = ml^2\ddot{\theta}_1$$

$$\rightarrow -ka^2\overset{(\theta_2-\theta_1)}{\cancel{\theta_2}} - mgl\theta_2 = ml^2\ddot{\theta}_2$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ml^2 & 0\\ 0 & ml^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ka^2+mgl & -ka^2\\ -ka^2 & ka^2+mgl\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\omega_n = ? \Longrightarrow \left|[K]-[M]\omega^2\right| = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} ka^2+mgl-ml^2\omega^2 & -ka^2\\ -ka^2 & ka^2+mgl-ml^2\omega^2\end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha = \frac{ka^2+mgl}{ml^2}$$

$$\beta = \frac{ka^2}{ml^2} \qquad \Longrightarrow \begin{vmatrix}\alpha-\omega^2 & -\beta\\ -\beta & \alpha-\omega^2\end{vmatrix} = 0$$

بنام او

Subject

Date

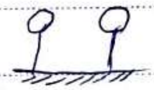
$$(\alpha-\omega^2)-\beta^2=0 \Rightarrow (\alpha-\omega^2-\beta)(\alpha-\beta^2+\beta)=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_1^2=\alpha-\beta = \dfrac{g}{\ell} \\ \omega_2^2=\alpha+\beta = \dfrac{2Ka^2+mg\ell}{m\ell^2} \end{cases}$$

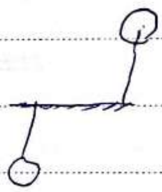
φ_n : از ضرب سطر اول ; $(\alpha-\omega^2)\theta_1-\beta\theta_2=0 \rightarrow \dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\dfrac{\beta}{\alpha-\omega^2}$

در هر بعد فقط از یک ردیف استفاده میکنیم برای MDof از $(n-1)$ ردیف استفاده میکنیم

$@\,\omega_1: \dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\dfrac{\beta}{\alpha-(\alpha-\beta)}=1$



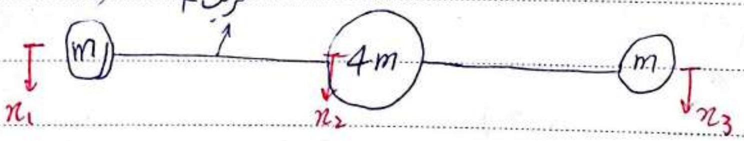
$@\,\omega_2: \dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\dfrac{\beta}{\alpha-(\alpha+\beta)}=-1$



و اگر به مشکل خوردیم از آن ردیف آخر هم استفاده میکنیم

$$\varphi=P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

مثال ۰ : مدل هواپیما



$$m\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{bmatrix}+\frac{3EI}{\ell^3}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|K-m\omega^2|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\alpha-\omega^2 & -\alpha & 0\\ -\alpha & 2\alpha-\omega^2 & -\alpha\\ 0 & -\alpha & \alpha-\omega^2\end{vmatrix}=0$$

حول سطر اول بسط می دهم

$$\Rightarrow (\alpha-\omega^2)(\omega^2)(\omega^2-3\alpha^2)=0$$

$$\begin{cases}\omega_1=0 \rightarrow \text{rigid body motion}\\ \omega_2=\sqrt{\alpha} \quad , \quad \alpha=\dfrac{3EI}{m\ell^3}\\ \omega_3=\sqrt{3\alpha}\end{cases}$$

به نام او

Subject

Date

$\varphi_n = ?$ $\xrightarrow{\text{از سطر اول و سوم استفاده کنیم}}$ row1 : $\frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha}{\alpha-\omega^2}$

row3 : $\frac{X_2}{X_3} = \frac{\alpha-\omega^2}{\alpha}$

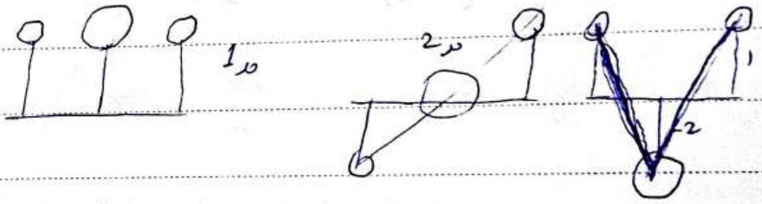
@ ω_{n_1} : $\frac{X_1}{X_2} = 1$, $\frac{X_2}{X_3} = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

@ ω_{n_2} : $\frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha}{0}$, $\frac{X_2}{X_3} = \frac{0}{\alpha} \Rightarrow x_2 = 0 \Longrightarrow$ مجبوریم از سطر 2 کمک بگیریم

row 2 $\rightarrow \frac{X_1}{X_3} = -1 \rightarrow \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

@ ω_{n_3} : $\frac{X_1}{X_2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{X_2}{X_3} = -2 \rightarrow \varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$



قطری سازی ماتریس‌های جرم، سختی، دمپر : کاربرد : حل ساده‌تر یک معادله دیفرانسیل MDOF از طریق تبدیل آن به :

M معادله دیفرانسیل مرتبه 1 (SDOF)

$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$

$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F$, $\{X\} = [P]\{q\}$, $[P] = [\varphi] \rightarrow$ ماتریس شکل مد

$\Longrightarrow MP\ddot{q} + CP\dot{q} + KPq = F \xRightarrow{\times P^{-1}} [P^{-1}MP]\{\ddot{q}\} + [P^{-1}CP]\{\dot{q}\} + [P^{-1}KP]\{q\} = P^{-1}F$

