دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

استاتیک

استاد :

جناب آقای مهندس پیدایش

"بسم الله الرحمن الرحیم"

حمید کاظم

استاتیک

جناب آقای مهندس پیدالی

Refrences :

1) statics by : J.L. Meriam , L.G. kraige

2) statics by : Ferdinand p. Beer , E. Russel johnston

3) statics by : S. Timoshenko , D.H. yong

مباحث:

- مقدمه و کلیات

فصل اول: نیرو و مجموعه‌های نیرویی

فصل دوم: تعادل اجسام صلب

فصل سوم: تحلیل خرپاها و قاب‌ها

فصل چهارم: نیروهای داخلی در سازه‌های معین استاتیکی

فصل پنجم: خواص هندسی سطوح

فصل ششم: تحلیل کابل‌ها

فصل هفتم: تئوری کار مجازی و کاربرد آن در حل مسائل تعادل

حسید کاظم

مقدمه و کلیات

علم مکانیک: مکانیک عبارت است از شاخه‌ای از فیزیک که به بررسی علم حرکت و سکون می‌پردازد.

مکانیک مهندسی: عبارت است از مجموعه‌ای از اصول و قواعد که از ریاضیات و فیزیک منتج گشته و برجنبه‌های کاربردی مسائل تأکید دارد. (Engineering Mechanics)

علم مکانیک:
- ۱) جامدات
  - ۱) صلب (rigid): تغییر شکل در اثر نیروی وارده ندارند ← سکون، حرکت
  - ۲) تغییر شکل پذیر (defermable)
- ۲) سیالات
  - ۱) مایعات ← تغییر حجم ندارند
  - ۲) گازها ← تغییر حجم دارند

۱) شاخه‌ای از علم مکانیک که به بررسی اجسام جامد صلب در حال سکون می‌پردازد می‌گویند استاتیک.

۲) شاخه‌ای از علم مکانیک که به بررسی اجسام جامد صلب در حال حرکت می‌پردازد می‌گویند دینامیک.

۳) شاخه‌ای از علم مکانیک که به بررسی اجسام جامد تغییر شکل پذیر می‌پردازد می‌گویند مقاومت مصالح.

ضرورت فراگیری مکانیک مهندسی:

ایفای مسئولیت مهندسی:
- ۱) قدرت تجزیه و تحلیل موثر و صلاحیت در سطح عالی
- ۲) ارائه مهارتهای حرفه‌ای

ایفای مسئولیت مهندسی با استفاده از دو نکته گفته شده قابل امکان شدن است.

نقش ریاضیات :

انتظارات ما از انشتین : ایجاد توانایی کمی حرفه‌ای :

۱) روشی منطقی و ساده

۲) با استفاده از چند اصل اساسی که قبلاً ذکر شده

مکانیک پایه بر ۶ اصل استوار است :

۱، ۲، ۳ — قوانین نیوتن

۴ — قانون متوازی الاضلاع

۵ — اصل قابلیت انتقال

۶ — قانون گرانش نیوتن

— ساعات مراجعه : دوشنبه، چهارشنبه ساعت ۱۱ تا ۱۲ (دفتر : دانشکده بتن)

توزیع نمرات :

میان ترم	30%	۶ نمره
پایان ترم	50%	۱۰ نمره
کلاس حل تمرین	10%	۲ نمره
کوئیز	10%	۲ نمره

حمید کاظم

فصل اول : نیرو و مجموعه‌ی نیروی — Force & Force Systems

تعریف نیرو : عبارتست از عمل یک جسم بر روی جسم دیگر . کششی است که حرکت یا سکون جسم را تغییر می‌دهد و یا در جسم تغییر شکل ایجاد کند.
بنابراین نیرو یک کمیت برداری است.

تقسیم نیرو از نظر طرز اعمال :
- حجمی : در کل ذرات جسم وارد می‌شود (مانند ثقل)
- تماسی : از راه تماس وارد می‌شود.

اسم دیگر نیروی حجمی القائی یا از راه دور است . تمام نیروها در مکانیک به غیر از ثقل ، تماسی هستند.

تقسیم از نظر نحوه تاثیر :
- خارجی : نیرویی است که از یک عامل خارجی وارد می‌شود
- داخلی : نیرویی است که توسط یک عامل خارجی در داخل جسم ایجاد می‌شود

نیروهای خارجی مسئولیت حرکت و سکون و نیروهای داخلی مسئولیت تغییر شکل جسم را بر عهده دارند.

تقسیم از نظر نقطه اثر :
- متمرکز (Concentrated) : نقطه اثرش یک نقطه است.
- گسترده (Distributed) : نقطه اثرش یک سطح است (کف دست بر دیوار)

در واقعیت عموم نیروها گسترده هستند . اما در مطالعات سیستماتیک اکثر نیروها را که واقعاً گسترده هستند متمرکز فرض می‌کنیم . اگر سطح تاثیر نیرو نسبت به سطح کل جسم ناچیز باشد نیرو را متمرکز فرض می‌کنیم.

$\vec{F}$ اندازه نیرو: اندازه $= |\vec{F}| = F$

سیستم‌های احاد تصمیم می‌گیرند کمیت‌ها (واحدها) با هم رابطه داشته باشند. مثلاً در $F = ma$ نیرو با جرم . طول/ثانیه² رابطه دارند. وظیفه‌اش این است که کمیت‌ها را با هم سازگار کنند.

کمیت	SI	MKS	اروپایی
طول	m	m	ft
زمان	sec	sec	sec
جرم	kg	kgm (جرم)	lbm / slug
نیرو	N	kgf	lbf

یک نیوتن در سیستم SI نیرویی است که وقتی به جسمی به جرم 1kg وارد می‌شود به آن شتاب $1\,\frac{m}{s^2}$ می‌دهد.

$1\,N = 1\,kg \times 1\,\frac{m}{s^2}$

$\Longrightarrow 1\,kgf = 9.81\,N$

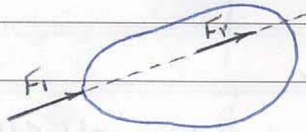
$1\,kgf = 1\,kgm \times 9.81\,\frac{m}{s^2}$

یک اسلاگ جرم جسمی است که اگر به آن یک پوند نیرو وارد شود شتاب یک فوت/ثانیه² بگیرد.

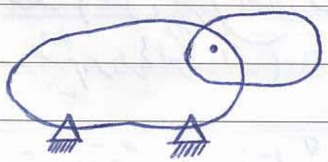
$1\,lbf = 1\,lbm \times 32.2\,\frac{ft}{sec^2}$

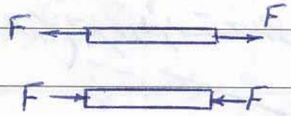
$1\,lbf = 1\,slug \times 1\,\frac{ft}{sec^2}$ $\Longrightarrow 32.2\,lbm = 1\,slug$

اصل قابلیت انتقال: نیروهای اعمال شده به جسم صلب می‌توانند بر روی راستای خود آزادانه جابجا شوند بدون آنکه بر روی اثرات خارجی نیروها روی جسم صلب تغییری ایجاد شود.

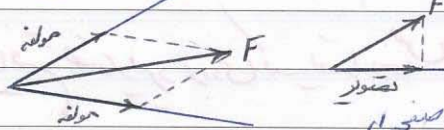


اگر F_1 حذف و F_2 اعمال شود هیچ تغییری در اثر ایجاد نمی‌شود.

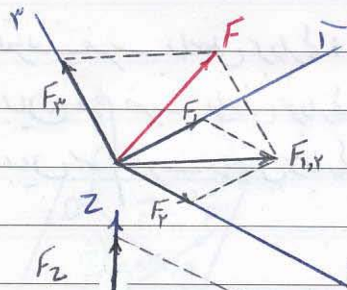


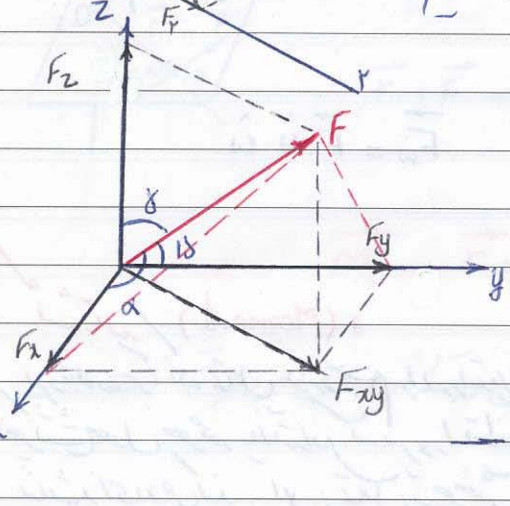


نمایش نیرو برحسب مولفه‌های آن: مولفه عبارتست از بردارهای حاصل از تجزیه که جمع آنها بردار اصلی خواهد بود.



برای مولفه بندی نیروی F بر روی سه امتداد ۱، ۲ و ۳ در نقطه ابتدا صفحه‌ای از امتداد ۱ و ۲ عبور می‌دهیم. مولفه‌های F را بر روی صفحه و امتداد ۳ رسم می‌کنیم و به ترتیب $F_{1,2}$ و F_3 می‌نامیم. آنگاه مولفه‌های F_{12} را بر روی امتداد ۱ و ۲ رسم می‌کنیم. حاصل سه مولفه F_1 و F_2 و F_3 را داریم.





$$F_x = |F|\cos\alpha = |F|.l$$

$$F_y = |F|\cos\beta = |F|.m$$

$$F_z = |F|\cos\gamma = |F|.n$$

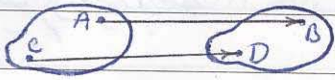
$$m^2 + n^2 + l^2 = 1$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

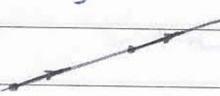
$$\vec{F} = |F|\cos\alpha\,\hat{i} + |F|\cos\beta\,\hat{j} + |F|\cos\gamma\,\hat{k}$$

انواع بردارها:

۱) بردار آزاد: محدود به یک راستای خاص در فضا نیست

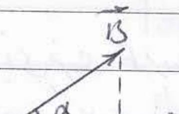


۲) بردار لغزنده: برداری است که محدود به یک نقطه از خاص در فضا نیست و در فضای راستا جابه جا می‌شوند (مثل نیروی اعمال شده به جسم صلب بدون تغییر در اثرات خارجی نیروها، که در راستای خط همیشه بردار لغزنده اند)



۳) بردار ثابت: دقیقاً در راستا و نقطه اثر خود اعمال می‌شود و تغییر مکان آن ایجاد می‌شود. (نیروهای وارد بر اجسام غیر صلب)

یافتن تصویر نیرو بر روی یک امتداد خاص با استفاده از ضرب داخلی بردارها:

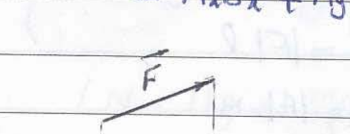


تعریف ضرب داخلی بردارها: $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$

بیان دوم ضرب داخلی بردارها:

بیان سوم ضرب داخلی بردارها: $\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x i+A_y j+A_z k)\cdot(B_x i+B_y j+B_z k)$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

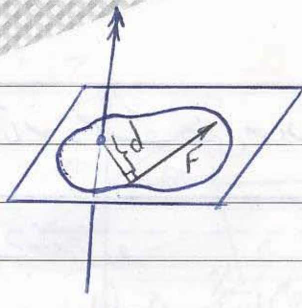


$F_\omega=\vec{F}\cdot\hat{\omega}$ $\qquad$ $\vec{F}_\omega=\vec{F}\cdot\hat{\omega}\,\hat{\omega}$

گشتاور (Moment):

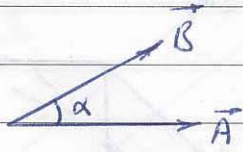
نیرو علاوه بر اینکه تمایل دارد جسم را در راستای خود جابه جا کند تمایل به چرخش حول هر محور یا امتدادی که نیرو را قطع نکند و با آن موازی نیز نباشد ایجاد می‌کند. این تمایل به چرخش را گشتاور گویند.

* گشتاور برداری آزاد است.



$|M| = F.d$

$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$



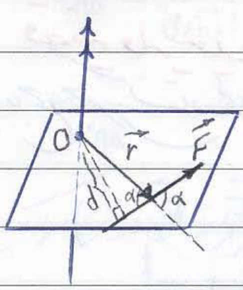
ضرب خارجی بردارها :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} : \begin{cases} |C| = |A||B| \sin\alpha \\ \text{مقدار} = \text{عمود بر صفحه دو بردار} \\ \text{جهت} = \text{طبق قانون دست راست} \end{cases}$$

اگر چهار انگشت دست راست از بردار اول به سمت بردار دوم در جهت زاویه کوچکتر بچرخد جهت انگشت شست جهت بردار حاصلضرب است .

در تعریف ضرب خارجی راستا تعریف نشده است .

بیان گشتاور با استفاده از مفهوم ضرب خارجی بردارها :



$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{cases} \text{مقدار} = |r||F| \sin\alpha = F.d \\ \text{امتداد} = \text{عمود بر صفحه دو بردار} \\ \text{جهت} = \text{طبق قانون دست راست} \end{cases} = \vec{M_O}$$

$$\Rightarrow \vec{M_O} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}$: برداری است که ابتدای مرکز گشتاور و انتهای آن نقطه ای بر روی بردار $\vec{F}$ است .

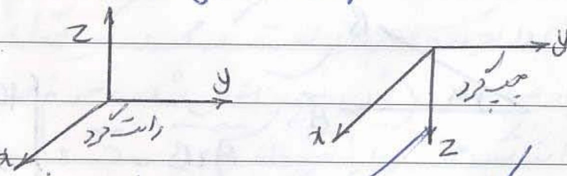
که بردار موقعیت

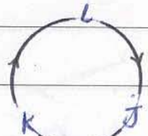
ذره را تا نبود همت عالی حافظ — طالب چشمه خورشید درخشان نشود

بیان دوم ضرب خارجی:

$$A \times B = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$



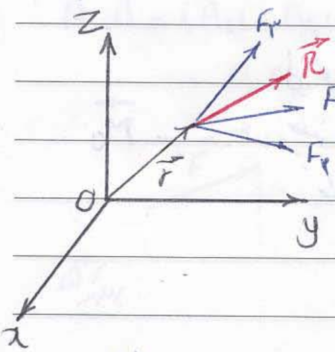


در دستگاه راستگرد: $i \times j = k$ ، $j \times k = i$ ، $k \times i = j$

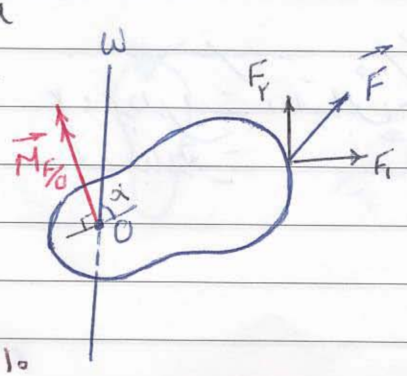
$$\rightarrow A \times B = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

قضیه وارینیون (Varignon's Theorem): گشتاور یک نیرو نسبت به یک نقطه برابر است با مجموع جبری گشتاورهای مولفه‌های نیرو نسبت به همان نقطه.

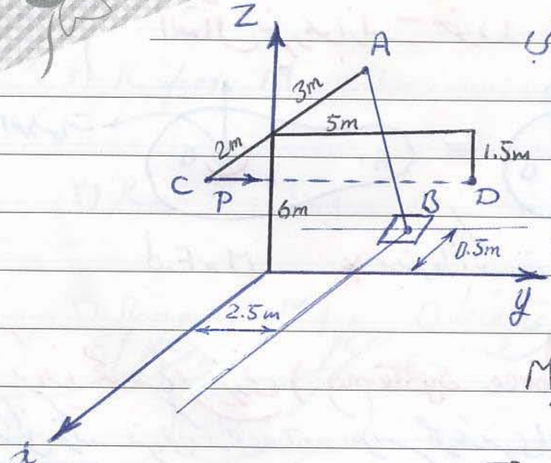


$$\vec{M}_{R/O} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots)$$
$$= \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \vec{r}\times\vec{F}_3 + \dots$$
$$= \vec{M}_{F_1/O} + \vec{M}_{F_2/O} + \vec{M}_{F_3/O} + \dots$$



گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور دلخواه در فضا:

$$\vec{M}_{F/O} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$M_{F/\omega} = (r \times F)\cdot\hat{\omega}$$
$$\vec{M}_{F/\omega} = [(r \times F)\cdot\hat{\omega}]\,\hat{\omega}$$



مثال: عضو شکسته نشان داده شده توسط کابلی در نقطه B مهار شده است و یک نیروی $P=8kN$ قرار دارد. گشتاور نیروی P را حول محور AB بیابید.

حل:

$$M_{P/AB} = \vec{r} \times \vec{P} \cdot \vec{\lambda}_{AB} = \vec{M}_{P/A} \cdot \vec{\lambda}_{AB}$$

$$\vec{P} = |P| \cdot \vec{\lambda}_{CD} = |\vec{P}| \cdot \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = 8 \times \frac{-2\hat{i} + 5\hat{j} - 1.5\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 1.5^2}}$$

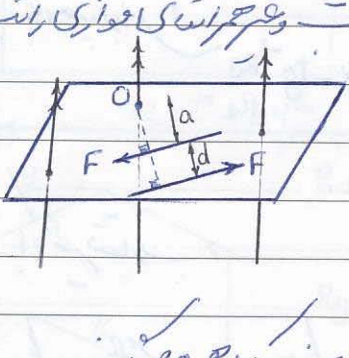
$$= -2.86\hat{i} + 7.14\hat{j} - 2.14\hat{k}$$

$$\vec{M}_{P/A} = \vec{r}_{AC} \times \vec{P} = (5\hat{i}) \times (-2.86\hat{i} + 7.14\hat{j} - 2.14\hat{k})$$
$$= 35.7\hat{k} + 10.7\hat{j}$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{2.5i + 2.5j - 6k}{\sqrt{2.5^2 + 2.5^2 + 6^2}} = 0.36\hat{i} + 0.36\hat{j} - 0.86\hat{k}$$

$$M_{P/AB} = -26.85 \ kN/m$$

زوج نیرو: گشتاور حاصل از دو نیروی مساوی با جهت مختلف و غیر هم‌راستای موازی را زوج نیرو یا Couple می‌گویند.

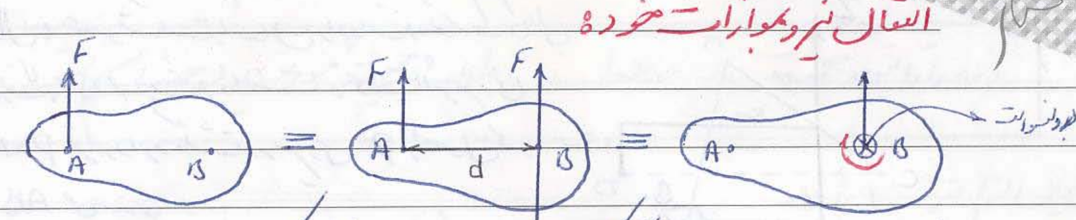


$$M_O = F(a+d) - F.a = F.d$$

* نقطه O را هر جای از صفحه بگیریم M_O تغییر نمی‌کند و فقط به مقدار نیرو و فاصله بین دو نیرو دارد.

گشتاور حاصل از یک زوج نیرو همواره بردار آزاد است. زوج نیرو را آزاد هم می‌گویند.

انتقال نیرو بموازات خودش:



* به شرطی که رفتار خارجی جسم صلب تغییر نکند

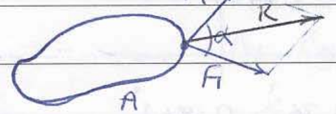
$M = F.d$

برآیند مجموعه‌های نیرویی (Resultant of force systems): عبارت است از ساده‌ترین شکل ترکیب نیرویی که می‌توان جایگزین مجموعه نیروی اصلی شود بدون آنکه در رفتار خارجی جسم صلب تغییری ایجاد شود.

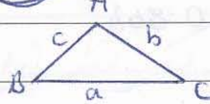
۱) مجموعه‌های نیرویی دو بعدی یا صفحه‌ای (Two-dimensional force systems):

الف) متقارب:

۱) دو برداری:

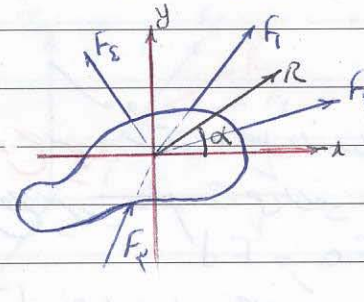


$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\alpha}$$



$$\rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

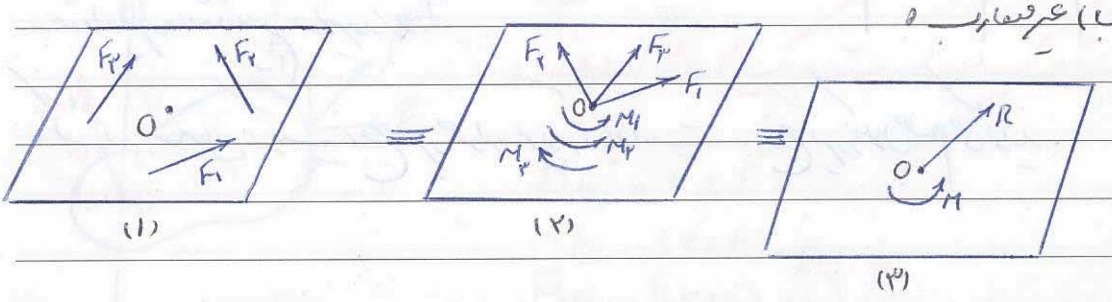
۲) چند برداری:



$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ R_y = \sum F_{iy} \end{cases} \qquad \alpha = tg^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$

ب) غیر متقارب:



بحث در مورد ۳ :

۱) اگر نقطه O را جوری انتخاب کنیم R تغییر نمی‌کند ولی M می‌تواند تغییر کند.

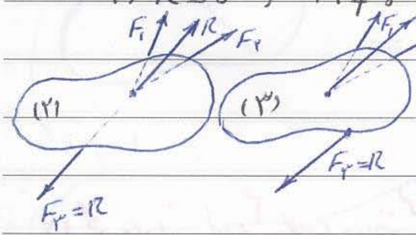
$1)\ R \neq 0\ ,\ M = 0$ یا $\neq 0$

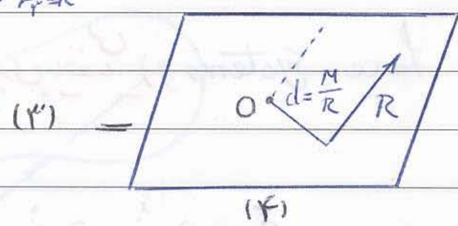
۲) هیچ حرکتی در جسم تولید نمی‌شود (حالت تعادل) →

$2)\ R = 0\ ,\ M = 0$

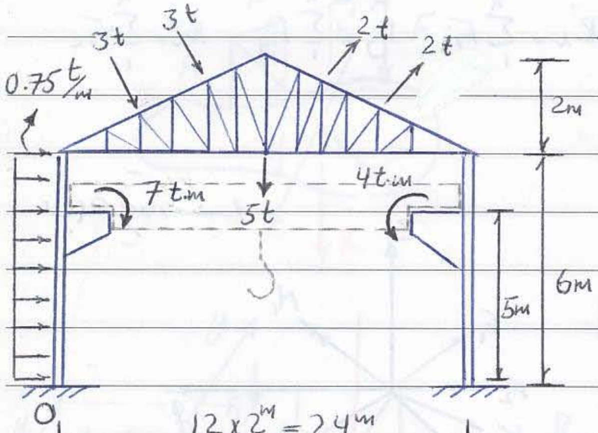
۳) در این حالت M به نقطه O بستگی ندارد و برای تمام نقاط O M ثابت است. این حالت زوج نیرو است.

