جزوه دستنویس درس استاتیک

بردارها:

- انواع کمیت های اسکالر و کمیت های برداری:

کمیت های اسکالر:

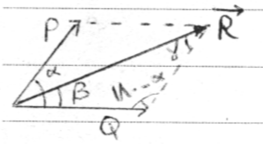
کمیت هایی هستند که تنها دارای اندازه هستند مانند: جرم، مسافت طی شده و زمان

کمیت های برداری:

کمیت هایی هستند که علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز می باشند مانند: نیرو، شتاب، گشتاور و سرعت

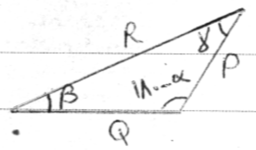
روش های جمع برداری:

۱) روش متوازی الاضلاع



$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$|R|^2 = |P|^2 + |Q|^2 + 2|P||Q|\cos\alpha$$



$$\frac{|R|}{\sin(180-\alpha)} = \frac{|P|}{\sin\beta} = \frac{|Q|}{\sin\gamma}$$

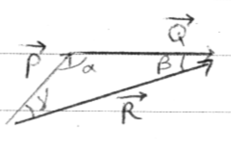
$$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{|R|}{\sin\alpha} = \frac{|P|}{\sin\beta} = \frac{|Q|}{\sin\gamma} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \_\_ \\ \gamma = \_\_ \end{cases}$$

با محاسبه یکی از دو زاویه β یا γ می توان زاویه بردار نتیجه با یکی از دو راستای اصلی افقی یا عمودی را بدست آورد

۲) روش مثلث

$$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$$

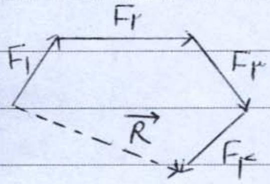


$$|R|^2 = |P|^2 + |Q|^2 - 2|P||Q|\cos\alpha$$

$$\frac{|R|}{\sin\beta} = \frac{|R|}{\sin\alpha} = \frac{|Q|}{\sin\gamma}$$

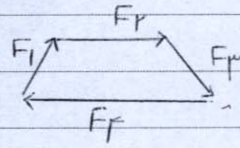
۳) روش ترسیمی

در این روش بردارها بطور متوالی ترسیم می‌گردند به گونه‌ای که ابتدای هر بردار بر انتهای بردار قبلی منطبق گردد. برداری که ابتدای اولین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل می‌کند بردار برآیند می‌باشد. در این رسم لازم است که ترسیم بردارها به صورت دقیق و با مقیاس مناسب انجام گیرد.



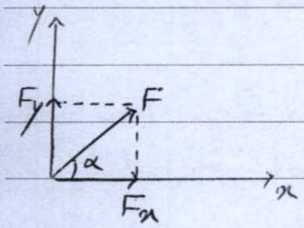
$$\vec{R} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

نکته: اگر پس از ترسیم ابتدای اولین بردار و انتهای آخرین بردار بر هم منطبق شوند برآیند بردارها صفر می‌باشد.



۴) روش جمع مؤلفه‌های برداری:

در این روش هر بردار را به مؤلفه‌های اصلی خود در راستای محورهای اصلی تجزیه می‌کنیم و سپس این مؤلفه‌ها را در راستای هر یک از جهات اصلی با هم جمع جبری می‌کنیم. مقادیری که به دست می‌آید مؤلفه‌های برداری، بردار برآیند در هر یک از راستاهای اصلی خواهد بود.



$$\Rightarrow F_x = |F|\cos\alpha$$
$$F_y = |F|\sin\alpha$$
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

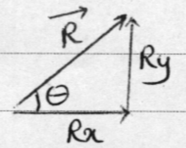
i و j بردارهای یکه در راستای هر یک از دو محور اصلی x و y هستند

بردار یکه: برداری است به بزرگی واحد و هم راستا و هم جهت با بردار اصلی

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_n}$$

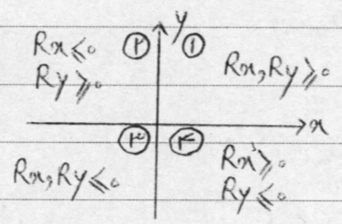
$$\left.\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{R_x i} + \vec{R_y j} \\ F_1 &= F_{1x} i + F_{1y} j \\ F_2 &= F_{2x} i + F_{2y} j \\ F_n &= F_{nx} i + F_{ny} j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + \dots + F_{nx} \\ R_y &= \sum F_{iy} = F_{1y} + \dots + F_{ny} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$



$$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

برحسب آنکه مقادیر Rx و Ry دارای چه علامتی باشند بردار نتیجه در یکی از چهار ناحیه دستگاه مختصات قرار می گیرد



بردارها در فضا:

در حالت سه بعدی بردارها علاوه بر دو بعد x و y دارای یک مؤلفه در راستای محور z نیز می باشند بردار یکه در راستای محور z با K نمایش داده می شود

$\vec{\lambda}$: بردار یکه بردار F است که دارای بزرگی (1) و هم موازات بردار F می باشد

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{\vec{F}}{|F|} = \frac{F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \qquad \vec{\lambda} = \lambda_x i + \lambda_y j + \lambda_z k$$

$$\lambda_x = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \dots$$

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 = 1$$

$$\vec{\lambda} = \underbrace{\cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k}_{\text{کسینوس های هادی بردار F}}$$

α : زاویه بردار F با محور x

β : " " " y

γ : " " " z

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\begin{cases} F_x = |F| \cdot \cos\alpha \\ F_y = |F| \cdot \cos\beta \\ F_z = |F| \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

نیرویی که اندازه و دو نقطه از خط اثر آن معلوم است:

فرض کنید که بردار $\vec{F}$ با $|F|$ موجود است. این بردار از نقطه M به سمت نقطه N می باشد، مؤلفه های برداری این بردار به شکل زیر محاسبه می شود

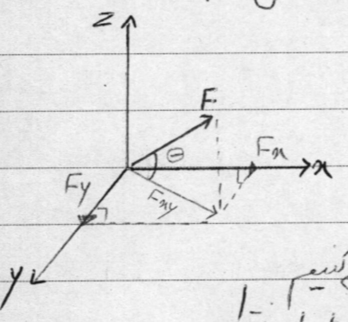
$$M(x_1, y_1, z_1)$$

$$N(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda} \quad , \quad \lambda = \frac{\overrightarrow{MN}}{|MN|}$$

مؤلفه های یک بردار فضایی برروی یکی از صفحات اصلی:



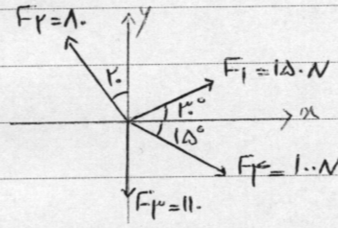
$$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$

فرض کنیم می خواهیم تصویر یا مؤلفه این بردار را در صفحه xy بدست آوریم از انتهای بردار F به موازات محور z یک عمود بر صفحه xy رسم می کنیم تا این صفحه را در یک نقطه قطع کند برداری که ابتدای بردار را به نقطه بدست آمده وصل می کند تصویر بردار خواهد بود

$$|F_{xy}| = |F| \cdot \cos\theta$$

$$|F_{xy}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow \vec{F_{xy}} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

مثال: مطلوبست محاسبه برآیند چهار نیروی نشان داده شده در شکل زیر با استفاده از روش جمع مؤلفه‌های برداری؟



$$F_{1x} = 150 \cdot \cos 30 = 129{,}9$$

$$F_{1y} = 150 \cdot \sin 30 = 75$$

$$F_{2x} = -80 \cdot \sin 20 = -27{,}4$$

$$F_{2y} = 80 \cdot \cos 20 = 75{,}2$$

$$F_{3x} = 0 \quad , \quad F_{3y} = -110$$

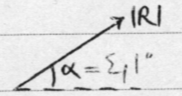
$$F_{4x} = 100 \cdot \cos 15 = 96{,}6$$

$$F_{4y} = -100 \cdot \sin 15 = -25{,}9$$

$$R_x = \Sigma F_x = 129{,}9 - 27{,}4 + 0 + 96{,}6 = 199{,}1$$

$$R_y = \Sigma F_y = 75 + 75{,}2 - 110 - 25{,}9 = 14{,}3$$

$$R = 199{,}1\vec{i} + 14{,}3\vec{j} \Rightarrow |R| = \sqrt{14{,}3^2 + 199{,}1^2} = 199{,}6$$



$$\Rightarrow \alpha = \mathrm{Arctan}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{14{,}3}{199{,}1}\right) = 4{,}1^\circ$$

مثال: نیرویی به اندازه $500N$ با محورهای x و y و z به ترتیب زوایای ۶۰، ۴۵ و °۱۲۰ تشکیل می‌دهد مولفه‌های F_x، F_y، F_z این نیرو را تعیین کنید؟

$$|F| = 500$$

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \Rightarrow \vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda}$$

$$\alpha = 60 \quad \beta = 45 \quad \gamma = 120 \qquad \vec{\lambda} = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$$

$$= \cos 60\, i + \cos 45\, j + \cos 120\, k$$

$$= 0{,}5 i + 0{,}707 j - 0{,}5 k$$

$$\vec{F} = 500\,(0.5i + 0.707j - 0.5K) = \underbrace{250\,i}_{F_x} + \underbrace{354\,j}_{F_y} - \underbrace{250\,K}_{F_z}$$

مثال: اگر مؤلفه‌های بردار F به شرح زیر معلوم باشد مطلوبست محاسبه زوایای هادی؟

$$\vec{F} = 20i - 30j + 60K$$

$$|F| = \sqrt{20^2 + (-30)^2 + 60^2} = 70$$

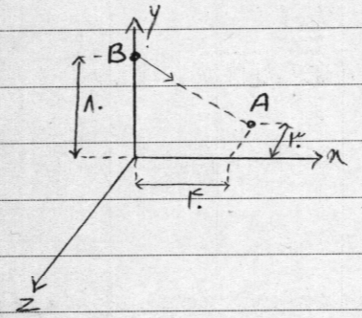
$$F_x = |F| \cdot \cos\alpha \Rightarrow 20 = 70\cos\alpha \quad \cos\alpha = 2/7 \quad \alpha = \mathrm{Arccos}(2/7) = 73.4$$

$$F_y = |F| \cdot \cos\beta \Rightarrow -30 = 70\cos\beta \Rightarrow \beta = \mathrm{Arccos}(-3/7) = 115.4 = -64.6$$

$$F_z = |F| \cdot \cos\gamma \Rightarrow 60 = 70\cos\gamma \Rightarrow \gamma = \mathrm{Arccos}(6/7) = 31^\circ$$

مثال: در شکل زیر مقدار نیرو 2500 N می‌باشد. بردار نیرو از نقطه B به سمت نقطه A می‌باشد. مطلوبست محاسبه مؤلفه‌های برداری و زوایای هادی؟ (۲-۷ ص ۳۰)

A در صفحه zx و B بر روی محور y



$$|F| = 2500\,N$$

$$A(40, 0, -30) \;,\; B(0, 80, 0)$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{BA}}{|BA|} = \frac{40i - 80j - 30K}{\sqrt{40^2 + 80^2 + 30^2}}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{40i - 80j - 30K}{94.3}$$

$$\vec{F} = \frac{2500}{94.3} \times (40i - 80j - 30K) = 1060i - 2120j - 795K$$

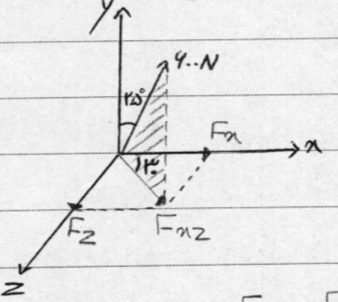
$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|F|} = \frac{1060}{2500} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1060}{2500}\right) = 64.9$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{|F|} = \frac{-2120}{2500} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{-2120}{2500}\right) = 148^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{|F|} = \frac{-795}{2500} \Rightarrow \alpha = 108.5^\circ$$

تمرین: در مثال قبل مطلوبست محاسبه مؤلفه های بردار و زوایای بردار بر روی سه صفحه xy و xz و yz ؟

مثال: برای نیروی ۶۰۰ نیوتنی نشان داده شده در شکل مطلوبست محاسبه مؤلفه ها در راستای سه محور اصلی و زوایای هادی ؟ (۲_۷۱ صـ ۳۲)



$$F_y = 600\cos 25^\circ = 543.8\ N$$

تصویر 600N روی محور y : F_y

زاویه نیرو با صفحه xz ← $90 - 25 = 65^\circ$

$$F_{xz} = 600\cos 65 = 253.6 \quad \text{یا} \ (F\sin 25^\circ)$$

$$F_x = F_{xz}\cos 30 = 253.6\cos 30 = 219.6$$

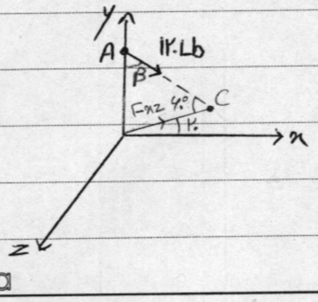
$$F_z = F_{xz}\sin 30 = 253.6\sin 30 = 126.8$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{219.6}{600} = 0.366 \Rightarrow \alpha = \operatorname{Arccos}(0.366) = 68.53$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{126.8}{600} = 0.21 \Rightarrow \gamma = 77.87^\circ$$

$$\beta = 25^\circ$$

مثال: راستای نیروی نشان داده شده در شکل زیر از نقطه C در صفحه xz عبور می کند مطلوبست محاسبه مؤلفه های این نیرو و زوایای هادی ؟ (۲_۷۳ صـ ۳۲)



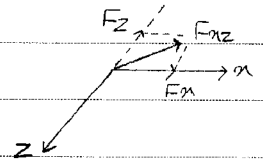
$$\beta = 90 - 60 = 30$$

$$F_y = -120\cos 30 = -103.9$$

$$F_{xz} = 120\sin 30 = 60\ Lb$$

$$F_x = 60\cos 20 = 56.4$$

$$F_z = -60\sin 20 = -20.5$$



$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{56.4}{120} = 0.47$$

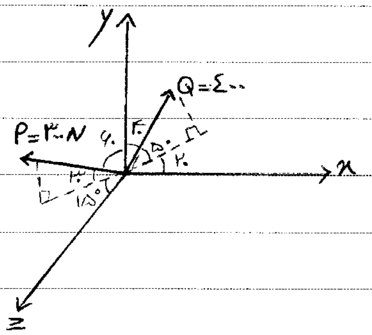
$$\alpha = \operatorname{Arccos}(0.47) = 61.96$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{-20.5}{120} = -0.117 \Rightarrow \gamma = 99.8$$

مثال: اندازه و جهت برآیند دو نیروی نشان داده شده در شکل را تعیین کنید. (۲-۹۲)

بردار N ۴۰۰ با صفحه xz زاویه ۵۰ درجه می‌سازد

بردار N ۳۰۰ با صفحه xz زاویه ۳۰ درجه می‌سازد



$$P = P_x i + P_y j + P_z K$$

$$P_y = 300 \cos 60 = 150$$

$$P_{xz} = 300 \cos 30 = 259.8$$

$$P_x = -259.8 \sin 15 = -67.24$$

$$P_z = 259.8 \cos 15 = 250.95\,N$$

$$Q = Q_x i + Q_y j + Q_z K$$

$$Q_y = 400 \cos 40 = 306.4 \qquad Q_{xz} = 400 \cos 50 = 257.1$$

$$Q_x = 257.1 \cos 20 = 241.6 \qquad Q_z = -257.1 \sin 20 = -87.93$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (-67.24 + 241.6)\vec{i} + (150 + 306.4)\vec{j} + (250.95 - 87.93)\vec{K}$$

$$\vec{R} = 174.36\,\vec{i} + 456.4\,\vec{j} + 163.02\,\vec{K}$$

$$|R| = \sqrt{(174.36)^2 + (456.4)^2 + (163.02)^2} = 515\,N$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{R_x}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{174.36}{515}\right) = 70.21$$

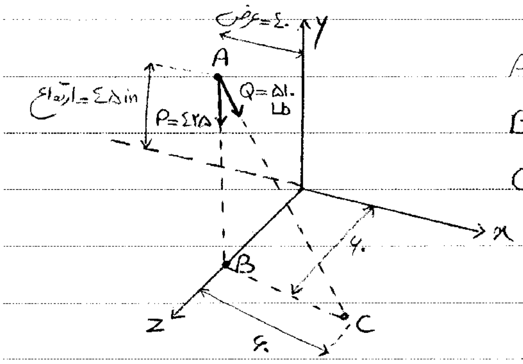
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{R_y}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{456.4}{515}\right) = 27.6$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{R_z}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{163.02}{515}\right) = 71.54^\circ$$

مثال : در شکل زیر مطلوبست محاسبه برآیند دو بردار نیروی اعمال شده به نقطه A ؟ (۲-۹۴)

A در صفحه xy

B,C در صفحه xz



$$A(-40,\ 45,\ 0)$$
$$B(0,\ 0,\ 60)$$
$$C(60,\ 0,\ 60)$$

$$\vec{P} = |P|\cdot\lambda_P = |P|\cdot\frac{\vec{AB}}{|AB|}$$
$$= 425 \times \frac{40\vec{i} - 45\vec{j} + 60k}{\sqrt{40^2 + 45^2 + 60^2}}$$
$$= 425/85 \times (40i - 45j + 60k)$$
$$= 200i - 225j + 300k$$

$$\vec{Q} = |Q|\cdot\lambda_Q = |Q|\cdot\frac{\vec{AC}}{|AC|} = 510 \times \frac{100i - 45j + 60k}{\sqrt{100^2 + (45)^2 + 60^2}}$$
$$= \frac{510}{125} \times (100i - 45j + 60k) = 408i - 183{,}6j - 244{,}8k$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (200 + 408)i + (-225 - 183{,}6)j + (300 + 244{,}8)k$$
$$= 608i - 408{,}6j + 544{,}8k$$

تعادل ذره :