خاصیت تعامد مدها : $\rightarrow \underbrace{[M^*]}_{\text{قطری}}\{\ddot{q}\} + [C^*]\{\dot{q}\} + \underbrace{[K]}_{\text{قطری}}\{q\} = P^{-1}F$

$P^{-1} = P^T$

$[C^*]$: قطری مشروط : اگر $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ ترکیبی از $[K]$ ، $[M]$ باشد قطری می شود

PAPCO

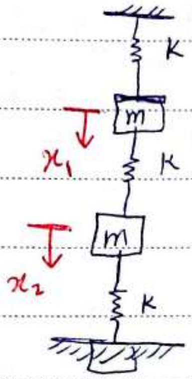
Subject به نام او

Date

حل برای $i=1,\dots,n$: $q_i(t)$ ، سپس $\{x\} = [P]\{q\}$

قطری ساز :

مثال ۱



$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} , \quad K = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$ ⟵ لزوماً M^* همان m نمی‌شود ولی trace آن ثابت می‌ماند

$$P^{-1}KP = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix}$$ ⟵ ثابت ماندن trace

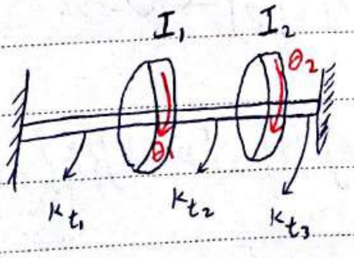
$$\frac{k}{m} = \omega_{n_1}^2 \quad , \quad \frac{3k}{m} = \omega_{n_2}^2$$ ⟵ روش دوم حل کردن

$$X = Pq \longrightarrow \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{q}_1 + kq_1 = 0 & \rightarrow \omega_{n_1}^2 \\ m\ddot{q}_2 + 3kq_2 = 0 & \rightarrow \omega_{n_2}^2 \end{cases}$$

نکته : در مثال ۴ حل شده کلاس سعی کنید با تشکیل P^TMP , P^TKP قطری شدن آنها را بررسی کنید

مثال ۵ :



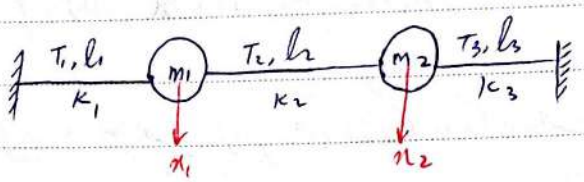
$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{t_1}+k_{t_2} & -k_{t_2} \\ -k_{t_2} & k_{t_2}+k_{t_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنام او

Subject
Date

$\theta = \frac{TL}{GJ} \longrightarrow \frac{T}{\theta} = k_t = \frac{GJ}{L}$ / $F = kx$, $T = k_t \theta$

مثال :

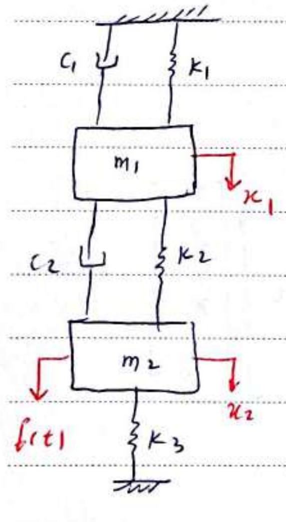


$* \; K = \frac{T}{l}$ در کتاب گفته شده

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

روش ماتریسی برای معادلات یک MDOF sys با حرکت کاملاً انتقالی (غیر دورانی)

مثال :



m_{ii} : جرم درجه آزادی i ام

m_{ij} = جرم بین درجه آزادی i و j ← عموماً در ترکیب حرکات خطی و دورانی رخ می‌دهد که بیشتر حرکت دورانی حرکت خطی دارد

C_{ii} / k_{ii} = ترم‌های متصل به درجه i ام

C_{ij} / k_{ij} = ترم‌های بین درجه آزادی i و j با علامت منفی

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\text{uncouple}} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{\text{couple}} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}}_{\text{couple}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

مثال : در مثال قبل اگر زیر k_3 تحریک پایه داشتیم :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix}$$

← چون به درجه آزادی دوم وارد شده

$m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$

$m_2\ddot{x}_2 + (k_2+k_3)x_2 - k_2 x_1 = f + k_3 u$ / $-k_3 x_2 + k_3 u = 0 \rightarrow f_T$

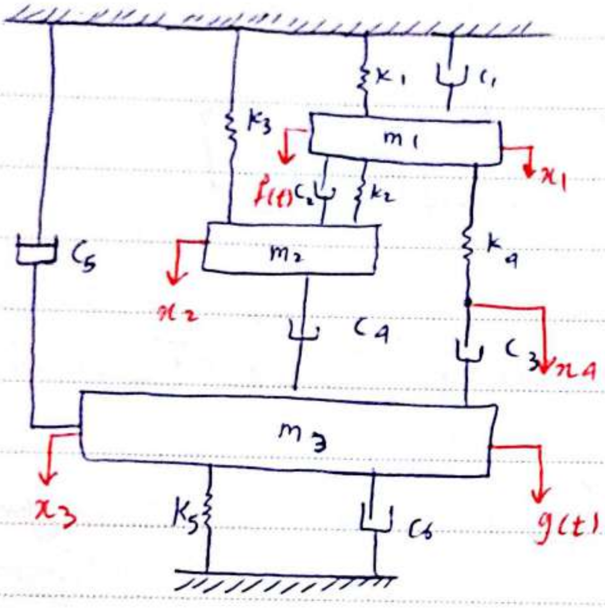
P4PCO

Subject

Date

EX 1 $\rightsquigarrow$ on x_1 : $m_1\ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - 0) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - 0) + k_2(x_1 - x_2) = 0$

on x_2 : $m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_2 - u) = f$



مثال : * اتصال فنر به فنر متوالی خودش یک درجه آزادی است ولی این اتصال فنر، فنر متوالی را نشیم معادل می‌گیریم و درجه آزادی اضافه نمی‌شود *