$3)\ R = 0\ ,\ M \neq 0$

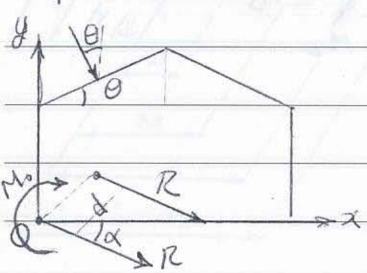




مثال: قاب یک سالن صنعتی مطابق شکل تحت اثر نیروهای نشان داده قرار دارد. نیروهای مایل بر سطح شیب‌دار عمودند. مقدار و محل دقیق برآیند این مجموعه را یافته و موقعیت آن را روی شکل نسبت به نقطه O مشخص نمایید.



$$\theta = tg^{-1}\frac{2}{12} = 9.46^\circ$$



$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0.75 \times 6 + 2 \times 3 \times \sin 9.46 + 2 \times 2 \times \sin 9.46$$
$$= 6.14t$$

$$R_y = -2 \times 3 \times \cos 9.46^\circ + 2 \times 2 \cos 9.46 - 5 = -6.97t$$

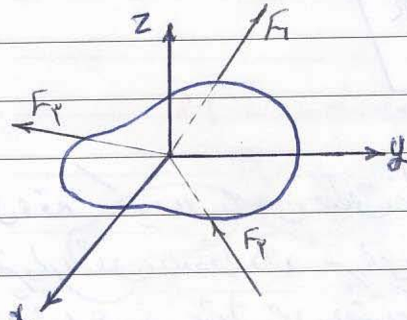
$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 9.29t$$

$$\alpha = tg^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \text{[redacted]} -48.6^\circ$$

$$\begin{aligned}\overset{+}{\curvearrowright}\ \sum M_O &= +0.75\times6\times3 + 3\times\sin 9.46\,(6+\tfrac{2}{3})\\ &+ 3\times\cos 9.46\times4 + 3\times\sin 9.46\times(6+\tfrac{4}{3})\\ &+ 3\cos 9.46\times8 + 2\sin 9.46\,(6+\tfrac{4}{3})\\ &- 2\cos 9.46^\circ\times16 + 2\sin 9.46\times(6+\tfrac{2}{3})\\ &- 2\cos 9.46\times20 + 5\times12 + 7 - 4\\ &= +52.5\ t.m\end{aligned}$$

$$d = \frac{M_\circ}{R} = 5.65\ m$$

۲) مجموعه نیروهای سه بعدی یا فضایی (Three-dimentional force systems)

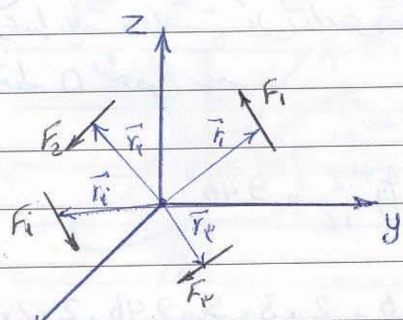


الف) متقاطع:

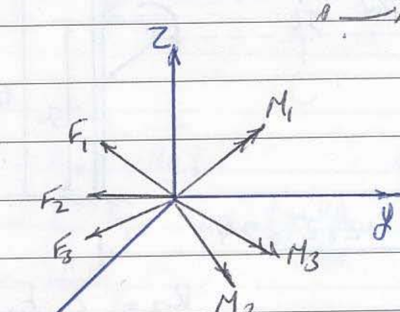
$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

$$R_x = \sum_{1}^{n} F_{ix} \quad R_y = \sum_{1}^{n} F_{iy} \quad R_z = \sum_{1}^{n} F_{iz}$$

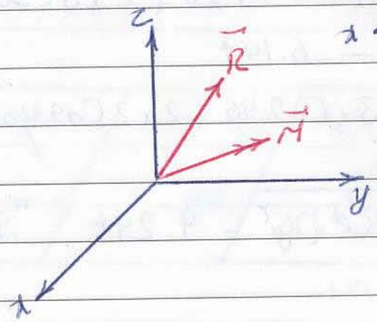
ب) غیر متقاطع:



≡

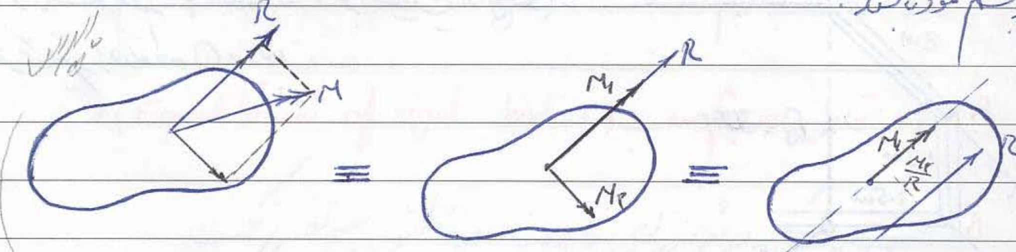


≡

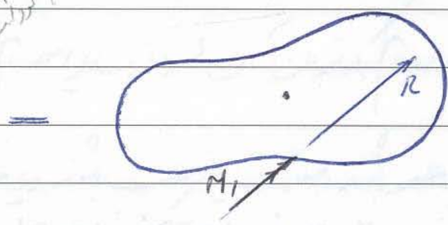


$$\vec{M} = \sum_{1}^{n} \vec{M_i} = \sum_{1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

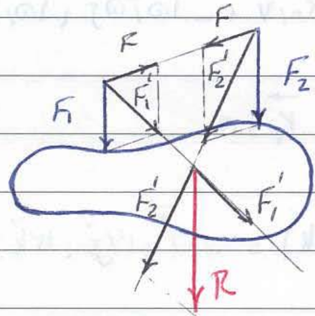
در حالت کلی به هیچ وجه نمی‌توان R ، M را به یک R تنها تبدیل کرد مگر زمانی که R ، M بر هم عمود باشند.



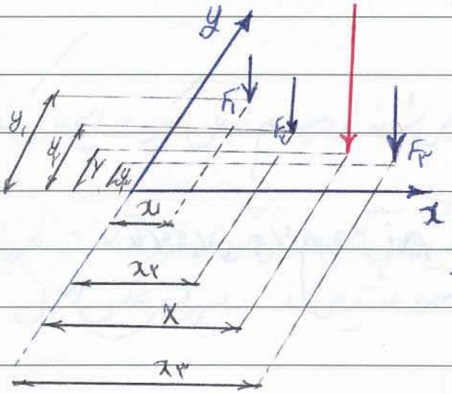
برآیند آچار (پیچ گوشتی وار)



برآیند نیروهای موازی :



$$|R| = \sum_{1}^{n} F_i$$

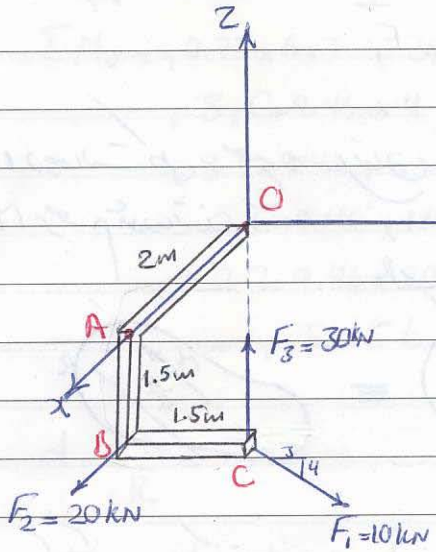


$$\begin{cases} R.\bar{X} = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots \\ R.\bar{Y} = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \cdots \end{cases}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i x_i}{R}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum F_i y_i}{R}$$

مثال: عضو نشان داده شده تحت اثر نیروهای F_1 و F_2 و F_3 مفروض است. F_1 در صفحه‌ای به موازات صفحه yz و F_2 به موازات محور x است. برآیند این مجموعه نیرو را در نقطه O بیابید.



$$F_1 = +6\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$F_2 = 20\,i$$

$$F_3 = 30 \times \frac{\overrightarrow{CO}}{|CO|} = 30 \times \frac{-2\hat{i} - 1.5\hat{j} + 1.5k}{\sqrt{2.25 + 2.25 + 4}} = -20.7\,i - 15.5\,\hat{j} + 15.5\,k$$

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OC} \qquad \vec{r}_2 = -1.5\hat{k} + 2\hat{i} \qquad \vec{r}_3 = 0$$

$$M_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (2\hat{i} + 1.5\hat{j} - 1.5k) \times (6\hat{j} - 8k) = -3\hat{i} + 16\hat{j} + 12\vec{k}$$

$$M_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (-1.5k) \times (20\hat{i}) = -30\,j$$

$$M_3 = r_3 \times F_3 = 0$$

$$\Sigma M = -3\hat{i} - 14\hat{j} + 12k \qquad \Sigma F = -0.7\vec{i} - 9.46\vec{j} + 7.46\vec{k}$$

اگر رهبران ما مثل شیاطین هستند طوری خیابان را جارو کنند که گویی میکل آنژ نقاشی می کند یا بتهوون موسیقی می سازد یا شکسپیر شعر می گوید. خیابان را چنان جارو کنند که ساکنان آسمان و زمین وقتی آن را می بینند درنگ کرده و بگویند این کارگر رفتگر ارزشمند است که کارش را خوب انجام داده است. (Martin Loter King)

فصل دوم: تعادل اجسام صلب (Equilibrium of rigid bodies):

جسم صلب: جسمی است که در اثر نیروهای وارده فاصله نقاطش هیچ تغییری نکند.

مجموعه مکانیکی: عبارتست از یک جسم یا مجموعه ای از اجسام که بتوان آن ها را از سایر اجسام محیط مجزا کرد.

اجزای تشکیل دهنده یک مجموعه مکانیکی می توانند یک یا چند عضو باشند صلب، یا غیر صلب باشند و یا جامد، سیال یا مخلوط باشند.

دیاگرام آزاد مجموعه مکانیکی (Free body diagram):

نیرو
- خارجی
  - (۱) عمل action
  - (۲) عکس العمل reaction
- داخلی

نیروهای عمل: نیروهایی هستند که توسط عوامل خارجی به جسم وارد می شوند و در جسم تمایل به حرکت ایجاد می کنند.

نیروهای عکس العمل: نیروهایی هستند که توسط زمین و سایر اجسام تکیه گاهی به جسم وارد می شوند و مخالفت با بروز حرکت در جسم می نمایند و جسم را به حالت تعادل در مکان اولیه محدود می کنند. به نیروهای عکس العمل نیروهای مقیدکننده گویند.

دیاگرام آزاد یک مجموعه مکانیکی: عبارتست از مجموعه یا جسم منفک شده از کلیه اجسام بیرونی و مرتبط با آن که توسط یک نمودار نشان داده شود.

مراحل رسم دیاگرام آزاد:

۱) انتخاب جسم یا مجموعه مکانیکی که باید از محیط بیرونی انفکاک یابد.

۲) رسم حدود خارجی جسم انتخاب شده.

۳) نشان دادن کلیه نیروهای خارجی شامل عمل و عکس العمل (معلوم و مجهول) بر روی جسم

نکته ۱: نیروهای معلوم تماماً توسط بردارهایی که مقدار، امتداد و جهت آن‌ها معلوم است نشان داده می‌شود

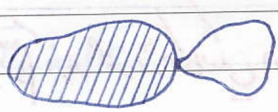
نکته ۲: نیروهای مجهول توسط بردارهایی که مقدار آن‌ها مجهول است نشان داده می‌شود. اگر امتداد نیرو نیز مجهول باشد توسط یک زاویه مجهول یا با استفاده از مولفه‌های کارتزین نشان داده می‌شود. اگر جهت نیرو نیز مجهول باشد به صورت دلخواه فرض می‌شود. پس از انجام محاسبات در صورت مثبت بودن جواب فرض فوق تأیید می‌شود، در غیر اینصورت جهت واقعی نیرو خلاف جهت فرض شده است.

۴) نشان دادن ابعاد، فواصل و محورهای مختصات در صورت لزوم

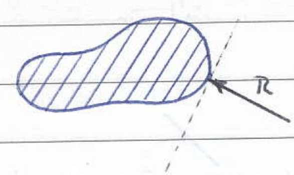
۱) تعادل اجسام صلب در صفحه (دو بعدی):

الف) شناخت عکس العمل‌ها:

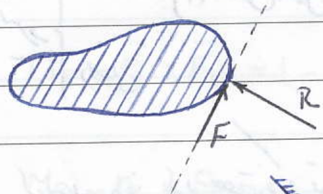
① تماس دو جسم:



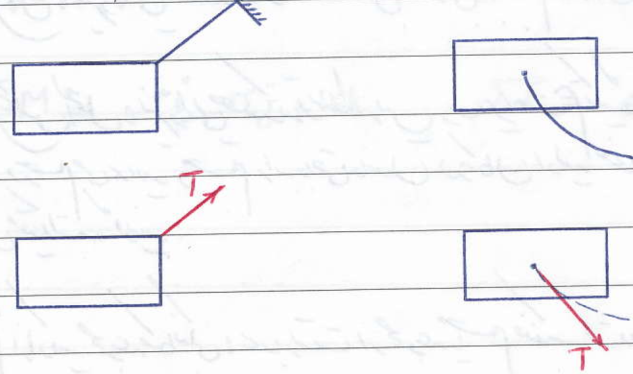
محل تماس سطوح صاف باشد:



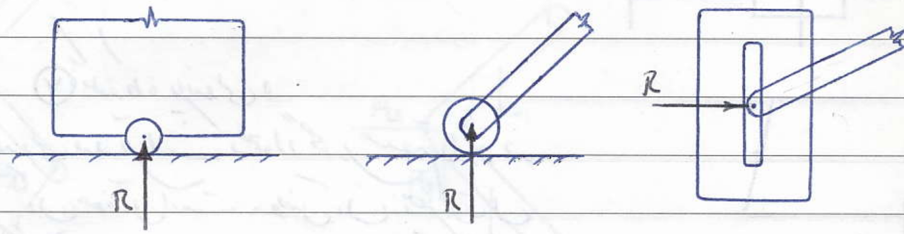
محل تماس سطوح زبر باشد:



② از کابل بر جسم:

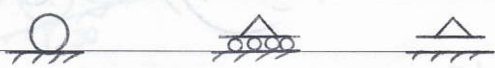


③ تکیه‌گاه غلتکی (Roller Support) :



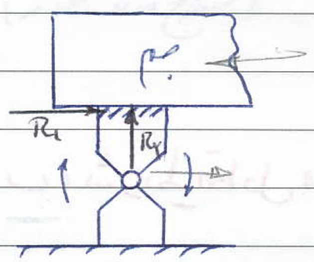
تا زمانی که A به زمین برسد
تکیه‌گاه غلتکی است.

* تکیه‌گاه غلتکی فقط جلوی یکی از مولفه‌های حرکت انتقالی را می‌گیرد.
* عمود بر هر مولفه‌ای که آزاد می‌باشد تکیه‌گاه غلتکی (عکس العمل) وجود دارد.

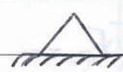


علامت اختصاری تکیه‌گاه غلتکی :

④ تکیه‌گاه مفصلی (Pinned Support) :

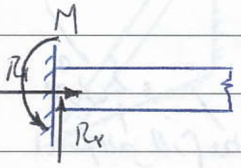


از جهت‌ای دیگر فقط جلوی دو تا از مولفه‌ها را می‌گیرد و
فقط حرکت چرخشی دارد.



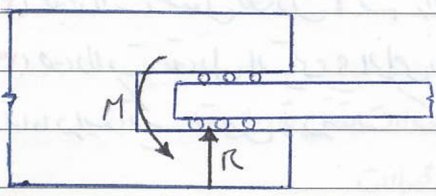
علامت اختصاری تکیه‌گاه مفصلی :

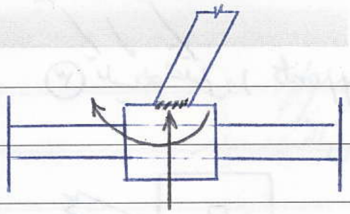
⑤ تکیه‌گاه گیردار (Fixed Support) :



همه مولفه‌ها را محدود می‌کند و هیچ یک از سه نوع حرکت را
ندارد. (تکیه‌گاه ۳ مجهولی)

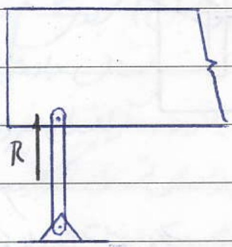
⑥ تکیه‌گاه گیردار دو مجهولی :



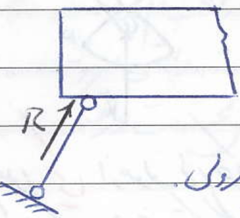


⑦ تکیه‌گاه پاندولی :

میله پاندولی میله‌ای است که معمولاً محوری مستقیم دارد و دو انتهای آن مفصل است . وزن این عضو قابل صرف‌نظر کردن است و هیچ نیروی عمودی بر محور خود را تحمل نمی‌کند.



* تکیه‌گاه پاندولی شبیه تکیه‌گاه غلتکی است .



* نیروی عکس‌العمل نیرویی است در راستای محور تکیه‌گاه پاندولی.

⑧ تکیه‌گاه فنری (الاستیک) :

ب) شرایط تعادل :

تعادل : $R=0$, $M=0$

شرایط تعادل ⟵
$$\begin{cases}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\\ \Sigma M=0\end{cases}$$
(حول z)

ویژگی‌ها :

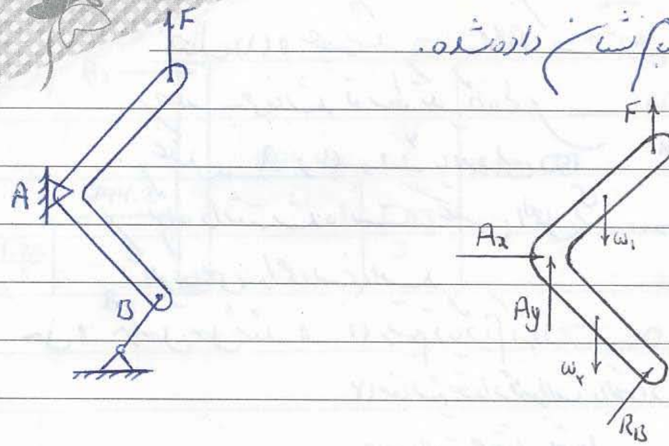
۱) شرایط لازم و کافی تعادل : برقراری سه رابطه بالا شرط کافی تعادل است .

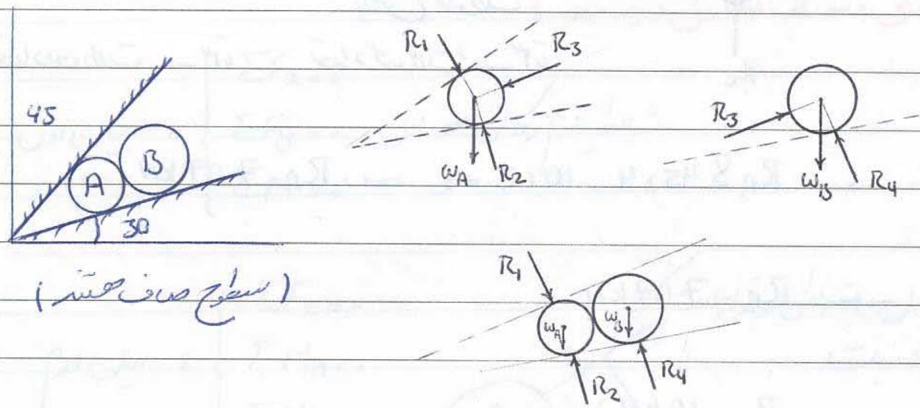
۲) معادلات مستقل تعادل : سه رابطه بالا از هم مستقلند .

۳) معادلات تعادل استاتیکی : اجزای مادی جسم ثابت باشد (حرکت سرعت ثابت دارد)

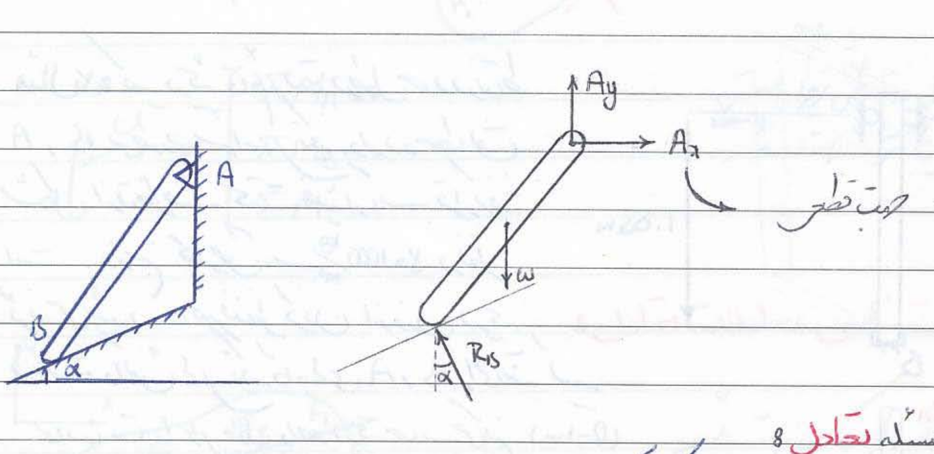
اما ما در استاتیک تعادل را در حالت سکون در نظر می‌گیریم ، به همین علت تعادل استاتیکی را در نظر می‌گیریم.

مثال ها: مطلوبست رسم دیاگرام آزاد اجسام نشان داده شده.





(سطوح صاف هستند)



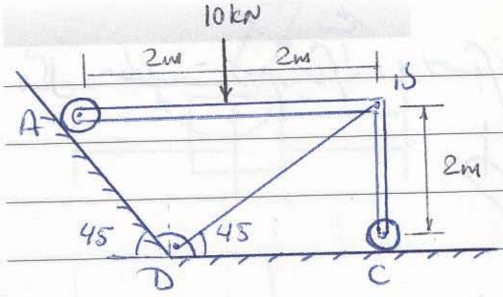
مراحل حل یک مسئله تعادل:

۱) رسم دیاگرام آزاد

۲) مقایسه تعداد مجهولات با تعداد معادلات مستقل تعادل

۳) اعمال معادلات تعادل و یافتن مجهولات

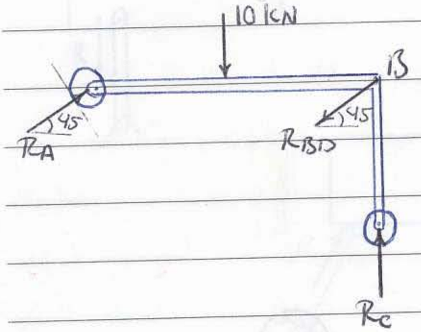
مثال (۱): عضو شکسته ABC که صلب می‌باشد توسط تکیه‌گاه‌های مفصلی A و C و میله بادبندی BD نگاه داشته شده است. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را بیابید.



حل: مراحل حل مسئله: ۱) رسم دیاگرام آزاد

۲) مقایسه تعداد مجهولات با تعداد معادلات مستقل تعادل

۳) اعمال معادلات تعادل و یافتن مجهولات



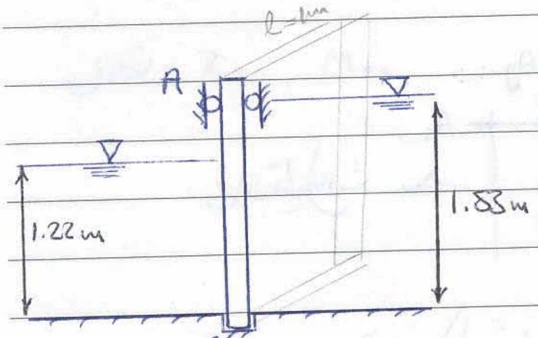
تعداد معادلات ← ۳ تا   تعداد مجهولات ← ۳ تا

$$\overset{+}{\curvearrowright}\quad \Sigma M_B = 0 \rightarrow R_A \sin 45 \times 4 - 10 \times 2 = 0 \Rightarrow R_A = 7.07\ \text{kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_B = 7.07\ \text{kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_C = 10\ \text{kN}$$

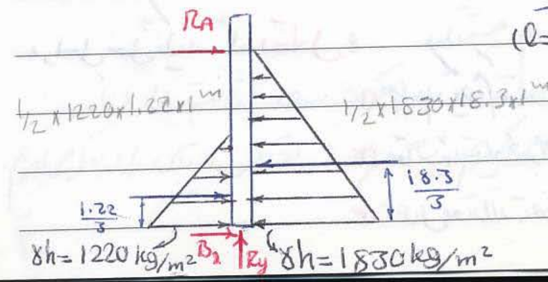
مثال (۲): یک دریچه قائم و بسته در طول خود در نقاط A و B به طور مفصلی تکیه دارد و مطابق شکل از دو طرف تحت فشار آب قرار گرفته است. وزن مخصوص آب $\gamma = 1000\ \frac{kg}{m^3}$ در نظر گرفته می‌شود. با صرف‌نظر کردن از وزن دریچه شدت واکنش‌های تکیه‌گاه‌های A و B را تعیین کنید.