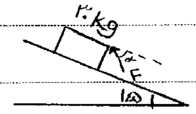
برای آنکه یک ذره دارای تعادل باشد باید برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد در مسائل تعادل ذره ابتدا دیاگرام آزاد ذره را رسم می کنیم ، دیاگرام آزاد ذره شامل تمامی نیروهای معلوم و مجهول وارد بر ذره است. سپس برآیند بردارهای نیروی وارده بر ذره را به گونه ای محاسبه می کنیم که برابر صفر شود برای این منظور می توان از روش های مختلف جمع برداری کمک گرفت به طور مثال اگر از روش ترسیمی استفاده می کنیم بردارها را باید به صورت پیاپی به گونه ای رسم کنیم که انتهای آخرین بردار بر ابتدای اولین بردار منطبق شود. اگر

از روش جمع مؤلفه‌ها استفاده می‌کنیم باید از سه معادله تعادل زیر کمک بگیریم

$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma F_z = 0$

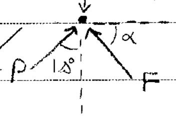
مثال: مطلوبست تعیین اندازه و جهت کوچکترین نیروی F که بسته نشان داده شده در شکل را در حالت تعادل نگه دارد؟ سطح شیب‌دار فاقد اصطکاک می‌باشد

(۵-۲) ص ۳۲



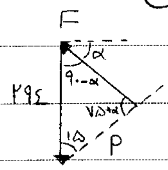
بسته به عنوان یک ذره در نظر گرفته می‌شود
دیاگرام آزاد بسته را رسم می‌کنیم

$w = 30 \times 9.8 = 294$



P عکس العمل سطح

برآیند سه نیرو باید صفر شود برای این منظور در اینجا با توجه به آنکه تنها سه بردار داریم از روش مثلث استفاده می‌کنیم



با توجه به مشخص بودن راستای F از مثلث نیروها ضلع سوم مثلث که نشان دهنده نیروی F است بی‌نهایت شکل قابل ترسیم است اما با توجه به آنکه کمترین مقدار نیروی F مورد نظر است. این ضلع باید به گونه‌ای رسم شود که کمترین طول را داشته باشد. کمترین طول وقتی رخ می‌دهد که راستای F بر P عمود باشد

حالا از قانون سینوس‌ها کمک می‌گیریم

$75 + \alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 15°$

$90 - \alpha = 75°$

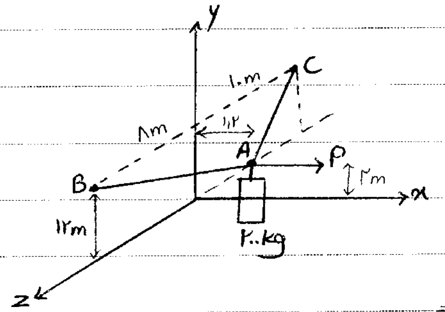
$$\frac{294}{\sin 90} = \frac{F}{\sin 15} \Rightarrow F = \frac{294 \sin 15}{1} = 76.1$$

مثال: استوانه‌ای ۲۰۰ kg از دو کابل AB و AC آویزان است نیروی افقی P عمود بر صفحه yz در امتداد محور x استوانه را نگه می‌دارد مطلوبست اندازه نیروی P و کشش در هر کابل؟ (کابل‌ها در صفحه yz قرار ندارند) (۲-۹ ص ۳۵)

$A(1.2, 2, 0)$ — B و C در صفحه yz

$B(0, 12, 8)$ — A در صفحه xy

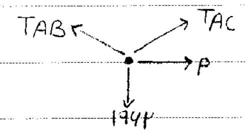
$C(0, 12, -10)$



$W = 200 \times 9.81 = 1962\,N$

$W = -1962\,j$

دیاگرام آزاد نقطه A را رسم می کنیم



$\Rightarrow \vec{P} = P\,i$

$\vec{T}_{AC} = |T_{AC}| \cdot \lambda_{AC}$

$= |T_{AC}| \times \dfrac{\vec{AC}}{|AC|} = |T_{AC}| \times \dfrac{-1.2i + 10j - 10k}{\sqrt{1.2^2 + 10^2 + 10^2}}$

$= |T_{AC}| \times \dfrac{-1.2i + 10j - 10k}{14.191}$

$\Rightarrow \vec{T}_{AC} = |T_{AC}| \times (-0.08455i + 0.7046j - 0.7046k)$

$\vec{T}_{AB} = |T_{AB}| \times \dfrac{\vec{AB}}{|AB|} = |T_{AB}| \times \dfrac{-1.2i + 10j + 8k}{\sqrt{1.2^2 + 10^2 + 8^2}} = |T_{AB}| \times \dfrac{-1.2i + 10j + 8k}{12.862}$

$= |T_{AB}| \times (-0.0933i + 0.7775j + 0.622k)$

حال سه معادله تعادل را برای نیرو می نویسیم

$\sum F_x = 0 \Rightarrow P - 0.08455\,T_{AC} - 0.0933\,T_{AB} = 0$ ①

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -1962 + 0.7046\,T_{AC} + 0.7775\,T_{AB} = 0$ ②

$\sum F_z = 0 \Rightarrow -0.7046\,T_{AC} + 0.622\,T_{AB} = 0$ ③

③ $\Rightarrow T_{AB} = \dfrac{0.7046}{0.622} T_{AC} = 1.13\,T_{AC}$ ④

④, ② $\Rightarrow -1962 + 0.7046\,T_{AC} + 0.7775\,(1.13\,T_{AC}) = 0$

$\Rightarrow -1962 + 1.58\,T_{AC} = 0 \Rightarrow T_{AC} = 1242\,N$ ⑤

⑤, ④ $\Rightarrow T_{AB} = 1.13 \times 1242 = 1403\,N$ ⑥

①, ⑤, ⑥ $\Rightarrow P - 0.08455 \times 1242 - 0.0933 \times 1403 = 0$

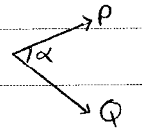
$\Rightarrow P = 235.9\,N$

ضرب داخلی و خارجی بردارها:

ضرب داخلی:

ضرب داخلی دو بردار یک عدد می‌شود و طبق رابطه زیر قابل محاسبه است

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = |P|\cdot|Q|\cdot\cos\alpha$$



$$P = ai + bj + ck$$
$$Q = di + ej + Fk$$
$$\Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{Q} = ad + be + cF$$

ضرب داخلی دارای خاصیت جابجایی می‌باشد $\vec{P}\cdot\vec{Q} = \vec{Q}\cdot\vec{P}$

ضرب داخلی دو بردار وقتی ماکزیمم است که دو بردار موازی هم باشند

وقتی دو بردار عمود بر هم باشند ضرب داخلی آن‌ها صفر است

ضرب خارجی:

ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر صفحه‌ای که دو بردار ضرب شونده با هم تشکیل می‌دهند

$$\vec{R} = \vec{P}\times\vec{Q} \Rightarrow |R| = |P|\times|Q|\times\sin\alpha$$

ضرب خارجی خاصیت جابجایی ندارد $P\times Q = -Q\times P$

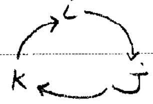
برای تعیین جهت بردار نتیجه از قانون دست راست کمک می‌گیریم به گونه‌ای که انگشت شست در راستای بردار اول و انگشت اشاره در راستای بردار دوم قرار گیرد حال انگشت وسط نشان دهنده جهت بردار نتیجه خواهد بود

$$P\times Q = (ai + bj + ck)\times(di + ej + fk)$$
$$= (ae)k - (af)j - (bd)k + (bf)i + (cd)j - (ce)i$$

$i\times i = 0 \quad j\times j = 0 \quad k\times k = 0$

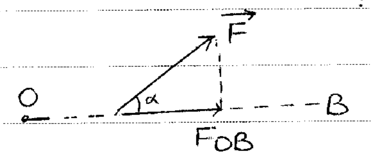
$i\times j = k \quad j\times i = -k \quad j\times k = i$

$k\times j = -i \quad i\times k = -j \quad k\times i = j$



$$\vec{R} = P \times Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

محاسبه تصویر یک بردار بر روی یک راستای خاص:



$$|F_{OB}| = |F| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{F}_{OB} = |F_{OB}| \cdot \lambda_{OB} = |F_{OB}| \times \frac{\vec{OB}}{|OB|}$$

اگر زاویه α موجود نباشد از ضرب داخلی برای محاسبه این زاویه کمک می‌گیریم

$$\vec{OB} \cdot \vec{F} = |OB| \cdot |F| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{F}}{|OB| \cdot |F|} = \vec{\lambda}_{OB} \cdot \vec{\lambda}_F$$

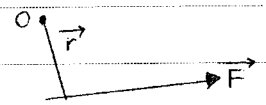
$$(F_{OB} = F \cdot \lambda_{OB})$$

گشتاور:

کمیتی است برداری که تمایل به چرخاندن جسم حول نقطه یا محوری خاص را دارد. گشتاور با توجه به جهت چرخشی که ایجاد می‌کند می‌تواند به صورت ساعتگرد یا پادساعتگرد تعریف شود. به طور قرارداد گشتاور پادساعتگرد مثبت و ساعتگرد منفی فرض می‌شود

گشتاور یک نیرو حول نقطه‌ای خاص:

برای محاسبه گشتاور یک نیرو حول یک نقطه، از آن نقطه به نقطه‌ای دلخواه در راستای نیرو، بردار $\vec{r}$ را رسم می‌کنیم ابتدای این بردار بر نقطه مورد نظر و انتهای آن بر راستای نیرو قرار می‌گیرد، ضرب خارجی بردار $\vec{r}$ در بردار نیرو برابر بردار گشتاور خواهد شد



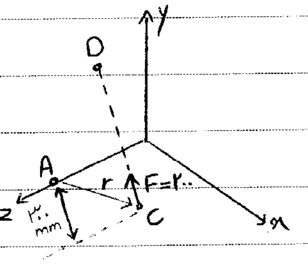
$$M_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

برای تشخیص جهت بردار گشتاور همانند حالت گفته شده در ضرب خارجی بردارها می توان از قانون دست راست کمک گرفت

برای تشخیص بردار گشتاور در شکل زیر نیز می توان از دست راست کمک گرفت در این حالت ابتدا باید تشخیص دهیم که گشتاور ساعتگرد است یا پادساعتگرد آنگاه دست راست را به گونه ای قرار می دهیم که چهار انگشت در جهت چرخش گشتاور باشد در این حالت انگشت شصت نشان دهنده جهت بردار گشتاور خواهد بود

مثال: در شکل زیر به نقطه C نیروی ۲۰۰N اعمال می شود راستای این نیرو از نقطه D عبور می کند مطلوبست محاسبه گشتاور این نیرو حول نقطه A (۳-۳۰ ص ۵۱)

C در صفحه xz
D در صفحه yz
A بر روی محور z



$C(300, 0, 400)$
$A(0, 0, 320)$
$D(0, 240, 80)$

در ابتدا نیروی وارده را به صورت یک بردار نیرو می نویسیم

$$\vec{F} = |F| \times \frac{\vec{CD}}{|CD|} = 200 \times \frac{-300i + 240j - 320k}{\sqrt{300^2 + 240^2 + 320^2}} = 200 \times \frac{-300i + 240j - 320k}{500}$$
$$= -120i + 96j - 128k$$

حالا بردار $\vec{r}$ را رسم می کنیم، ابتدای $\vec{r}$ روی نقطه A قرار می گیرد و انتهای آن هر نقطه ای دلخواه در راستای نیروی $\vec{F}$. بطور مثال انتهای $\vec{r}$ را می توان بر روی یکی از دو نقطه C و D اختیار کرد در اینجا از نقطه C کمک می گیریم

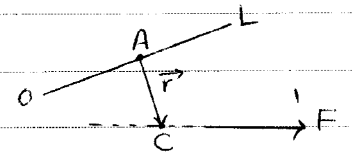
$$\vec{r} = \vec{AC} = 300i + 80k$$
$$\vec{M_A} = \vec{r} \times \vec{F} = (300i + 80k) \times (-120i + 96j - 128k)$$
$$= (300 \times 96)\vec{k} + (300 \times 128)j - (80 \times 120)j - (80 \times 96)i =$$

$-۷۶۸۰\vec{i} + ۲۸۸۰۰\vec{j} + ۲۸۸۰۰\vec{K}$ N.mm

$|M_A| = \sqrt{۷۶۸۰^۲ + ۲۸۸۰۰^۲ + ۲۸۸۰۰^۲} = ۴۱۴۴۷$ N.mm $= ۴۱,۴۴۷$ N.m

گشتاور یک نیرو حول محوری مفروض:

گشتاور یک نیرو حول یک محور برابر یک عدد می‌شود در این حالت بردار گشتاور به موازات همان محور مورد نظر است برای محاسبه بزرگی بردار گشتاور نقطه ای دلخواه بر محور مورد نظر را انتخاب می کنیم و سپس گشتاور نیرو حول آن نقطه دلخواه را مطابق روش گفته شده در قسمت قبل محاسبه می کنیم در انتها بردار گشتاور بدست آمده را در بردار یکه محور مورد نظر ضرب داخلی می کنیم



$$\vec{M_A} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M_{OL}} = \vec{\lambda_{OL}} \cdot \vec{M_A} = \vec{\lambda_{OL}} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

نکته: اگر راستای نیرو و راستای محور با هم متقاطع باشند گشتاوری ایجاد نمی شود

مثال: در مثال قبل مطلوبست محاسبه گشتاور حول محور $\vec{AB}$ ؟ $B(۱۰۰,۰,۰)$

$$\vec{\lambda_{AB}} = \frac{\vec{AB}}{|AB|} = \frac{۱۰۰i - ۳۲۰K}{\sqrt{۱۰۰^۲ + ۳۲۰^۲}} = ۰/۳i - ۰/۹۶K$$

لازم است که گشتاور نیروی وارده حول نقطه دلخواه در راستای AB محاسبه شود که در مثال قبل این کار برای نقطه A انجام شده و می توان از آن استفاده کرد

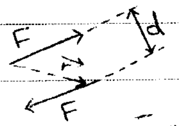
$$M_{AB} = \lambda_{AB} \cdot (M_A)$$

$$M_{AB} = (۰/۳i - ۰/۹۶K) \cdot (-۷۶۸۰i + ۲۸۸۰۰j + ۲۸۸۰۰K)$$

$$= ۰/۳(-۷۶۸۰) - ۰/۹۶ \times ۲۸۸۰۰ = -۲۹۹۵۲ \text{ N.mm}$$

منفی بودن علامت نشانه آن است که گشتاور حول محور مورد نظر ساعتگرد است

کوپل نیرو:



دو نیروی مساوی، موازی و غیر هم جهت را کوپل می‌گویند
گشتاور یک کوپل نیرو حول هر نقطه دلخواه در صفحه مقداری ثابت است
و مقدار آن برابر حاصلضرب مقدار نیرو در فاصله عمودی دو نیرو است $M = F.d$
و یا اینکه می‌توان بر راستای یکی از دو نیرو نقطه ای را انتخاب کرد و همچنین به طور مشابه بر راستای نیروی دوم نیز نقطه ای انتخاب کرد و با وصل این دو نقطه به هم بردار $\vec{r}$ را تشکیل داد، ضرب خارجی بردار $\vec{r}$ × بردار نیرو تشکیل بردار گشتاور را می‌دهد $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
(بردار F، برداری است که ابتدای بردار $\vec{r}$ بر روی آن قرار گیرد)

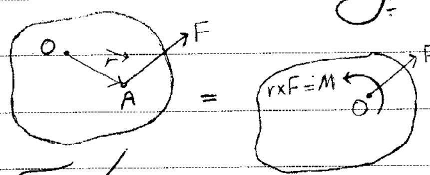
کوپل های هم ارز:

دو کوپل با هم هم ارزند وقتی که بردارهای گشتاوری که ایجاد می‌کنند با هم یکسان باشند

جمع کردن کوپل ها:

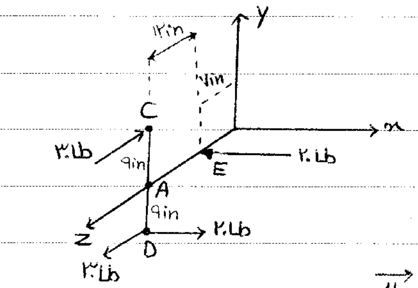
با توجه به اینکه هر کوپل می‌تواند با یک بردار گشتاور نمایش داده شود کوپل ها را می‌توان طبق قوانین جمع برداری با هم جمع کرد

تجزیه نیروی مفروض به یک نیرو در نقطه O و یک کوپل:



به همین ترتیب اگر بیش از یک نیرو به جسم وارد شود همه نیروها را می‌توان با یک نیرو و یک گشتاور در نقطه مورد نظر جایگزین کرد به گونه ای که یک نیرو برابر برآیند نیروهای وارد به جسم می‌باشد و بردار گشتاور نیز برابر گشتاوری است که نیروهای وارد بر جسم حول نقطه مورد نظر ایجاد می‌کند

مثال: مطلوبست محاسبه برآیند دو کوپل گشتاور داده شده در شکل زیر. (۳_۶ ص ۷۱)



$$\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2}$$

$\vec{M_1}$: گشتاور از دو نیروی ۲۰Lb

$\vec{M_2}$: 〃 〃 〃 ۳۰Lb

برای بردار M_1، بردار $\vec{r}$ را از نقطه E تا نقطه D در نظر می‌گیریم

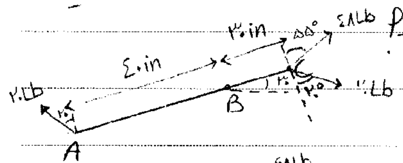
$$\vec{M_1} = (-9j + 12k) \times 20i = 180k + 240j$$

برای بردار M_2 ابتدای بردار $\vec{r}$ را بر روی نقطه C و انتهای آن را بر D فرض می‌کنیم

$$\vec{M_2} = -18j \times 30k = -540i$$

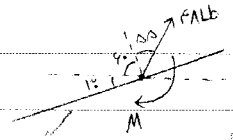
$$\Rightarrow \vec{M_1} + \vec{M_2} = -540i + 240j + 180k$$

مثال: در شکل زیر: الف) سه نیروی نشان داده را با سیستم نیرو-کوپل هم ارز در نقطه B جایگزین کنید. ب) نیروی حاصل از سیستم نیرو-کوپل بدست آمده در قسمت الف را تعیین کنید و نقطه اثر آن را روی راستای ABC مشخص کنید.