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_4 & -c_4 & 0 \\ 0 & -c_4 & \sum_{3}^{6} c_i & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} k_1+k_2+k_4 & -k_2 & 0 & -k_4 \\ -k_2 & k_2+k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_5 & 0 \\ -k_4 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

* حل معادله دیفرانسیل مرتبه بالاتر به روش Expand مناسب نیست ، بردن به فضا $X_{11}, X_1 \cdots + X_{12} \cdots$ ، $X \in \mathbb{R}^q$ مناسب‌تر است و بردن به فضا

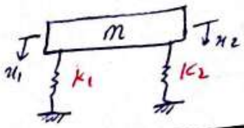
حالت بهترین مدل است .

PAPCO

Scanned by CamScanner

بنام او

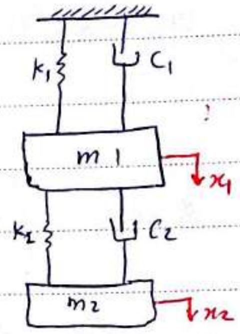
Subject
Date



مدل نیم خودرو :
بین دو درجه آزادی
یک جرم وجود دارد

Damped free vibration of MDOF Sys

مثال :



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بدون میرایی $x_i = X_i \sin wt$

با میرایی $x_i = X_i e^{rt}$, r = complex variable

جایگذاری : $$\begin{bmatrix} m_1 r^2 + (c_1+c_2) r + k_1 + k_2 & -c_2 r - k_2 \\ -c_2 r - k_2 & m_2 r^2 + c_2 r + k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} e^{rt} = 0$$

$$\begin{vmatrix} m_1 r^2 + (c_1+c_2) r + k_1 + k_2 & -c_2 r - k_2 \\ -c_2 r - k_2 & m_2 r^2 + c_2 r + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow \alpha_0 r^4 + \alpha_1 r^3 + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r + \alpha_4 = 0 \rightsquigarrow$ α_i ها برحسب m_j , k_j , c_j ها بیانند

$j = 1, 2$ $\qquad$ $i = 1, \dots, 4$

Subject 1
Date

حالات حد : ① بدون میرایی $c_1 = c_2 = 0$

$r_{1,2} = \pm J\beta_1 \quad \beta_1 = \omega_{n1}$

$\Rightarrow$

$r_{3,4} = \pm J\beta_2 \quad \beta_2 = \omega_{n2}$

② میرایی اندک

$r_{1,2} = \pm J\beta_1 \rightarrow \beta_1 = \omega_{n1}$

$r_{3,4} = \underbrace{\gamma}_{-\xi\omega_{n_2}} \pm J\underbrace{\beta_2}_{\omega_{n2}\sqrt{1-\xi^2}} \longrightarrow \xi = \checkmark \; \omega_{n2} = \checkmark$

③ میرایی نسبتاً قابل ملاحظه

$r_{1,2} = \gamma_1 \pm J\beta_1 \quad \gamma_i = -\xi_i \omega_{ni}$

$\Longrightarrow$

$r_{3,4} = \gamma_2 \pm J\beta_2 \quad \beta_i = \omega_{ni}\sqrt{1-\xi_i^2}$

④ میرایی نسبتاً زیاد

$r_{1,2} = P_1 , P_2 < 0 \quad (\text{real}) \; r_{1,2} = -\xi_1\omega_{n1} \pm \omega_{n1}\sqrt{\xi_1^2 - 1}$

$r_{3,4} = \underbrace{\gamma}_{-\xi_2\omega_{n2}} + J\underbrace{\beta}_{\omega_{n2}\sqrt{1-\xi_2^2}}$

⑤ میرایی زیاد

$r_{1,2} = P_1 , P_2 < 0$

$\longrightarrow$ ناپایدار

$r_{3,4} = P_3 , P_4 < 0$

Mode shapes :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{c_2 r + k_2}{m_1 r^2 + (c_1 + c_2) r + (k_1 + k_2)}$$

/

به نام او

Subject
Date

$$\begin{cases} x_1(t) = X_{11} e^{r_1 t} + X_{12} e^{r_2 t} + X_{13} e^{r_3 t} + X_{14} e^{r_4 t} \\ x_2(t) = X_{21} e^{r_1 t} + X_{22} e^{r_2 t} + X_{23} e^{r_3 t} + X_{24} e^{r_4 t} \end{cases}$$

$X_{1i} \quad i=1,\dots,4$ are found from I.C

$$\begin{cases} x_1(0) , x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) , \dot{x}_2(0) \end{cases}$$

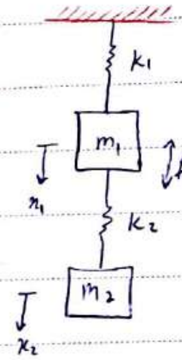
$$\frac{X_{11}}{X_{21}} = \left.\frac{X_1}{X_2}\right)_{@ r_1}$$

$\vdots$

$$\frac{X_{14}}{X_{24}} = \left.\frac{X_1}{X_2}\right)_{@ r_4}$$

Forced Vibration of unDamped MDOF sys.

برخلاف ارتعاشات آزاد سیری آسان تر دارد.