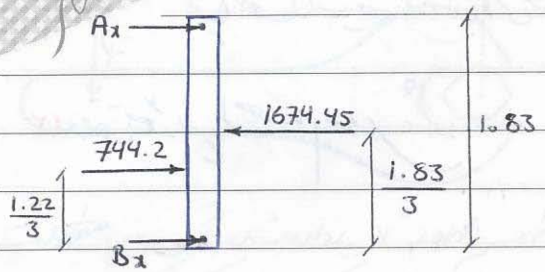


محاسبات را برای طول واحد دریچه حساب می‌کنیم (l=1m)

$$\frac{1}{2} \times 1830 \times 1.83 \times (1\ m) = 1674.45\ kg$$

$$\frac{1}{2} \times 1220 \times 1.22 \times (1\ m) = 744.2\ kg$$





$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_B = 0$$

$$-1674.45 \times \frac{1.83}{3} - 744.2 \times \frac{1.22}{3} - A_x \times 1.83 = 0$$

$$\Rightarrow A_x = 392.77$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 744.2 + B_x + 392.77 - 1674.45 = 0$$

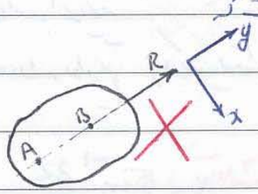
$$\Rightarrow B_x = 537.48$$

ج) بیان‌های مختلف تعادل در صفحه:

بیان اول : $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$ شرایط لازم و کافی تعادل

بیان دوم : $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$

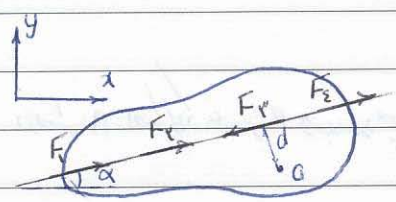
بیان دوم تعادل به شرطی برقرار است که AB عمود بر x نباشد.



بیان سوم : $\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$

بیان سوم تعادل به شرطی برقرار است که A و B و C بر یک راستا نباشند.

د) حالات خاص معادلات تعادل:

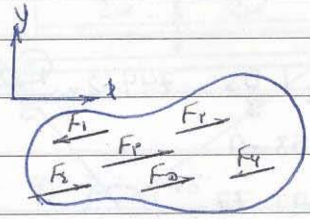


۱) وقتی که همه نیروها در یک راستا باشند.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \cos\alpha\,(F_1 + F_2 + F_4 - F_3) = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 0$$

$\sum F_y = 0$ → به درد نمی‌خورد (چون مستقل نیست) $\sum M_O = 0$ به درد نمی‌خورد.

پس تنها یک معادله به درد می‌خورد.

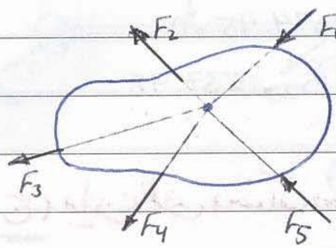


۲) وقتی همه نیروها با محور موازی باشند.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

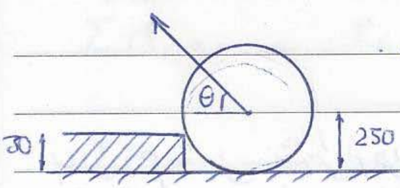
$\sum F_y = 0$ واضح است که $\sum F_x = 0$ پس به درد نمی‌خورد.



۳) وقتی همه نیروها در یک نقطه متقاطع باشند.

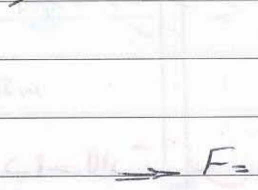
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$



مثال ۵) چرخی به وزن 100 N و به قطر 500 mm مفروض است. در صورتیکه $\theta = 30^\circ$ باشد نیروی لازم F برای بالا بردن چرخ از پله‌ای به ارتفاع 30 mm را حساب کنید.

حل: در این حالت دو مجهول و دو معادله داریم. (در یک نقطه متقاطعند)



$$\alpha = \sin^{-1}\frac{22}{25} \rightarrow \alpha = 61.6^\circ$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

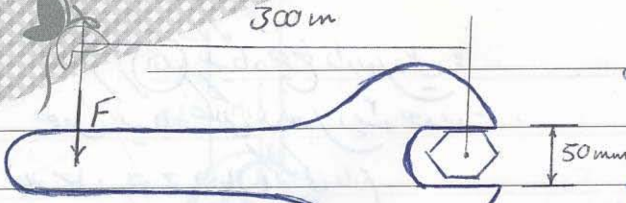
$$\Rightarrow F\cos 30 - R\cos 61.6 = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

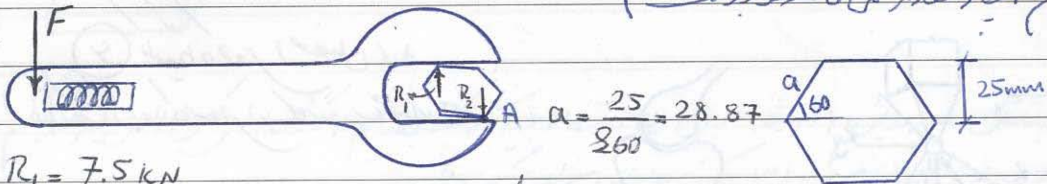
$$\Rightarrow F\sin 30 + R\sin 61.6 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow F = 47.6\,N \ , \ R = 86.62$$

در نقطه A اصطکاک عمود بر R وجود ندارد چون $\sum M_O = 0$ پس $f_s . d = 0 \rightarrow f_s = 0$



مثال: سطوح داخلی یک آچار به شکل نشان داده شده که از فولاد سخت ساخته شده صیقلی می‌باشد. با توجه به شکل جدیدی و چون لبه‌ی تکیه‌گاه‌ها می‌تواند بدون لطمه و تغییر شکل حداکثر نیروی متمرکز برابر 7.5kN را از طرف مهره نشان داده شده تحمل نماید مطلوبست حداکثر نیروی F که می‌توان به بازوی 300 mm است اعمال کرد (فرض کنید در بین مهره و فلز آچار مقدار کمی فاصله بوجود آمده است)



$a = \frac{25}{\sin 60} = 28.87$

$R_1 = 7.5\,kN$

$F + R_2 = R_1$

چون نسبت نقطه F را خواسته بود مرکز دوران را نقطه‌ی اعمال R_2 می‌گیریم.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -R_1 \times 28.87 + F\left(300 + \frac{28.87}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow F = 0.688\,kN$$

۲) تعادل اجسام صلب در فضا (سه بعدی):

الف) شناخت عکس العمل‌ها:

① تماس سطوح اجسام ← ۱) سطح صاف ۲) سطح زبر

② اثر کابل

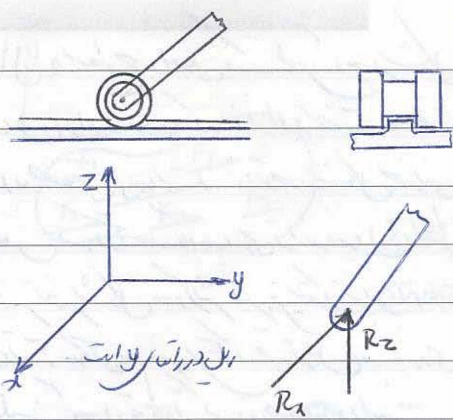
③ تکیه‌گاه فنری

④ تکیه‌گاه بازویی

۵) تکیه‌گاه چرخ دار روی ریل :

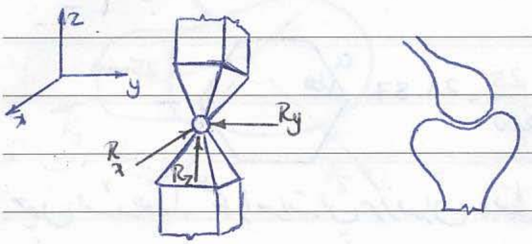
همان تکیه‌گاه غلتکی دو بعدی در ۳ بعد است.

* حول x و z دوران کوچکی داریم.

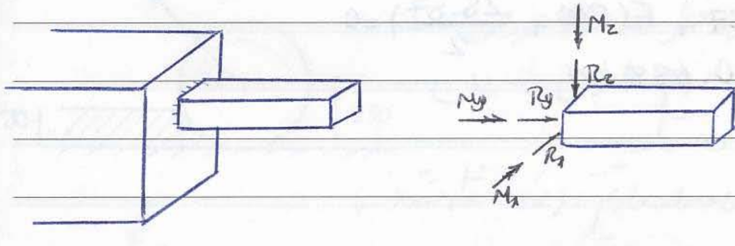


۶) تکیه‌گاه گوی (مفصلی) :

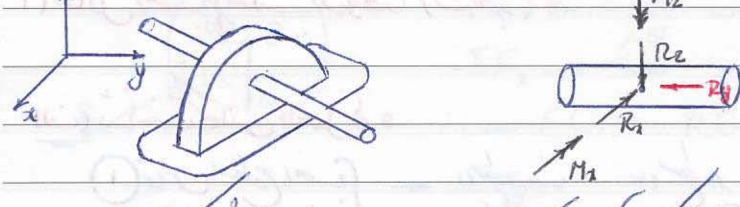
مانند مفصل کاسه‌ای یا کاسه و ساچمه‌ای است



۷) تکیه‌گاه گیردار :



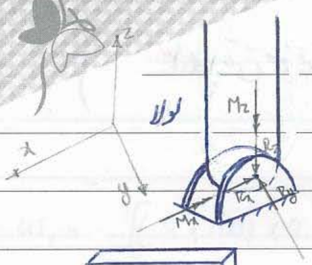
۸) یاتاقان‌ها :



یاتاقان‌ها دو نوع اند. ۱) یاتاقانی که دوران حرکت در جهت y ممانعت می‌شود که Ry ($\xleftarrow{R_y}$) هم داریم. (قطر دو طرف تفاوت دارد)

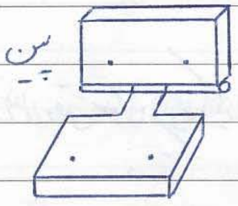
۲) یاتاقانی که ممانعت دوران در راستای y وجود ندارد.

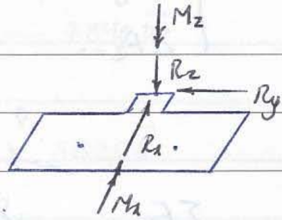
* پس یاتاقان‌ها بسته به نوعشان ۴ یا ۵ عکس العمل دارند.



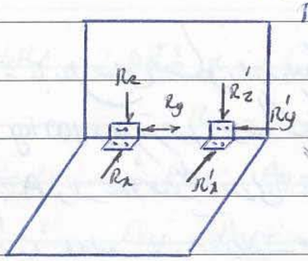
۹) لولا یا پین که:

عمل تکیه‌گاه مفصلی در فضای سه بعدی را دارد.





* در دو یاتاقان یا در دو پین (دو لولا) چون M_z و M_x کار نمی‌کنند می‌توانیم از گشتاور عکس‌العمل صرف‌نظر کنیم و با ۶ معادله ۶ مجهول مسئله را حل کنیم. علت این است که R_x, R_z کوپل ایجاد می‌کند که دیگر احتیاجی به M_x و M_z نیست.

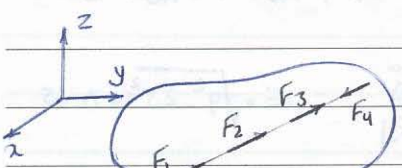


* در کل لولا یا پین یا یاتاقان باید حداقل مجهول به کار رود.

ب) شرایط تعادل:

$$M=0,\ R=0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x=0 & \Sigma M_x=0 \\ \Sigma F_y=0 & \Sigma M_y=0 \\ \Sigma F_z=0 & \Sigma M_z=0 \end{cases}$$

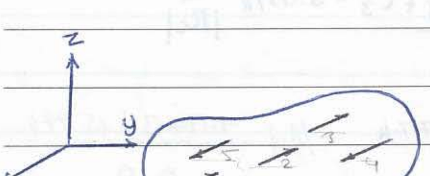
ج) حالات خاص معادلات تعادل:



۱) وقتی همه نیروها در یک راستا باشند.

$\Sigma F_x=0$

تنها یک معادله به درد می‌خورد.

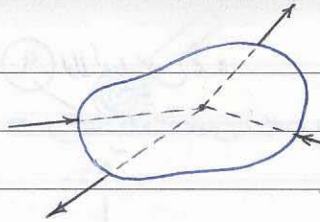


۲) وقتی همه نیروها با هم موازی باشند.

$\Sigma F_x=0 \quad \Sigma M_y=0 \quad \Sigma M_z=0$

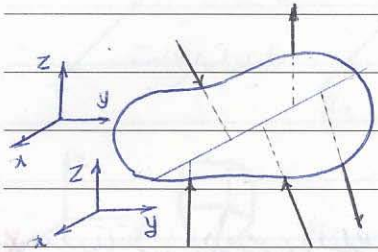
فقط سه معادله به درد بخور است.

۳) وقتی که نیروها به یک نقطه متقارب باشند.

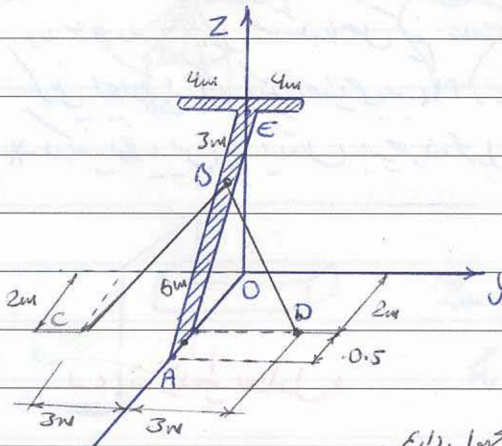


$$\begin{cases}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\\ \Sigma F_z=0\end{cases}$$

۴) وقتی که نیروها به یک خط متقارب باشند.

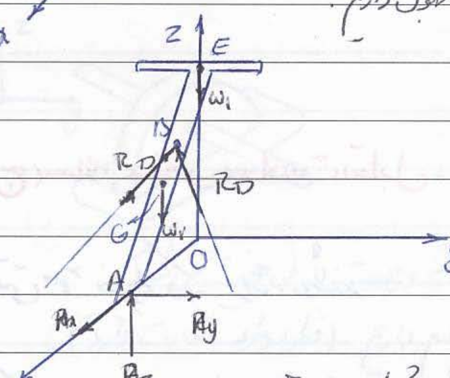


$$\begin{cases}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\\ \Sigma F_z=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\Sigma M_y=0\\ \Sigma M_z=0\end{cases}$$



مثال: بازوی صلبی متشکل از دو میله جوش شده به جرم 100 kg در امتداد طول توسط یک تکیه گاه کروی در نقطه A و دو میله فلزی پاندولی BC و BD نگاه داشته شده است. مطلوبست محاسبه عکس العمل نقطه A و نیروهای عکس العمل در میله های پاندولی.

حل: حالت ۵ حالت خاص چهار است پس ۵ معادله و ۵ مجهول داریم.



$$\overrightarrow{\Sigma M_A}=0$$

$$\vec r_{AB}\times(\vec R_C+\vec R_D)+\vec r_{AE}\times W_1+\vec r_{AG}\times W_2=0$$

$$\vec R_C=|R_C|\frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}\qquad OE=\sqrt{9^2-2.5^2}=8.65$$

$$\Rightarrow \vec R_C=\frac{-(\frac{2}{3}\times2.5-0.5)i+3j+(\frac{2}{3}\times8.65)k}{|\overrightarrow{CB}|}|\vec R_C|$$

$$\vec R_D=|R_D|\frac{\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB}|}\Rightarrow \vec R_D=|R_D|\frac{-1.17i-3j+5.77k}{|\overrightarrow{DB}|}=|R_d|\frac{-1.17i-3j+5.77k}{6.50}$$

$$R_C=\frac{-1.164\,3j+5.76k}{6.59}\times|\vec R_C|$$

$\vec{r}_{AE} = -2.5i + 8.65\hat{k}$ $\quad \vec{r}_{AB} = \frac{2}{3}\vec{r}_{AE}$ $\quad \vec{r}_{AG} = \frac{1}{2}(r_{AE})$

$r_{AB} = -1.66i + 5.77k$

$r_{AG} = -1.25i + 4.325k$

$\omega_1 = -[(8 \times 100) \times 9.8]\hat{k} = -7840\vec{k}$

$\omega_2 = -[(9 \times 100) \times 9.8]\hat{k} = -8820\vec{k}$

$R_D = 37.4 \times \frac{1}{6.6}(-1.17i - 3j + 5.77k) = -6.62i - 16.98j + 32.65k$ (5.66)

$R_C = 5.67(-1.16i + 3j + 5.76k) = -6.57i + 17.01j + 32.65k$

$(-2.6R_C + 2.6R_D)\hat{i} + (2.41R_C + 0.41R_D - 30.66)\hat{j} + (-0.75R_C + 0.75R_D)\hat{k} = 0$

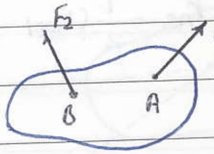
$R_C = R_D = 37.4$ ton

$\sum\vec{F} = 0 \Rightarrow A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\hat{k} + \vec{R}_C + \vec{R}_D + \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0$

$A_xi + A_yj + A_zk$

$+ i(-13.19) + j(0.3) + k(-10594.71) = 0$

$$\begin{cases} A_x = 13.19 \\ A_y = 0.3 \\ A_z = 10594.71 \end{cases} \longrightarrow A = 10594.7$$



تعادل جسم دو نیرویی:

جسم دو نیرویی جسمی است که فقط و فقط دو نیرو به آن اعمال شود (مجهول یا غیر مجهول).

$\Sigma M_A=0 \Rightarrow$ F_2 از A می‌گذرد

$\Sigma M_B=0 \Rightarrow$ F_1 از B می‌گذرد

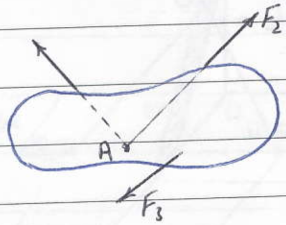
در نتیجه F_1 و F_2 هم راستا هستند.

یعنی اگر جسم دو نیرویی بخواهد در حال تعادل باشد باید حتماً هم راستا باشند.

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_1=F_2$$

نتیجه نهایی: شرط تعادل یک جسم دو نیرویی این است که دو نیرو هم اندازه، هم راستا و مختلف الجهت باشند.

تعادل جسم سه نیرویی:



فرض کنیم سه نیروی F_1 و F_2 و F_3 که در یک صفحه واقعند به جسمی وارد شود.

$\Sigma M_A=0 \Rightarrow$ F_3 از A می‌گذرد

نتیجه نهایی: شرط تعادل جسم سه نیرویی این است که امتداد سه نیرو در یک نقطه متقاطع باشند.

پایداری و ناپایداری مجموعه‌های مکانیکی صلب (اجسام صلب):

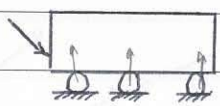
درجات آزادی: کمیت‌های مستقل از یکدیگر یا به تعبیر دیگر مختصات مستقلی هستند که موقعیت یک جسم را نسبت به سایر اجسام محیط پیرامون به طور کامل و دقیق مشخص کند.

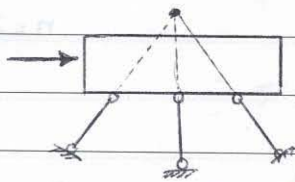
یک جسم صلب در صفحه دارای ۳ درجه آزادی است و در فضا دارای ۶ درجه آزادی است.

جسم پایدار: جسمی است که کلیه درجات آزادی آن محدود شده باشد.

اگر یک جسم در صفحه جسم پایدار داشته باشیم باید سه قید (تکیه‌گاه) فراهم شود. در فضا شش قید تکیه‌گاهی باید فراهم شود (حداقل). این جمله شرط لازم است و کافی نیست.

* نتیجه نهایی: شرط لازم و کافی جهت تأمین پایداری جسم صلب در صفحه تأمین حداقل سه^{2} قید تکیه‌گاهی و در فضا حداقل شش قید تکیه‌گاهی است که نه با هم موازی و نه متقارب باشند. (منظور از موازی نبودن در حالت سه بعدی اعم از آن است که کلیه قیدها تک تک با هم موازی باشند یا در صفحات موازی با هم باشند. و منظور از عدم تقارب در فضا آنست که از یک نقطه متقارب نباشند و نه در صفحه)





ناپایداری:
۱) مکانیکی: ناشی از کمبود تکیه‌گاه
۲) هندسی: ناشی از نامناسب بودن طرز قرارگیری تکیه‌گاه‌ها

ناپایداری را که در آن بعد از کمی حرکت پایداری ایجاد می‌شود ناپایداری جزئی گوییم.

معین و نامعینی احجام صلب:

اگر تعداد معادلات مستقل تعادل برای حل مسئله کافی باشد مجموعه معین (قابل حل) است در غیر اینصورت نامعین (غیر قابل حل) است.

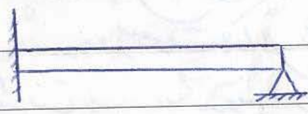
مثال: تفاضل بین مجهولات و تعداد معادلات تعادل = n درجه نامعینی

$n = 1$ ۳ معادله ، ۴ مجهول

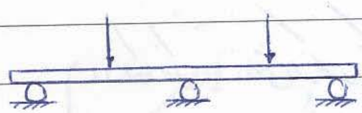
* علت نامعین شدن اضافه داشتن تکیه‌گاه است.

جسمی با دو تا پایه ناپایدار است
اگر ۳ تا پایه داشته باشد پایدار است
اگر [illegible] را کار دو تکیه‌گاه [illegible] پایدار است
ولی [illegible] تعادل ندارد

$n=1$

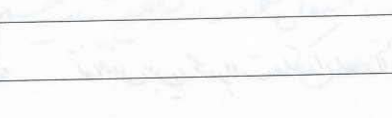


$n=2$

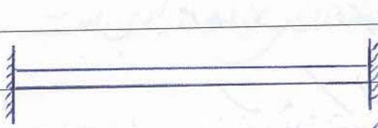


هم از نظر کلی ناپایدار است ولی در این حالت خاص پایدار است. پس اجازه داریم درجه معینی و نامعینی بحث کنیم. ۲ تا معادله می‌توان نوشت در حالیکه ۳ مجهول داریم.

$n=1$



$n=2$



$n=3$

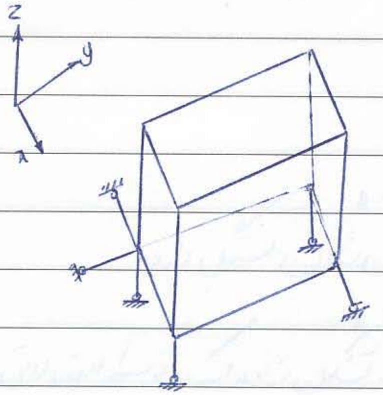
اگر جسمی ناپایدار باشد دیگر درجه معینی و نامعینی آن بحث نمی‌کنیم.

* هنگامی که ناپایداری هندسی ناشی از موازی بودن تکیه گاه است در یک حالت خاص هم در حالت پایدار است وقتی که برآیند مجموعه نیروها موازی نیروهای تکیه گاهی باشد.

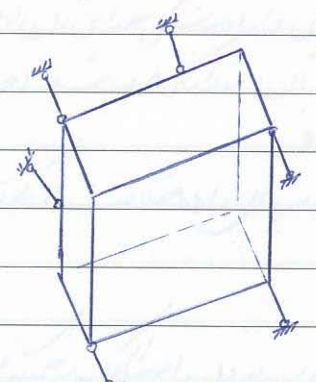
* هنگامی که ناپایداری هندسی ناشی از متقارب بودن نیروهای تکیه گاهی در یک حالت خاص هم در حالت پایدار است و آن وقتی است که برآیند مجموعه نیروها نیز از نقطه تقارب بگذرد.

بیان دیگر معین و نامعین: مجموعه‌های صلبی که برروی قیدهای بیش از حداقل لازم برای تأمین پایداری تکیه کرده‌اند نامعین بوده و درجه نامعینی آن معادل تعداد قیدهای مازاد است. در غیر اینصورت معین است.

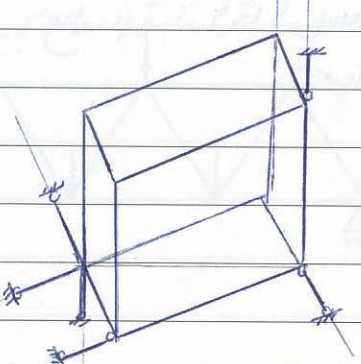
مثال: اجسام نشان داده شده را از جهت پایداری و ناپایداری مقایسه کنید.



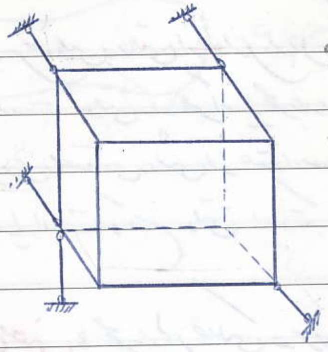
پایدار است. چون شش مولفه تکیه گاهی نه موازی اند و نه متقارب



شکل ناپایدار است. چون ۶ مولفه موازی اند. اما در حالتی که برآیند نیروهای وارده موازی نیروهای تکیه گاهی باشد پایدار می‌گردد.



ناپایدار است. چون نیروهای تکیه گاهی از یک خط می‌گذرند. ولی در حالت خاص که برآیند نیروهای وارده هم از همان خط بگذرد پایدار می‌گردد.