دو نیروی ۲۰Lb تشکیل یک کوپل می‌دهند

با توجه به اینکه دو نیروی ۲۰Lb مساوی و خلاف جهت هستند همدیگر را خنثی می‌کنند و برآیند نیرو در نقطه B همان نیروی ۴۸Lb است



گشتاور M مجموع است یکی گشتاور از کوپل دو نیروی ۲۰Lb و دیگری گشتاور انتقال نیروی ۴۸Lb حول نقطه B

$$M = M_1 + M_2$$

$$M_1 = -20 \times 70 \sin(90+20) = -1316 \text{ Lb-in}$$

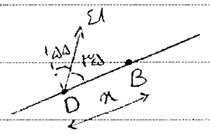
$$M_2 = 48 \times 30 \sin(90+55) = 826 \text{ lb-in}$$

$$M = -1316 + 826 = -490 \text{ Lb-in}$$

چون منفی بدست آمده پس گشتاور ساعتگرد است

ب) می‌خواهیم بر راستای AC نقطه‌ای را پیدا کنیم که در آن نقطه فقط یک تک نیرو جایگزین شود. آن تک نیرو برابر برآیند نیروهای وارد بر سیستم است. برآیند نیروها در جهت

قبلی برابر 48lb محاسبه شد



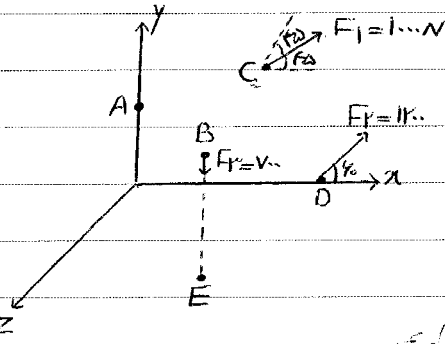
این تک نیرو باید در نقطه‌ای قرار گیرد که گشتاور
ناشی از آن حول نقطه B به صورت ساعتگرد و برابر
مقدار محاسبه شده در مرحله قبلی باشد بنابراین جهت محل اثر تک نیرو
باید در پایین نقطه B باشد.
گشتاور نیرو حول نقطه B را محاسبه و با مقدار مرحله قبلی مساوی قرار می‌دهیم

$$-۴۸\,x \sin ۱۳۵ = -۴۹۰$$

$$x = \frac{۴۹۰}{۴۸ \sin ۱۳۵} = ۱۷٫۸\ in$$

(۳-۸۹ ص ۷۶)

مثال: به جای سه نیروی نشان داده شده در شکل زیر یک سیستم نیرو-کوپل هم ارز در نقطه A قرار دهید. (۳-۱۰۱ ص ۸۳)



D(۱۰۰, ۰, ۰)
A(۰, ۱۰۰, ۰)
C(۷۵, ۱۰۰, -۵۰)
B(۷۵, ۱۰۰, ۵۰)
E(۱۵۰, -۵۰, ۱۰۰)

۱۲۰۰N در صفحه xy
۱۰۰۰N در صفحه به موازات xz
واحد: N.mm

ابتدا سه بردار نیرو را به صورت برداری در می‌آوریم

$$\vec{F_1} = F_{1x} i + F_{1z} k = ۱۰۰۰ \cos ۴۵ i - ۱۰۰۰ \sin ۴۵ k = ۷۰۷ i - ۷۰۷ k$$

$$\vec{F_2} = F_{2x} i + F_{2y} j = ۱۲۰۰ \cos ۶۰ i + ۱۲۰۰ \sin ۶۰ j = ۶۰۰ i + ۱۰۳۹ j$$

$$\vec{F_3} = |F_3| \cdot \lambda_{\vec{BE}} = ۷۰۰ \times \frac{\vec{BE}}{|BE|} = ۷۰۰ \times \frac{۷۵ i - ۱۵۰ j + ۵۰ k}{\sqrt{۷۵^۲ + ۱۵۰^۲ + ۵۰^۲}} = ۳۰۰ i - ۶۰۰ j + ۲۰۰ k$$

حال برآیند سه بردار فوق را محاسبه می‌کنیم

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$

$$= ۱۶۰۷ i + ۴۳۹ j - ۵۰۷ k$$

حال باید گشتاور هر یک از سه نیرو حول نقطه A را محاسبه کرده و با هم جمع کنیم برای این
منظور، برای هر نیرو بردار R را از نقطه A تا ابتدای نیرو ترسیم می‌کنیم

$$\vec{M_۱} = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F_۱} = (۷۵i - ۵۰k) \times (۷۰۷i - ۷۰۷k) \qquad \vec{r}_{C/A} = \vec{AC}$$

$$= (۷۵ \times ۷۰۷)j + (۵۰ \times ۷۰۷)j = ۱۷۶۷۵\,j$$

$$\vec{M_۲} = \vec{r}_{D/A} \times \vec{F_۲} = (۱۰۰i - ۱۰۰j) \times (۶۰۰i + ۱۰۳۹j) = ۱۰۳۹۰۰k + ۶۰۰۰۰k = ۱۶۳۹۰۰k$$

$$\vec{M_۳} = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F_۳} = (۷۵i + ۵۰k) \times (۳۰۰i - ۶۰۰j + ۱۰۰k)$$

$$= (-۷۵ \times ۶۰۰)k - (۷۵ \times ۱۰۰)j + (۵۰ \times ۳۰۰)j + (۵۰ \times ۶۰۰)i$$

$$= ۳۰۰۰۰i - ۴۵۰۰۰k$$

$$\vec{M} = \vec{M_۱} + \vec{M_۲} + \vec{M_۳} = (۳۰۰۰۰i + ۱۷۶۷۵j + ۱۱۸۹۰k) \quad N.mm$$

تعادل اجسام صلب:

جسم صلب، جسمی است که در اثر اعمال نیرو شکل کلی خود را از دست نمی‌دهد و ابعاد و اندازه‌های آن قبل و بعد از اعمال نیرو ثابت است.

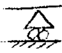
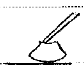
روش حل مسائل تعادل اجسام صلب:

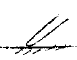
همانند مسائل تعادل ذره در اینجا نیز دیاگرام آزاد جسم صلب ترسیم می‌شود و با نوشتن معادلات تعادل مقادیر مجهول محاسبه می‌شود. معادلات تعادل برای مسائل دوبعدی و سه‌بعدی به شرح زیر است:

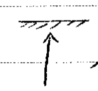
دوبعدی
$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \\ \sum M = ۰ \end{cases}$$

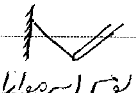
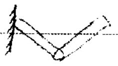
سه‌بعدی
$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \\ \sum F_z = ۰ \\ \sum M_x = ۰ \\ \sum M_y = ۰ \\ \sum M_z = ۰ \end{cases}$$

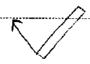
انواع تکیه‌گاه:

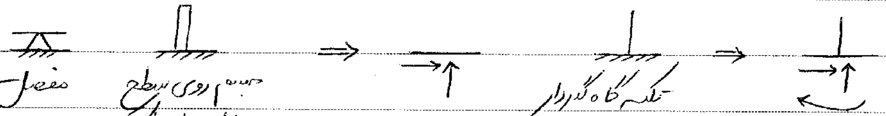
۱) تکیه‌گاه غلطکی  ۲) گهواره‌ای 

۳) جسم بر روی سطح بدون اصطکاک 

والسل :  نیرو با خط اثر معلوم

کابل ⟸  ⟸ میله ⟸ 

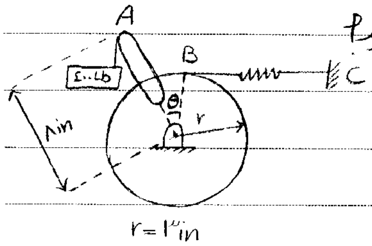
⟸ نیرو یا حاصل اثر معلوم (در امتداد کابل یا میله) 



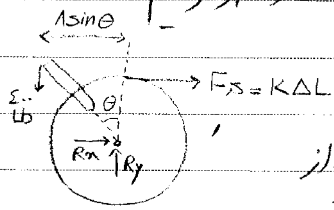
مفصل — جسم روی سطح دارای اصطکاک ⟸ — تکیه گاه گیردار ⟸

مثال: در شکل روبرو، وزنه ۴۰۰ پوندی به نقطه A از اهرم نشان داده شده متصل است. ثابت فنر BC عبارت است از $K = 250\ Lb/in$ و وقتی θ مساوی صفر است فنر کشیده نشده. وضعیت تعادل این سیستم را تعیین کنید؟

نمودار آزاد اهرم را بدست آورده و آن را ترسیم می کنیم



رسم نمودار آزاد ⟶



ΔL برابر طول قوسی از دایره با زاویه θ می باشد

$\Delta L = r\theta = 3\theta$

θ برحسب رادیان

$\sum M_O = 0 \Rightarrow 400 \times 8\sin\theta - (250 \times 3\theta) \times 3 = 0$

$\Rightarrow 3200\sin\theta = 2250\theta$

$\sin\theta = 0.703\theta$

معادله بالا را به روش سعی و خطا حل می کنیم

$\theta = 0$ جواب اول

$0 < \theta < \pi/2$

$\theta = 0.5 \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{0.703\theta} = 1.36$

$\theta = 1 \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{0.703\theta} = 1.2$

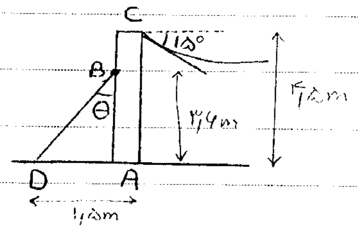
هرگاه حاصل کسر به عدد یک نزدیک شد عدد فرض شده می تواند جواب مسأله باشد

$\theta = 1.5 \Rightarrow 0.95$

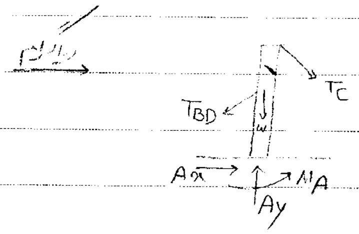
$\theta = 1.4 \Rightarrow 1.001 \Rightarrow \theta = 1.4\ Rad = 80.25^\circ$

(۴-۱۵ صفحه ۱۰۶)

مثال: تیر برقی به جرم $175\ kg$ مفروض است. سیم برق در نقطه C به آن تکیه دارد. کشش در سیم $600\ N$ است و سیم در نقطه C با افق زاویه ۱۵ درجه دارد. مطلوبست تعیین کوچکترین و بزرگترین کشش مجاز در کابل BD به طوری که اندازه کوپل وارد در نقطه A از $500\ N.m$ تجاوز نکند؟ (۴-۳۴ ص ۱۱۳)



دیاگرام آزاد تیر برق را رسم می‌کنیم



$$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1.5}{3.6}\right) = 22.6^\circ$$

$$M_A \leqslant 500\ N.m$$

$$W = 175 \times 9.81 = 1717\ N$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A + T_{BD} \times 3.6 \times \sin 22.6 - T_C \times 4.5 \cos 15 = 0$$

$$M_A + 1.38\, T_{BD} - 4.34\, T_C = 0$$

$$M_A = 4.34\, T_C - 1.38\, T_{BD} = 4.34 \times 600 - 1.38\, T_{BD}$$

$$M_A = 2604 - 1.38\, T_{BD} \Rightarrow T_{BD} = \frac{2604 - M_A}{1.38} = \frac{2604 - 500}{1.38}$$

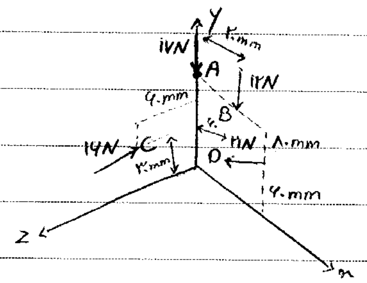
$$\Rightarrow T_{BD} = 1525\ N = T_{min}$$

در صورت سؤال مشخص نشده است که کوپل A ساعتگرد است یا پادساعتگرد، پس باید هر دو حالت را بررسی کنیم. فرض کنیم در اینجا در بار اول فرض شود که این کوپل پادساعتگرد است، یک بار دیگر مسئله را برای حالتی حل می‌کنیم که کوپل ساعتگرد است. کافیست که در معادله آخر به جای M_A، -500 قرار دهیم

$$M_A = -500$$

$$\Rightarrow T_{BD} = \frac{2604 - (-500)}{1.38} = 2250\ N = T_{max}$$

مثال: به جای دو نیروی افقی وارده در شکل یک سیستم نیرو-کوپل در نقطه C قرار دهید؟



$A(0, 140, 0)$
$B(20, 140, 0)$
$C(0, 30, 60)$
$D(60, 60, 0)$

D,B در صفحه xy
C در صفحه yz

ابتدا برآیند نیروها را بدست می‌آوریم

$$\vec{R} = -17j - 12j - 21i - 14K$$

$$\vec{R} = -21i - 29j - 14K$$

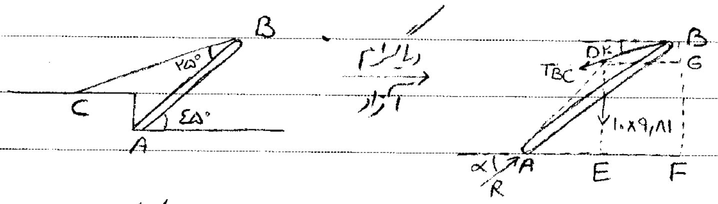
حال گشتاور این چهار نیرو را نسبت به نقطه C محاسبه می‌کنیم. گشتاور نیروی 14N صفر است

$$\vec{M}_C = r_{A/C} \times (-17j) + r_{B/C} \times (-12j) + r_{D/C} \times (-21i)$$

$$= (110j - 60K)(-17j) + (20i + 110j - 60K)(-12j) + (60i + 30j - 60K)(-21i)$$

$$= -1020i - 240K - 720i + 630K + 1260j = -1740i + 1260j + 390K \quad N \cdot mm$$

مثال: در شکل روبرو وزن قطعه AB، 10kg و طول آن 4m است این قطعه با طناب BC نگه‌داری شده است مطلوبست تعیین کشش طناب و واکنش نقطه A ! (۴_۶ ص ۱۱۵)

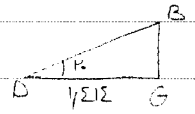


قطعه AB یک جسم سه نیرویی است شرط تعادل جسم سه نیرویی آنست که برآیند نیروها صفر شود و راستای سه نیرو نیز از یک نقطه عبور کند

مثلث متساوی الساقین $AF = BF = AB\cos 45$

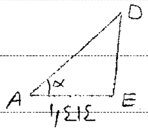
$$= 4\cos 45 = 2{,}828\ m$$

$$DG = EF = \frac{AF}{2} = 1{,}414$$



$$\tan 20 = \frac{BG}{1.414} \Rightarrow BG = 1.414 \tan 20 = 0.515\,m$$

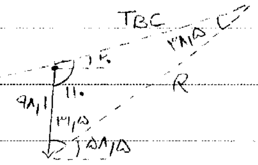
$\overset{\triangle}{ADE}$:



$$DE = BF - BG = 2.828 - 0.515 = 2.313$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2.313}{1.414}\right) = 58.5^\circ$$

با بدست آوردن زاویه α مثلث نیروها را رسم می‌کنیم، برای این منظور رسم بردار نیروها را
بصورت متوالی رسم می‌کنیم

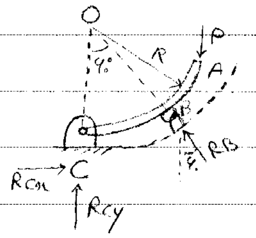


$$\frac{98.1}{\sin 38.5} = \frac{T_{BC}}{31.5} = \frac{R}{\sin 110}$$

$$T_{BC} = \frac{98.1 \sin 31.5}{\sin 38.5} = 82.33\,N$$

$$R = \frac{98.1 \sin 110}{\sin 38.5} = 148\,N$$

مثال: در شکل زیر مطلوبست تعیین واکنش در نقطه B و نقطه C ؟ (۴_۸۲ ص ۱۱۸)



CBA : کمان دایره

تکیه‌گاه B غلطکی و دارای یک واکنش در راستای مرکز دایره

تکیه‌گاه C مفصلی و دارای دو واکنش است

برای گرفتن گشتاور R_B

با توجه به آنکه راستای نیرو از مرکز دایره عبور می‌کند نیرو را در فاصله مرکز دایره تا نقطه C (شعاع دایره) در sin زاویه راستای نیرو و راستای خط رابط ضرب می‌کنیم

$$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -P.R + R_B.R.\sin 60 = 0$$

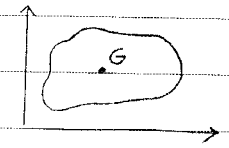
$$\Rightarrow R_B = \frac{P.R}{R \sin 60} = \frac{P}{\sin 60} = 1.15P$$

$$\overrightarrow{\Sigma F_x} = 0 \Rightarrow R_{Cx} - (1.15P)\sin 60 = 0$$

$$R_{Cx} = P$$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{cy} - P + 1.15P\cos 60 = 0 \Rightarrow R_{cy} = 0.425P$

مرکز سطوح :



$G(\bar{x}, \bar{y})$

گشتاور اول سطح شکل حول محور x : Q_x

" " " " y : Q_y

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{Q_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{Q_x}{A}$$

اشکالی که دارای مرکز تقارن هستند مرکز سطح آن‌ها روی مرکز تقارنشان می‌باشد

شکل‌هایی که مرکز تقارن ندارند اما محور تقارن دارند مرکز سطح آن‌ها روی این محور تقارن است

مرکز سطح برخی اشکال خاص :

برای برخی اشکال خاص، انتگرال‌های بالا محاسبه شده و مختصات مرکز سطح آن‌ها به صورت پارامتری بدست آمده که برای این اشکال می‌توان با مراجعه به جداول مختصات مرکز سطح را بدست آورد

محاسبه مرکز سطح برای اشکال مرکب :

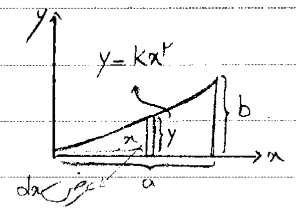
برای اشکال مرکب می‌توان آن را به چند شکل ساده تقسیم نمود و برای هر شکل ساده مساحت و مختصات مرکز سطح را نسبت به دستگاه مختصات ثابت تعیین کرد سپس با استفاده از روابط زیر می‌توان مختصات مرکز سطح شکل مرکب را تعیین کرد