مثال: تحریک هارمونیک $f(t) = F_0 \sin(\omega t)$ وارد شود پاسخ x_1 , x_2 ؟

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1+k_2) x_1 - k_2 x_2 = f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$x_i = X_i \sin(\omega t)$

$k_1 = k_2 = k$ با فرض
$m_1 = m_2 = m$

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \sin\omega t = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin\omega t$$

به روش کرامر: $X_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} F_0 & -k \\ 0 & k - m\omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix}}$ $\quad X_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & F_0 \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix}}$

برنامه درست

Subject
Date

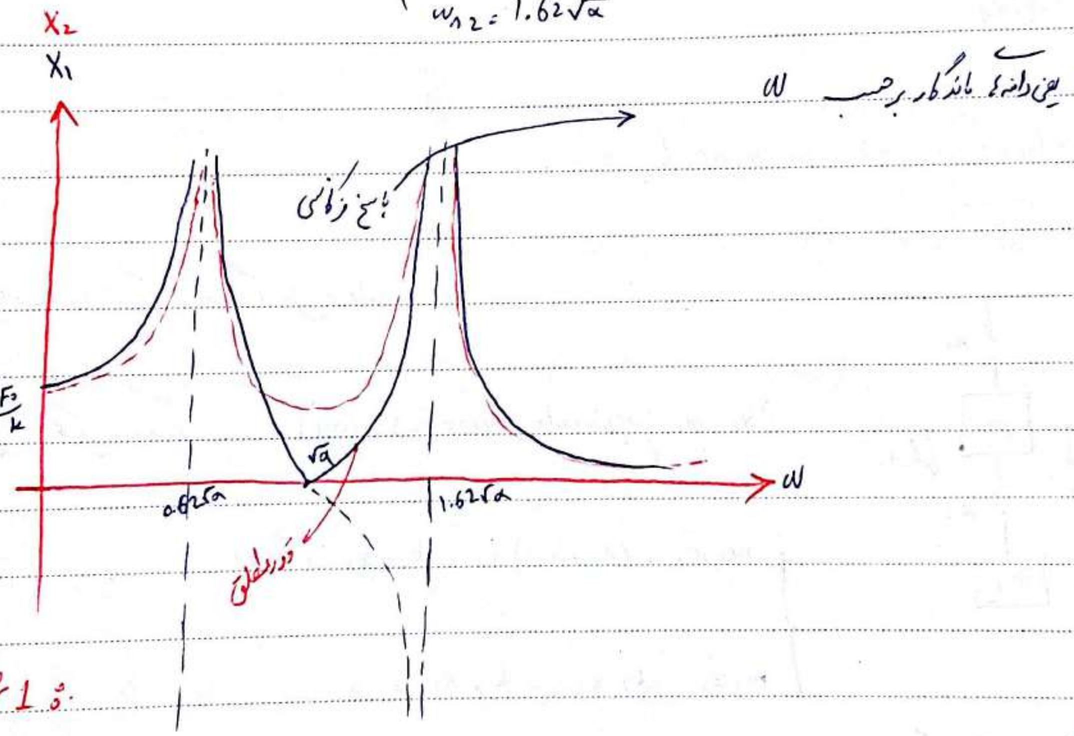
$$X_1 = \frac{F_0(k - m\omega^2)}{(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2} \qquad X_2 = \frac{F_0 k}{(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2}$$

هر فرکانس ω ، X_1 ، X_2 را از بالا یافته و :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 \sin(\omega t) \\ x_2(t) = X_2 \sin(\omega t) \end{cases} \qquad X_1 , X_2 = f(\omega)$$

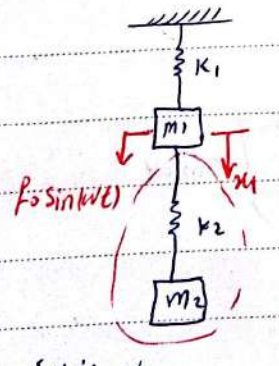
$$\omega_n = ? \longrightarrow \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \frac{m}{k} = \alpha$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \omega_{n1} = 0.62\sqrt{\alpha} \\ \omega_{n2} = 1.62\sqrt{\alpha} \end{cases}$$



graf 1 :

جاذب ارتعاشی :



m_1: سازه‌ی اصلی که برای ما ارزش داشته و هدف کاهش ارتعاشات آن است. اگر فرکانس تحریک ω نزدیک $\omega_{n1} = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}}$ (سازه اصلی) باشد دامنه زیاد داریم $\omega \simeq \omega_{n1} = \sqrt{\frac{K_1}{m_1}}$

جاذب اضافه شده

PAPCO

بنام خدا

Subject
Date

سوال: سه نمونه هست که در جهان موزون سال کند است دنو فیخ هند / منظور از نمودار شکل چیه؟

طبق مثال قبل گراف 1 : اگر ازال $k_1 \neq k_2$ ، $m_1 \neq m_2$ مجاز باشند

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2-m_1\omega & -k_2 \\ -k_2 & k_2-m_2\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