ناپایدار است چون دو صفحه موازی ایجاد کرده است. اما اگر برآیند نیروهای وارده هم موازی صفحه نیروهای تکیه گاهی باشد سیستم پایدار می گردد.

گر لقمه می کنی در شب آدینه ها   تا از صدر نشینان جهنم باشی

حسین کاظم

فصل سوم: تحلیل خرپاها و قاب‌ها:

تعریف سازه (structure): عبارتست از یک عضو یا مجموعه‌ای از اجزا که به منظور تحمل و انتقال نیرو به کار می‌رود.

مراحل تحلیل یک سازه:

۱) بررسی و تأمین پایداری سازه (ناپایدار نباشد)
۲) محاسبهٔ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی
۳) محاسبهٔ نیروهای داخلی
۴) محاسبهٔ تغییر شکل‌های سازه

انواع سازه‌ها از نظر شکل و فرم:

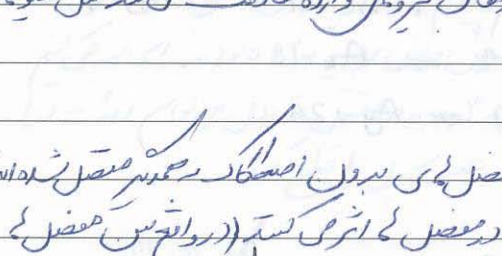
۱) سازه‌های وزنی (Mass structures):
سازه‌هایی هستند که مقاومت و پایداری آن‌ها به وزن‌شان بستگی دارد.

۲) سازه‌های قاب‌بندی (Framed structures):
سازه‌هایی هستند که از یک سری اعضاء نسبتاً سبک تشکیل شده‌اند که توسط اتصالاتی مناسب به هم وصل شده‌اند و پایداری آن‌ها در مقابل نیروهای وارده به شکل هندسی آن‌ها بستگی دارد. وزن کل سازه در مقابل نیروهای اعمال شده به آن مقدار کمی می‌باشد (خرپاها و قاب‌ها)

۳) سازه‌های پوسته‌ای (shell structures):
سازه‌هایی هستند به صورت یک صفحهٔ پیوسته در مقابل نیروهای وارده مقاومت می‌کنند مثل سیلوها

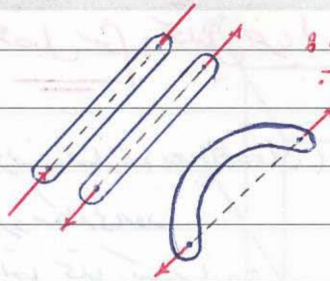
خرپاها (Trusses):

سازه‌ایست متشکل از تعدادی عضو صلب که توسط مفصل‌های بدون اصطکاک به همدیگر متصل شده‌اند و نیروهای وارده به آن فقط نیروهای متمرکزی هستند که در مفصل‌ها اثر می‌کنند (در واقع بین مفصل‌ها و بر روی اعضا هیچ گونه نیرویی اعمال نمی‌گردد.) بدون اصطکاک



* از وزن اعضا صرفنظر می‌شود.

نتیجه‌گیری اساسی از فرضیات مندرج در تعریف خرپا:

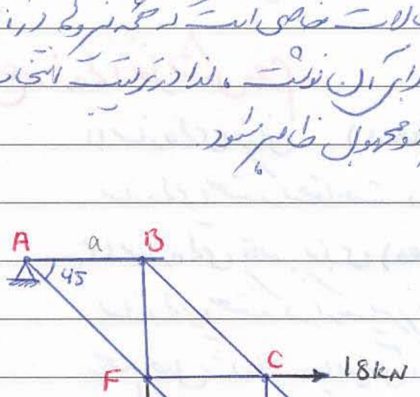


۱) اعضای خرپا همگی اعضای دونیرویی هستند
و همگی تحت فشار یا کشش محوری هستند (خمیده نباشد)

روش‌های تحلیل خرپا:

۱) روش گره یا مفصل (Joint Method): اساس روش گره یا مفصل بر آن است که دیاگرام آزاد مفصل‌های خرپا به طور جداگانه رسم می‌گردد و با اعمال معادلات تعادل مجهولات مربوط به هر دیاگرام آزاد یافته می‌شود. از آنجایی که دیاگرام آزاد هر مفصل یکی از حالات خاصی است که همگی نیروها در آن متقارب هستند حداکثر دو معادله مستقل تعادل می‌توان برای آن نوشت. لذا در ترتیب انتخاب مفصل‌ها باید دقت گردد که در دیاگرام آزاد هر مفصل حداکثر دو مجهول ظاهر شود.

مثال: در خرپای نشان داده شده نیروهای داخلی کلیه اعضا را بدست آورید.



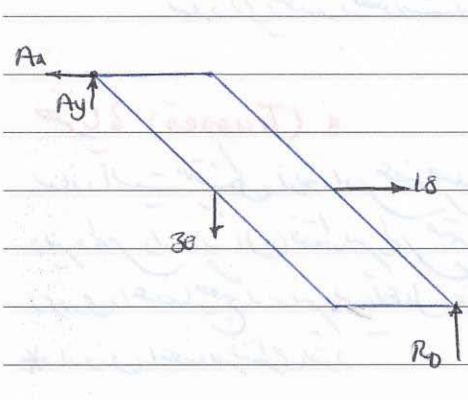
$$\sum M_A = 0$$

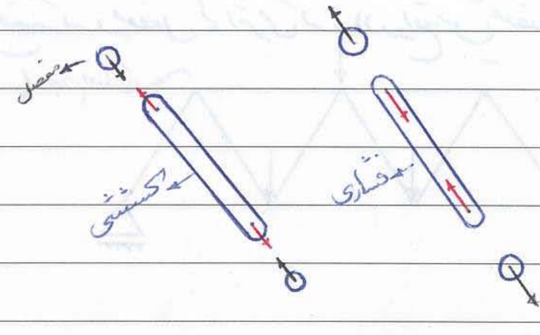
$$-30(a) + 18(a) + R_D(3a) = 0$$

$$\Rightarrow -12a + R_D(3a) = 0 \Rightarrow R_D = 4$$

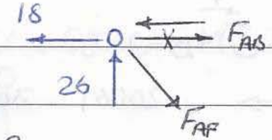
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 18$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 26$$





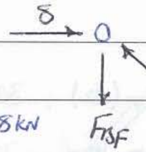
A مفصل :



$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{AF}\sin 45 = 26 \Rightarrow F_{AF}=36.4\ kN$ (کششی)

$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{AB}+36.4\times\cos 45-18=0 \Rightarrow F_{AB}=-8\ kN$ (فشاری)

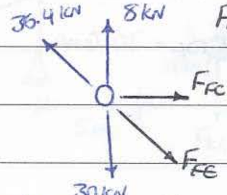
B مفصل :



$\sum F_x=0 \quad F_{BC}\cos 45 = 8 \Rightarrow F_{BC}=11.2\ kN$ (فشاری)

$\sum F_y=0 \quad F_{BF}=11.2\sin 45 \Rightarrow F_{BF}=8\ kN$ (کششی)

F مفصل :

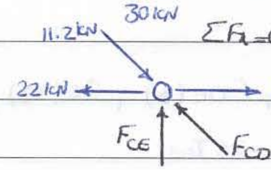


$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{FE}\cos 45 = 8+36.4\cos 45-30$

$\Rightarrow F_{FE}=5.28\ kN$ (کششی)

$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{FC}+5.28\cos 45=36.4\cos 45 \Rightarrow F_{FC}=22\ kN$ (کششی)

C مفصل :

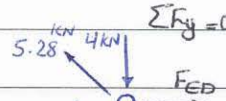


$\sum F_x=0 \Rightarrow 18+11.2\cos 45=22+F_{CD}\cos 45$

$\Rightarrow F_{CD}=5.54\ kN$

$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{CE}+5.54\cos 45=11.2\cos 45 \Rightarrow F_{CE}=4\ kN$

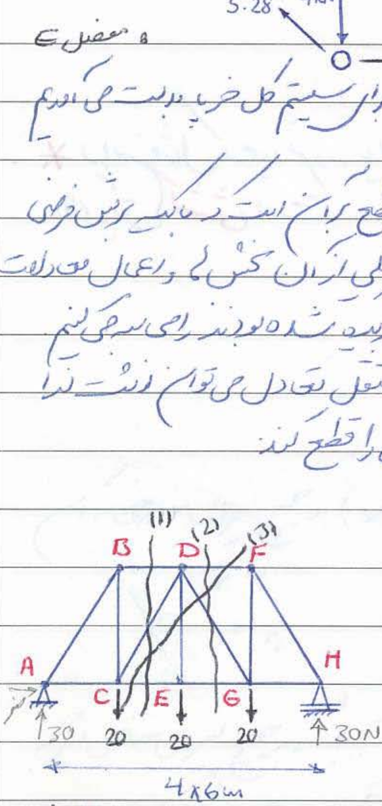
E مفصل :



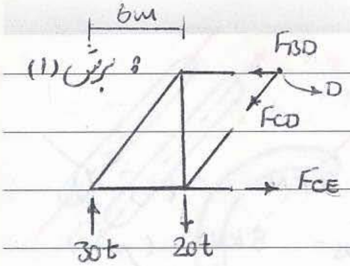
$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{ED}=5.28\cos 45=3.7\ kN$

* در این روش در ابتدا واکنش های تکیه گاهی را با استفاده از ۳ معادله تعادلی برای سیستم کل خرپا بدست می آوریم سپس سراغ تک تک اعضا و مفاصل می رویم.

۲) روش مقطع (Section Method) : اساس روش مقطع بر این است که با یک برش فرضی کل خرپا را به دو بخش مجزا از هم تقسیم کنیم. سپس با رسم دیاگرام آزاد یکی از آن بخش ها و اعمال معادلات مستقل تعادل نیروهای داخلی اعضایی را که توسط آن برش فرضی بریده شده بودند را بدست می آوریم. از آنجا که در دیاگرام آزاد هر بخش در حالت کلی حداکثر ۳ معادله مستقل تعادل می توان نوشت لذا باید دقت کرد که برش فرضی در جایی زده شود که حداکثر سه عضو مجهول را قطع کند.



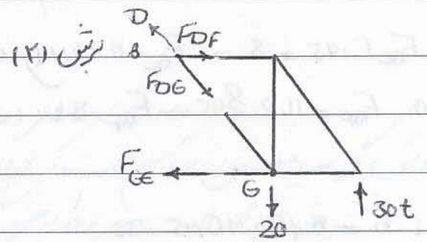
مثال : در خرپای نشان داده شده نیروهای داخلی اعضای CE ، DE و DF را بدست آورید.



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_D = 0$$

$$\Rightarrow +20(6) - 30(12) + F_{CE}(6) = 0$$

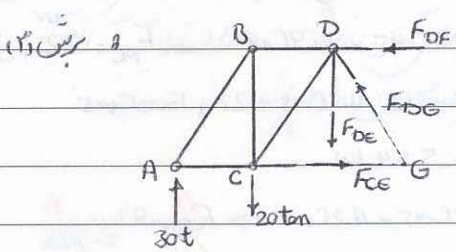
$$\Rightarrow F_{CE} = 40 \text{ ton}$$



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_G = 0$$

$$\Rightarrow -F_{DF}(6) + 30(6) = 0$$

$$\Rightarrow F_{DF} = 30 \text{ ton}$$



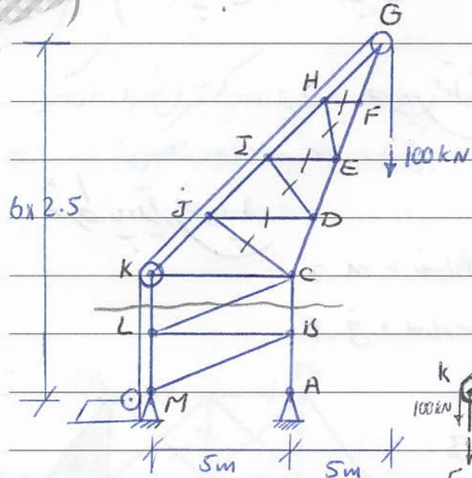
$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_G = 0$$

$$30(6) + F_{DE}(6) + 20(12) - 30(18) = 0$$

$$\Rightarrow F_{DE} = 20 \text{ ton}$$

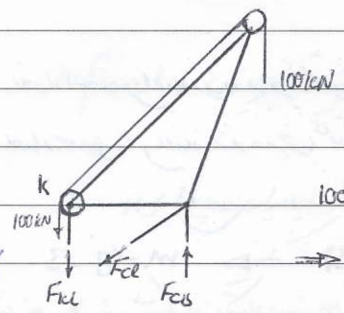
* در این مثال دیده شد نیرو به پایین خرپا اعمال می‌گردد نیرو در اعضای پایینی خرپا فشاری و در اعضای بالایی آن کششی است.

مثال ۵: در جرثقیل نشان داده شده نیروهای اعضای CJ ، CL و CB را بدست آورید. (شعاع قرقره‌ها R می‌باشد)



* در نقطه A تنها یک نیرو وجود دارد

$F_{HF} = F_{HE} = F_{IE} = F_{ID} = F_{JD} = F_{JC} = 0$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CL} = 0$

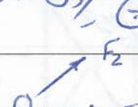
$\sum M_K = 0 \Rightarrow$

$100(R) + F_{CB}(5) - 100(10+R) = 0$

$\Rightarrow F_{CB} = 200$

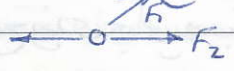
اعضای صفر نیرویی:

۱) اگر به مفصلی از خرپا فقط ۲ عضو متصل باشد (که در یک راستا نباشند) و هیچ نیروی خارجی به آن اعمال نگردد نیروهای داخلی هر دو عضو برابر با صفر خواهد شد.



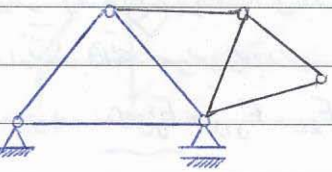
$F_1 = F_2 = 0$

۲) اگر به مفصلی از خرپا فقط ۳ عضو متصل باشد که دو تا از آن‌ها در یک راستا باشند و هیچ نیروی خارجی نیز به مفصل اعمال نگردد نیروی داخلی عضو سوم صفر خواهد بود.



$F_1 = 0$

پایداری و ناپایداری داخلی خرپاها :



خرپای مثلثی پایه یا اولیه

شرط پایداری خرپا :

$m-3$: تعداد اعضای اضافه شده به خرپای مثلثی

$j-3$: تعداد مفصل‌های اضافه شده به خرپای مثلثی $\Longrightarrow$

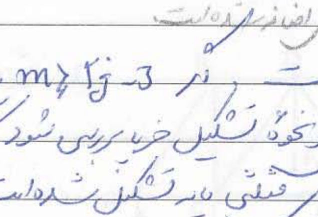
m : تعداد اعضای خرپا

j : تعداد مفصل‌های خرپا

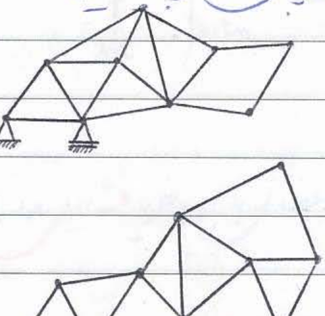
$$m-3 = 2(j-3) \Longrightarrow m = 2j-3$$

تعداد اعضای اضافه شده دو برابر تعداد مفصل‌های اضافه شده است

نتیجه اولیه : اگر $m < 2j-3$ باشد خرپا حتماً ناپایدار است و اگر $m \geq 2j-3$ باشد خرپا یا پایدار است یا ناپایدار. ولذا ضروری است در شکل‌بندی و نحوه تشکیل خرپا بررسی شود که آیا خرپا به صورت اضافه شدن پی در پی یک مفصل و دو عضو به خرپای مثلثی پایه تشکیل شده است یا خیر.

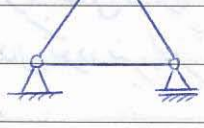


$\longrightarrow$ ناپایدار



$\longrightarrow$ پایدار

معینی و نامعینی داخلی خرپاها :



۶ مجهول

۶ معادله

خرپای مثلثی پایه همواره معین است

هر یک مفصلی که اضافه کنیم ۲ تا معادله و ۲ تا مجهول اضافه می‌کند.

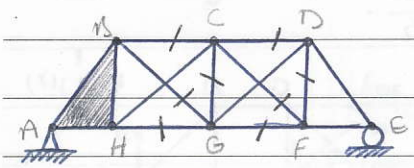
نتیجه‌بندی نهایی : تحت اگر $m < 2j-3$ باشد خرپا ناپایدار است. معینی یا نامعینی بررسی نمی‌شود.

۱۲ اگر $m=2j-3$ باشد خرپا می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد لذا باید شبکه بندی کنترل شود. اگر پایدار بود معین است.

۱۳ اگر $m>2j-3$ باشد خرپا می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد لذا شبکه بندی باید کنترل شود. اگر پایدار باشد نامعین است. $m-(2j-3) =$ درجه نامعینی

* خرپاهای بررسی شده اشتباهی خرپای ساده نام دارند.

مثال: خرپاهای نشان داده شده را از نظر پایداری و ناپایداری و معینی و نامعینی اعم از خارجی و داخلی بحث کنید.



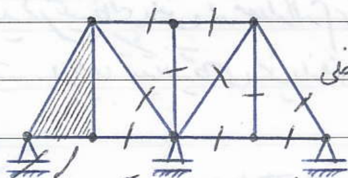
چون پایدار است و $m>2j-3$ پس درجه نامعینی دارد که برابر است با $n=2$

داخلی: $m=15$ $j=8$ $2j-3=13$ $\Rightarrow m>2j-3$

شبکه بندی را چک می‌کنیم که آیا خرپا از اضافه شدن پی در پی یک مفصل و دو عضو به خرپای مثلثی ایجاد شده باشد که در اینجا همینطور است پس پایدار است.

خارجی: سه قید تکیه‌گاهی داریم که نه متقاطع‌اند و نه موازی پس پایدار است.

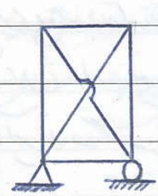
سه تا مجهول و سه تا معادله مستقل داریم پس معین است.



داخلی: $m=13$ $j=8$ $\rightarrow m=2j-3$

از نظر داخلی پایدار است و بنابراین معین است.

خارجی: ناپایدار است چون نیروهای تکیه‌گاهی موازی اند. در یک حالت خاص پایدار است. حالت خاص در این است که نیروهای وارده بر خرپا موازی نیروهای قیدهای تکیه‌گاهی باشند. درجه نامعینی خرپا (خارجی) برابر یک است.



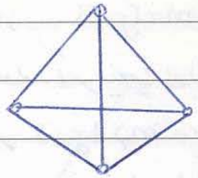
$m=6$ $j=4$ $m>2j-3$

داخلی: نامعین و پایدار است (پس از بررسی شبکه بندی)

خارجی: معین و پایدار است

در بررسی معینی داخلی 8 معادله داریم 9 مجهول پس نامعین است.

اگر گفت معینی، نامعینی یا پایداری، ناپایداری را بررسی کنید باید مطالب جمع‌بندی نهایی را شرح دهیم



آشنایی با خرپاهای فضایی:

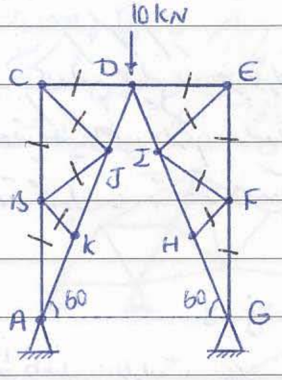
خرپای چهار وجهی پایه

می‌توان با اضافه کردن یک مفصل و سه عضو خرپای پایداری ایجاد نمود.

$m-6$: تعداد اعضای اضافه شده به خرپای چهاروجهی — m: تعداد اعضای خرپا

$j-4$: تعداد مفاصل اضافه شده به خرپای چهاروجهی — j: تعداد مفصل‌های خرپا

$$\Longrightarrow \quad m-6 = 3(j-4) \quad \Longrightarrow \quad m = 3j-6$$

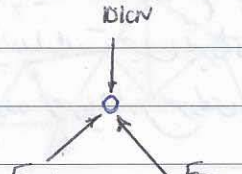


مثال: مطلوبست محاسبه نیروهای داخلی اعضای خرپا.

ناپایداری داخلی خرپا بر اثر اضافه شدن یک میله تکیه‌گاهی پایدار شده است

(کمبود ناپایداری داخلی را توسط یک عامل خارجی تأمین کردیم)

اگر قیدهای تکیه‌گاهی بیش از مقدار لازم برای پایداری باشند، سازه نامعین است. در این قید تکیه‌گاهی بیش از مقدار لازم نیست. پس معین است.



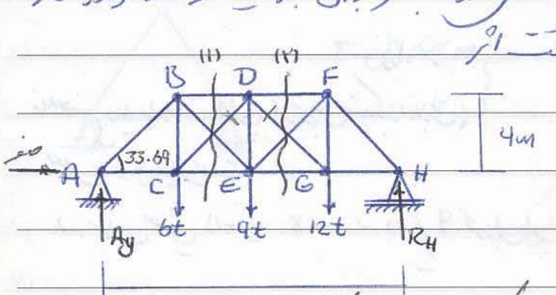
$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow F_{DJ} = F_{DI}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow F_{DJ} = F_{DI} = 5.77\,kN$$

$$F_{JK} = F_{AK} = F_{HI} = F_{HG} = 5.77\,kN$$

این خرپا یک خرپای مرکب است.

مثال: خرپای شکل نشان داده شده مفروض است: اعضای عمودی ضربدری باریک هستند. لذا اگر در فشار واقع شوند توانایی وجود ندارند (نیرویی نمی‌توانند تحمل کنند). تحت اثر بارگذاری نشان داده نیروها در اعضای قطری کدام یک در کار می‌برند و همچنین نیروی عضو DE را محاسبه نمایید.



(به این اعضای باریک کابل‌های کششی گویند)

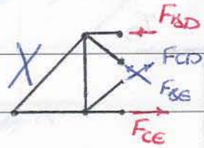
در تمام نیروها کششی باشند پس عضو AH می‌خواهد قسمت ده درصد عضو BF کشیده شود.

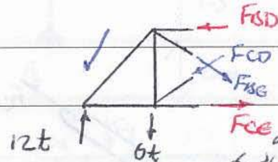
$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_A = 0$

ز اینجا می دانیم در عضوهای تاربند کشش وارد یا فشار.

$A_y = 12t \quad , \quad R_H = 15t$

برش ۱:

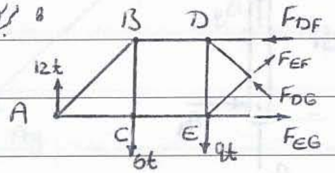




چون F_{CD} فشاری است پس در نظر می گیریم.

$\Rightarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \underline{F_{BG} = 10.8t}$

برش (۲):



چون F_{DG} فشاری است پس در نظر می گیریم.

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{EF} \sin 33.69 + 12 = 9 + 6$

$\Rightarrow \underline{F_{EF} = 5.4t}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{DG} = 0 \quad , \quad F_{EF} =$

$\underline{F_{DE} = 0}$ در مفصل D سه تا عضو است که دو عضو در یک راستا اند

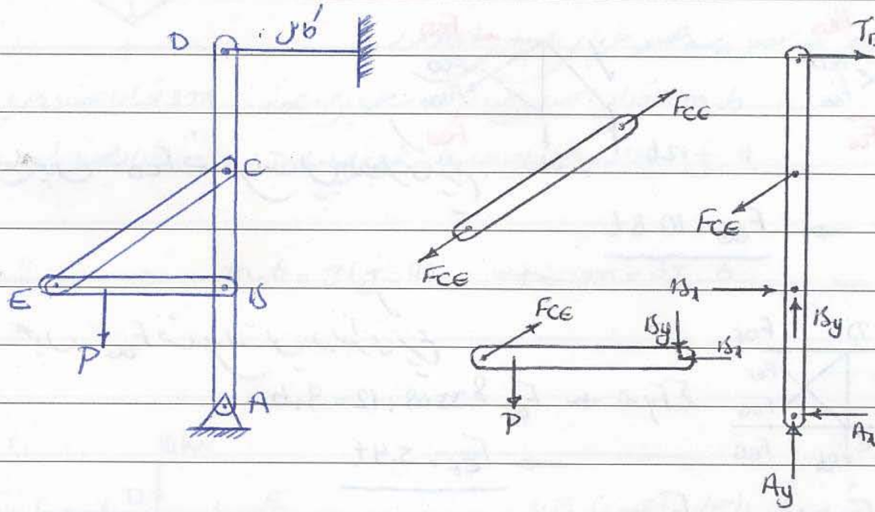
* هرگاه در هر مرتبه دو عضو جدید به دو مفصل موجود متصل شوند و خود نیز با مفصل جدیدی به هم متصل گردند خرپایی را که به این طریق ساخته می شود خرپای ساده می گویند. برای تحلیل کردن خرپای ساده از یک مثلث شروع می کنیم و هر دو عضو و مفصل نیز را تحلیل می کنیم.