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{\Sigma A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

x_i, y_i : مختصات مرکز سطح شکل iام

A_i : مساحت شکل iام

مثال: مطلوب است تعیین مختصات مرکز سطح منحنی سهمی شکل نشان داده شده در شکل زیر (۵-۱۴ ص ۱۴۸)



محاسبه K

به ازای $x=a$ داریم: $y=b$

$$\Rightarrow b=ka^2 \Rightarrow k=\frac{b}{a^2}$$

ابتدا مساحت شکل را با انتگرال گیری محاسبه می کنیم

یک المان عمودی در شکل در نظر می گیریم

$$A=\int dA=\int y\,dx$$

$$=\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,dx=\left[\frac{b}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{3}$$

$$Q_y=\int x\,dA=\int_0^a x\times\frac{bx^2}{a^2}\,dx=\int\frac{b}{a^2}x^3\,dx=\left[\frac{bx^4}{4a^2}\right]_0^a=\frac{ba^2}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{ba^2/4}{ab/3}=\frac{3a}{4}$$

در انتگرال زیر با توجه به اینکه نقاط مختلف المان عمودی y های متفاوتی دارند باید مقدار y در مرکز سطح المان مستطیلی را در نظر گرفت

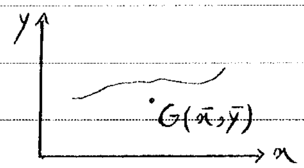
$$Q_x=\int y\,dA=\int_0^a\left[\frac{b}{2a^2}x^2\right]\left[\frac{b}{a^2}x^2\,dx\right]$$

$$=\int_0^a\frac{b^2}{2a^4}x^4\,dx=\left[\frac{b^2}{10a^4}x^5\right]_0^a=\frac{b^2a}{10}$$

$$\left(y/2=\frac{b}{2a^2}x^2\right)$$

$$\Rightarrow \bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{b^2a/10}{ab/3}=\frac{3b}{10}$$

محاسبه مراکز خطوط و منحنی ها:



$$\bar{x}=\frac{\int x\,ds}{\int ds}=$$

s: طول منحنی

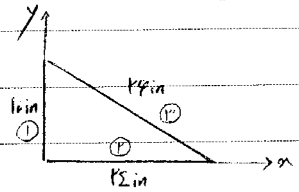
$$\bar{y}=\frac{\int y\,ds}{\int dx}$$

همانند سطح مرکب در منحنی های مرکب نیز می توان از روابط مشابه استفاده کرد

$$\bar{x}=\frac{\sum s_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n}s_i}$$

$$\bar{y}=\frac{\sum s_i y_i}{\sum s_i}$$

مثال: مثلث نشان داده شده در شکل از سیم نازک و همگن ساخته شده است. مختصات مرکز گرانی آن را تعیین کنید؟ (۲-۵ صفحه ۱۴۱)



یک دستگاه مختصات به صورت اختیاری به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که مبدأ آن گوشه پایین سمت چپ مثلث باشد. مثلث را به سه خط تجزیه می‌کنیم و برای هر خط طول و مختصات مرکز گرانی آن را تعیین می‌کنیم. با توجه به اینکه اضلاع مثلث از سیم همگن ساخته شده مرکز گرانی هر خط در وسط آن قرار می‌گیرد.

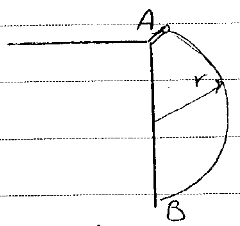
① شکل : $S_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{y}_1 = 5$

② شکل : $S_2 = 24$ $\bar{x}_2 = 12$ $\bar{y}_2 = 0$

③ شکل : $S_3 = 26$ $\bar{x}_3 = 12$ $\bar{y}_3 = 5$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma S_i x_i}{\Sigma S_i} = \frac{10\times 0 + 24\times 12 + 26\times 12}{10+24+26} = 10\,in \qquad \bar{y} = \frac{10\times 5 + 24\times 0 + 26\times 5}{10+24+26} = 3\,in$$

مثال: میله‌ای یکنواخت به شکل نیم دایره به وزن W و شعاع r به پین A متصل است و به سطح بی اصطکاک تکیه دارد. واکنش‌های تکیه‌گاهی A و B را تعیین کنید؟
(۳-۵ صفحه ۱۴۲)

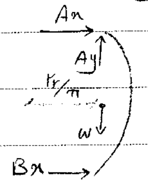


دیاگرام آزاد نیم دایره را رسم می‌کنیم

تکیه‌گاه A که یک پین است دو واکنش افقی و عمودی دارد و تکیه‌گاه B که سطح بدون اصطکاک است یک واکنش عمود بر سطح یعنی به صورت افقی دارد

وزن نیم دایره به مرکز گرانی آن وارد می‌شود

مرکز گرانی نیم دایره تو خالی به فاصله $2r/\pi$ از مرکز دایره قرار می‌گیرد



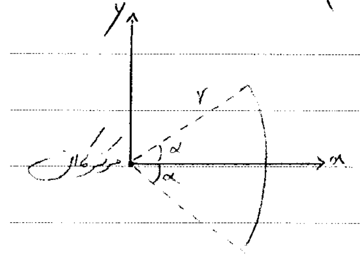
$$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - W = 0 \quad A_y = W$$

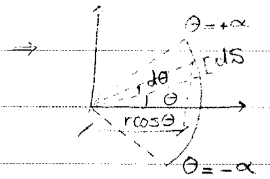
$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 \quad -W\times \frac{2r}{\pi} + B_x \times 2r \Rightarrow B_x = \frac{W}{\pi}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \frac{W}{\pi} + A_x = 0 \Rightarrow A_x = -W/\pi \quad \overleftarrow{A_x} = W/\pi$$

مثال: مطلوبست تعیین مختصات مرکز گرانی کمان نمایش داده شده در شکل زیر؟ (کمان بصورت توخالی می باشد) (۵-۵ ص ۱۴۹)

چون شکل نسبت به محور x متقارن است مقدار $\bar{y}$ آن صفر است





$$S=\int ds=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\,d\theta=[r\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}=(r\alpha-(-r\alpha))=2r.\alpha \Rightarrow$$ اندازه زاویه × r = طول

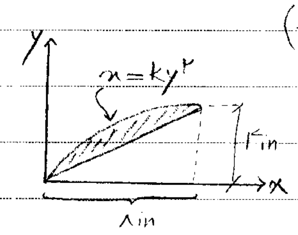
$$\int x\,ds=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\cos\theta\times(r\,d\theta)=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2\cos\theta\,d\theta=r^2[\sin\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}=r^2[\sin\alpha-(\sin(-\alpha))]$$

$=2r^2\sin\alpha$

α: بر حسب رادیان

$$\bar{x}=\frac{\int x\,ds}{\int ds}=\frac{2r^2\sin\alpha}{2r.\alpha}=\frac{r.\sin\alpha}{\alpha}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مرکز سطح شکل زیر؟ (ص ۱۴۴)



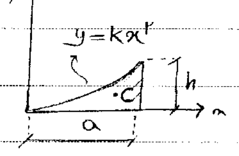
محاسبه K:

$x=8 \Rightarrow y=4 \Rightarrow 8=k\times 4^2$

$k=0.5$

برای محاسبه مرکز سطح از جدول کمک می گیریم

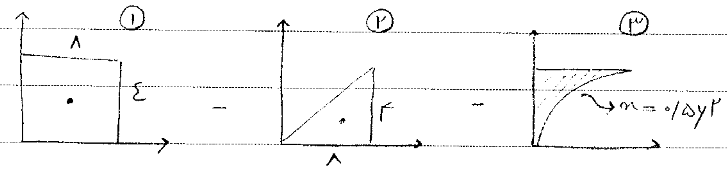
مطابق جدول برای زیر منحنی سهموی داریم:



$A=\frac{ah}{3}$ $\bar{x}=\frac{3}{4}a$ $\bar{y}=\frac{3}{10}h$

در شکل بالا نسبت به شکل جدول بصورت عکس منحنی سهموی

۱. در جدول حجم جزء است یا به بیان دیگر جای محور x و y عوض شده است. همچنین در شکل بالا مساحت محاسبه شده در زیر حجم منحنی است اما در شکل صورت سوال مساحت محاسبه شده در بالای حجم منحنی است می توان شکل را بصورت زیر تفکیک کرد:



① شکل : $a_1 = 32 \quad \bar{x}_1 = 4 \quad \bar{y}_1 = 2$

② شکل : $A_2 = \frac{8 \times 4}{2} = 16 \quad \bar{x}_2 = \frac{2}{3} \times 8 = 5.33 \quad \bar{y} = \frac{4}{3} = 1.33$

در مورد مثلث اگر فاصله مرکز سطح از رأس مثلث محاسبه شود از ضریب $\frac{2}{3}$ و اگر از قاعده مثلث محاسبه شود از ضریب $\frac{1}{3}$ استفاده می‌کنیم

③ شکل : $A_3 = \frac{4 \times 8}{3} = 10.66$

برای سهمی با توجه به اینکه منحنی برحسب توان دوم y است نه x (جای x و y عوض شده) مقدار a را برابر طول می‌گیریم و h را برابر طول افقی در نظر می‌گیریم و بعد از آن جای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را نیز عوض می‌کنیم ⟸

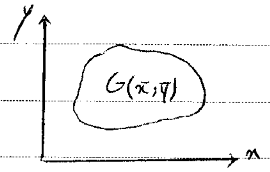
$\bar{x} = \frac{3}{10} \times 8 = 2.4 \quad \bar{y} = \frac{3}{4} \times 4 = 3$

به این نکته نیز توجه شود که روابط بالا به شرط آن است که رأس سهمی بر روی مبدا مختصات قرار گیرد اگر این امر اتفاق نیفتاد باید به مقادیر بالا مختصات رأس سهمی نیز اضافه می‌شد در اینجا مرکز سهمی بر روی مبدا قرار گرفته و نیازی به این مسئله نیست

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{(32 \times 4) - (16 \times 5.33) - (10.66 \times 2.4)}{32 - 16 - 10.66} = 3.2\ in$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{(32 \times 2) - (16 \times 1.33) - (10.66 \times 3)}{32 - 16 - 10.66} = 2.01\ in$$

تمرین: مثال قبل را با استفاده از روش انتگرال‌گیری حل کنید.



حجم ناشی از دوران سطح :

اگر یک شکل به عنوان حول محوری خاص دوران داده شود از دوران سطح یک حجم حاصل می شود، اگر این شکل به صورت یک منحنی باشد از دوران آن یک حجم توخالی بدست می آید، حجم حاصل از دوران سطح حول هر یک از دو محور x و y به شرح زیر محاسبه می شود

x دوران حول محور : $V = A\times(2\pi\bar{y})$

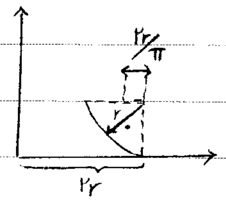
y " " " : $V = A\times(2\pi\bar{x})$

در مورد خطوط و منحنی ها سطح حاصل از شکل بدست آمده به شرح زیر محاسبه می شود :

x دوران حول محور : $A = S\times(2\pi\bar{y})$

y " " " : $A = S\times(2\pi\bar{x})$

مثال : ربع دایره نشان داده شده در شکل زیر را حول محور y دوران داده ایم مطلوبست محاسبه سطح حاصل از شکل بدست آمده ؟ (۵-۶۰ صفحه ۱۵۰)



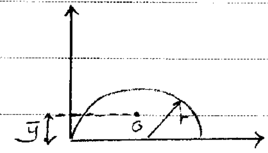
(طول) $S = \frac{\pi r}{2}$ $\quad \bar{x} = 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r(1-\frac{1}{\pi})$

$A = 2\pi\bar{x}\times S = 2\pi\left(2r(1-\frac{1}{\pi})\right)\times\frac{\pi r}{2} \Rightarrow$

$= 2\pi^2 r^2(1-\frac{1}{\pi}) = 2\pi r^2(\pi-1)$

مثال : می دانیم که حجم و سطح کره به ترتیب برابرند با $\frac{4}{3}\pi r^3$ و $4\pi r^2$ با استفاده از آن مطلوبست محاسبه مرکز سطح نیم دایره و همچنین مرکز گرانی نیم دایره توخالی ؟ (۵-۵۸ صفحه ۱۵۰)

در صورت دوران نیم دایره توپر حول محور x یک کره بدست می آید



توپر

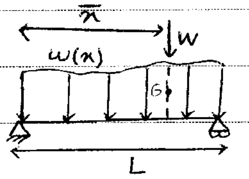
$$V = A \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi r^2}{2} \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

از دوران نیم دایره توخالی، کره توخالی بدست می آید

$$A = S \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow 4\pi r^2 = \pi r \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$

بارهای گسترده:

اگر یک بار به جای آنکه بصورت متمرکز به یک نقطه وارد شود بر یک سطح یا خط پخش شود گسترده است



بار گسترده را می توان با یک بار متمرکز جایگزین کرد

مقدار بار متمرکز برابر انتگرال بار گسترده روی سطح یا خط است

$$W = \int_0^L w(x)\,dx$$

که بار متمرکز

پایه این شکل بزرگی بار برابر مساحت شکلی است که بار گسترده ایجاد می کند

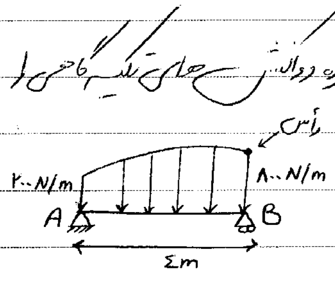
محل اثر بار متمرکز معادل مرکز ثقل شکل بار است

$$\bar{x} = \frac{\int x w(x)\,dx}{\int w(x)\,dx}$$

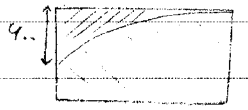
همانند سطوح مرکب در مورد بارهای گسترده مرکب نیز می توان آن را به اجزایی به شکل های ساده تر تقسیم نمود و با فرمول هایی مشابه سطوح مرکب مقدار بار متمرکز معادل و محل اثر آن را پیدا کرد

بارهای گسترده شکل های متنوعی می توانند داشته باشند که از جمله می توان به بار گسترده یکنواخت، مثلثی، ذوزنقه ای و سهمی شکل اشاره کرد

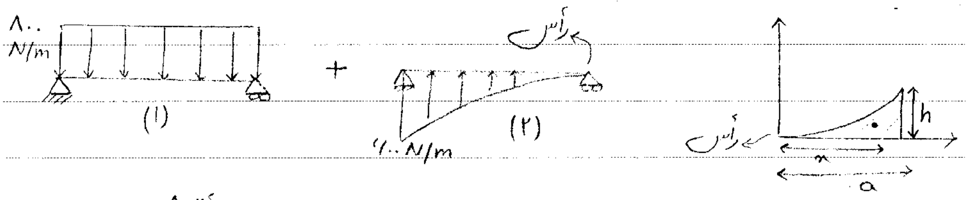
مثال: در زیر شکل زیر بار گسترده را با یک بار متمرکز جایگزین کرده و واکنش های تکیه گاهی را محاسبه نمایید؟



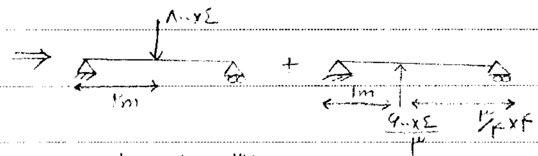
بار گسترده به صورت مرکب است آن را تبدیل به یک بار گسترده یکنواخت که از آن یک بار سهمی شکل کم شده است می نماییم

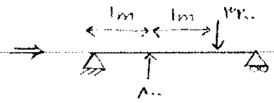


به جای آنکه بار سهمی را لحاظ کنیم، جهت بار را عوض کرده و رو به بالا در نظر می‌گیریم

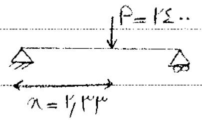


$A = ah/3$ و $\bar{x} = 3a/4$





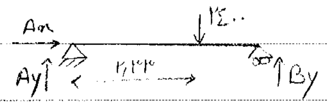
با همین وضعیت نیز می‌توان واکنش‌های تکیه‌گاهی را بدست آورد اما در صورت سوال یک بار تک به عنوان برآیند خواسته شده است



$$P = \Sigma P_i = 3200 - 800 = 2400$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i} = \frac{-800\times1 + 3200\times2}{-800+3200} = 2.33$$

حال دیاگرام آزاد تیر را رسم کرده و با نوشتن معادلات تعادل واکنش‌های تکیه‌گاهی را محاسبه می‌کنیم



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

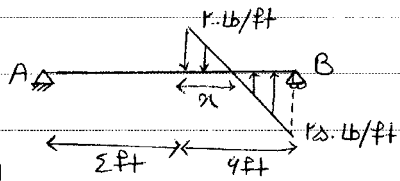
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow B_y \times 4 - 2400 \times 2.33 = 0$$

$$B_y = 1400$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 2400 + 1400 = 0 \quad A_y = 1000\,N$$

مثال: در تیر شکل زیر مطلوبست محاسبه بار متمرکز معادل و مقادیر واکنش‌های تکیه‌گاهی.