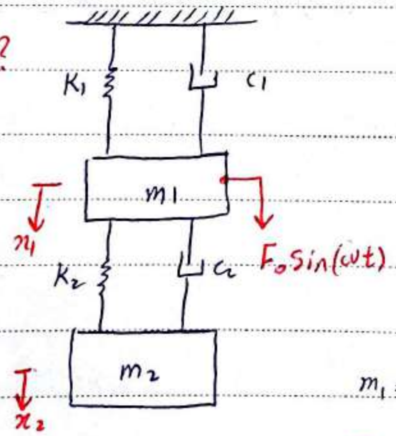
@ $\omega = \omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ حذف می‌باشد

$$X_1 = \frac{F_0\left(k_2-m_2\omega^2\right)}{\left(k_1+k_2-m_1\omega^2\right)\left(k_2-m_2\omega^2\right)-k^2} \xrightarrow{\text{اگر کاری بکنیم}} k_2-m_2\omega^2=0 \;/\; k_2-m_2\left(\frac{k_1}{m_1}\right)=0 \longrightarrow \boxed{\frac{k_1}{m_1}=\frac{k_2}{m_2}}$$

$$X_2 = \frac{F_0 k_2}{\left(k_1+k_2-m_1\omega^2\right)\left(k_2-m_2\omega^2\right)-k^2} \Longrightarrow \text{resonance}: \omega=\omega_n \rightarrow |X_2| = \frac{F_0}{k_2}$$

Forced vibration of damped mode system.

مثال: پاسخ اجباری؟



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$m_1 = m_2 = 1$ $\quad c_1 = c_2 = 1$ $\quad k_1 = k_2 = 1$ $\;/\; F_0 = 1$ /واحد

فاز دیپر جودش در جواب ظاهر نشد

$$F_0 \cos(\omega t) = Re\left(F_0 e^{j\omega t}\right) = Re\left(e^{jt}\right)$$

$$x_i = X_i e^{jt} \longrightarrow \left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\cancel{e^{jt}} = \begin{bmatrix} \overset{F_0}{1} \\ 0 \end{bmatrix}\cancel{e^{jt}}$$

پاسخ اجباری با همان فرکانس

$$\begin{bmatrix} 1+2j & -1-j \\ -1-j & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برنامه اد

Subject

Date

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -1-j \\ 0 & j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+2j & -1-j \\ -1-j & j \end{vmatrix}} = \frac{F_0}{5}(-1-2j) \longrightarrow \varphi_1 = \tan\left(\frac{-2}{-1}\right)$$

تانژ

بعلت دنبیر

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+2j & F_0 \\ -1-j & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+2j & -1-j \\ -1-j & j \end{vmatrix}} = \frac{F_0}{5}(-3-j) \longrightarrow \varphi_2 = \tan\left(\frac{-1}{-3}\right)$$

$$|x_1| = \frac{F_0}{\sqrt{5}} \longrightarrow x_1(t) = \frac{F_0}{\sqrt{5}}\cos(\omega t + \varphi_1)$$

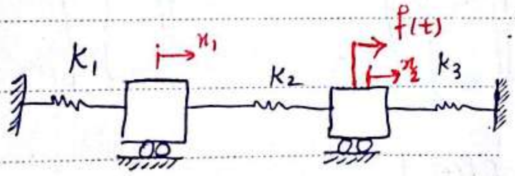
$$|x_2| = \frac{F_0\sqrt{10}}{5} \longrightarrow x_2(t) = \frac{F_0\sqrt{10}}{5}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

روش 2 → برداری شود

$$x_1(t) = Re\left(x_1 e^{jt}\right) = Re\left(\frac{F_0}{5}(-1-2j)e^{jt}\right)$$

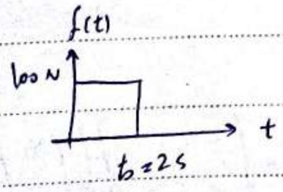
در مثال فوق اگر از همان ابتدا به صورت پارامتریک ω تحریک را حفظ می‌کردیم پاسخ فرکانسی به عنوان تابعی از ω به دست می‌آمد

مثال 8



$m_1 = m_2 = 10\ kg \quad / \quad k_1 = k_2 = k_3 = 1000\ \frac{N}{m}$

$$f(t) \begin{cases} \text{I)}\ F_0 \sin\omega t = 100\sin(5t) \\ \text{II)} \end{cases}$$



$$I.C \begin{cases} x_1(0) = 10\ cm \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

بنام دوست

Subject

Date

$$\left|[k]-[m]\omega^2\right| = 0 \quad , \quad \frac{k}{m} = \alpha \rightarrow \begin{vmatrix} 2\alpha-\omega^2 & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega_{n_1} = \sqrt{\alpha} = 10 \ rad/s$$

برای شکل مد

$\Longrightarrow$ حل نظر اول

$$\left.\frac{X_1}{X_2}\right)_{@\omega_{n_1}} = \frac{\alpha}{2\alpha-\omega^2} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

$$\omega_{n_2} = \sqrt{3\alpha} = 10\sqrt{3} \ rad/s$$

$$\left.\frac{X_1}{X_2}\right)_{@\omega_{n_2}} = \frac{\alpha}{2\alpha-\omega^2} = \frac{\alpha}{-\alpha} = -1$$

$$\varphi = P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

to find $x_{ih} \rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_{11}\sin(\omega_{n_1}t-\varphi_{11}) + x_{12}\sin(\omega_{n_2}-\varphi_{12}) \\ x_2(t) \end{cases}$