نکته: برای رسم دیاگرام آزاد هر یک از اعضای یک **قاب**، ابتدا عضوهای دو نیرویی را در نظر می گیریم. سپس سراغ اعضای چند نیرویی می رویم. در اعضای چند نیرویی مثلاً در یک نقطه مفصل دار چون جهت و مقدار نیروهای وارده معلوم نیست این نیروها را با مولفه های x و y نشان داده ام.

قاب ها (Frames)

قاب ها سازه هایی هستند که حداقل دارای یک عضو چند نیرویی باشند. (اتصالی است که قاب را از حرکت ممانعت می کند)

مثال:

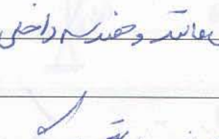


در اینجا ۶ مجهول و ۷ معادله داریم که یک معادله برای عضو CE است و بدرد نمی خورد.

انواع قاب ها:

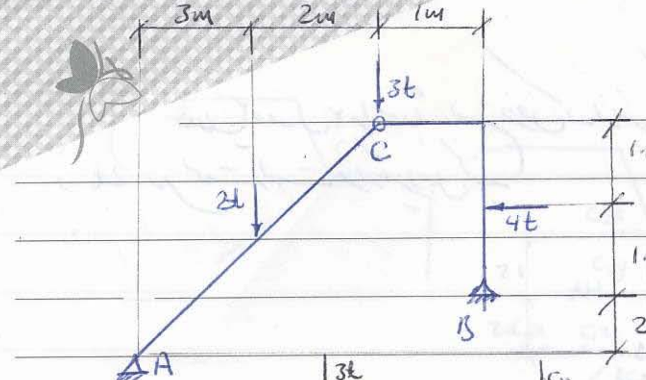
صلب: قاب هایی هستند که در صورتیکه از تکیه گاه های خود جدا شوند صلب باقی می مانند و خود به خود داخلی آن ها فرو نمی ریزد. (قاب مثال)

غیر صلب: قاب هایی هستند که در صورت انفکاک از تکیه گاه های شکل اولیه آن ها حفظ نمی شود به عبارتی قاب غیر صلب است و پایداری داخلی آن ها توسط عوامل های از تکیه گاه های خارجی تأمین شده است.

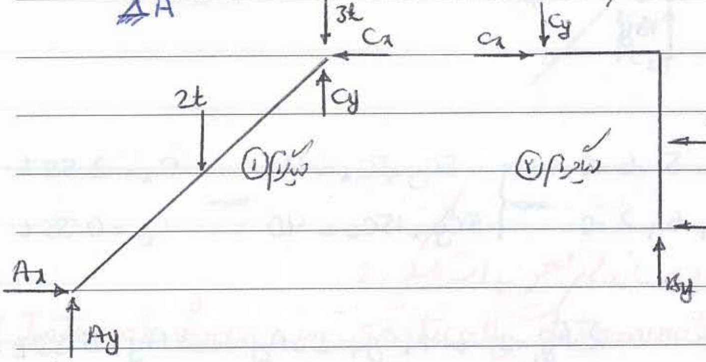


روش های تحلیل قاب ها: جهت تحلیل قاب های صلب ابتدا با رسم دیاگرام آزاد کل قاب عکس العمل های دیاگرام آزاد را یافته و سپس با جدا کردن تک تک اعضا از یکدیگر نیروهای داخلی بین اعضا را بدست می آوریم ولی برای تحلیل قاب های غیر صلب باید ابتدا کلیه اعضا را از یکدیگر و کلیه اعضا جدا کنیم و سپس با اعمال کلیه معادلات تعادل عکس العمل کلیه نیروهای داخلی را توأماً بدست آوریم.

مثال ۵: برای قاب نشان داده شده عکس العمل‌های خارجی تکیه‌گاه‌ها و نیروهای داخلی در مفصل C را محاسبه کنید.



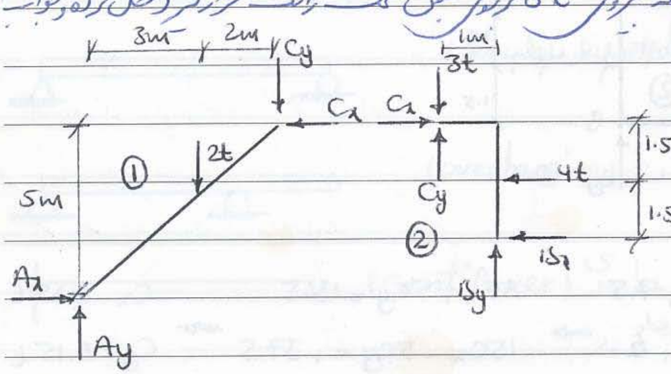
یک قاب غیر صلب است: پس ابتدا کلیه اعضا را جدا می‌کنیم و با اعمال شرایط تعادل نیروها را پیدا می‌کنیم.



$$\text{عضو ۱: } \sum M_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_x + C_y = \frac{21}{5} \\ -C_y + 3C_x = 6 \end{cases} \Rightarrow C_x = 2.55t \quad C_y = 1.65t$$
$$\text{عضو ۲: } \sum M_B = 0 \Rightarrow$$

$A_x = 2.55$ $\quad A_y = 3.35t$ $\quad B_x = 1.45t$ $\quad B_y = 1.65t$

تمرین ۱۰: مثال فوق را مجددا با این فرض که نیروی 3t نیروی کششی سمت راست قرار گرفته حل کرده و جواب را مقایسه کنید. $C_y = 1.35$

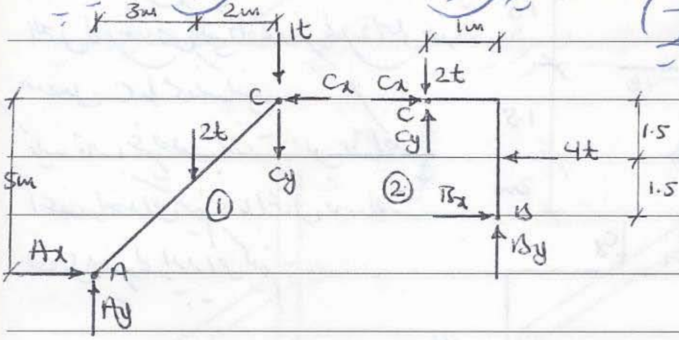


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5C_x - 5C_y = 6 \\ -3C_x - C_y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5C_x - 5C_y = 6 \\ 3C_x + C_y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5C_x - 5C_y = 6 \\ 15C_x + 5C_y = 45 \end{cases} \Rightarrow C_y = 1.35t \quad C_x = 2.55t$$
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow$$

$\rightarrow \sum F_{x_1} = 0 \Rightarrow A_x = 2.55t \qquad \sum F_{y_1} = 0 \Rightarrow C_y + 2 = A_y \Rightarrow A_y = 3.35t$

$\sum F_{y_2} = 0 \Rightarrow B_y + C_y = 3 \Rightarrow B_y = 1.65t \quad \sum F_{x_2} = 0 \Rightarrow C_x = 4 + B_x \Rightarrow B_x = -1.45t$

تمرین ۲: قاب ۲ را مجدداً با این فرض که نیروی متمرکز 3t مقدار 1t رو به پایین سمت چپ و 2t رو به پایین سمت راست قرار گیرد حل کنید

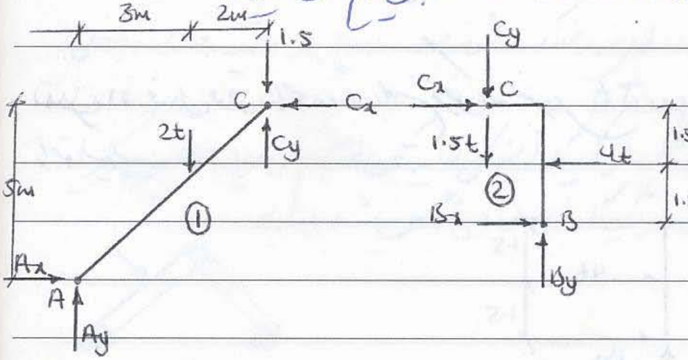


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -5C_y + 5C_x - 5 - 6 = 0$$
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -C_y - 3C_x + 6 + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -5C_y + 5C_x = 11 \\ 5C_y + 15C_x = 40 \end{cases} \Rightarrow \quad C_x = 2.55\,t \quad C_y = 0.35\,t$$

$$\to \sum F_{x_1} = 0 \Rightarrow A_x = 2.55\,t \qquad \sum F_{y_1} = 0 \Rightarrow 1 + C_y + 2 = A_y \Rightarrow A_y = 3.35\,t$$

$$\to \sum F_{x_2} = 0 \Rightarrow C_x + B_x = 4 \Rightarrow B_x = 1.45\,t \quad \sum F_{y_2} = 0 \Rightarrow B_y + C_y = 2 \Rightarrow B_y = 1.65\,t$$

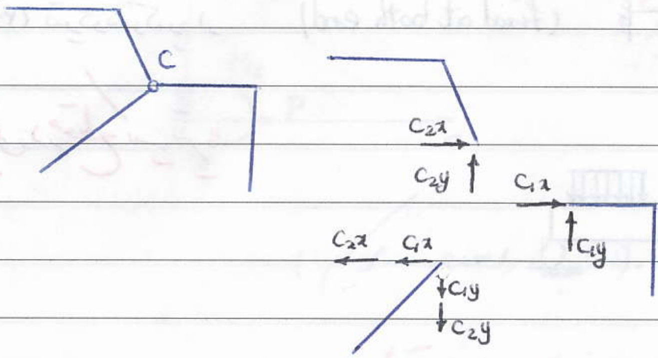
تمرین ۳: قاب فوق را با فرض اینکه 3t را به 1.5t و 1.5t تبدیل کنیم حل کنید.



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 5C_x + 5C_y = 6 + 7.5 \qquad 5C_x + 5C_y = 13.5 \qquad C_x = 2.55\,t$$
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow C_y - 3C_x = -1.5 \ 6 \Rightarrow 15C_x - 5C_y = +37.5 \Rightarrow C_y = 0.15\,t$$

$$\sum F_{x_1} = 0 \Rightarrow A_x = 2.55\,t \qquad \sum F_{y_1} = 0 \Rightarrow A_y + C_y = 1.5 + 2 \Rightarrow A_y = 3.35\,t$$

$$\sum F_{x_2} = 0 \Rightarrow C_x + B_x = 4 \Rightarrow B_x = 1.45\,t \quad \sum F_{y_2} = 0 \Rightarrow C_y + 1.5 = B_y \Rightarrow B_y = 1.65$$



فصل چهارم: نیروهای داخلی در سازه‌های معین استاتیکی:
(Internal forces in statically determinate structures)

تیر (beam): عبارت است از عضو سازه‌ای که نیروهای وارده را از طریق خمشی که در آن ایجاد می‌شود تحمل می‌کند.

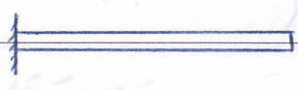
انواع تیرها:

الف) تیرهای معین:

۱) تیر ساده (Simply_suported)

۲) تیر ساده کنسولی (overhanging)

۳) تیر کنسولی، طره‌ای، گیردار (Cantilever)

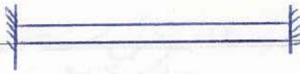


ب) تیرهای نامعین:

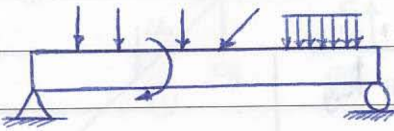
۱) تیر ممتد، سراسری، پیوسته، سرتاسری
(Continuous beam)

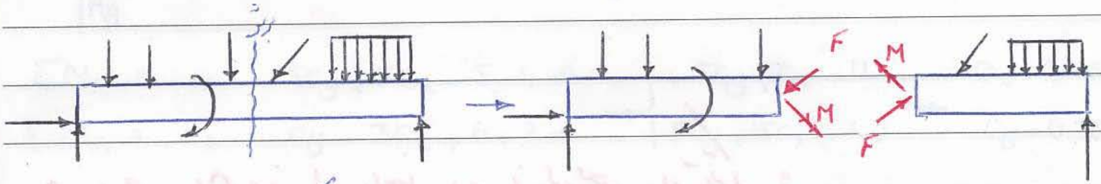
۲) تیر یکسر گیردار، یکسر ساده
(fixed_simply)

که عکسش هم می‌تواند باشد

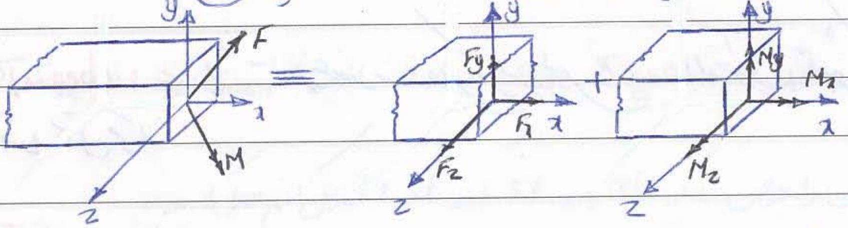
 (fixed at both end) ۳) تیر دوسر گیردار

نیروهای داخلی در مقطع یک تیر





در مقطع هر عضو چند نیروی (تیر) نیروهای داخلی عبارتند از یک نیروی F و گشتاور M.



F_x : نیروی محوری axial force M_x : گشتاور پیچشی Torsion Moment

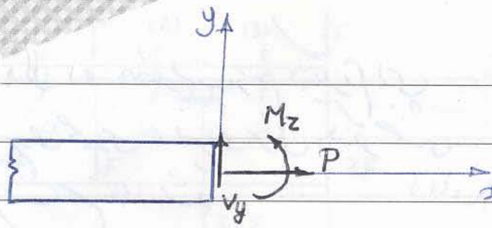
F_y, F_z = نیروی برشی shear force M_y, M_z : گشتاور خمشی bending Moment

من بعد به گشتاورها چنین می‌نویسیم.

$F_x \to P$ $M_x \to T$

$F_y, F_z \to V_y, V_z$ یا Q $M_y, M_z \to M_y, M_z$

حالت خاص دوبعدی:

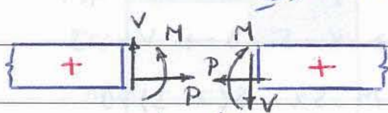


در صفحه ۳ تا نیرو داریم. (اندیس‌ها را حذف می‌کنیم)

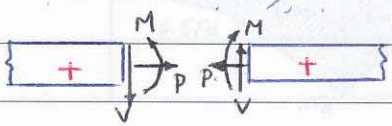
قرارداد جهات مثبت برای نیروهای داخلی تیرها:

الف) سه‌بعدی: قرارداد مثبت دقیقاً منطبق بر جهات مثبت محورهای دکارتی (کارتزین) است.

ب) دوبعدی:
۱) دقیقاً منطبق بر جهات مثبت دستگاه کارتزین



۲) مانند قرارداد اول با این تفاوت که جهت نیروی برشی عکس آن باشد.



** P و M هم علامت و V علامتی مخالف P و M دارد **

* جهت نیروی برشی در مسائل طراحی عملی دخیل نیست بنابراین دو قرارداد وجود دارد.
* از این به بعد از قرارداد دوم استفاده می‌کنیم.

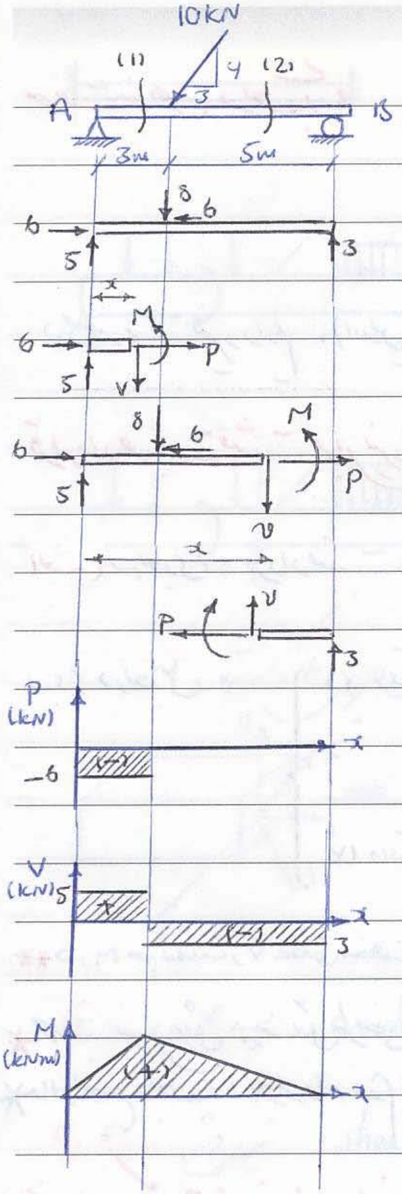
نحوه رسم دیاگرام‌های نیروهای داخلی در طول یک تیر:

۱) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در صورت لزوم.

۲) ایجاد مقطعی فرضی در تیر و رسم دیاگرام آزاد یکی از بخش‌های تیر با رعایت جهات قراردادی مثبت برای نیروهای داخلی.

۳) اعمال معادلات تعادل برای دیاگرام آزاد فوق و یافتن نیروهای داخلی در آن مقطع.

۴) انجام مراحل ۲ و ۳ برای کلیه بخش‌هایی از تیر که بین نیروهای متمرکز، تکیه‌گاه‌ها، محدوده بارهای گسترده وصل و انتهای بارهای گسترده قرار دارد.



مثال ۸: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیر شکل زیر داده شده.

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -(8)(3) + B_y(8) = 0$

$\Rightarrow B_y = 3\ kN$

$\Rightarrow A_y = 5\ kN$

$A_x = 6\ kN$

برش (۱): $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P = -6$

$0 \leq x \leq 3$ $\quad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = 5$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow M - 5x = 0 \Rightarrow M = 5x$

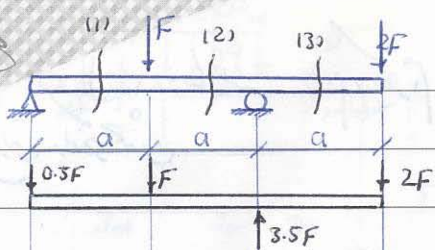
برش (۲): $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P = 0$

$3 \leq x \leq 8$ $\quad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = 5 - 8 \Rightarrow V = -3$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow M - 5x + 8(x-3) = 0$

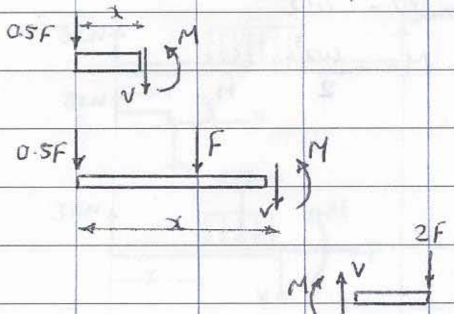
$\Rightarrow M = -3x + 24$

مثال ۲ ـ مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیرو برشی و لنگر خمشی.



برش (۱)، $\sum F_y=0 \Rightarrow V=-0.5F$

$\sum M_{(1)}=0 \Rightarrow M=-0.5Fx$



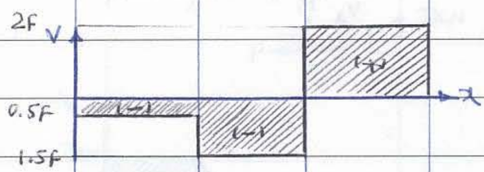
برش (۲)، $\sum F_y=0 \Rightarrow V=-1.5F$

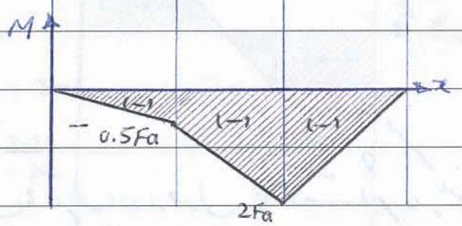
$\sum M_{(2)}=0 \Rightarrow M+0.5Fx+F(x-a)=0$

$\Rightarrow M=-1.5Fx+F.a$

برش (۳)، $\sum F_y=0 \Rightarrow V=2F$

$\sum M=0 \Rightarrow M=-2F(3a-x)$





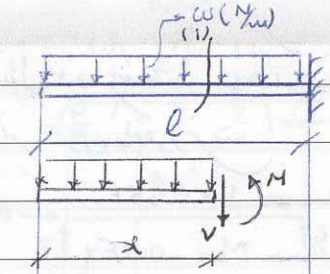
۱) در دیاگرام برشی در زیر محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره انفصال داریم.

۲) میزان انفصال هم به اندازه همان نیروی انفصال است.

۳) در دیاگرام لنگر خمشی در محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره شکستگی داریم.

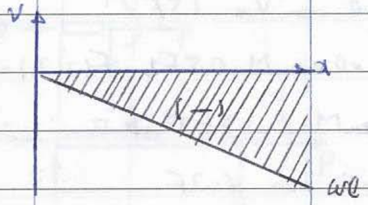
۴) معادله نیروی برشی مشتق معادله لنگر برشی است.

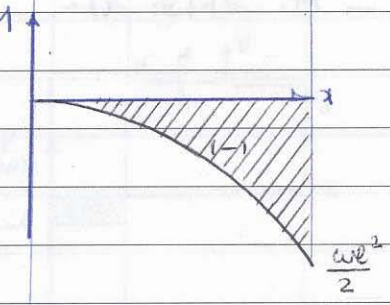
مثال ۳: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.



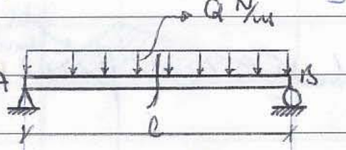
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = -\omega x$$

$$\underset{(1)}{\Sigma M} = 0 \Rightarrow M = -\frac{\omega x^2}{2}$$





تمرین: تیری به طول l که اثر بار یکنواخت $Q\,N/m$ را داریم. دیاگرام های لنگر خمشی و نیروی برشی را بدست آورید.



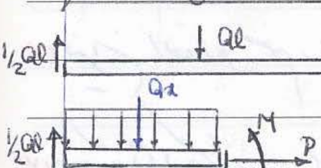
$$\Sigma M_A = 0 \quad -Ql(l/2) + B_y(l) = 0 \Rightarrow B_y = \tfrac{1}{2} Ql$$

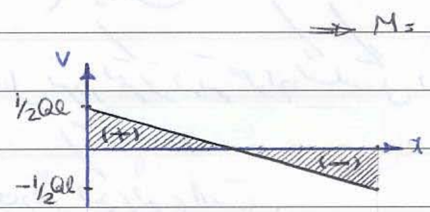
برش:

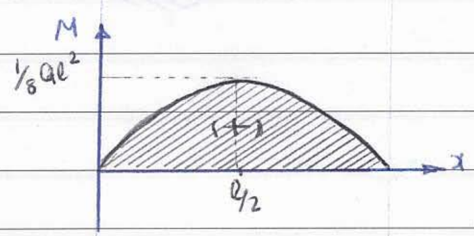
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = \tfrac{1}{2} Ql - Qx$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow -\tfrac{1}{2} Ql(x) + M + Qx(x/2) = 0$$

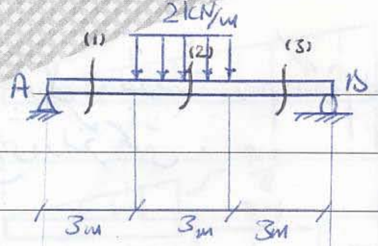
$$\Rightarrow M = \tfrac{1}{2} Qx(l - x)$$





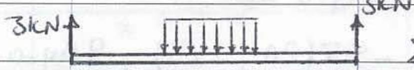


مثال: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.