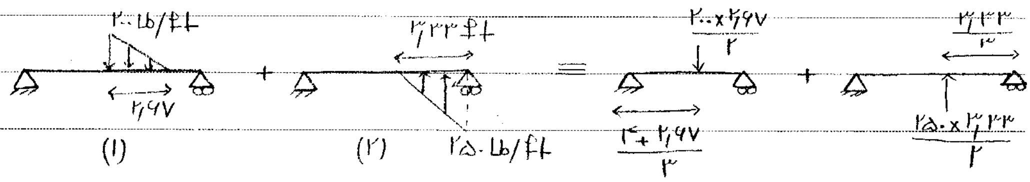
(۵-۸۱ ص ۱۵۹)

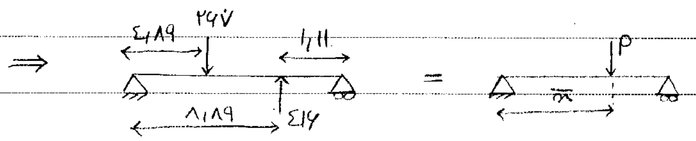


شکل را به دو مثلث تقسیم می‌کنیم، عرض این دو مثلث نامشخص است که می‌توان آن را با استفاده از تشابه دو مثلث بدست آورد

تشابه : $\dfrac{x}{6-x} = \dfrac{200}{250} = 0/8 \Rightarrow 0/8(6-x) = x$

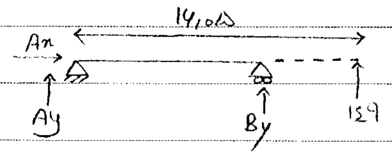
$x = 2/67\ ft$





$P = 267 - 416 = -149\ Lb \Rightarrow P = 149\ Lb \uparrow$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i} = \frac{267 \times 4/89 - 416 \times 8/89}{267 - 416} = 16/05$$



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 149 \times 16/05 + B_y \times 10 = 0$

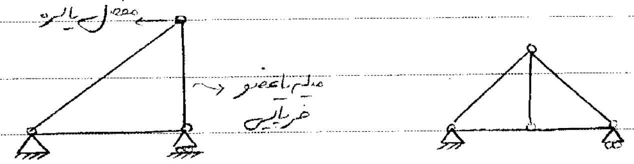
$B_y = -239/14\ Lb = 239/14 \downarrow$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 239/14 + 149 = 0$

$A_y = 90/14\ Lb \uparrow$

خرپاها:

خرپا مجموعه‌ای از میله‌هاست که بوسیله مفصل‌هایی بهم متصل شده‌اند در ترکیبات مثلثی شکل تشکیل داده‌اند از خرپاها معمولاً برای پوشاندن دهانه‌های بزرگ مانند سوله‌ها و سالن‌های صنعتی استفاده می‌شود در خرپاها هر کدام از میله‌ها تنها نیروهای محوری را تحمل کرده و توان تحمل نیروهای برشی و خمشی را ندارند



n: تعداد اعضا

J: تعداد گره‌ها

r: تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی

شرط لازم برای پایداری خرپا : $n+r \geq 2J$

خرپا معین : $n+r = 2J$

خرپا نامعین : $n+r > 2J$

درجه نامعینی : $(n+r)-2J$

خرپا ناپایدار : $n+r < 2J$

روش‌های حل مسائل خرپا:

۱) روش گره یا مفصل: در این روش مراحل کار به شرح زیر است:

۱- با رسم دیاگرام آزاد خرپا و نوشتن معادلات تعادل جسم صلب واکنش‌های تکیه‌گاهی را بدست می‌آوریم

۲- در هر یک از گره‌های خرپایی به ترتیب دیاگرام آزاد گره را رسم کرده و با نوشتن معادلات تعادل گره نیروهای اعضای متصل به گره را محاسبه می‌کنیم در این زمینه لازم است به نکات زیر توجه شود:

- هر عضو خرپایی معادل یک نیروی مجهول با راستایی معلوم به موازات عضو می‌باشد با توجه به آنکه برای هر گره در حالت دو بعدی تنها دو معادله تعادل وجود دارد و با این دو معادله تنها دو مجهول را می‌توان محاسبه کرد در ابتدا باید به سراغ گره‌هایی برویم

که فقط دو عضو به آن گره ها متصل باشد (در حالت سه بعدی، سه معادله وجود دارد و باید به سراغ گره های با حداکثر سه عضو برویم)

با محاسبه نیروی اعضا از تعداد مجهولات در گره های مجاور نیز کاسته می شود و می توان به سراغ گره های با بیش از دو عضو نیز رفت

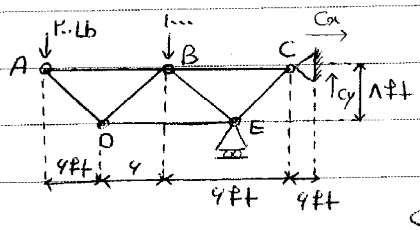
باید توجه کرد که نیرو در هر عضو مقداری ثابت است. هر عضو خرپایی به دو گره ابتدا و انتهای خود دو نیروی موازی، مساوی اما مختلف الجهت وارد می کنند. پس اگر بطور مثال نیروی وارد به گره ابتدای عضو بدست آمد در رسم دیاگرام آزاد گره انتها باید همان نیرو را با جهتی مخالف قرار دهیم

جهت نیروی عضو خرپایی را معمولاً با توجه به فشاری یا کششی بودن نیروی عضو نمایش می دهند. اگر نیرویی که عضو به گره وارد می کند به سمت خارج عضو باشد عضو در فشار است و اگر این نیرو به سمت خود عضو باشد عضو در کشش است

→ PLC (−) فشاری → T. (+) کششی

توجه: نیروی عکس العملی که گره به عضو وارد می کند مساوی و خلاف جهت نیرویی است که عضو به گره وارد می کند. معمولاً در حل مسائل خرپا با نیروی اعمال شده از طرف عضو به گره سروکار داریم

مثال: با استفاده از روش مفصل ها نیرو در اعضای خرپای زیر را بدست آورید. (۶-۱ ص ۱۸۳)



$J=5$, $n=7$, $r=3$

$2\times5 = 7+3$ → خرپا پایدار

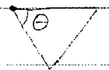
اگر خرپا نامعین شود از روش های استاتیکی قابل حل نیست

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$

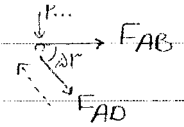
$\curvearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow 2000 \times 24 + 1000 \times 12 - E_y \times 6 = 0 \Rightarrow E_y = 10000 \text{ Lb}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2000 - 1000 + 10000 + C_y = 0 \Rightarrow C_y = -7000 \text{ Lb}$

حال باید به سراغ گره‌ها رفته و دیاگرام آزاد آن‌ها را رسم کنیم، برای شروع باید به سراغ گره‌های ۲ عضوی رفت، در اینجا دو گره A و C دو عضوی هستند

گره A :  $\Rightarrow \theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{8}{6}\right) \simeq 53^\circ$

چون نیروی اعضا نامشخص است بطور قراردادی آن‌ها را با جهت کششی رسم می‌کنیم در انتها اگر برای عضو مقدار نیرو مثبت بدست آمد فرض اولیه صحیح است و کشش جهت نیرو مشخص است



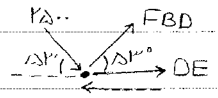
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2000 - F_{AD} \sin 53 = 0$

$\Rightarrow F_{AD} = -2500 \text{ Lb}$

$\Rightarrow F_{AD} = 2500 \text{ Lb}$ (P) یا (C)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} - 2500 \cos 53 = 0 \Rightarrow F_{AB} = 1500 \text{ Lb}$ (T)

با محاسبه نیروی عضو AD در گره D دو مجهول وجود خواهد داشت. و این گره نیز قابل حل است.
در مورد نیروی عضو AD، چون جهت نیرو در گره A به سمت بالا و چپ است، در گره D این نیرو برعکس به سمت پایین و راست خواهد بود

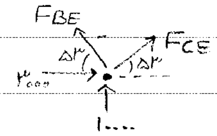


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2500 \sin 53 + F_{BD} \sin 53 = 0$

$\Rightarrow F_{BD} = 2500 \text{ Lb}$ (T)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 2500 \times \cos 53 + F_{DE} + 2500 \cos 53 = 0$

$\Rightarrow F_{DE} = -3000 \text{ Lb}$ (C)

گره E : 

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 3000 - F_{BE} \cos 53 + F_{CE} \cos 53 = 0$

$\Rightarrow 0.6 F_{BE} + 0.6 F_{CE} = -3000$

$F_{CE} - F_{BE} = 5000$ ①

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 10000 + F_{BE} \sin 53 + F_{CE} \sin 53 = 0$

$10000 + 0.8 F_{BE} + 0.8 F_{CE} = 0$ ②

$$10000 + 0.8F_{BE} + 0.8(F_{BE} - 5000) = 0 \Rightarrow 10000 + 1.6F_{BE} - 4000 = 0$$

$$\Rightarrow 1.6F_{BE} = -6000 \Rightarrow F_{BE} = -3750$$

$$\Rightarrow F_{BE} = 3750\ Lb\ (C)$$

مقدار بدست آمده را در معادله (1) قرار می‌دهیم

$$F_{CE} = -3750 - 5000 = -8750 \Rightarrow F_{CE} = 8750\ Lb\ (C)$$

گره C :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_{BC} + 8750\cos 53 = 0$$

$$\Rightarrow F_{BC} = 5250\ (T)$$

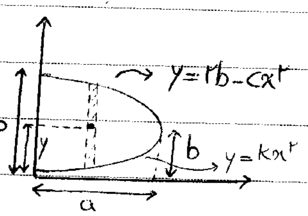
معادله تعادل در راستای محور y را نیز فقط جهت کنترل جواب می‌نویسیم

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -7000 + 8750 \sin 53 = -7000 + 8750 \times 0.8$$

$$-7000 + 7000 = 0 \ \checkmark$$

مثال: مرکز سطح شکل نشان داده شده را با انتگرال‌گیری مستقیم بدست آورید (مثال 5-47 صفحه 252)

محاسبه K :



$x=a \Rightarrow y=b$

$b=ka^2 \Rightarrow k=b/a^2$

محاسبه C :

$x=a \Rightarrow y=b$

$b=2b-ca^2 \Rightarrow -b=-ca^2 \Rightarrow c=b/a^2$

عرض المان : dx ارتفاع المان : $(2b-cx^2)-(kx^2) = (2b-\frac{b}{a^2}x^2)-(\frac{b}{a^2}x^2)$

$$= 2b - \frac{2b}{a^2}x^2$$

$$dA = dx(2b - \frac{2b}{a^2}x^2)$$

$$A = \int dA = \int_0^a (2b - \frac{2b}{a^2}x^2)dx = 2b\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2b\left[a - \frac{a^3}{3a^2}\right] = \frac{4ab}{3}$$

$$Q_y = \int x\,dA = \int x(2b - \frac{2b}{a^2}x^2)dx = 2b\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2}\right]_0^a = 2b\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4a^2}\right] = \frac{ba^2}{2}$$

$$Q_x = \int y\,dA = \int y(2b - \frac{2b}{a^2}x^2)dx$$

در محاسبه Q_x در انتگرال به جای y باید مختصات y مرکز المان قرار داده شود

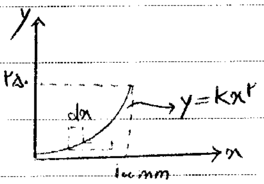
$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\left[\frac{b}{a^2}x^2 + \left(2b - \frac{b}{a^2}x^2\right)\right] = b$$

$$\Rightarrow \quad Q_x = \int_0^a b\left(2b - \frac{2b}{a^2}\right)x^2\,dx = 2b^2\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2b^2\left[a - \frac{a^3}{3a^2}\right] = \frac{4ab^2}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{ba^2/4}{4ab/3} = \frac{3}{8}a \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{4ab^2/3}{4ab/3} = b$$

مثال: منحنی سهمی شکل نشان داده شده در شکل زیر به اندازه °۱۸۰ حول محور y دوران می‌دهیم مساحت جانبی شکل فضایی بدست آمده چقدر است؟

محاسبه K:



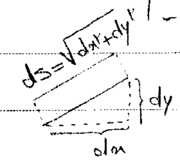
$$x = 100 \Rightarrow y = 250 \Rightarrow 250 = K \times 100^2$$

$$K = 0/025$$

$$\Rightarrow y = 0/025x^2$$

$$A = \left[2\pi\bar{x} \times S\right] \times \frac{\pi}{2\pi} = \pi\bar{x}\,.\,S$$

چون دوران کامل نیست باید سطح جانبی را با توجه به تناسب بدست آوریم



$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+y'^2} \qquad y' = 0/05x$$

فاکتور

$$S = \int_0^{100}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^{100}\sqrt{1+0/0025x^2}\,dx = 212/01$$

$$\int\sqrt{a^2+u^2}\,dx$$

$$u = a\tan t \Rightarrow 0/05x = \tan t \Rightarrow x = 20\tan t$$

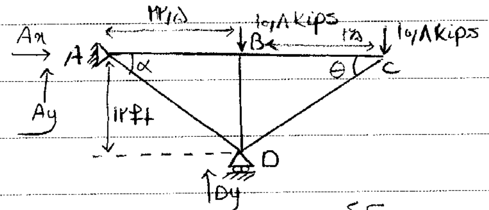
$$du = a\sec^2 t\,dt \Rightarrow du = a(0/05x) = 0/05dx = \sec^2 t\,dt$$

$$\Rightarrow dx = 20\sec^2 t\,dt$$

$$S = \int\sqrt{1+20\tan^2}\times 20\sec^2 t\,dt = \left[\frac{(1+20\tan^2)^{3/2}}{3/2}\right]$$

(حل نشد)

مثال: با استفاده از روش مفاصل نیرو در اعضای خرپای زیر را حساب کنید.



$n=۵ \quad J=۴ \quad r=۳$

$۵+۳=۲\times۴=۸ \Rightarrow$ معین است

معادلات تعادل را می‌نویسیم

$\Sigma F_x=۰ \Rightarrow A_x=۰$

$\circlearrowleft \Sigma M_A=۰ \Rightarrow -۱۰٫۸\times۵۷٫۵-۱۰٫۸\times۲۲٫۵+D_y\times۲۲٫۵=۰$

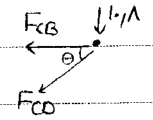
$\Rightarrow D_y=۳۸٫۴$

$\Sigma F_y=۰ \Rightarrow A_y+۳۸٫۴-۱۰٫۸-۱۰٫۸=۰ \Rightarrow A_y=-۱۶٫۸$

$A_y=۱۶٫۸\downarrow$

از یکی از گره‌های دو عضوی شروع می‌کنیم. A و C دو عضوی اند

گره C :



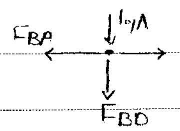
$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{۱۲}{۳۵}\right)=۱۸٫۹$

$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{۱۲}{۲۲٫۵}\right)=۲۸٫۱$

$\Sigma F_y=۰ \Rightarrow -۱۰٫۸-F_{CD}\sin۱۸٫۹ \Rightarrow F_{CD}=-۳۳٫۳ \Rightarrow F_{CD}=۳۳٫۳\ \text{kips}\ (C)$ فشاری

$\Sigma F_x=۰ \Rightarrow -F_{CB}+۳۳٫۳\cos۱۸٫۹=۰ \Rightarrow F_{CB}=۳۱٫۵\ (T)$ کششی

گره B :



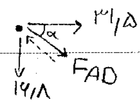
$\Rightarrow \quad \Sigma F_x=۰ \Rightarrow -F_{BA}+۳۱٫۵=۰$

$F_{BA}=۳۱٫۵\ (T)$

$\Sigma F_y=۰ \Rightarrow -۱۰٫۸-F_{BD}=۰ \Rightarrow F_{BD}=-۱۰٫۸$

$\Rightarrow F_{BD}=۱۰٫۸\ (C)$

گره A :



$\Sigma F_x=۰ \Rightarrow ۳۱٫۵+F_{AD}\cos۲۸٫۱=۰$

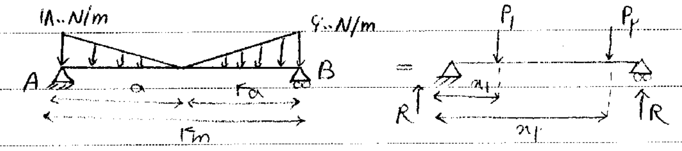
$F_{AD}=-۳۵٫۷\ \text{kips}$

$F_{AD}=۳۵٫۷\ (C)$ فشاری

معادله $\Sigma F_y=۰$ را برای کنترل درستی جواب می‌نویسیم

$\Sigma F_y=۰ \Rightarrow -۱۶٫۸+۳۵٫۷\sin۲۸٫۱\simeq۰٫۷$

مثال: در تیر شکل زیر فاصله a را به گونه‌ای تعیین کنید که واکنش‌های تکیه‌گاه‌ها باهم مساوی شوند؟ (۵-۸۵ ص ۱۸۱)



$$P_1 = \frac{1800a}{2} = 900a \,, \quad x_1 = a/3$$

$$P_2 = \frac{600(4-a)}{2} = 300(4-a) \,, \quad x_2 = 4 - \frac{(4-a)}{3} = \frac{8-a}{3}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2R - 900a - 300(4-a) = 0 \Rightarrow 2R - 900a - 1200 + 300a = 0$$

$$R = 300a + 600 \quad (1)$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 4R - P_2 \times x_2 - P_1 \times x_1 = 0 \Rightarrow 4(300a + 600) - 300(4-a)\left(\frac{8-a}{3}\right) - 900 \times a/3 = 0$$

$$\Rightarrow 1200a + 2400 - 3200 + 1200a - 100a^2 - 300a^2 = 0$$

$$-400a^2 + 2400a - 800 = 0 \Rightarrow a^2 - 6a + 2 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4(2)(1) = 28$$

$$a = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{2} = \begin{cases} a = 5.6 \geq 4 \ \times \\ a = 0.35 \ \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = 300 \times 0.35 + 600 = 705\ N$$

روش مقطع:

این روش بیشتر در حالتی استفاده می‌شود که نیروی یک یا چند عضو خاص از خرپا مورد نظر باشد. نحوه حل مسائل در این روش به شرح زیر است:

۱) با رسم دیاگرام آزاد خرپا و نوشتن معادلات تعادل، واکنش‌های تکیه‌گاهی را محاسبه می‌کنیم.