روش دوم : $x = Pq$ $\longrightarrow$ چون پاسخ اجباری هم داریم این دفعه خیلی راحت تر است

$$\Longrightarrow m^*\ddot{q} + k^*q = P^T f$$

$$M^* = P^T M P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

اگر از P^{-1} استفاده می کردیم

trace ثابت می ماند

$$K^* = P^T K P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix} \rightarrow$$ جدا کردن مکانیزم حلی ✓

$$P^T F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ -f(t) \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \underset{20}{2m}\ddot{q}_1 + \underset{20}{2k}q_1 = \underset{20}{f(t)} \\ \underset{20}{2m}\ddot{q}_2 + \underset{20}{6k}q_2 = -\underset{20}{f(t)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 + 100q_1 = 5\sin 5t \\ \ddot{q}_2 + 300q_2 = -5\sin 5t \end{cases} \longrightarrow 2\,SDoF\ sys$$

$$\Longrightarrow q_i(t) = q_{ih}(t) + q_{ip}(t) \qquad i = 1,2$$

$$\rightarrow q_1(t) = C_1\sin(10t) + C_2\cos(10t) + A\sin(\omega t)$$ $\longrightarrow$ درحالت با میرایی فصل ۳ داشتیم

$$\begin{cases} x_p(t) = \dfrac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\sin(\omega t-\varphi_p) \\ [illegible]\ \ x_0 e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t-\varphi_0) \end{cases}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

به نام او

Subject
Date

$$\frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

$$\begin{cases} q_1(t) = c_1 \sin(10t) + c_2 \cos(10t) + \frac{1}{15} \sin(5t) \\ q_2(t) = c_3 \sin(10\sqrt{3}\, t) + c_4 \cos(10\sqrt{3}\, t) - \frac{1}{55} \sin(5t) \end{cases}$$

چون میرایی نداریم نیاز ندارد

$$\dot{x} = 0 \longrightarrow p\dot{q} = 0 \longrightarrow \dot{q}_i(0) = 0$$

$x_1(0)$

$$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} q_1(0) + q_2(0) = 0.1 \\ q_1(0) - q_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1(0) = q_2(0) = 0.05 \\ \dot{q}_i(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow c_1, c_2, c_3, c_4 = \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) \\ x_2(t) = q_1(t) - q_2(t) \end{cases}$$

II) $\rightsquigarrow$ صفحه را قبلاً آورده‌ام $\longrightarrow$ صحیح داتی

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 100 q_1 = 5 \quad \text{پله با دامنه} \\ \ddot{q}_2 + 300 q_2 = -5 \quad \text{پله با دامنه} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_{1p} = \frac{5}{100}\left(\cos(10t) - \cos(10(t-2))\right) \\ q_{2p} = \frac{-5}{300}\left(\cos(10\sqrt{3}\, t) - \cos(10\sqrt{3}(t-2))\right) \end{cases}$$

یادآوری:

$$f(t) = F_0 \left[u(t) - u(t - t_0) \right]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m \omega_n^2} \left((1 - \cos(\omega_n t))\, u(t) - (1 - \cos(\omega_n (t - t_0)))\, u(t - t_0) \right)$$

$$t > t_0 \rightsquigarrow -\cos(\omega_n t) + \cos(\omega_n (t - t_0))$$

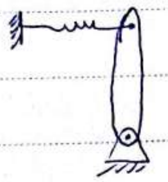
به نام دوست

Subject
Date

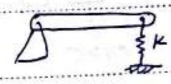
Lagrange Eq : روشی است انرژی مبنا و مؤثر جهت یافتن معادلات حاکم بر مسئله به خصوص زمانی که با یک MDOF sys
با حرکات دورانی یا ترکیب خطی دورانی سروکار داریم.

T انرژی جنبشی:
- $\frac{1}{2} m\dot{x}^2$ خطی
- $\frac{1}{2} I\dot{\theta}^2$ دورانی

U:
- $\frac{1}{2} k x^2$ خطی
- $\frac{1}{2} k_t \theta^2$ دورانی
- $mg\Delta h$



اگر قائم یا نزدیک به قائم باشد $mg\Delta h$ ظاهر می‌شود



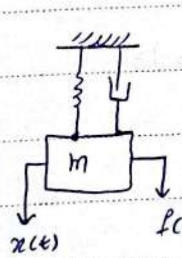
اگر افقی یا نزدیک به افق باشد $mg\Delta h$ ظاهر نمی‌شود

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

q_i : ith degree of freedom

Q_i:
- $-c\dot{x}$ / f_{ext} خطی
- $\underbrace{(-c\dot{x})d}_{\text{گشتاور دمپر}}$ / M_{ext} دورانی

مثال :

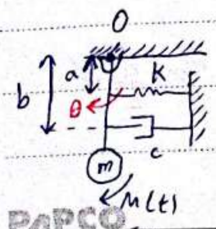


$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ / $U = \frac{1}{2} k x^2$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right) - 0 + kx = f(t) - c(\dot{x} - 0)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

مثال : پاندول سبک به طول l و گلوله با شعاع کوچک



$T = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2$

$U = \frac{1}{2} k (a\theta)^2$? $+ mgl(1-\cos\theta)$ $\quad I_o = ml^2$

چون آونگ پایدار است / چون پاندول رو به پایین است

به نام او

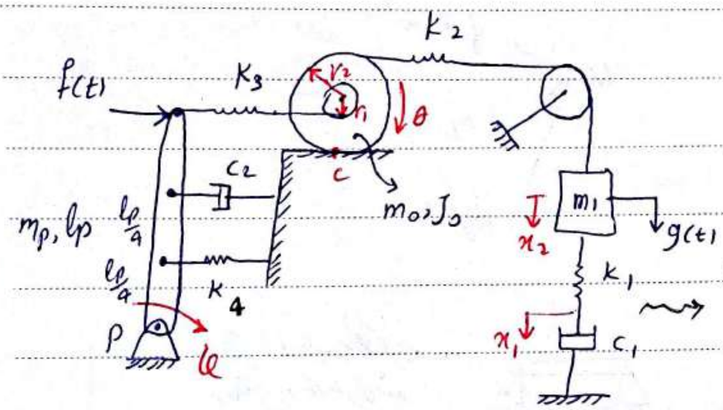
Subject

Date

$$\frac{d}{dt}\left(I_o\dot{\theta}\right) - 0 + k(a\theta)a + mgl\theta = M(t) - c(b\dot{\theta})b$$

$$\Longrightarrow I_o\ddot{\theta} + cb^2\dot{\theta} + (ka^2 + mgl)\theta = M(t)$$