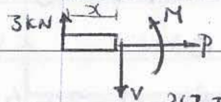


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -(2\times3)\times4.5 + 9B_y = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 3kN$$



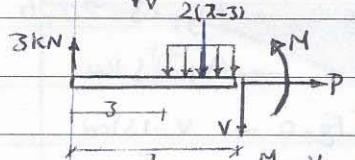
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 3kN$$



برش ۱:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 3kN$$

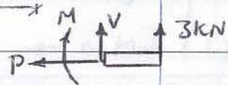
$$\sum M = 0 \Rightarrow -3x + M = 0 \Rightarrow M = 3x$$



برش ۲:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3 - 2(x-3) - V = 0$$

$$\Rightarrow V = -2x + 9$$



$$\sum M = 0 \Rightarrow -3x + \left(\frac{x-3}{2}\right)(x-3)2 + M = 0$$

$$\Rightarrow M = 3x - (x-3)^2$$

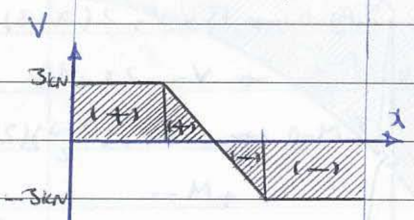
$$\Rightarrow M = -x^2 + 9x + 9$$

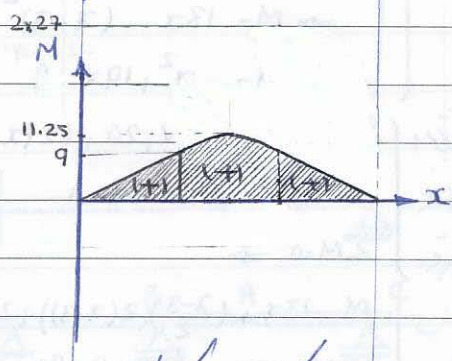
برش ۳:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = -3kN$$

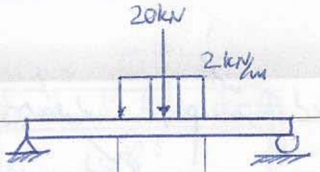
$$\sum M = 0 \Rightarrow 3(9-x) - M = 0$$

$$\Rightarrow M = 27 - 3x$$

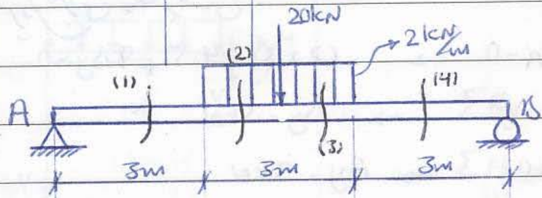




نکته بسیار مهم: اگر در قسمتی از تیر بار گسترده داشته باشیم می توانیم برای محاسبه واکنش در تکیه گاه ها این بار گسترده را به بار متمرکز تبدیل کنیم. ولی برای محاسبه نیروهای داخلی در تیر (در حالتی که محل برش محل اعمال نیروی گسترده باشد) از این جایگزینی استفاده نمی کنیم.

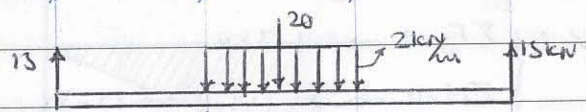


مثال: مطلوبست رسم نمودار تغییرات
نیروی برشی و لنگر خمشی.



$\sum M_A = 0 \Rightarrow$

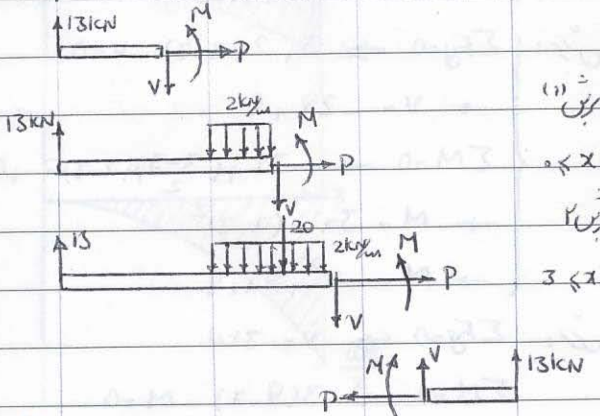
$-4.5(20 + 2\times 3) + 9B_y = 0$



$\Rightarrow B_y = 13\,kN$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 13 = 20 + 6$

$\Rightarrow A_y = 13\,kN$



برش (1): $0 \leq x \leq 3$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 13\,kN$

$\sum M = 0 \Rightarrow -13x + M = 0 \Rightarrow M = 13$

برش ۲: $3 \leq x \leq 4.5$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow 13 = V + 2(x-3)$

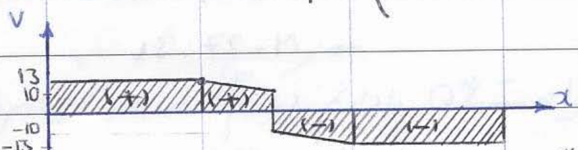
$\Rightarrow V = -2x + 19$

$\sum M = 0 \Rightarrow -13x + (\frac{x-3}{2})(2)(x-$

$+ M = 0$

$\Rightarrow M = 13x - (x-3)^2$

$\Rightarrow M = -x^2 + 19x - 9$



برش ۳: $4.5 \leq x \leq 6$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow 13 = V + 20 + (2(x-3)$

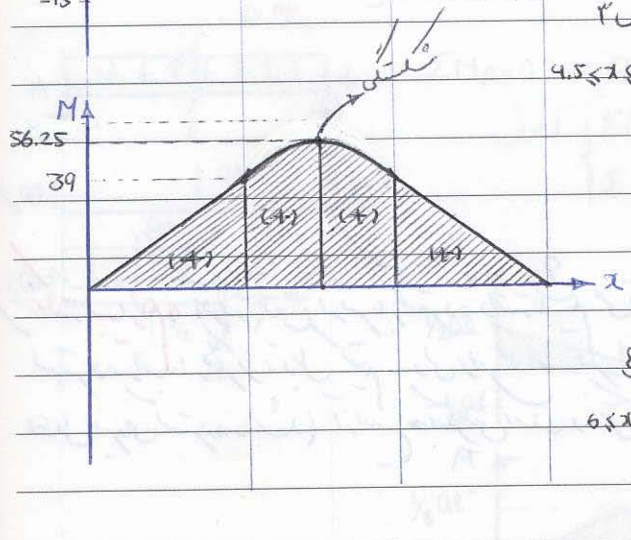
$\Rightarrow V = -2x - 1$

$\sum M = 0 \Rightarrow$

$M - 13x + (\frac{x-3}{2})(2(x-3)) + 20(4.$

$\Rightarrow M - 13x + x^2 - 6x + 9 - 90 + 20x$

$\Rightarrow M = -x^2 - x + 81$



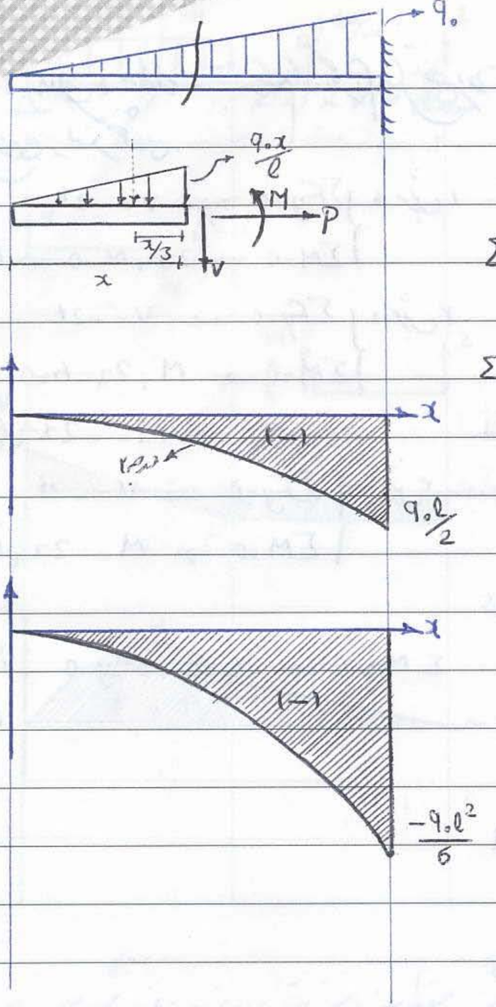
برش ٤: $6 \leq x \leq 9$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = -13\,kN$

$\sum M = 0 \Rightarrow -M + 13(9-x) = 0$

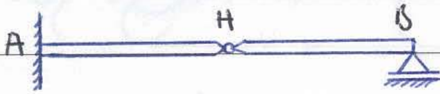
$\Rightarrow M = 117 - 13x$

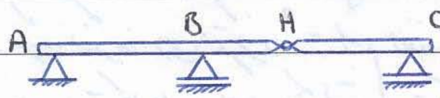
مثال ۵: مطلوبست رسم دیاگرام تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = -\frac{q_0 x^2}{2l}$$

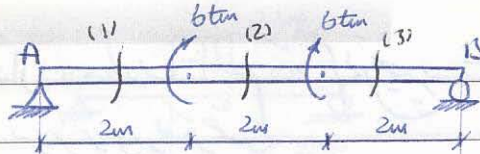
$$\sum M = 0 \Rightarrow M = -\frac{q_0 x^3}{6l}$$

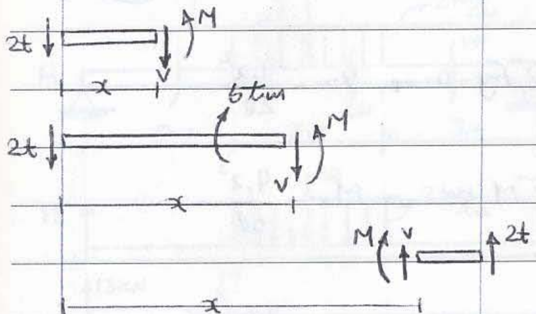




نکته ۸: گاهی اوقات چند تیر به هم مفصل می‌شوند و یک سازه پیوسته را تشکیل می‌دهند. در دو تیر نمونه مفصل در نقطه H وجود دارد. در این تیرها واکنش در تکیه‌گاه‌ها چهار مجهول دارند و آن‌ها را از نمودار جسم آزاد کل سیستم نمی‌توان تعیین کرد، بلکه باید نمودار جسم آزاد هر تیر را به طور جداگانه در نظر گرفت. در این حالت شش مجهول (شامل دو مولفه نیرو در مفصل) و شش معادله داریم.

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.





برش ۱: $\begin{cases} \sum F_y=0 \Rightarrow V=-2t \\ \sum M=0 \Rightarrow 2x+M=0 \Rightarrow M=-2x \end{cases}$

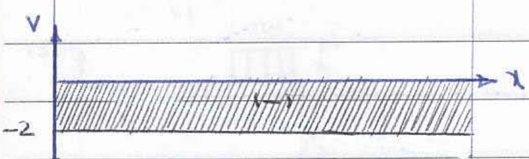
برش ۲: $\begin{cases} \sum F_y=0 \Rightarrow V=-2t \\ \sum M=0 \Rightarrow M+2x-6=0 \end{cases}$

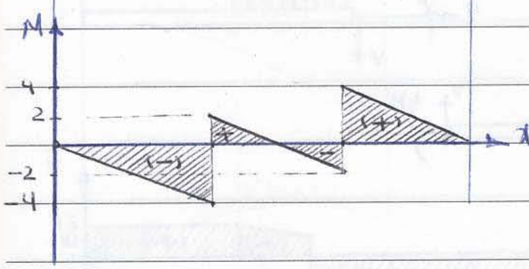
$\Rightarrow M=-2x+6$

برش ۳: $\begin{cases} \sum F_y=0 \Rightarrow V=-2t \\ \sum M=0 \Rightarrow M=-2x+12 \end{cases}$

$\sum M_A=0 \Rightarrow -6-6+6B_y=0 \Rightarrow B_y=2t$

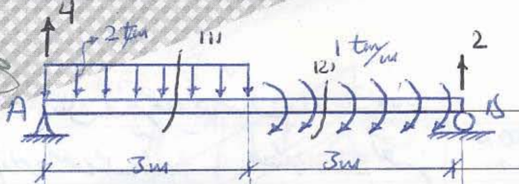
$A_y=-2t$

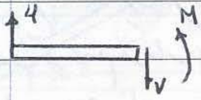




هرگاه لنگر خارجی متمرکز داشته باشیم انفصال در نمودار لنگر خمشی داریم.
در حالت کلی برای تیر اصلی لنگرها حالت آزاد ندارند چون در نیروهای داخلی تغییر ایجاد می‌شود.

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام‌های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی

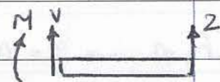




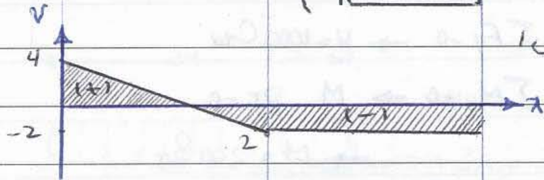
$\sum M_A = 0$

$\Rightarrow -3\times 2\times \frac{3}{2} - 3\times 1 = -6B_y$

$\Rightarrow B_y = 2$



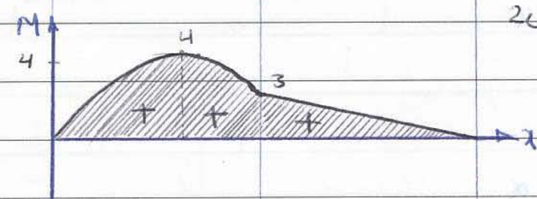
$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 4$



برش 1: $\sum F_y = 0 \rightarrow V = 4 - 2x$ t

$\sum M = 0 \rightarrow -4x + (2\times x)\frac{x}{2} + M = 0$

$\Rightarrow M = 4x - x^2$ t.m



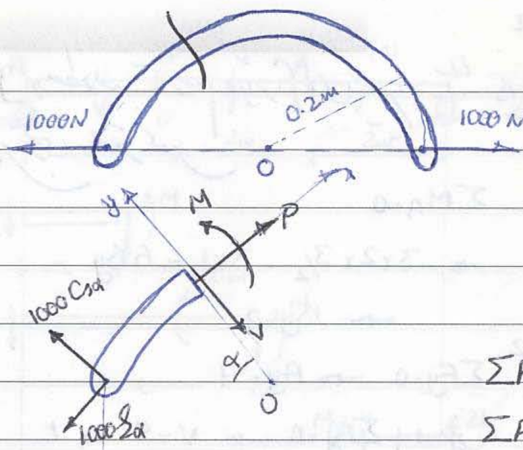
برش 2: $\sum F_y = 0 \rightarrow V = -2$

$\sum M = 0 \rightarrow 2(6-x) - 1(6-x) - M = 0$

$\Rightarrow M = -x + 6$

* در مورد لنگرهای گسترده الزاماً باید از روش مقطع زدن استفاده شود، از روش جمع زدن نمی‌توان استفاده کرد.

مثال: تیر خمیده نشان داده شده به
شکل نیم دایره مفروض است. مطلوب است تعیین
معادلات تغییرات نیروهای محوری، برشی و لنگر
خمشی در طول و رسم نمودارهای آن‌ها.
برشی را در زاویه α می‌زنیم.

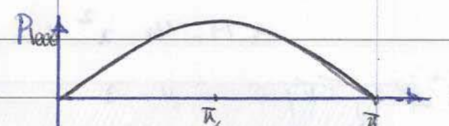


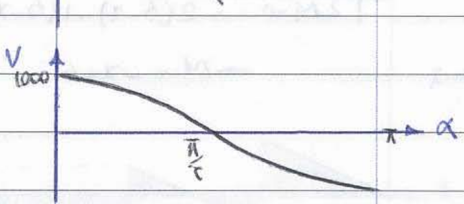
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P = 1000 S_\alpha$$

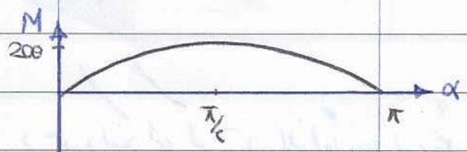
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 1000 C_\alpha$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M - Pr = 0$$

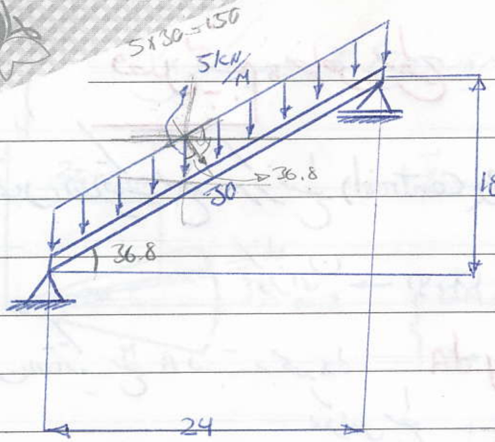
$$\Rightarrow M = 200 S_\alpha$$

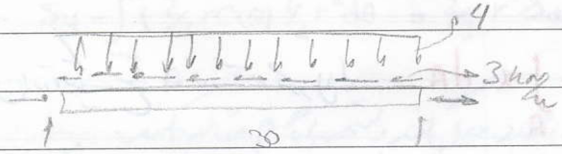






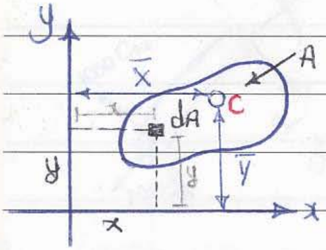
مثال ۵ نمودارهای تغییرات نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را رسم کنید.





فصل پنجم: خواص سطوح

۱) ممان استاتیک سطح و مرکز سطح (static moment of area & Centroid):



$(x, y) \rightarrow$ مرکز المان

$S_x = \int_A y.dA$ ممان استاتیک سطح A نسبت به محور x ها

A → انتگرال سطح

$S_y = \int_A x.dA$ ممان استاتیک سطح A نسبت به محور y ها

$S_x = \int y.dA = A\bar{Y}$ → $\bar{Y} = \frac{\int y.dA}{A}$

$S_y = \int x.dA = A\bar{X}$ → $\bar{X} = \frac{\int x.dA}{A}$

$C \left| \begin{array}{l} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{array} \right.$ → مرکز سطح

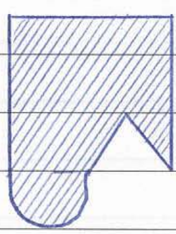
۱) واحد ممان استاتیک سطح cm^3 است.

۲) ممان استاتیک می‌تواند مقادیر مثبت، منفی یا صفر باشد (و صحتش نسبت به محور مختصات بستگی دارد)

۳) ممان استاتیک سطح نسبت به هر محوری که مرکز سطح آن از آن محور بگذرد صفر است.

۴) اگر سطحی دارای محور تقارن باشد، مرکز سطح آن حتماً روی محور تقارن است.

۵) اگر سطحی دارای دو محور تقارن باشد مرکز سطح آن محل تقاطع دو محور تقارن است.

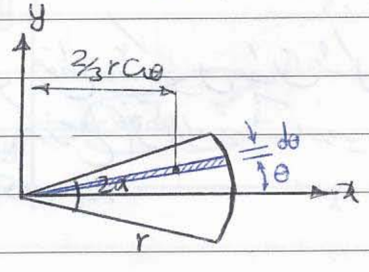


$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} (A_i . \vec{Y}_i)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{y_i} = \sum_{i=1}^{n} (A_i . \bar{X}_i)$$

مرکز سطح $C \left| \begin{array}{l} \frac{\int x dA}{A} \\ \frac{\int y dA}{A} \end{array} \right.$

مثال: مطلوبست تعیین محل مرکز سطح یک قطاع دایره به شعاع R و زاویه مرکزی 2α.



$$\bar X = \frac{S_y}{A} = \frac{\int x\,dA}{A}$$

مساحت قطاع: $\frac{1}{2}\beta r^2$

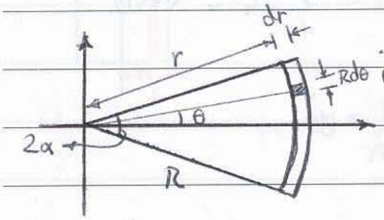
$$\begin{cases} dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \\ x = \frac{2}{3} r\cos\theta \end{cases}$$

$$\bar X = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\Longrightarrow S_y = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\tfrac{2}{3} r\cos\theta\right)\tfrac{1}{2} r^2 d\theta = \tfrac{2}{3} r^3 \sin\alpha \Longrightarrow X = \frac{\frac{2}{3} r^3 \sin\alpha}{\frac{1}{2}(2\alpha) r^2} = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

مثال: مثال فوق را با استفاده از المان قوسی شکل حل کنید و نتیجه را با هم مقایسه کنید.

توضیح: ابتدا مرکز یک کمان دایره به شعاع R و زاویه مرکزی 2α را بدست آورده، سپس محل مرکز آن استفاده می‌شود.

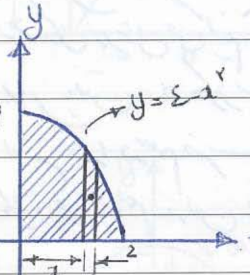


کمان $$X = \frac{\int x\,dl}{l} = \frac{\int r\cos\theta\,(r\,d\theta)}{2r\alpha} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\theta\,d\theta}{2\alpha}$$

$$= \frac{r}{2\alpha}\left(\sin\alpha\right)_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{r}{\alpha}\sin\alpha$$

$$\bar X = \frac{\int x\,dA}{A} = \frac{\int_0^R \frac{r}{\alpha}\sin\alpha\,(2r\alpha)\,dr}{\alpha R^2} = \frac{\int_0^R \sin\alpha\,(2r^2)\,dr}{\alpha R^2} = \frac{2\sin\alpha}{\alpha R^2}\int_0^R r^2\,dr$$

$$= \frac{2\sin\alpha}{\alpha R^2}\left(\frac{1}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}\,\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$



مثال: مطلوبست تعیین مرکز سطح محصور بین منحنی $y = 4 - x^2$ و محورهای x و y در ربع اول مختصات.

$$\bar X = \frac{S_y}{A} \Rightarrow S_y = \int x\,dA = \int_0^2 x(4 - x^2)\,dx = 4\ cm^3$$

$$A = \int_A dA = 5.33\ cm^3 \rightarrow A = \int_0^2\int_0^{4-x^2} dy\,dx$$

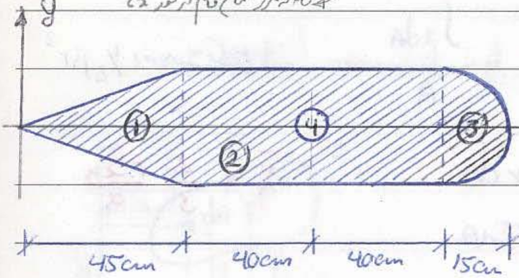
$$\Longrightarrow \bar X = \frac{4}{5.33} = 0.75$$

1) $S_x = \int y\,dA = \int_0^2 (4-x^2)(x)(-2x) = 8.53$ ← بیرونی

2) $S_x = \int y\,dA = \int_0^2 \left(\frac{4-x^2}{2}\right)(4-x^2)\,dx = 8.53\ cm^3 \quad , \quad \bar{y} = 1.66$ ← المان قائم است

← فاصله مرکز المان قائم از محور x ها

مثال: مقطع یک تیر مطابق شکل می‌باشد محل مرکز سطح آن را بدست آورید. شعاع سوراخ 5cm می‌باشد.



شماره سطح	A_i	$\bar{X}_i$	$A_i \cdot \bar{X}_i$
مثلث (1)	675	30	20250
مستطیل (2)	2400	85	20400
نیم دایره (3)	$\frac{\pi}{2} \times 15 = 353.4$	$\frac{4r}{3\pi} + 125 = 131.4$	46437
4	-78.5	85	-6672

$\sum_{i=1}^{n} A_i \bar{X}_i = 264015$

$\sum_{i=1}^{n} A_i = 3350$

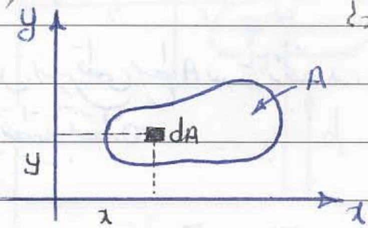
$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_1^n A_i X_i}{\sum_1^n A_i} = 78.8\ cm^3$$

* برای بدست آوردن مرکز سطح اشکالی که از ترکیب چند شکل هندسی مشخص بوجود آمده اند به شکل زیر عمل می‌کنیم:

برای یافتن $\bar{x}$ مرکز سطح در ابتدا مساحت هر شکل و x مرکز سطح آن را بدست آورده سپس هر دو هم ضرب می‌نماییم. سپس تمام $A_i X_i$ ها را با هم جمع می‌کنیم و تقسیم بر مساحت کل می‌نماییم به این طریق $\bar{x}$ مرکز سطح بدست می‌آید.

مستطیل $\bar{I} = \frac{bh^3}{12}$ مثلث $\bar{I} = \frac{bh^3}{36}$ دایره $\bar{I} = \frac{\pi}{4} R^4$ (شعاع R)

۱۲) ممان اینرسی سطح (Area Moment of Inertia):

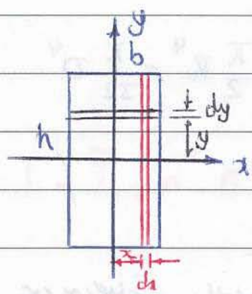


فاصله المان از محور x

ممان اینرسی سطح A نسبت به محور x: $I_{xx}=\int y^2 . dA$

ممان اینرسی سطح A نسبت به محور y: $I_{yy}=\int x^2 . dA$

* ممان اینرسی هیچگاه منفی و صفر نمی‌شود.