۲) در خرپا یک مقطع ایجاد می‌کنیم. مقطع ایجاد شده باید دارای شرایط زیر باشد:

الف) خرپا را حداقل به دو بخش مجزا تقسیم کند

ب) عضو یا اعضای مورد نظر را قطع کند. اگر تعداد اعضای مورد نظر دو یا بیشتر باشد

ممکن است بیش از یک مقطع نیاز باشد

ج) تعداد اعضای قطع شده حداکثر سه عضو باشند. اگر در مقطعی به جز عضو مورد نظر بقیه عضوهای قطع شده موازی یا همرس باشند می شود تعداد اعضای قطع شده بیش از ۳ عضو باشد

د) اعضای قطع شده طوری هم زمان موازی یا متقارب نباشند

۳) از نیروهای اعمال شده در هر یک از دو قسمت را با اثر دیاگرام آزاد آن رسم می کنیم. دیاگرام آزاد این قسمت شامل تمامی نیروهای معلوم و مجهول وارد بر آن است. در دیاگرام آزاد اعضای قطع شده رسم نمی شوند ولی نیروهای آنها به صورت مجهول ترسیم می گردد

۴) از تکه انتخاب شده معادلات تعادل را می نویسیم تا نیروی عضو یا اعضای مورد نظر محاسبه شوند

اگر فقط نیروی یک عضو مورد نظر باشد بهتر است برای راحتی کار فقط معادله ای را بنویسیم که منجر به نیروی آن عضو شود

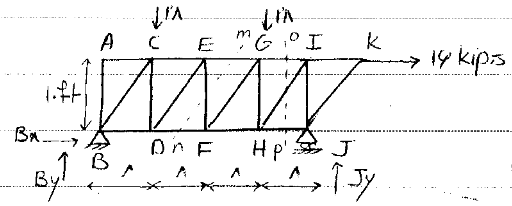
این معادله به شکل زیر قابل تعیین است. ابتدا از معادله تعادل $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ را کنترل می کنیم که آیا به نیروی عضو مورد نظر منجر می شود یا خیر (ممکن است برای رسیدن به نتیجه مجبور شویم محورهای مختصات را به صورت مورب در نظر بگیریم) اگر معادله فوق منجر به نتیجه نشد سراغ معادله تعادل لنگر می رویم در این حالت عضو مورد نظر را کنار گذاشت و دیگر نیروهای مجهول را امتداد می دهیم تا همدیگر را در یک نقطه قطع کنند (تلاقی)

سپس معادله تعادل لنگر را حول نقطه مورد نظر می نویسیم تا نیروی عضو مورد نظر بدست آید. بعضاً ممکن است نقطه ی تلاقی وجود نداشته باشد که تمام شرایط مورد نظر را داشته باشد در این حالت در مجاورت عضو مورد نظر مقطعی کلی می زنیم و نیروی اعضای مجاور را بدست می آوریم سپس با کم شدن تعداد مجهولات به مقطع اصلی باز می گردیم و نیروی عضو مورد نظر را می یابیم

در برخی موارد بیش از یک قطعه ای از هر پایه به وجود می آید که در آن واکنش های تکیه گاه حضور ندارند در این حالت می توان بدون محاسبه واکنش ها سراغ مقطع رفت

مثال: مطلوبست تعیین نیروی عضوهای EF و GI در خرپای نشان داده شده؟

نمودار آزاد خرپا را رسم می‌کنیم



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = 16$

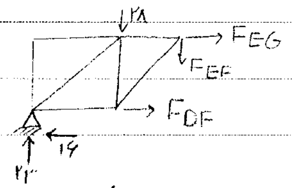
$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -16\times10 + J_y\times32 - 28\times24 - 28\times8 = 0$

$\Rightarrow J_y = 33\ \text{kips}$

$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y - 28 - 28 + 33 = 0 \Rightarrow B_y = 23$

مقطعی وجود ندارد که شامل هر دو عضو مورد نظر بوده و تمام شرایط را نیز داشته باشد، پس برای هر کدام از دو عضو یک مقطع به صورت جداگانه می‌زنیم

عضو EF: مقطع mn را می‌زنیم و یک سمت چپ را انتخاب کرده و دیاگرام آزاد آن را رسم می‌کنیم

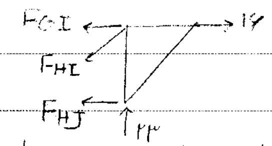


معادله $\Sigma F_y = 0$ مستقیماً نیروی عضو EF را نتیجه می‌دهد

$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 23 - 28 - F_{EF} = 0$

$\Rightarrow F_{EF} = -5 \Rightarrow F_{EF} = 5\ \text{kips}$ فشاری

عضو GI: برای عضو GI از مقطع OP مطابق شکل کمک می‌گیریم پس دیاگرام آزاد سمت راست را رسم می‌کنیم



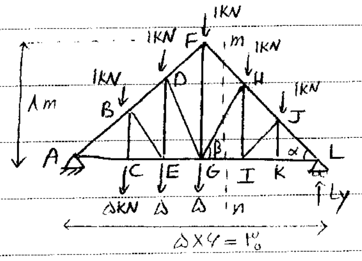
در اینجا دو معادله $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ منجر به نیروی عضو GI نمی‌شود پس سراغ معادله تعادل لنگر می‌رویم

عضو GI را کنار گذاشته و نیروی دو عضو مجهول دیگر یعنی HI و HJ را امتداد می‌دهیم. این دو عضو یکدیگر را در نقطه H قطع می‌کنند پس معادله تعادل لنگر را حول این نقطه می‌نویسیم

$\circlearrowleft \Sigma M_H = 0 \Rightarrow -16\times10 + 33\times8 + F_{GI}\times10 = 0 \Rightarrow F_{GI} = -10.4$

$\Rightarrow F_{GI} = 10.4$ فشاری

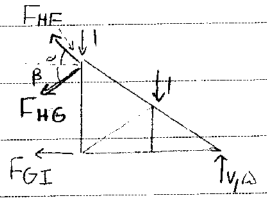
مثال: مطلوبست تعیین نیروی عضوهای FH، GI و GH در خرپای زیر.



برای هر سه عضو کافیست که از مقطع عرضی mn نشان داده شده در شکل استفاده کنیم و بهتر است تکه سمت راست را که شکل و بارگذاری ساده‌تری دارد انتخاب کنیم. تکه سمت راست واکنش تکیه‌گاه L وجود دارد که ابتدا باید این واکنش محاسبه شود.

$$\Sigma M_A=0 \Rightarrow L_y\times 30 - 1\times 25 - 1\times 20 - 1\times 15 - 1\times 10 - 1\times 5 - 5\times 15 - 5\times 10 - 5\times 5 = 0$$

$$\Rightarrow L_y = 7.5\ KN$$



حال در ادامه تکه سمت راست مقطع mn از خرپا را رسم می‌کنیم. ابتدا با توجه به هندسه سازه زوایای α و β و طول قطعه HI را بدست می‌آوریم.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8}{15}\right) = 28.07^\circ$$

تشابه : $\frac{HI}{8} = \frac{10}{15} \Rightarrow HI = 5.33m$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{5.33}{5}\right) = 46.85^\circ$$

حال به سراغ معادلات تعادل می‌رویم. در دو معادله $\Sigma F_x=0$ و $\Sigma F_y=0$ به ترتیب نیروهای مجهول بیشتری هست پس به سراغ معادله تعادل گشتاوری می‌رویم. برای عضو GI معادله تعادل گشتاور حول نقطه H نوشته می‌شود.

$$\Sigma M_H=0 \Rightarrow -F_{GI}\times 5.33 - 1\times 5 + 7.5\times 10 = 0 \longrightarrow F_{GI} = 13.13$$

$$\Sigma M_G=0 \Rightarrow 7.5\times 15 - 1\times 10 - 1\times 5 + F_{HF}\times GH\sin(\alpha+\beta)$$

$$GH = \sqrt{5^2 + 5.33^2} = 7.31$$

$$\alpha+\beta = 28.07 + 46.85 = 74.92^\circ$$

مقادیر فوق را در معادله بالا جایگزین می‌کنیم

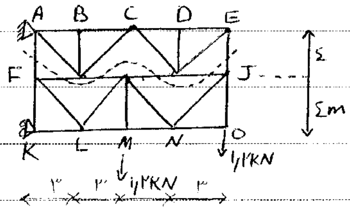
$F_{FH} = -13.81 \Rightarrow F_{FH} = 13.81$ فشاری

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -F_{HG}\sin 46.85 - 13.81\sin 28.07 - 1 - 1 + 7.5 = 0$$

$$\Rightarrow F_{HG} = -1.371\ KN \Rightarrow F_{HG} = 1.371\ (C)$$

تمرین: مطلوبست تعیین نیرو در اعضای AF و EJ در خرپای شکل زیر؟

راهنمایی: از مقطع ترسیم شده در شکل کمک بگیرید؟



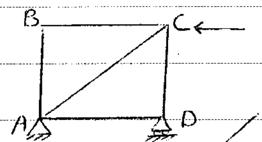
مقطع نشان داده شده در شکل بیش از ۳ عضو را قطع می‌کند اما با توجه به اینکه غیر از یک عضو، مورد نظر بقیه اعضا قطع شده در یک نقطه متقارب‌اند مقطع قابل قبول است!

نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه تقارب، نیروی عضو مورد نظر بدست می‌آید

EJ : $\sum M_F = 0$, AF : $\sum M_J = 0$

موارد خاص در خرپا:

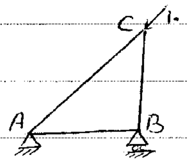
۱) گره‌های دو عضوی: در گره‌های دو عضوی می‌توان مستقیماً دیاگرام آزاد گره را رسم کرده و نیروی هر دو عضو را بدست آورد. اگر گره متصل به تکیه‌گاه باشد ابتدا باید واکنش آن تکیه‌گاه را محاسبه کرد سپس دیاگرام آزاد گره را رسم کرد. اگر گره فاقد نیرو باشد هر دو عضو صفر نیرویی خواهند شد



گره B دو عضوی و فاقد نیرو ←

$F_{AB}=F_{BC}=0$

اگر در گره دو عضوی یک نیرو داشته باشیم و آن نیرو موازی یکی از دو عضو باشد نیرو مستقیماً به آن عضو منتقل می‌شود و عضو غیر موازی صفر نیرویی می‌شود

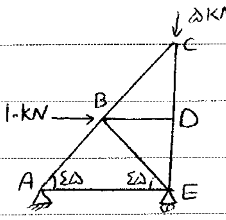


$F_{AC}=10\,KN$

$F_{BC}=0$

۲) گره سه عضوی وقتی که دو عضو موازی هم باشند.

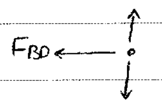
در این حالت می‌توان دیاگرام آزاد گره را ترسیم نموده و معادله تعادل در راستای محوری عمود بر دو عضو موازی را نوشت و نیروی عضو سوم را محاسبه کرد. اگر در راستای این محور مؤلفه نیرویی نباشد عضو سوم صفر نیرویی است



با صفر شدن عضو BD

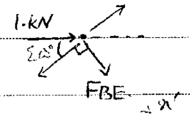
این عضو قابل حذف است آنگاه گره D نیز دارای همین شرایط است

گره D : سه عضوی { CD و DE موازی



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{BD} = 0$

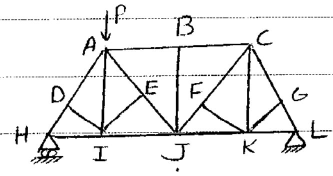
گره B :



$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow 10 \sin 45 + F_{BE} = 0$

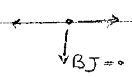
$F_{BE} = -7.07 \Rightarrow F_{BE} = 7.07$ فشاری

مثال: در خرپای شکل زیر اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید؟

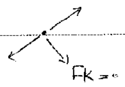


خرپا فاقد گره دو عضوی فاقد نیرو می باشد دو گره H و L دو عضوی اند اما به دلیل واکنش های تکیه گاهی نیرو دارند نیروهای تکیه گاهی در راستای یکی از دو عضو نیست پس هیچ یک از دو عضو آنها صفر نیرویی نیست

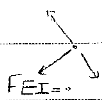
گره های "۳ عضوی با دو عضو موازی" : گره B :



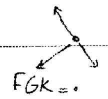
گره F :



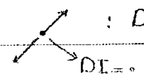
گره E :



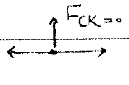
گره G :



گره D :

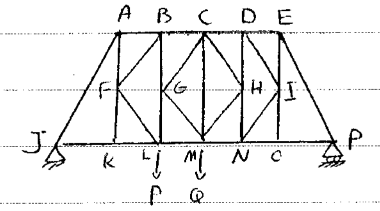


گره K :



گره I :

مثال: در خرپای شکل زیر اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید؟



حال اگر گره دو عضوی دارای شرایط عضو صفر نیرویی
نباشد

گره سه عضوی با دو عضو هم راستا :

گره O : $F_{OI}=0$

گره K : $F_{KF}=0$

گره های دیگر فاقد شرایط عضو صفر نیرویی اند

قاب ها (سازه های دارای اعضای چند نیرویی) :

قاب مجموعه ای از اعضایی است که با اتصالات مفصلی به یکدیگر متصل شده اند آنچه قاب را از خرپا متمایز می کند وجود یک یا چند مورد از موارد زیر است

۱) اعضا می توانند غیر از مفصل های دو انتها، مفصل های میانی خود نیز شامل بار باشند

۲) لزومی به مستقیم بودن عضو نیست و عضو می تواند به صورت منحنی یا چند تکه نیز باشد

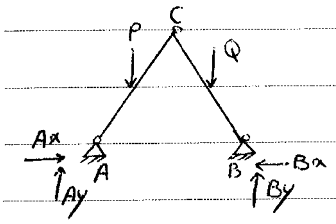
۳) لزومی ندارد که عضو فقط در دو انتهای خود به اعضای مجاور متصل شده باشد و غیر از نقاط فوق می تواند در نقاط میانی خود نیز به اعضای مجاور متصل شود

روش حل مسائل قاب :

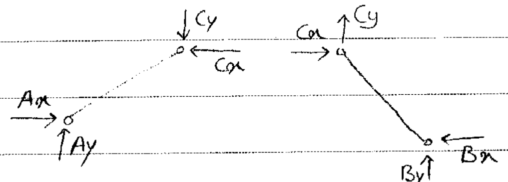
ابتدا با رسم دیاگرام آزاد قاب و نوشتن معادلات تعادل واکنش های تکیه گاهی قاب را محاسبه می کنیم سپس قاب را به چند تکه تقسیم می کنیم و برای هر تکه از قاب دیاگرام آزاد آن را رسم می کنیم و معادلات تعادل را می نویسیم در رسم دیاگرام آزاد در هر مفصل باید دو واکنش افقی و عمودی مجهول قرار داده شود. برای قطعات مجاور در محل مفصل مقادیر واکنش ها همان مقادیر ولی با جهات متفاوت هستند (برآیند نیروهای مختلف وارد بر مفصل از طرف قطعات مختلف باید صفر شود)

اگر بیش از دو قطعه به یک مفصل متصل شده باشند واکنش های وارد بر گره از طرف هر یک از قطعات لزومی ندارد که با هم مساوی باشند اما در هر صورت برآیند آنها باید صفر شود به جای دو واکنش افقی و عمودی مجهول می توان یک واکنش

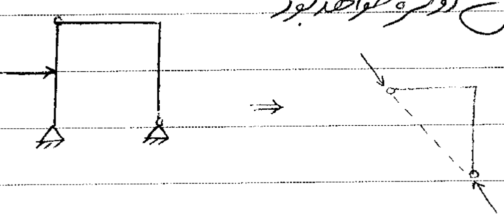
با مقدار و راستای مجهول نیرو جایگزین کرد



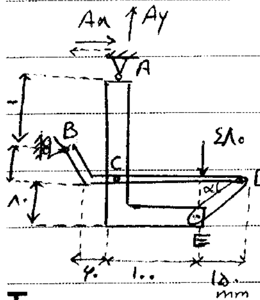
چون نیروهایی که گره‌ها وارد می‌شوند مجموعه قاب است نه خرپا، نیرویی ندارد که در مرحله اول تمام واکنش‌های تکیه‌گاهی محاسبه شود و ممکن است در حالتی که تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی چهار یا بیشتر باشد برخی از واکنش‌ها به جای استفاده از معادلات تعادل کل قاب از طریق معادلات تعادل قطعات قاب بدست آید



نکته: اگر عضوی از قاب فقط به دو مفصل متصل باشد و در فاصله ابتدا تا انتهای خود (غیر از دو مفصل) فاقد نیرو باشد، نیرویی که گره‌ها به قطعه وارد می‌کنند یک تک نیرو در راستای خط واصل دو گره خواهد بود



مثال: در قاب نشان داده شده عضوهای ACE و BCD بوسیله پین C و میله DE به هم متصل شده‌اند با توجه به بارگذاری مفروض نیرو در میله DE و مولفه‌های نیروی وارد بر عضو BCD در نقطه C را تعیین کنید.