مثال : ۴ درجه آزادی



فرود جرم متوالی یک درجه آزاد محسوب می‌شود

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\varphi}^2 \quad / \; J_c = J_o + m r_2^2 \quad / \; J_p = \frac{m_p l_p^2}{3}$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(x_2 - 2r_2\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k_3\left(l_p\varphi - (r_2 - r_1)\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k_4\left(\frac{l_p}{4}\varphi - 0\right)^2$$

$$- m_p g\frac{l_p}{2}(1 - \cos\varphi)$$

چون پتانسیل کاهش می‌یابد

چون به زمین وصل است

$$L \text{ on } x_1 : \quad 0 - 0 + k_1(x_1 - x_2) = -c(\dot{x}_1 - 0) \Longrightarrow c_1\dot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = 0$$

$$L \text{ on } x_2 : \; m_1\ddot{x}_2 - 0 - k_1(x_1 - x_2) + k_2(x_2 - 2r_2\theta) = g(t)$$

$$L \text{ on } \theta : \; J_c\ddot{\theta} - 0 - 2r_2k_2(x_2 - 2r_2\theta) - k_3(r_2 - r_1)\left(l_p\varphi - (r_2 - r_1)\theta\right) = 0$$

$$L \text{ on } \varphi : \; I_p\ddot{\varphi} - 0 + k_3 l_p\varphi\left(l_p\varphi - (r_2 - r_1)\theta\right)^2 + k_4\frac{l_p}{4}\left(\frac{l_p}{4}\varphi\right) - m_p g\frac{l_p}{2}\varphi$$

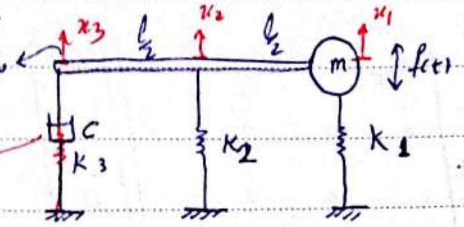
$$= l_p f(t) - c_2\left(\frac{l_p}{2}\dot{\varphi} - 0\right)\frac{l_p}{2}$$

اول همان درجه را می‌نویسیم بعد دیوار

Subject برنامه او
Date

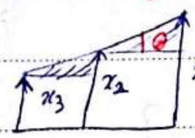
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

مثال ۳: معادلات حاکم؟



اگر اهمیت یا بی‌اهمیت کار نکنیم گردش نداده یا با x، θ برویم

$x_3 = f(x_1, x_2) \Rightarrow$

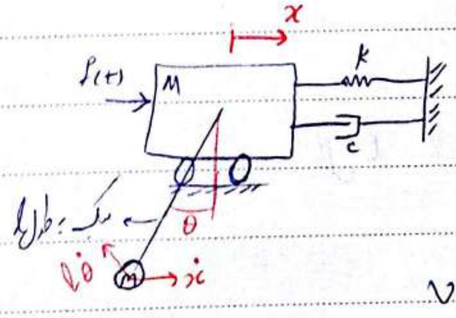


$$\Rightarrow \frac{x_1 - x_2}{\frac{l}{2}} = \frac{x_2 - x_3}{\frac{l}{2}} \Rightarrow x_3 = 2x_2 - x_1$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 \quad \left(\text{اگر میله جرم داشت} + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \underbrace{V_G^2}_{\dot{x}_2}\right)$$

$$U = \frac{1}{2}K_1 x_1^2 + \frac{1}{2}K_2 x_2^2 + \frac{1}{2}K_3 (2x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 - 0 + \underbrace{K_1 x_1}_{-K_3(2x_2 - x_1)} = f(t) & L \text{ on } x_1 \\ K_2 x_2 + 2K_3(2x_2 - x_1) = 0 & L \text{ on } x_2 \end{cases}$$

مثال ۴: مدل 2D جرثقیل سقفی



$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2(\dot{x})(l\dot{\theta}) \underbrace{\cancel{\cos}(\pi - \theta)}_{-\cos\theta}$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

$$L \text{ on } x: \quad M\ddot{x} + m\ddot{x} - ml \underbrace{\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\cos\theta)}_{\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta} - 0 + kx = f(t) - c(\dot{x} - 0)$$

$$L \text{ on } \theta: \quad \underbrace{\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta} - ml\dot{x}\cos\theta\right)}_{ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{x}\cos\theta + ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta} - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mgl\sin\theta = 0$$

در معادلات غیرخطی ← برای θ بزرگ باید دیگر داشته شوند
جملات غیرخطی ←

Subject برنامه درست

Date

$$\left|[K]-[M]\omega^2\right| = 0 \rightarrow \omega_n = \checkmark$$

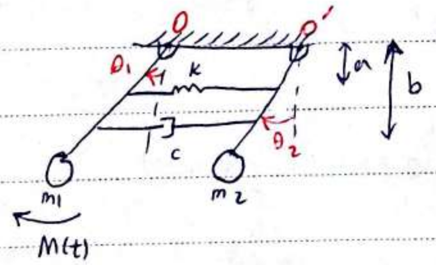
ماتریسهای $[M]$ ، $[C]$ ، $[K]$ در دوار تحریک :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_2 l_p^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -2K_2 r_2 & 0 \\ 0 & -2K_2 r_2 & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \\ 0 \\ f(t) l \end{bmatrix}$$