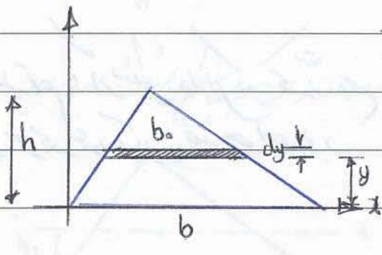


مثال ۱: ممان اینرسی مستطیل را حول محورهای تقارن آن بدست آورید.

$$I_{xx}=\int_A y^2 dA=\int_{-h/2}^{h/2} y^2 . b\,dy=\frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yy}=\int_A x^2 dA=\int_{-b/2}^{b/2} x^2 h\,dx=\frac{hb^3}{12}$$

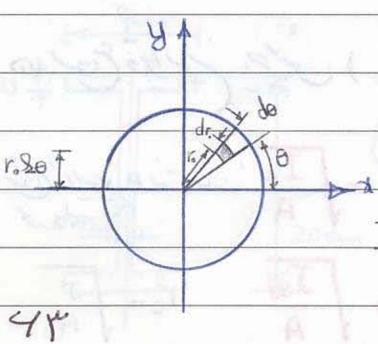
راستایی که در المان حرکت می‌کند توان 3 دارد.



مثال ۲: ممان اینرسی مثلث را حول قاعده آن بدست آورید.

$$I_{xx}=\int_A y^2 dA=\int_0^h y^2 . \frac{b}{h}(h-y)\,dy=\frac{bh^3}{12}$$

$$dA=b_0 . dy=\frac{b}{h}(h-y)dy$$



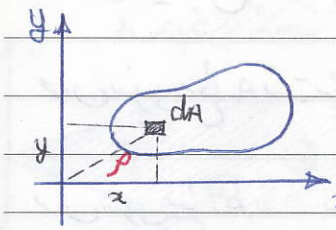
مثال ۳: ممان اینرسی دایره را نسبت به قطر آن بدست آورید.

المانی در موقعیت زاویه‌ای θ و تغییرات زاویه‌ای $d\theta$ و در موقعیت شعاعی r_0 با تغییرات شعاعی dr_0.

$$I_{xx}=\int_A y^2 dA=\int_0^R\int_0^{2\pi}(r_0 \sin\theta)^2 r_0\, d\theta\, dr_0=\frac{\pi}{4}R^4$$

$$\longrightarrow I=\frac{\pi}{4}R^4$$

۳) ممان اینرسی قطبی (Polar Moment of Inertia) :



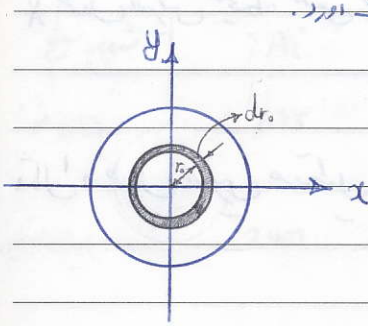
ممان اینرسی قطبی سطح A نسبت به محورهای xy
یا نسبت به نقطه O:

$$J=\int_A \rho^2\,dA$$

$$\rho^2=x^2+y^2 \Rightarrow J=\int_A (x^2+y^2)\,dA \Rightarrow J=I_{xx}+I_{yy}$$

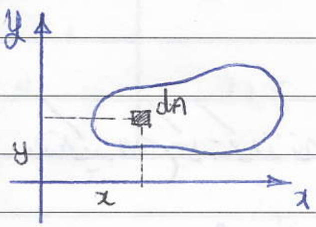
* از ممان های اینرسی سطح (I_x , I_y) می توان ممان اینرسی قطبی را بدست آورد.

مثال: ممان اینرسی قطبی دایره را نسبت به مرکز آن بدست آورید.



$$J=\int \rho^2\,dA=\int_0^R r_0^2\,2\pi r_0\,dr_0=\frac{\pi}{2}R^4=\frac{\pi}{32}D^4$$

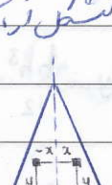
۴) حاصلضرب اینرسی (product of Inertia) :



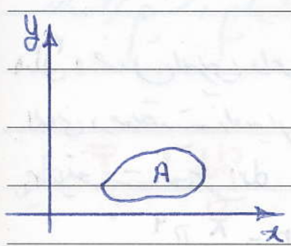
حاصلضرب اینرسی سطح A نسبت به دستگاه xy

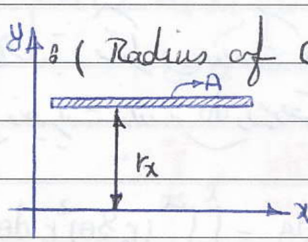
$$I_{xy}=\int_A xy\,dA$$

*نکته مهم: اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد حاصلضرب اینرسی آن سطح نسبت به دستگاه متشکل از آن محور و هر محور عمود بر آن صفر خواهد بود.



۵) شعاع ژیراسیون یا چرخش (Radius of Gyration) :





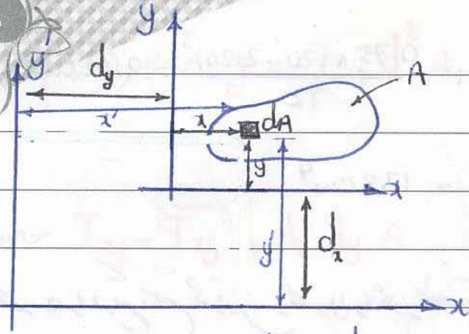
شعاع ژیراسیون A نسبت به محورها

$$r_x=\sqrt{\frac{I_{xx}}{A}}$$

I_{xx} $\qquad$ $r_x^2 \cdot A$

$$r_y=\sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} \qquad r_0=\sqrt{\frac{J}{A}}$$

۶) انتقال محورهای مختصات:



$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y+d_x)^2 dA$$

$$\to I_{x'} = I_x + d_x^2 \cdot A + 2 d_x S_x$$

رابطه انتقال محورهای مختصات نسبت به محور x. (d_x یا d اینجا است)

حالت خاص: وقتی که محور x از مرکز سطح A بگذرد: $I_{x'} = \bar{I}_x + d_x^2 \cdot A$

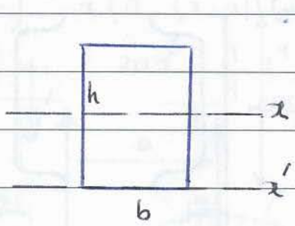
($\bar{I}_x$: ممان اینرسی سطح نسبت به محوری که از مرکز سطح گذشته باشد)

این رابطه برای $\bar{I}_y$ هم وجود دارد. بنابراین رابطه کلی به شکل زیر است:

$$I = \bar{I} + d^2 \cdot A$$

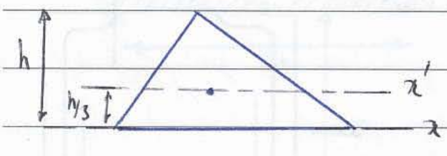
* بنابراین ممان اینرسی سطح نسبت به محوری که از مرکز سطح گذشته باشد کمترین مقدار را دارد.

مثال ۱: ممان اینرسی مستطیل را نسبت به ضلع آن حساب کنید.



$$I = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 (bh) = \frac{bh^3 + 3bh^3}{12} = \frac{bh^3}{3}$$

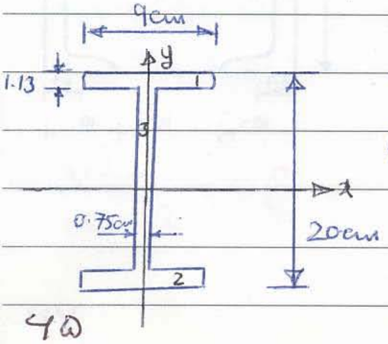
مثال ۲: ممان اینرسی مثلث را نسبت به محوری به موازات قاعده و از مرکز سطح مثلث بیابید.



$$\frac{bh^3}{12} = \bar{I} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2} bh\right)$$

$$\to \bar{I} = \frac{bh^3}{36} \quad \to \bar{I}_{\text{مثلث}} = \frac{bh^3}{36}$$

مثال ۳: مقطع یک تیر که بارهای وارده از نوع INP200 با مشخصات مطابق شکل در نظر گرفته شده است. ممان‌های اینرسی این مقطع را حول محورهای تقارن آن محاسبه نمایید.

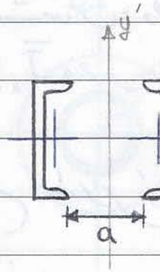


$$I_x = \left[\frac{9\times1.13^3}{12} + \left(10-\frac{1.13}{2}\right)^2 \times 9\times1.13\right]\times 2 + \frac{0.75\times(20-2.26)^3}{12} = 2162\ cm^4$$

$$I_y = \left[\frac{1.13\times9^3}{12}\right]\times 2 + \frac{(20-2.26)\times0.75^3}{12} = 138\ cm^4$$

محور x را در تیرآهن محور قوی و محور y را محور ضعیف گویند چون ممان اینرسی محور x خیلی بیشتر است.

* عضو ۱ و ۲ را بال تیرآهن (flange) گویند و عضو ۳ را جان تیرآهن (web) می گویند.

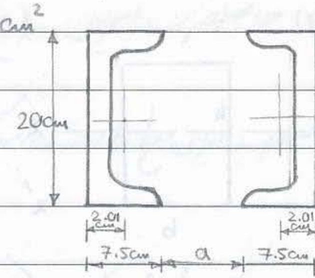


مثال: مقطعی مرکب از دو ناودانی است مطابق شکل در نظر گرفته شده است. فاصله a را برای موارد زیر طوری پیدا کنید که ممان های اینرسی نسبت به محورهای تقارن مقطع با هم برابر باشند.

الف) ناودانی نمره 20 باشد

ب) ناودانی نمره 30 باشد.

الف) $[200 \longrightarrow \bar{I}_x = 1910\ cm^4 \quad \bar{I}_y = 148\ cm^4,\ A = 32.2\ cm^2$



$I_x = 2(1910)$

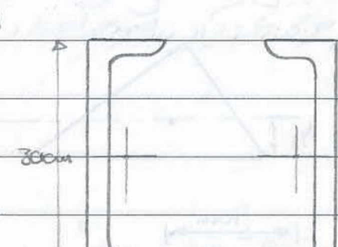
$I_y = (\bar{I}_y + d^2 . A)2 = 2(148 + (\frac{a}{2} + 5.49)^2 32.2)$

$I_y = I_x \Rightarrow \cancel{2}(1910) = \cancel{2}(148 + (\frac{a}{2} + 5.49)^2 32.2)$

$\Rightarrow a = 3.81\ cm$

ب) $[300 \longrightarrow \bar{I}_x = 8030\ cm^4 \quad \bar{I}_y = 495\ cm^4$

$I_x = 2(8030) \qquad A = 58.8\ cm^2$



$I_y = 2(\bar{I}_y + d^2 . A)$

$I_y = I_x \Rightarrow \cancel{2}(8030) = \cancel{2}(495 + (\frac{a}{2} + 7.3)^2 58.8)$

$\Rightarrow a = 8.04\ cm$

ممان اینرسی قطبی $J = \bar{J} + d^2 . A$

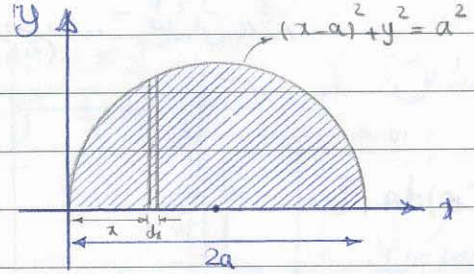
$\bar{J}$: ممان اینرسی سطح نسبت به دستگاهی که مبدأ آن مرکز سطح باشد.

d: فاصله بین مبدأ دستگاه قدیم و دستگاه جدید.

حاصلضرب اینرسی $I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x . d_y . A$

$\bar{I}_{xy}$: حاصلضرب اینرسی سطح A نسبت به دستگاهی که مبدأ آن مرکز سطح باشد.

← اینجا علامت d_x و d_y مهم است.



مثال: حاصلضرب اینرسی سطح هاشور خورده را نسبت به دستگاه xy به دو روش زیر بیابید.

۱) انتگرال گیری مستقیم.

۲) رابطه انتقال محورهای مختصات.

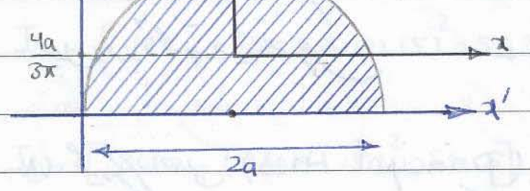
ببین $\int xy\,dA$

$\bar{x}, \bar{y}$ مرکز المان از ؟

$$1)\ I_{xy} = \int xy\,dA = \int_0^{2a} \frac{1}{2}x\left(\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)\left(\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)dx = \int_0^{2a} x\left(a^2-(x-a)^2\right)dx$$

$$= \int_0^{2a} x\left(a-(x-a)\right)\left(a+(x-a)\right)dx = \int_0^{2a} x(2a-x)(x)\,dx = \int_0^{2a}(2ax^2-x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}2ax^3 - \frac{1}{4}x^4 \Big]_0^{2a} = \frac{2}{3}a(8a^3) - \frac{1}{4}(16a^4) = \frac{16}{3}a^4 - \frac{16}{4}a^4 = \frac{4}{3}a^4 \times \frac{1}{2}$$

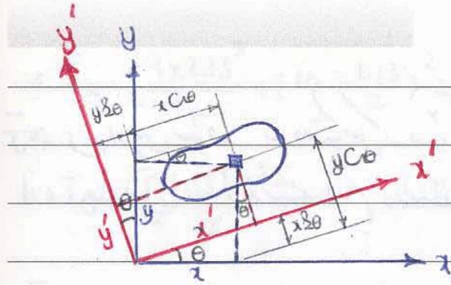


$\bar{I}_{xy} = 0$ حاصلضرب اینرسی سطح نسبت به دستگاه مرکزی، محور تقارن و هر محور عمود بر آن صفر است.

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x . d_y . A$$

$$I_{xy} = 0 + \frac{4a}{3\pi} \times a \times \pi a^2 \times \frac{1}{2}$$

$$I_{xy} = \frac{4}{3}a^4 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}a^4$$



۱۷) چرخش محورهای مختصات:

$$I_{x'} = \int_A y'^2 \, dA \qquad I_{y'} = \int_A x'^2 \, dA$$

$$I_{x'y'} = \int x' \cdot y' \, dA$$

$$I_{x'} = \int y'^2 \, dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 \, dA$$

قرارداد: θ زمانی مثبت است که دوران در جهت مثلثاتی باشد.

$$I_{y'} = \int x'^2 \, dA = \int (y\sin\theta + x\cos\theta)^2 \, dA$$

$$I_{x'y'} = \int x' \cdot y' \, dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)(y\sin\theta + x\cos\theta) \, dA$$

$$\begin{cases} I_{x'} = \dfrac{I_x + I_y}{2} + \dfrac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \\ I_{y'} = \dfrac{I_x + I_y}{2} - \dfrac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \\ I_{x'y'} = \dfrac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

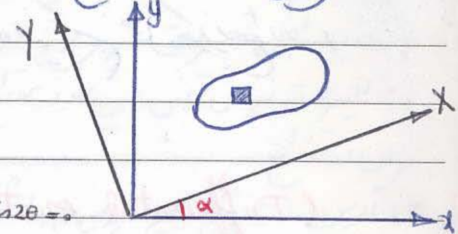
$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = \text{Const} \longrightarrow$ چون مبدأ مختصات تغییر نکند.

۱۸) محورهای اصلی (Principal Axes):

محورهایی هستند که ممان اینرسی سطح نسبت به یکی از آنها Max و نسبت به دیگری Min است.
(مثلاً اگر $I_{x'}$ ، Max باشد $I_{y'}$ حتماً Min است)
این در جایی اتفاق می‌افتد که زاویه دوران α باشد. برای پیدا کردن α از مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -(I_x - I_y)\sin 2\theta - 2 I_{xy}\cos 2\theta = 0 \Rightarrow tg\,2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$$

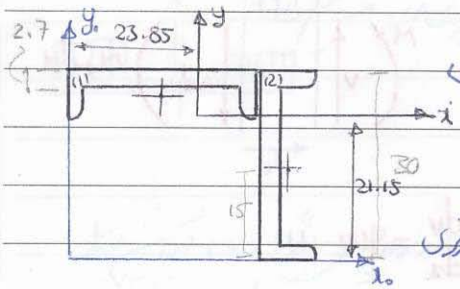
* محورهای اصلی در مقاومت مصالح و طراحی سازه‌ها کاربرد فراوانی دارد.



$$I_{\substack{Max\\Min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{xy} = 0 \xrightarrow{tg2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}} I_{xy} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

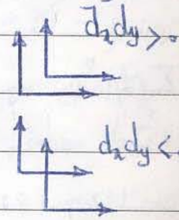
* اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد این محور، محور اصلی است، چون $I_{xy} = 0$.



مثال: مقطع یک عضو سازه‌ای از دو عدد ناودانی 300 مطابق شکل تشکیل شده است. مطلوبست

الف: تعیین محل محورهای اصلی مرکزی

ب: تعیین ممان‌های اینرسی حداکثر و حداقل نسبت به محورهای اصلی مرکزی



$$\bar{X}_0 = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} = \frac{58.8 \times 15 + 56.8(30 + 2.7)}{2 \times 58.8} = 23.85$$

$$\bar{Y}_0 = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{58.8 \times (30 - 2.7) + 58.8 \times 15}{2 \times 58.8} = 21.15$$

$$I_x = \left[495 + (30 - 2.7 - 21.15)^2 \times 58.8\right] + \left[8030 + (21.15 - 15)^2 \times 58.8\right] = 12973 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \left[8030 + (23.8 - 15)^2 \times 58.8\right] + \left[495 + (32.7 - 23.8)^2 \times 58.8\right] = 17736 \text{ cm}^4$$

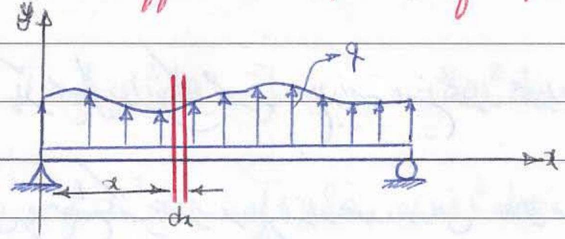
$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x . d_y . A = \left[[0] + (-(27.3 - 21.15))(23.85 - 15) \times 58.8\right]$$
$$+ \left[0 + (6.15)(-8.85) \times 58.8\right] = -64.01$$

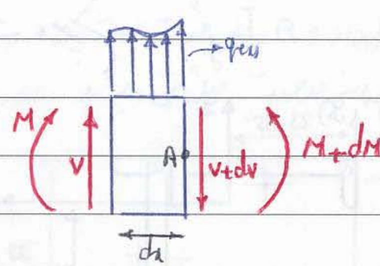
$$tg 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} = \quad \Rightarrow \alpha = -34.8$$

$I_{max} = 22184 \qquad I_{min} = 8524$

بی‌نهایت دستگاه محور اصلی داریم. همچنین بستگی به دستگاه مختصات اولیه و مکان آن دارد. دستگاه محور اصلی مرکزی دستگاهی است که در دستگاه اولیه آن محل مرکز سطح باشد.

معادلات دیفرانسیل تعادل (Differential equation of equilibrium)





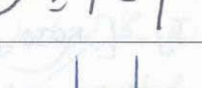
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + q(x).dx - (V + dV) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = q(x) \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \cancel{M} + dM - \cancel{M} - V.dx - q(x).dx\left(\frac{dx}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = q(x) \quad (3)$$

(1)، (2)، (3) را معادلات دیفرانسیل تعادل برای نیروهای داخلی گویند.

رسم نمودار نیروهای داخلی تیر با استفاده از روش جمع زدن: (Summation Method)



$$(1) \text{ معادله } \rightarrow dV = q(x)dx \Rightarrow \int_{(1)}^{(2)} dV = \int_{(1)}^{(2)} q(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = \int_{(1)}^{(2)} q(x)dx \quad (4)$$

$$(2) \text{ معادله } \rightarrow dM = V.dx \Rightarrow \int_{(1)}^{(2)} dM = \int_{(1)}^{(2)} V.dx$$

$$\Rightarrow M_2 - M_1 = \int_{(1)}^{(2)} V.dx \quad (5)$$

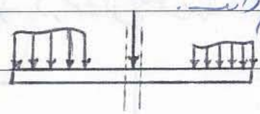
نتایج حاصل از معادلات ۱ و ۴ :

۱) شیب منحنی تغییرات نیروی برشی (V) در هر نقطه برابر است با مقدار نیروی خارجی (q) در همان نقطه.

۲) تغییرات نیروی برشی بین هر دو مقطع دلخواه (V_2-V_1) برابر است با جمع جبری نیروهای خارجی بین آن دو مقطع.

۳) اگر بین دو مقطع هیچ نیرویی وارد نشود تغییرات نیروی برشی (V_2-V_1) بین آن دو مقطع صفر است و نیروی برشی در آن بین ثابت است.

۴) اگر یک بار متمرکز وارد جمع جبری شود عمل پیوسته جمع زدن نیروهای خارجی اعتبار خود را بین دو مقطع همچنان حفظ می‌کند ولی در محل اعمال نیروی متمرکز یک انفصال در نیروی برشی خواهیم داشت.



(اندازه انفصال برابر اندازه نیروی متمرکز اعمال شده است)

نتایج حاصل از معادلات 2 و 5 :

۱) شیب منحنی تغییرات لنگر خمشی (M) در هر نقطه برابر است با مقدار نیروی برشی (V) در همان نقطه.

۲) تغییرات لنگر خمشی بین هر دو مقطع دلخواه (M_2-M_1) برابر است با جمع جبری سطوح زیر منحنی تغییرات نیروی برشی بین آن دو مقطع.

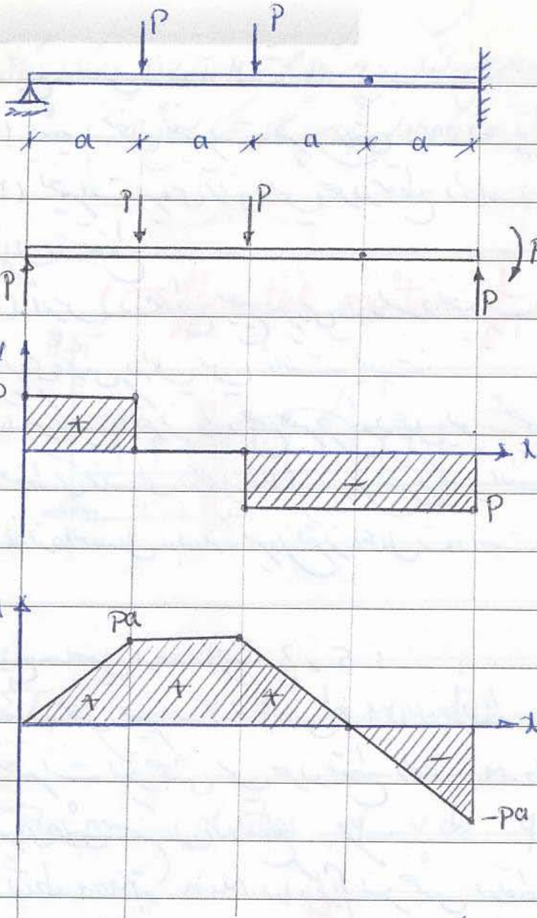
۳) نقاط Max و Min در دیاگرام لنگر خمشی در نقطه‌ای اتفاق می‌افتد که نیروی برشی صفر باشد و یا تغییر علامت بدهد.

۴) اگر یک **لنگر متمرکز خارجی** به تیر اعمال گردد عمل پیوسته جمع زدن سطوح زیر منحنی نیروی برشی برای رسم منحنی لنگر خمشی اعتبار خود را حفظ می‌کند ولی در محل لنگر خمشی یک **انفصال** رخ می‌دهد. در صورتیکه لنگر متمرکز خارجی موافق حرکت عقربه‌های ساعت باشد انفصال مذکور مثبت بوده، در غیر اینصورت منفی است.

روش رسم دیاگرام‌ها :

به منظور رسم دیاگرام‌های نیروی برشی و لنگر خمشی از روش جمع زدن، از ابتدای سمت چپ تیر (مبدأ x) شروع کرده و با جمع زدن نیروهای خارجی دیاگرام نیروی برشی و با جمع زدن سطوح زیر منحنی برشی دیاگرام لنگر خمشی را رسم می‌کنیم.

* مشتق دوم دیاگرام خمشی نسبت به x در یک نقطه برابر است با مقدار نیروی خارجی (q) در همان نقطه (نقطه عطف)
* مشتق نیروی برشی نسبت به x در یک نقطه برابر است با مقدار نیروی خارجی (q) در همان نقطه (شیب)
* مشتق لنگر خمشی نسبت به x در یک نقطه برابر است با مقدار نیروی برشی (V) در همان نقطه (شیب)



مثال ۱: مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مفصل دار زیر داده شده با استفاده از روش جمع زدن

هنگامیکه تکیه گاه غلتکی و مفصلی تیر نداریم که اگر تک لنگر متمرکز داشته باشیم

* در مفصل همواره لنگر خمشی صفر است.