مجموعه شامل سه تکه ACE، BCD و DE می‌باشد

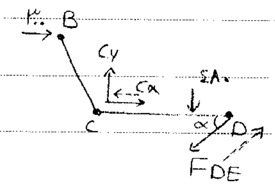
قطعه DE حالت یک میله را دارد و نیروی آن در راستای DE می‌باشد. دیاگرام آزاد مجموعه را رسم می‌کنیم

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 480 = 0 \quad A_y = 480\,N \uparrow$

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -480\times100 + B_x\times160 = 0 \Rightarrow B_x = 300$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 300 + A_x = 0 \quad A_x = -300 \Rightarrow A_x = 300\,\overleftarrow{N}$

عضو BCD :



$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{80}{150}\right) = 28.07^\circ$

$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0 \Rightarrow -300\times60 - C_y\times250 + 480\times150 = 0$

$\Rightarrow C_y = 216\,N \uparrow$

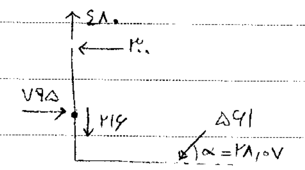
$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 216 - 480 - F_{DE}\sin 28.07 = 0 \Rightarrow F_{DE} = -561\,N$

$\Rightarrow F_{DE} = 561\,N\,(C)$ فشاری

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 300 + C_x + 561\cos 28.07 = 0$

$\Rightarrow C_x = -795\,N \Rightarrow C_x = 795\,N \leftarrow$

قطعه ACE :

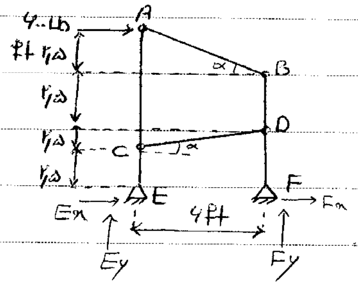


نکته: نیرویی که میله DE به رو مفصل ابتدا و انتهای خود وارد می‌کند مساوی و خلاف جهت است

در اینجا هیچ واکنش مجهولی وجود ندارد فقط جهت کنترل جواب یکی از معادلات تعادل را می‌نویسیم

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 795\times220 - 561\cos 28.07\times300 - 561\sin 28.07\times100 = 0$ ✓

مثال: در قاب مطابق شکل نیروی افقی 600 پوند بر پین A وارد می‌شود نیروهای وارد بر روی عضوهای این قاب را تعیین کنید؟



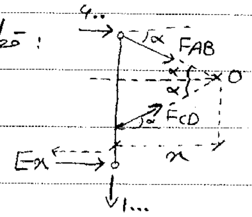
عضوها شامل چهار تکه ACE، BDF، AB و CD می‌باشند و AB و CD میله می‌باشند میله‌ها دارای یک تک نیرو در راستای خود هستند که جهت این نیرو در دو مفصل ابتدا و انتها مخالف هم می‌باشند. دیاگرام آزاد عضوها را رسم می‌کنیم

$$\circlearrowleft \Sigma M_E=0 \Rightarrow -600\times 10+F_y\times 6=0 \Rightarrow F_y=1000\ Lb\uparrow$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow E_y+1000=0 \Rightarrow E_y=-1000\ Lb \Rightarrow E_y=1000\downarrow$$

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow E_x+F_x+600=0 \Rightarrow E_x+F_x=-600 \quad (1)$$

ACE قطعه :



$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{2.5}{6}\right)=22.6^\circ$$

$$\tan\alpha=\frac{3.75}{x} \Rightarrow x=\frac{3.75}{\tan\alpha}=\frac{3.75}{\tan 22.6}=9\ ft$$

گشتاور را حول نقطه O می نویسیم تا دو مجهول از ۳ مجهول کم شود

$$\circlearrowleft \Sigma M_O=0 \Rightarrow 1000\times 9-600\times 3.75+E_x\times 6.25=0$$

$$\Rightarrow E_x=-1080\ Lb \Rightarrow E_x=1080\leftarrow$$

مقدار بدست آمده را در معادله (1) قرار می دهیم چون برای Ex عدد منفی بدست آمده است در آنجا نیز با علامت منفی جایگزین می شود

$$\text{معادله (1)} \Rightarrow -1080+F_x=-600 \Rightarrow F_x=480\ \overrightarrow{Lb}$$

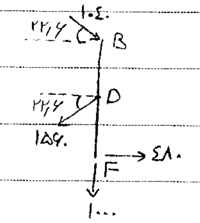
$$\circlearrowleft \Sigma M_A=0 \Rightarrow -1080\times 10+F_{CD}\times 7.5\times\cos 22.6=0$$

$$\Rightarrow F_{CD}=1560\ Lb\ (T)$$

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow -1080+600+1560\cos 22.6+F_{AB}\cos 22.6=0$$

$$F_{AB}=-1040\ lb \quad F_{AB}=1040\ (C)$$

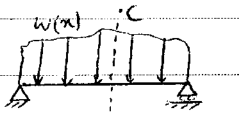
قطعه BDF فقط جهت کنترل جواب ترسیم و یکی از معادلات آن نوشته می شود

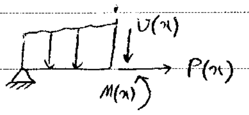


$$\overrightarrow{\Sigma F_x=0} \Rightarrow 1040\cos 22.6-1560\times\cos 22.6+480=0\ \checkmark$$

دیاگرام های برش و لنگر در تیرها:

در یک تیر با بارگذاری دلخواه اگر در هر نقطه از تیر یک مقطع ایجاد کنیم تا تیر به دو تکه تقسیم شود و یکی از دو تکه را بیرون کشیده و دیاگرام آزاد آن را رسم کنیم برای آنکه این تکه دارای تعادل باشد باید در مقطع برش سه واکنش داخلی وجود داشته باشد این سه واکنش بصورت دو نیروی موازات و عمود بر راستای تیر و یک گشتاور خمشی می باشند





این سه واکنش با نوشتن معادلات تعادل قطعه انتخاب شده از تیر قابل محاسبه است. به نیروی بدست آمده به موازات تیر نیروی محوری در آن نقطه و واکنش عمود بر راستای تیر را نیروی برشی آن نقطه و لنگر خمشی بدست آمده لنگر خمشی آن نقطه می باشد اگر برای تمامی نقاط تیر این واکنش های داخلی محاسبه شود و کنار هم قرار داده مقادیر بدست آمده سه دیاگرام بدست می آید این دیاگرام ها عبارتند از: دیاگرام نیروی محوری نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر با توجه به اینکه معمولا در تیرها مقدار نیروی محوری قابل توجه نیست دیاگرام نیروی محوری از اهمیت کمتری برخوردار است و معمولا دو دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیر رسم می شوند

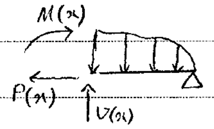
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P(x) =$ نیروی محوری

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V(x) =$ " برشی

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M(x) =$ لنگر خمشی

قرارداد برای جهت مثبت واکنش های داخلی بر حسب آنکه قطعه سمت چپ یا سمت راست تیر انتخاب شود خلاف هم و مطابق شکل است

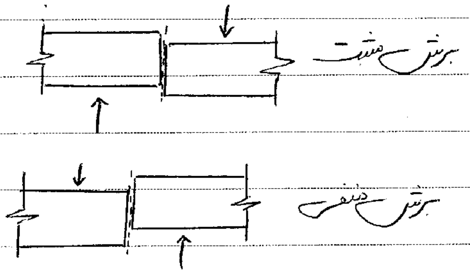
قطعه سمت راست :



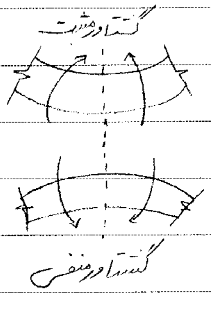
در محل برش هر دو قطعه تیر است قطعه ای انتخاب شود که شکل ساده تری دارد اگر دو قطعه از این لحاظ تفاوت قابل ملاحظه ای نداشته باشند بهتر است قطعه سمت چپ انتخاب شود

برای تعیین جهت مثبت و منفی واکنش های داخلی به شکل زیر نیز می توان عمل کرد:

در مورد نیروهای محوری، نیروهای کششی همیشه مثبت و نیروهای فشاری همیشه منفی است
در مورد نیروی برشی اگر نیروهای وارد بر تیر به گونه ای باشند که تمایل داشته باشند قطعه سمت چپ نقطه مورد نظر را نسبت به قطعه سمت راست به سمت بالا حرکت دهند برش مثبت است و عکس آن برش منفی است



پس بر این اساس اگر قطعه سمت چپ انتخاب شود و یا از چپ به راست جهت ترسیم دیاگرام حرکت می کنیم نیروهای رو به بالا مثبت و رو به پایین منفی است
برعکس آن اگر قطعه سمت راست را انتخاب کردیم و یا از راست به چپ دیاگرام را ترسیم می کنیم نیروهای رو به پایین مثبت و رو به بالا منفی است
در مورد گشتاور اگر گشتاورهای وارد بر تیر تمایل داشته باشند که به تیر در نقطه مورد نظر انحنای رو به بالا بدهند گشتاور مثبت و در غیر اینصورت منفی است



پس بر این اساس اگر قطعه سمت چپ انتخاب شده باشد و یا حرکت از چپ به راست باشد گشتاورهای ساعتگرد مثبت و پادساعتگرد منفی فرض می شود برعکس آن اگر قطعه سمت راست انتخاب شود و یا حرکت از راست به چپ باشد گشتاور پادساعتگرد مثبت و ساعتگرد منفی است

روش های ترسیم دیاگرام:
۱) روش مقطع: در این روش در نقطه دلخواه با فاصله مجهول از دو انتهای یک مقطع زده می شود و با انتخاب یکی از دو قطعه و استفاده از یکی از روش های گفته شده مقادیر عکس العمل داخلی محاسبه می گردد چون موقعیت این نقطه مجهول است

مقادیر بدست آمده برای واکنش های داخلی تابعی از یک متغیر مثل x که واحد طول است می توان با استفاده از روش های ریاضی نمودارهای مربوطه را ترسیم نمود

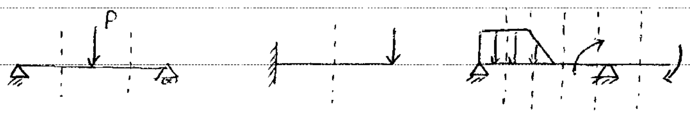
در هر تیر لزوماً به یک مقطع نیاز نیست و گاهی به بیش از یک مقطع نیاز داریم در انتخاب مقاطع در تیر باید به نکات زیر توجه کرد:

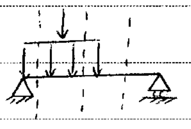
۱) به ازای هر بار متمرکز در تیر (شامل واکنش های تکیه گاهی) نیاز به یک مقطع قبل و بعد از بار متمرکز می باشد

۲) اگر شکل بار گسترده در طول تیر تغییر کند به ازای هر قطعه نیاز به یک برش است

۳) اگر تکه ای از تیر شامل بار گسترده و تکه دیگر فاقد بار گسترده باشد برای هر تکه از قسمت نیز یک مقطع مورد نیاز است

نکته) ترجیحاً باید یک مبدا ثابت در انتهای سمت چپ تیر در نظر گرفت و تمامی مقادیر را نسبت به این مبدا ثابت محاسبه کرد





در ترسیم دیاگرام ها در مورد معادله واکنش های تکیه گاهی می توان بارهای گسترده را به بار متمرکز تبدیل کرد

۲) روش محاسبه سریع: در این روش از یکی از دو انتهای تیر شروع کرده و با کمک یک سری قواعد ساده شده دیاگرام ها را ترسیم می کنیم برخی از این قواعد به شرح زیر است:

۱- بار وارد بر تیر، دیاگرام برش و دیاگرام گشتاور هم دارای روابط مشتق و انتگرال می باشد به این گونه که دیاگرام گشتاور، انتگرال دیاگرام برش و دیاگرام برش، انتگرال معادله بار وارد بر تیر است برعکس آن معادله بار وارد بر تیر مشتق دیاگرام برش و دیاگرام برش مشتق دیاگرام خمش است. در قسمت های بعدی به استفاده هایی که از این نکات می شود اشاره می شود

۲ـ در قسمتی که به تیر باری وارد نمی‌شود دیاگرام برش خط مستقیم و دیاگرام لنگر خط مایل است

۳ـ در محل بارهای متمرکز در دیاگرام برش ایجاد جهش به مقدار بار متمرکز و هم جهت با آن (در صورت حرکت از سمت چپ به راست) خواهیم بود در حالی که در دیاگرام لنگر یک شکستگی ایجاد می‌شود

۴ـ در محل لنگر متمرکز دیاگرام برش بدون تغییر می‌ماند اما در دیاگرام لنگر یک جهش ایجاد می‌شود این جهش با توجه به مقدار گشتاور وارده می‌باشد در ترسیم چپ به راست گشتاور متمرکز ساعتگرد مثبت فرض می‌شود

۵ـ در محل اعمال بار گسترده یکنواخت نمودار برش خط مایل و نمودار لنگر سهمی است

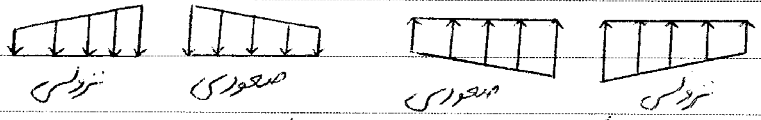
۶ـ در محل بار گسترده مثلثی نمودار برش درجه (۲) و نمودار لنگر درجه (۳) می‌شود

۷ـ هرجا مقدار برش مثبت باشد نمودار لنگر صعودی است در غیر اینصورت نزولی است

۸ـ هرجا بار گسترده وارد بر تیر رو به پایین باشد نمودار برش نزولی و نمودار لنگر دارای تقعر رو به پایین است (بار رو به پایین منفی فرض می‌شود) و بالعکس

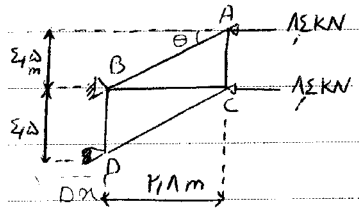
۹ـ در مورد بارهای گسترده غیر یکنواخت هرگاه بار صعودی باشد نمودار برش دارای تقعر رو به بالا خواهد بود و بالعکس

برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن بار باید از چپ به راست حرکت کنیم و همچنین توجه کنیم که بار با جهت پایین منفی و با جهت بالا مثبت است



۱۰ـ مقدار لنگر در هر نقطه از تیر برابر انتگرال نمودار برش از ابتدا تا آن نقطه می‌باشد البته اگر در این محدوده به تیر گشتاور متمرکزی وارد شده باشد باید این گشتاور متمرکز به سطح زیر نمودار اضافه شود

مثال: با استفاده از روش مفصل نیروی اعضای خرپای شکل زیر را محاسبه کنید؟



$J=۴ \ , \ n=۵ \ , \ r=۳$

$۲\times۴ = ۵+۳ = ۸ \Rightarrow$ معین است

$\uparrow \Sigma F_y=0 \Rightarrow B_y=0$

$\circlearrowleft \Sigma M_D=0 \Rightarrow ۸٫۴\times۹ + ۸٫۴\times۴٫۵ - B_x\times۴٫۵=0$

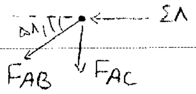
$\Rightarrow B_x = ۲۵٫۲ \ KN$

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow D_x+۲۵٫۲-۸٫۴-۸٫۴=0$

$\Rightarrow D_x=-۸٫۴ KN \Rightarrow \overleftarrow{D_x=۸٫۴ KN}$

از یکی از دو گره A و D می‌توانیم شروع کنیم

گره A: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{۴٫۵}{۳٫۸}\right)=0 \Rightarrow \theta = ۵۸٫۱^\circ$



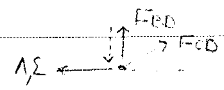
$\Rightarrow \Sigma F_x=0 \Rightarrow -۸٫۴ - F_{AB}\cos۵۸٫۱=0$

$\Rightarrow F_{AB}=-۱۵٫۹ \Rightarrow F_{AB}=۱۵٫۹ \ KN (C)$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_{AC}+۱۵٫۹\times\sin۵۸٫۱=0$

$\Rightarrow F_{AC}=۱۳٫۵ (KN) \ (T)$

گره D:



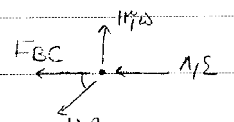
$\Sigma F_x=0 \Rightarrow -۸٫۴+F_{CD}\cos۵۸٫۱=0$

$\Rightarrow F_{CD}=۱۵٫۹ \ KN (T)$

$\uparrow \Sigma F_y=0 \Rightarrow F_{BD}+۱۵٫۹\sin۵۸٫۱=0 \Rightarrow F_{BD}=-۱۳٫۵$

$F_{BD}=۱۳٫۵ \ (C)$

گره C:

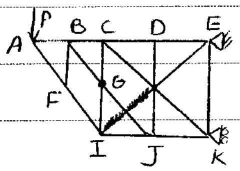


$\Sigma F_x=0 \Rightarrow -F_{BC}-۸٫۴-۱۵٫۹\cos۵۸٫۱=0$

$F_{BC}=-۱۶٫۸ \Rightarrow F_{BC}=۱۶٫۸ \ (C)$

(برای کنترل) $\Sigma F_y=0 \Rightarrow ۱۳٫۵-۱۵٫۹\sin۵۸٫۱=0$

مثال: در خرپای شکل زیر اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید؟



تنها گره دو عضوی گره A است که این گره دارای نیرو می‌باشد پس دارد به گره‌های موازی هیچ یک از دو عضو متصل به گره نیست. اگر دارای بود عضو دوم صفر نیرو بود بر این اساس دو عضو متصل به این گره صفر نیرویی نیستند.

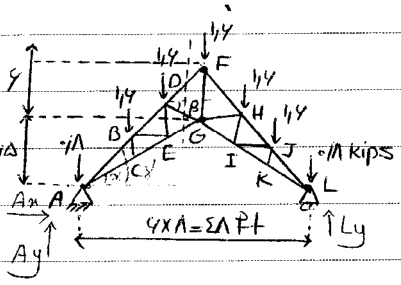
گره‌های سه عضوی با دو عضو موازی:

گره‌های E, D : BE, DH

گره B : BG — گره J : JH

گره G : JG — گره H : HE

مثال: در خرپای شکل زیر به روش مقطع نیروی عضوهای DF، DG و EG را محاسبه کنید؟



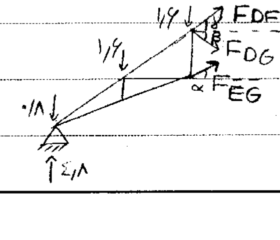
یک مقطع عمودی مطابق شکل هر سه عضو مورد نظر را قطع می‌کند و دارای تمامی شرایط نیز می‌باشد. یک سمت چپ را انتخاب می‌کنیم. در این سمت واکنش تکیه‌گاه A وجود دارد که ابتدا باید با رسم دیاگرام آزاد کل خرپا واکنش‌های این تکیه‌گاه را محاسبه کنیم.

$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\circlearrowleft \sum M_L = 0 \Rightarrow -A_y \times 48 + 0/8 \times 48 + 1/6 \times (40 + 32 + 24 + 16 + 8) = 0$

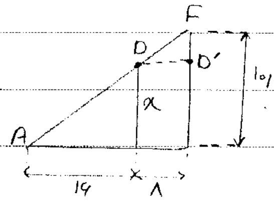
$A_y = 4/8\ \text{kips} \uparrow$

چون خرپا از لحاظ شکل و بارگذاری متقارن است واکنش‌های عمودی دو تکیه‌گاه باهم برابر است و مقدار هر کدام نصف مجموع بارهای عمودی وارد بر خرپا است.