روش دیگر :
$$0 + c_1(\dot{x}_1 - 0) + k_1(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_1 \ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - 2r_2\theta) = g(t)$$
$$\vdots$$

مثال : میله سبک به طول l



$$T = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{o'} \dot{\theta}_2^2 \quad / \; I_o = m_1 l^2 \; , \; I_{o'} = m_2 l^2$$

$$U = \frac{1}{2} k \left[a(\theta_1 - \theta_2)\right]^2 + m_1 g l (1 - \cos\theta_1) + m_2 g l (1 - \cos\theta_2)$$

$$\begin{cases} \text{L on } \theta_1 & I_o \ddot{\theta}_1 + k a^2(\theta_1 - \theta_2) + m_1 g l \theta_1 = M(t) - c(b\dot{\theta}_1 - b\dot{\theta}_2) b \\ \text{L on } \theta_2 & I_{o'} \ddot{\theta}_2 - k a^2(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l \theta_2 = -c(b\dot{\theta}_2 - b\dot{\theta}_1) b \end{cases}$$

Subject به نام او

Date

در مسائل مکانیکی معمولا کوچک است

for small θ $\begin{cases} \cos\theta \simeq 1 \\ \dot{\theta}^2 \sin\theta \simeq 0 \end{cases}$

$\underbrace{\dot{x}\,\dot{\theta}\,\sin\theta}_{\text{کوچک}} \simeq 0$

معادلات خطی حرکت

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{x} - ml\ddot{\theta} \underbrace{}_{+c\dot{x}} + kx = f(t) \\ ml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{x} + mgl\theta = 0 \end{cases}$$

اگر همان ابتدا در انرژی جنبشی قرار دهیم $\cos\theta = 1$ در v^2 سریع تر به این معادلات می‌رسیم

uncouple static

$[K]$

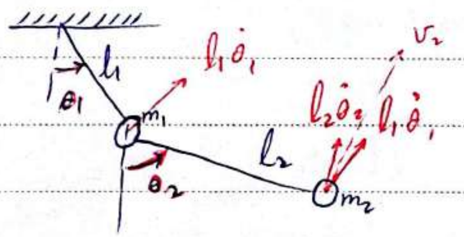
$$\underbrace{\begin{bmatrix} m+M & -ml \\ -ml & ml^2 \end{bmatrix}}_{\text{couple dyn } [M]} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

در لاگرانژ تحلیلی این ترم میں می‌شد.

couple dyn

$[M]$

مثال: آونگ دوبل



می‌توان همین جا این ترم را یک گذاشت و سریع به معادلات خطی رسید

$$T = \frac{1}{2} m_1 (l_1\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left((l_1\dot{\theta}_1)^2 + (l_2\dot{\theta}_2)^2 + 2(l_1\dot{\theta}_1)(l_2\dot{\theta}_2)\cos(\theta_1-\theta_2) \right)$$

$$U = m_1 g l_1 (1-\cos\theta_1) + m_2 g \left((l_1(1-\cos\theta_1)) + (l_2(1-\cos\theta_2)) \right)$$

small / خطی هم می‌شود

$$L \text{ on } \theta_1 : \frac{d}{dt}\left(m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \right) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1-\theta_2)$$

$\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)$

$$+ (m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 = 0$$

θ_1

$$L \text{ on } \theta_2 : \frac{d}{dt}\left(m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2) \right) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$+ m_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0$$

مانند بالا

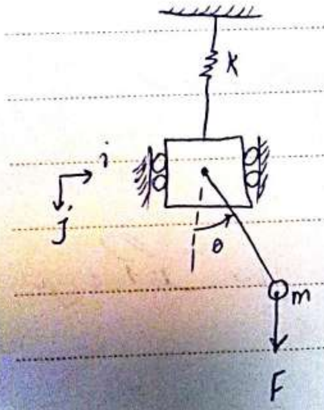
θ_2

Subject بنام او
Date

$$\begin{cases} (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1+m_2) g l_1 \theta_1 = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (m_1+m_2) l_1^2 & m_1 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1+m_2) g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

couple dyn uncouple static



$$\vec{r} = (l\sin\theta)\vec{i} + (x + l\cos\theta)\vec{j}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad a = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{V} = (l\dot{\theta}\cos\theta)\vec{i} + (\dot{x} - l\dot{\theta}\sin\theta)\vec{j}$$

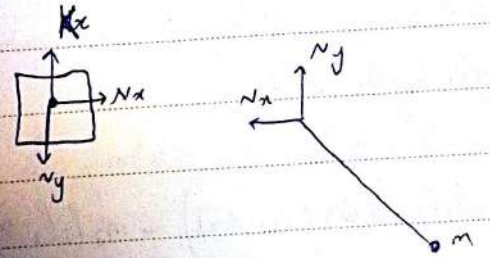
$$F = +F\vec{j}$$

از جنس گشتاور است و نباید [illegible] گذاشت در معادله

$$P = F V \Rightarrow \quad Q = (F\delta x - Fl\sin\theta\,\delta\theta)$$

$-c\dot{x}\,\delta x$ دمپر

روش نیوتن :



Subject به نام دوست

Date

$$N_y(-j) + N_x(-i) + mg(j) = ma$$

$$\Sigma M_o = I_o \alpha + \vec{\rho}_{G/O} \times m\vec{a}_o$$