۱) در مورد لنگرهای گسترده الزاما باید از روش مقطع زدن استفاده کنیم.

۲) حتما علامت العمل ها را دقیق بدانیم تا مشکلی در رسم دیاگرام نباشد.

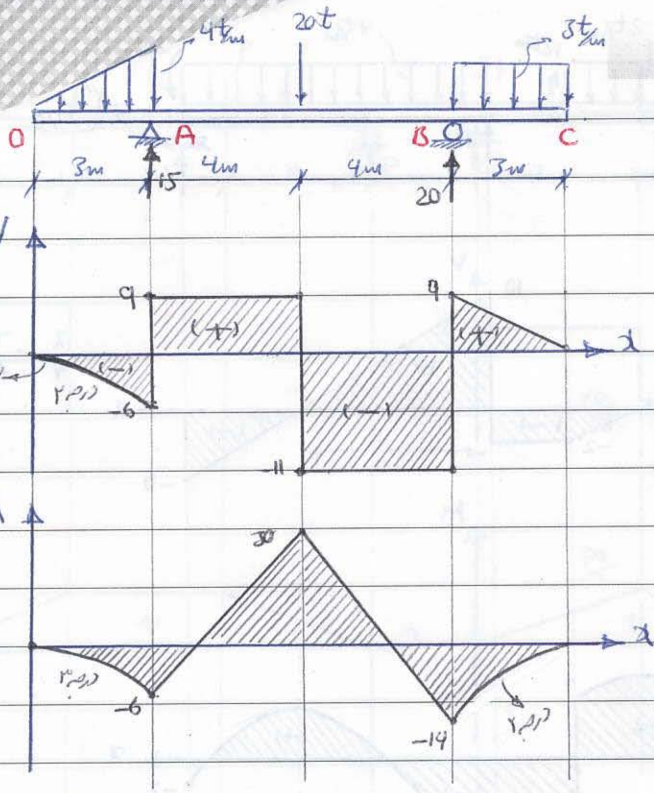
۳) در دیاگرام برشی در زیر محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره انفصال داریم. میزان انفصال هم به اندازه‌ی همان نیروی انفصالی است.

۴) در دیاگرام لنگر خمشی در محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره شکستگی داریم.

۵) معادله نیروی برشی مشتق معادله‌ی لنگر خمشی است.

۶) در تکیه گاه‌های غلتکی و مفصلی در دو سر آزاد تیر (در ابتدا یا انتهای آزاد تیر) اگر لنگر متمرکز خارجی نداشته باشیم نیروی خمشی صفر است.

مثال ۲) مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی لنگر خمشی تیر با استفاده از روش جمع زدن.



$$\begin{cases} V_2 - V_1 = \int q(x)\,dx \\ M_2 - M_1 = \int V(x)\,dx \\ \dfrac{d^2M}{dx^2} = q(x) \end{cases}$$

$\frac{1}{3}(3\times6)=6$

* تکیه‌گاه مفصلی و غلتکی در ابتدا و انتهای آزاد دارای نیروی برشی صفر است. مگر اینکه نیرو متمرکز داشته باشیم (این مسئله برای لنگر خمشی هم صحیح است.)

* از منحنی درجه دو داشته باشیم که یک انتهایش دارای شیب صفر باشد سطح زیر منحنی سهمی ۲/۳ مستطیل محیط بر آن است.

$1/3$ (مساحت مستطیل)

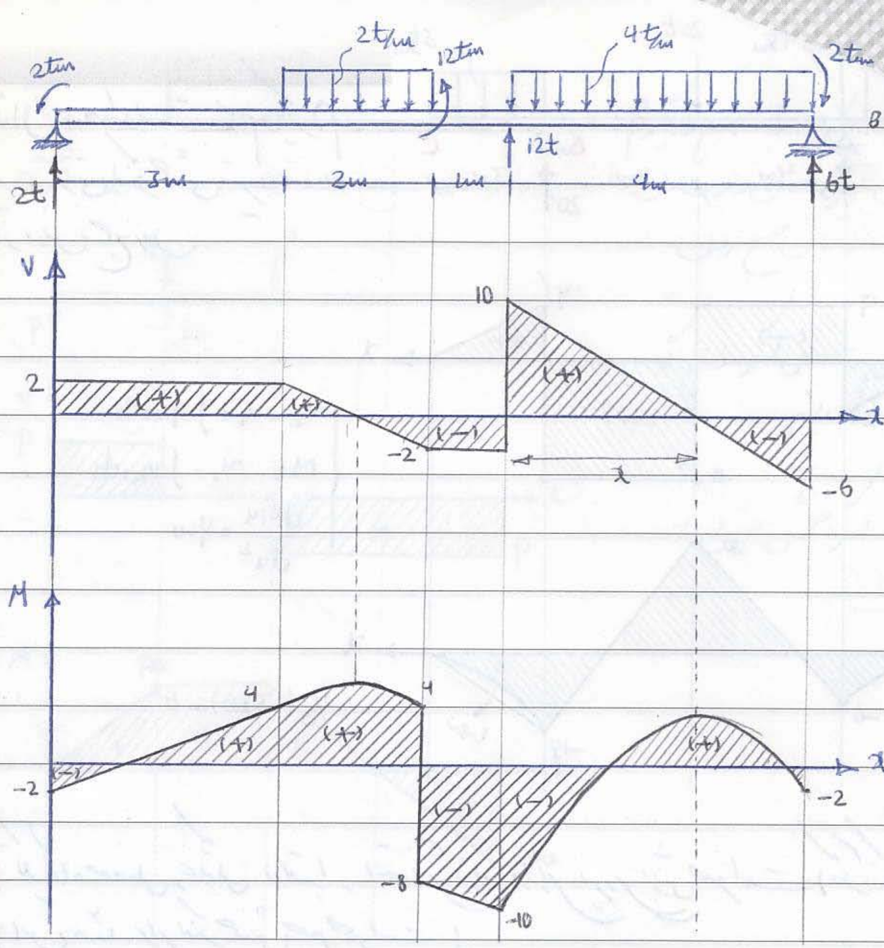
$2/3$ (مساحت مستطیل)

** اگر در ابتدا و انتهای تیر نیروی متمرکز نداشته باشیم نیروی برشی از نقطه صفر آغاز می‌شود.

* q در حد فاصل بین B و C ثابت است پس شیب خط نمودار برشی ثابت می‌ماند ولی چون q در حد فاصل بین O و A ثابت نیست پس شیب خط نمودار برشی ثابت نیست و سهمی وار است.

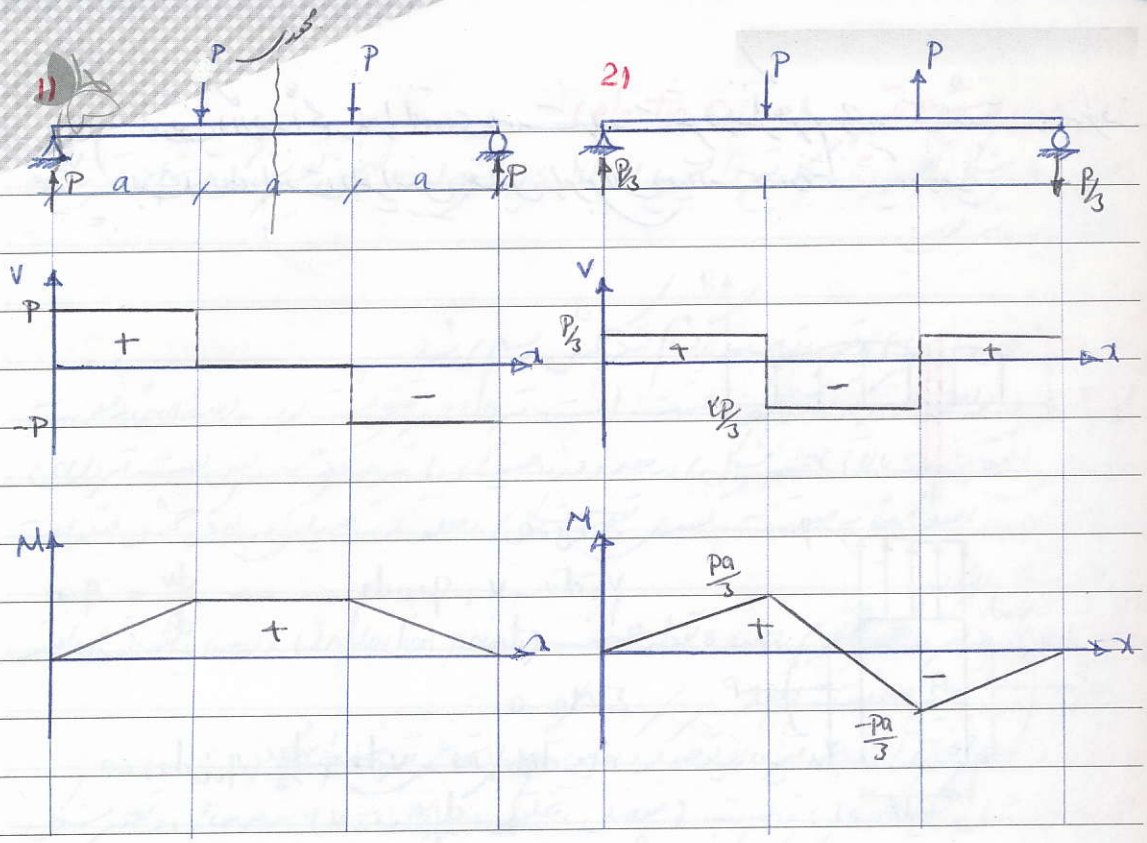
* اگر جهت بار گسترده q رو به سمت پایین باشد جهت تقعر M رو به سمت پایین است و اگر بار گسترده رو به سمت بالا باشد جهت تقعر M رو به سمت بالا است.

مثال ۳



$\frac{x}{4} = \frac{10}{16} \rightarrow x =$

* برای رسم نمودار لنگر خمشی در فضاهایی که لنگر متمرکز داریم می‌توانیم به راحتی از روش قطع زدن کمک بگیریم.

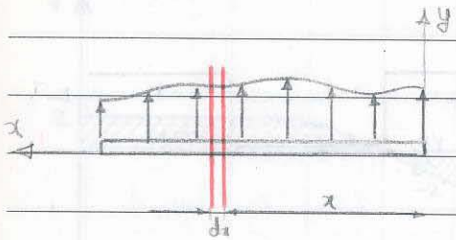


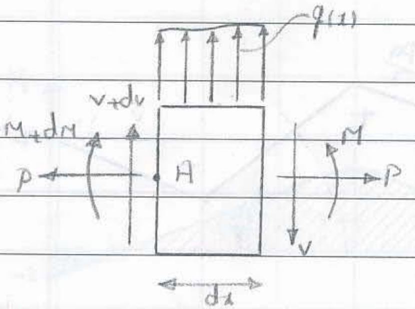
* تیر ۱ دارای تقارن محوری است و تیر ۲ دارای تقارن مرکزی است.

* وقتی تیری دارای تقارن محوری است، نمودار برشی آن دارای تقارن مرکزی و نمودار لنگر خمشی آن دارای تقارن محوری است.

* وقتی تیری دارای تقارن مرکزی است، نمودار برشی آن دارای تقارن محوری و نمودار لنگر خمشی آن دارای تقارن مرکزی است.

تمرین: اگر مبدأ محور x را انتهای سمت راست تیر در نظر بگیریم و جهت مثبت x به طرف چپ باشد، معادلات دیفرانسیل تعادل را براین حالت بدست آورید.





$\sum F_y = 0$

$V + dV - V + q_{(x)} dx = 0 \longrightarrow \dfrac{dV}{dx} = -q_{(x)}$

$\sum M_A = 0$

$-M - dM + M - V dx + \dfrac{dx}{2}(q_{(x)} dx) = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{dM}{dx} = -V$

رسم منحنی ارتجاعی تیر: (elastic curve)

تعریف: شکل تغییر یافته محور تیر را پس از اعمال نیروهای وارده منحنی تغییر شکل ارتجاعی تیر یا منحنی الاستیک تیر گویند.

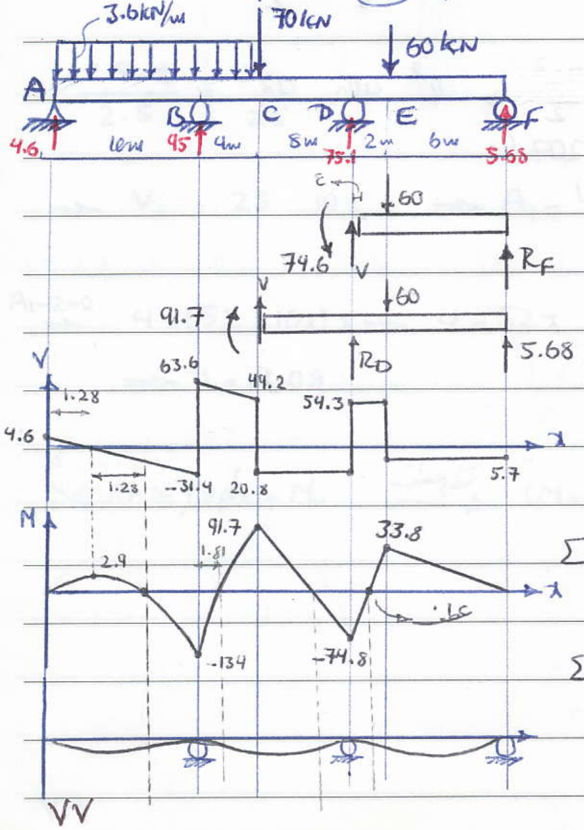
نکته ۱: منحنی ارتجاعی تیر با توجه به دیاگرام لنگر خمشی رسم می شود.

نکته ۲: در نواحی که اثر لنگر خمشی مثبت است تیر دارای تقعر مثبت بوده و اصطلاحاً به صورت کاسه ای (تقعر به سمت بالا) تغییر شکل می دهد و در نواحی که اثر لنگر خمشی منفی است تیر دارای تقعر منفی بوده و اصطلاحاً به صورت انبری تغییر شکل می دهد و در نواحی که لنگر خمشی صفر است تیر تغییر شکل ندارد.

نکته ۳: نقاطی که تیر تغییر تقعر می دهد نقطه عطف (Inflection point) و در جایی اتفاق می افتد که لنگر خمشی تغییر علامت دهد.

نکته ۴: در رسم منحنی ارتجاعی تیر باید توجه کرد که پیوستگی ارتجاعی تیر حفظ شود.

نکته ۵: در محل تکیه گاه های ثابت (مفصلی، غلتکی، گیردار بسته) جابه جایی و تغییر شکل تیر صفر است و همچنین در محل تکیه گاه گیردار شیب منحنی ارتجاعی صفر خواهد بود.



مثال: تیر مشخص شکل داده شده نامعین می باشد که تحت اثر بارهای گسترده و متمرکز نشان داده شده مفروض است. اگر لنگر این تیر با روش های ناهمگنی نشان داده است لنگر خمشی این تیر در مقطع C برابر با 91.7+ kN.m و در مقطع D برابر با 74.6- kN.m می باشد. مطلوب است رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی و منحنی ارتجاعی.

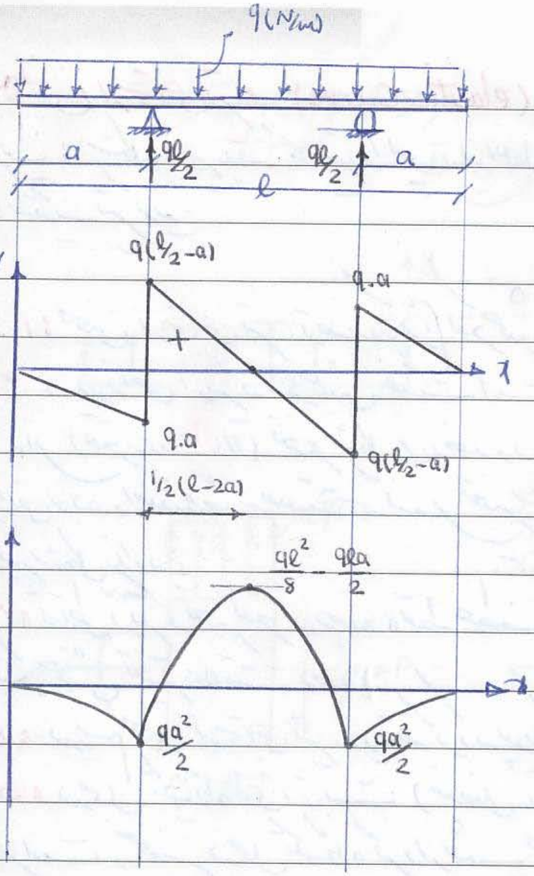
$\Sigma M_D = 0 \rightarrow R_F \times 8 - 60 \times 2 + 74.6 = 0$

$\rightarrow R_F = 5.68 \ kN$

$\Sigma M_C = 0 \rightarrow -91.7 + 8R_D - 600 + 16(5.68) = 0$

$\rightarrow R_D = 75.1 \ kN$

$R_A = 4.6 \ kN \qquad R_B = 95 \ kN$



مثال) تیر شکل داده شده بار گسترده یکنواختی را تحمل می‌کند. مطلوبست تعیین فواصل a برای موضع تکیه‌گاه‌ها به طوری که لنگر خمشی Max کمتر به حداقل کاهش یابد و لنگر خمشی Max را بدست آورید. لنگر خمشی Max وقتی به حداقل می‌رسد که

$$|M^{(+)}_{max}| = |M^{(-)}_{Max}|$$

$$\rightarrow a = 0.207 l$$

$$M_2 - \left(\frac{-qa^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(l-2a)\,q\left(\frac{l}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$M_2 + \frac{qa^2}{2} = \frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}-a\right)^2$$

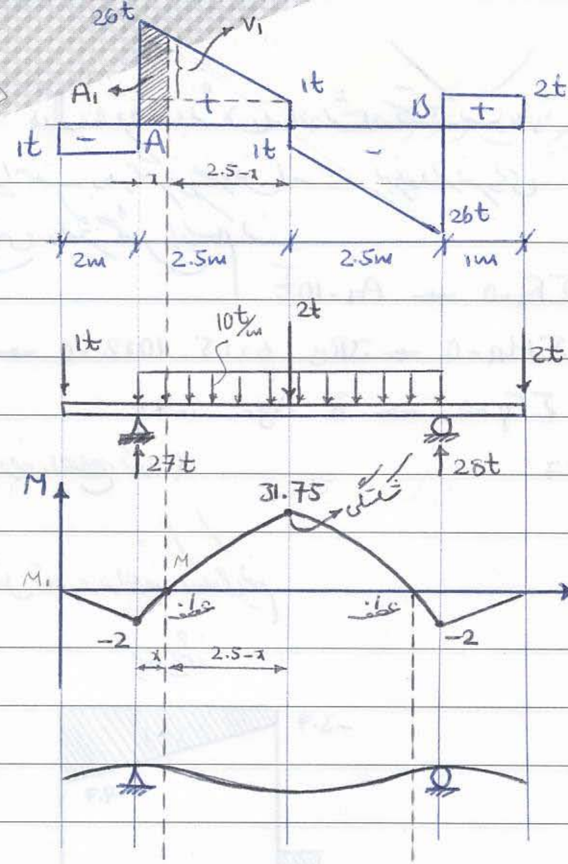
$$M_2 + \frac{qa^2}{2} = \frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4} - la + a^2\right)$$

$$M_2 + \cancel{\frac{qa^2}{2}} = \frac{ql^2}{8} - \frac{qla}{2} + \cancel{\frac{qa^2}{2}}$$

$$\rightarrow M_2 = \frac{ql^2}{8} - \frac{qla}{2}$$

$$|Max^{(+)}| = |Max^{(-)}| \Rightarrow \frac{ql^2}{8} - \frac{qla}{2} = \frac{qa^2}{2} \Rightarrow l^2 - 4la - 4a^2 = 0$$

$$\rightarrow l = 4.82a \Rightarrow a = 0.207 l$$



مثال ۶: یک تیر ۸ متری در نقاط A و B به ترتیب دارای تکیه‌گاه‌های مفصلی و غلتکی می‌باشد. دیاگرام تغییرات نیروی برشی آن مطابق شکل می‌باشد. وضعیت بارگذاری تیر را مشخص نموده دیاگرام تغییرات لنگر خمشی را رسم نمایید.

برای اطمینان چند معادله تعادل می‌نویسیم مخصوصاً ΣM.

* اگر $\Sigma M \neq 0$ شد یعنی احتمالاً لنگر متمرکز در جایی از تیر وجود دارد.

* اگر $\Sigma M = 0$ شد امکان دارد دو لنگر مخالف داشته باشیم در این صورت باید ذکر کنند.

$$\frac{2.5-x}{2.5} = \frac{V_1}{25}$$

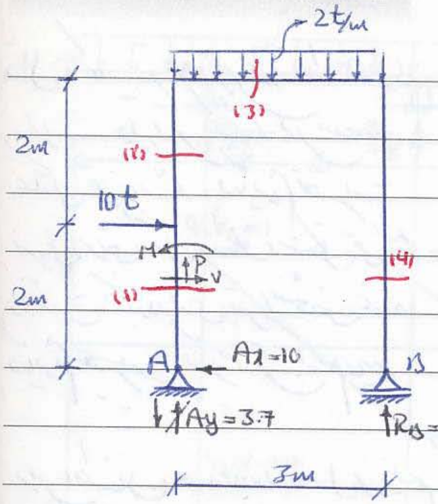
برای یافتن نقطه عطف: $-2 + A_1 = 0$

$$\Rightarrow V_1 = 25 - 10x \Rightarrow A_1 = \frac{(26+V_1+1)\times(x)}{2} = \frac{(26+26-10x)\,x}{2}$$

$$A_1 - 2 = 0 \Rightarrow 4 = (52-10x)\,x \Rightarrow 4 = 52x - 10x^2 \Rightarrow 10x^2 - 52x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0.08$$

$$M = \int v\,dx + M_0 \xrightarrow{\text{نقطه عطف}} (M=0) \rightarrow 0 = \int v\,dx + M_0 \xrightarrow{M_0=0} \int v\,dx = 0$$



مثال: قاب نشان داده شده تحت بار گسترده یکنواخت و بار متمرکز مفروض است. نمودار نیروهای محوری و برشی و لنگر خمشی را رسم کنید.

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow A_x=10t$

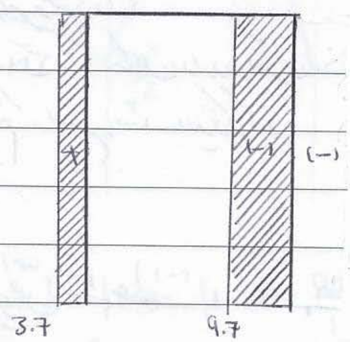
$\Sigma M_A=0 \Rightarrow 3R_B-6\times1.5-10\times2=0 \Rightarrow R_B=9.7t$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow R\ A_y=-3.7t$

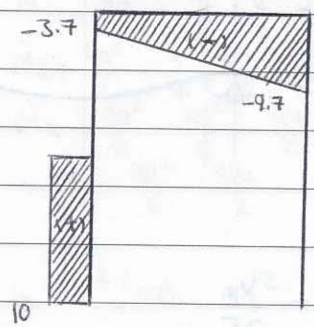
(جهت فرضی اصلاح شود)

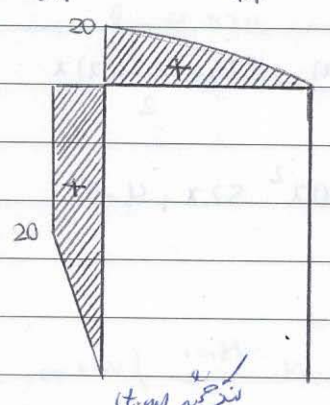
* از داخل قاب به اعضا نگاه می‌کنیم.

نیروی محوری



نیروی برشی

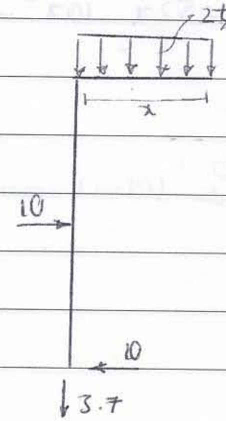




لنگر خمشی (t.m)

برش (1) $P=3.7t \quad V=10t \quad M=10x$

برش (2) $P=3.7t \quad V=0 \quad M=10x-(10x-2)$

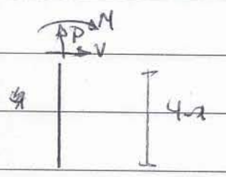


برش (3) $P=0$

$V=-3.7-2x$

$M+3.7x-10\times4+10\times2+x^2=0$

$\Rightarrow M=-x^2-3.7x+20$



* در بند گشتی در کنج که از یک عضو به عضو دیگر مقدار لنگر برابر است.