$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4/5}{24}\right) = 10/6^\circ$

$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{10/5}{24}\right) = 23/6^\circ$



تشابه: $\frac{۱۶}{۲۴} = \frac{x}{۱۰٫۵} \Rightarrow x = ۷$

$\Rightarrow D'F = ۱۰٫۵ - ۷ = ۳٫۵$

$D'G = ۶ - ۳٫۵ = ۲٫۵$

$\tan\beta = \frac{D'G}{DD'} = \frac{۲٫۵}{۸} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{۲٫۵}{۸}\right) = ۱۷٫۳۵^\circ$

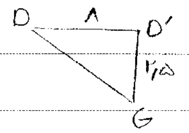
F_{DG} محاسبه : $\curvearrowleft \Sigma M_A = ۰ \Rightarrow -۱٫۶ \times ۸ - ۱٫۶ \times ۱۶ - F_{DG} \times AD \times \sin(\beta+\gamma) = ۰$

$AD = \sqrt{۱۶^۲ + ۷^۲} = ۱۷٫۴۶$ $\quad \beta+\gamma = ۱۷٫۳۵ + ۲۳٫۶ = ۴۰٫۹۵^\circ \Rightarrow F_{DG} = -۳٫۳۵$

$\Rightarrow F_{DG} = ۳٫۳۵\ (C)$

F_{DF} محاسبه : $\curvearrowleft \Sigma M_G = ۰ \Rightarrow -۴٫۸ \times ۲۴ + ۰٫۸ \times ۲۴ + ۱٫۶ \times ۱۶ + ۱٫۶ \times ۸$

$- F_{DF} \times DG \times \sin(\alpha+\beta) = ۰$



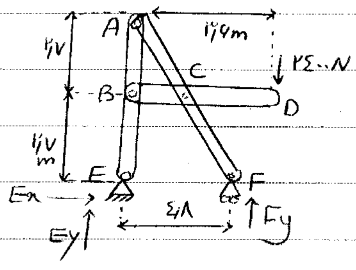
$\Rightarrow DG = \sqrt{۸^۲ + ۲٫۵^۲} = ۸٫۳۸ \Rightarrow F_{DF} = -۱۰٫۴۸$

$\Rightarrow F_{DF} = ۱۰٫۴۸\ (C)$

F_{EG} محاسبه : $\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow -۱۰٫۴۸ \cos\gamma - ۳٫۳۵ \cos\beta + F_{EG} \times \cos\alpha = ۰$

$F_{EG} = ۱۱٫۰۲\ kips\ (T)$

مثال: مولفه‌های نیروی وارد بر هر عضو قاب نشان داده شده را تعیین کنید



مجموعه ارتباط اعضای ABE , ACF , BCD شکل نشان داده شده است.

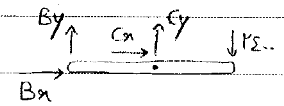
$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow E_x = ۰$

$\curvearrowleft \Sigma M_E = ۰ \Rightarrow F_y \times ۴٫۸ - ۲۴۰۰ \times ۳٫۶ = ۰$

$F_y = ۱۸۰۰\ N$

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۱۸۰۰ - ۲۴۰۰ + E_y = ۰ \quad E_y = ۶۰۰\ N \uparrow$

: BCD عضو



$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \quad -2400 \times 2.1 + C_y \times BC = 0$

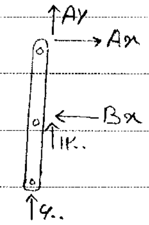
$\Rightarrow C_y = 3600\ N \uparrow$

تشابه : $\frac{BC}{6.8} = \frac{1.7}{8.4} \Rightarrow BC = 1.4$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y + 3600 - 2400 = 0 \Rightarrow B_y = -1200 \Rightarrow B_y = 1200 \downarrow$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x + C_x = 0$ ①

: ABE عضو



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 600 + 1200 + A_y = 0$

$A_y = -1800 \rightarrow A_y = 1800 \downarrow$

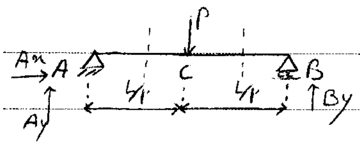
$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -B_x \times 1.7 = 0 \Rightarrow B_x = 0$

① $\Rightarrow 0 + C_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

با توجه به اینکه تمام مجهولات محاسبه شده نیازی به رسم دیاگرام آزاد قطعه ACF نیست در صورت تمایل فقط جهت کنترل جواب ها این قطعه را نیز رسم و یکی از معادلات تعادل آن را می نویسیم

مثال : نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر با بارگذاری نشان داده شده را ترسیم کنید



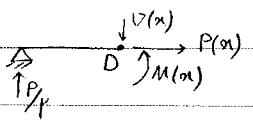
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow A_y . L + \frac{PL}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{P}{2}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P/2 - P + B_y = 0 \Rightarrow B_y = P/2$

روش مقطع : A به عنوان مبدأ
به دو مقطع نیاز داریم

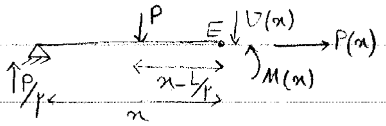
1) $0 < x < L/2 \Rightarrow$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V(x) + P/2 = 0 \Rightarrow V(x) = P/2$

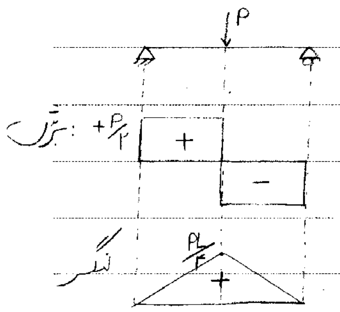
$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0 \quad -\frac{Px}{2} + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{Px}{2}$

۲) $\frac{L}{2} < x \leq L$

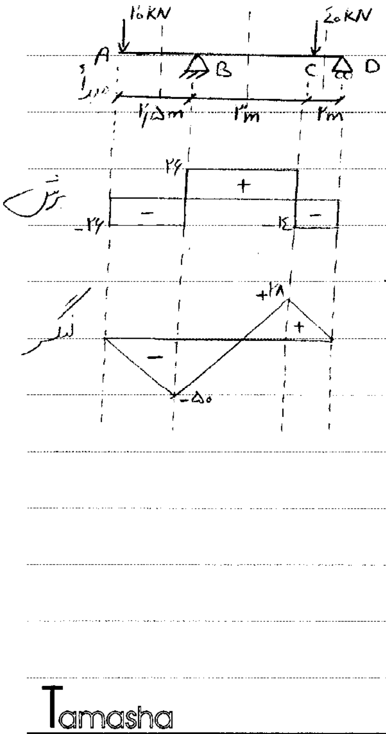


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = -\frac{P}{2}$

$\curvearrowleft \Sigma M_E = 0 \Rightarrow \frac{-Px}{2} + P(x - \frac{L}{2}) + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{P}{2}(L - x)$



مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر با بارگذاری نشان داده شده در شکل را رسم کنید.



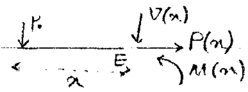
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$

$\curvearrowleft \Sigma M_D = 0 \Rightarrow 20 \times 7.5 - B_y \times 5 + 40 \times 2 = 0$

$B_y = 46 KN \uparrow$ $\Sigma F_y = 0$

$-20 + 46 - 40 + D_y = 0 \Rightarrow D_y = 14 KN \uparrow$

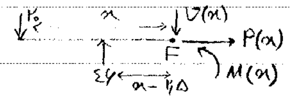
$0 \leq x < 2.5 \Rightarrow$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -20 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = -20$

$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow +20x + M(x) = 0 \quad M(x) = -20x$

$2.5 \leq x < 5.5 \Rightarrow$

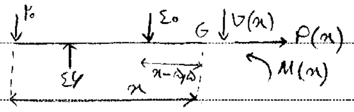


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -20 + 46 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = 26$

$\curvearrowleft \Sigma M_F = 0 \Rightarrow +20x - 46(x - 2.5) + M(x) = 0$

$M(x) = 26x - 115$

$5.5 \leq x \leq 7.5 \Rightarrow$

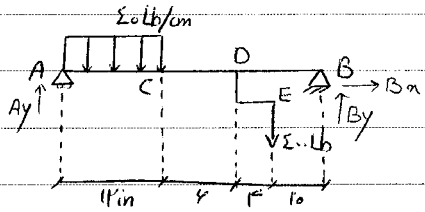


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -10 + 46 - 40 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = -4$

$\circlearrowleft \Sigma M_G = 0 \Rightarrow 10x - 46(x - 2.5) + 40(x - 5.5) + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = -4x + 105$

معادله لنگر بصورت معادله خط است. برای رسم یک خط کافیست که نقاط ابتدا و انتهای محدوده را عددگذاری کرده و لنگر در آنجا را محاسبه کنیم

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر AB را ترسیم کنید؟



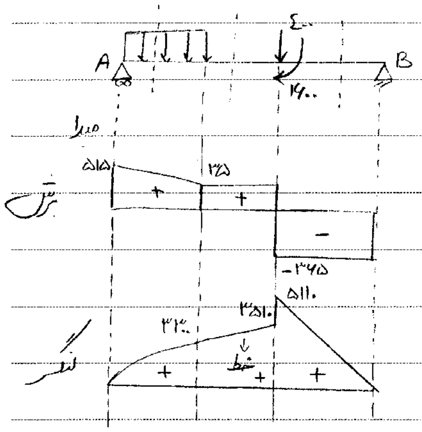
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$

$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -A_y \times 32 + (40 \times 12) \times 26 + 400 \times 10 = 0$

$\Rightarrow A_y = 515\ Lb \uparrow$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 515 - (40 \times 12) - 400 + B_y = 0$

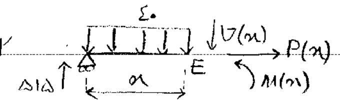
$B_y = 365\ Lb$



نیروی وارد بر نقطه E را به همراه لنگری که ایجاد می‌کند به نقطه D منتقل می‌کنیم و قطعه DE را از زیر تیر حذف می‌کنیم

به سه مقطع مطابق شکل نیاز داریم

$0 \leq x \leq 12$



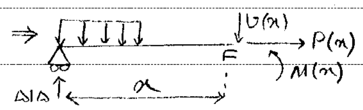
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 515 - 40x - V(x) = 0$

$V(x) = 515 - 40(x)$

$\circlearrowleft \Sigma M_E = 0 \Rightarrow -515x + (40x)\,x/2 + M(x) = 0$

$M(x) = -20x^2 + 515x$

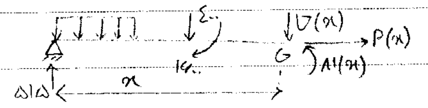
$12 < x < 18 \Rightarrow$



$\Sigma F_y=0 \Rightarrow 515-40\times 12-V(x)=0 \Rightarrow V(x)=35\,Lb$

$\Sigma M_F=0 \Rightarrow -515x+(40\times 12)\times(x-6)+M(x)=0 \quad M(x)=35x+2880$

$18\leqslant x\leqslant 32$



$\Sigma F_y=0 \Rightarrow 515-40\times 12-400-V(x)=0$

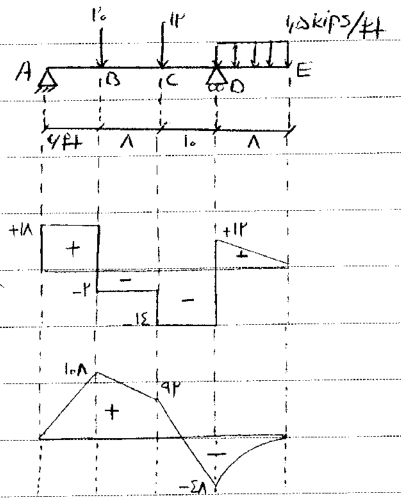
$V(x)=-365$

$\Sigma M_G=0 \Rightarrow -515x+(40\times 12)(x-6)+400(x-18)$
$-1600+M(x)=0$

$\Rightarrow M(x)=11680-365x$

در تکه اول منحنی لنگر سهمی است چون ضریب x^2 منفی است خم منحنی رو به پایین است

مثال: (۷-٤) نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر با بارگذاری نشان داده شده ترسیم کنید.



$\Sigma F_x=0 \Rightarrow A_x=0$

$\Sigma M_A=0 \Rightarrow -(1.5\times 8)\times 28+D_y\times 24-12\times 14-20\times 6=0$

$\Rightarrow D_y=26\ kips$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y-20-12+26-1.5\times 8=0$

$A_y=18\ Kips$

روش سریع:

$V_E=12-8\times 1.5=0$

$M_B=18\times 6=108$

$M_C=108-2\times 8=92$

$M_D=92-14\times 10=-48$

$M_E=-48+\frac{12\times 8}{2}=0$ ✓

در مورد نمودارهای ترسیم شده نکات زیر قابل توجه است:

۱) ابتدا و انتهای نمودارها باید صفر شود

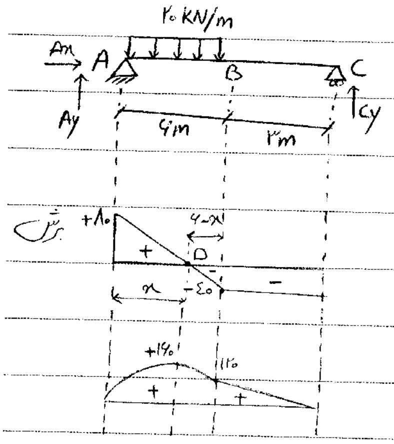
۲) در محل هایی که به تیر باری وارد نشده است نمودار برشی خط مستقیم و نمودار لنگر خط مورب

۳) در محل های اعمال بار متمرکز در نمودار برش جهش به میزان بار و در نمودار لنگر شکستگی ایجاد شده است

۴) در محل بار گسترده نمودار برش خط مایل و نمودار لنگر سهمی است چون بار گسترده رو به پایین است منحنی برش نزولی و منحنی لنگر دارای خم رو به پایین است

۵) برای رسم نمودار لنگر از سطح زیر نمودار برش استفاده شده است

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر با بارگذاری نشان داده شده را رسم نمایید؟



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow -A_y \times 9 + (20 \times 6) \times 6 = 0 \Rightarrow A_y = 80 kN$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 80 - 20 \times 6 + C_y = 0 \Rightarrow C_y = +40$

روش سریع:

$V_B = 80 - 20 \times 6 = -40$

تشابه: $\frac{x}{6-x} = \frac{80}{40} \Rightarrow x = 4m$

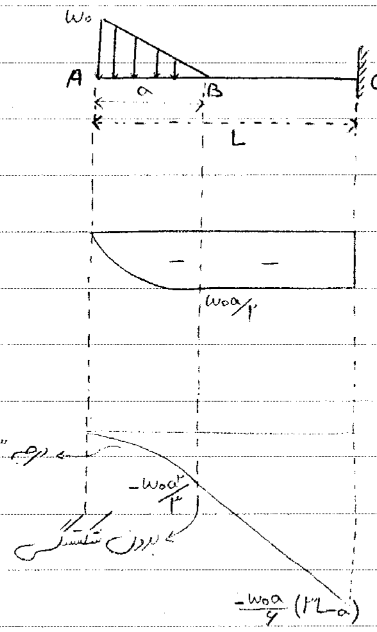
نقطه D که برش صفر است نقطه اکسترمم نمودار لنگر است

$M_D = \frac{80 \times 4}{2} = 160 \qquad M_B = 160 - \frac{40 \times 2}{2} = 120$

$M_C = 120 - 40 \times 3 = 0$ ✓

نکته: چون بار گسترده رو به پایین است خم منحنی لنگر نیز رو به پایین است در نقطه B با توجه به اینکه بار متمرکزی اعمال نشده است باید شیب خط در سمت راست نقطه B با شیب منحنی در سمت چپ نقطه B در نمودار لنگر یکسان باشد (شکستگی نداشته باشد)

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر شکل زیر را مشخص کنید؟



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$$

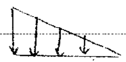
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{-w_0a}{2} + C_y = 0$$

$$\Rightarrow C_y = \frac{w_0a}{2}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow +\left(\frac{w_0a}{2}\right) \times \left(L - a/3\right) - M_C = 0$$

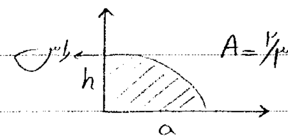
$$\Rightarrow M_C = \frac{w_0a}{6}(3L-a)$$

چون بار وارد بر تیر گسترده مثلثی است نمودار برشی بصورت سهمی و نمودار لنگر درجه ۳ است چون جهت بار گسترده رو به پایین است خم منحنی لنگر رو به پایین است

 ⇐ صعودی ⇐ خم منحنی برش رو به بالا

بار گسترده از مقدار w_0 در نقطه A به صفر در نقطه B می رسد پس نمودار بار حالت نزولی دارد و مشتق بار که مشتق دوم برش است مثبت خواهد بود و در نتیجه خم منحنی برش رو به بالا است

$$V_B = -w_0a/2$$



$$A = \tfrac{1}{3}ah \qquad M_B = -\tfrac{1}{3}\frac{w_0a}{2} \times a = \frac{-w_0a^2}{3}$$

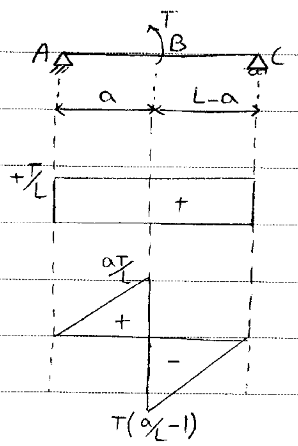
می توان بجای سطح زیر نمودار مستقیماً در تیر از سمت چپ به راست نسبت به نقطه B لنگرها را محاسبه و باهم جمع کرد در این حالت باید توجه داشت که لنگر ساعتگرد مثبت فرض شود

$$M_B = -\left(\frac{w_0a}{2}\right) \times \tfrac{1}{3}a = \frac{-w_0a^2}{3}$$

$$M_C = \frac{-w_0a^2}{3} - \frac{w_0a}{2}(L-a) = \frac{-w_0a}{6}(3L-a)$$

نکته: در نقطه C که لنگر متمرکز وجود دارد یک جهش در نمودار ایجاد می شود چون از چپ به راست نمودار را ترسیم کرده ایم لنگر ساعتگرد مثبت فرض می شود در نقطه B با توجه به عدم وجود بار متمرکز نباید پس در تکه نمودار شکستگی به وجود آید

مثال: دیاگرام برش و لنگر تیر شکل روبرو را رسم کنید؟



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -A_y \times L + T = 0 \Rightarrow A_y = \frac{T}{L}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{T}{L} + C_y = 0 \Rightarrow C_y = -\frac{T}{L} \downarrow$$

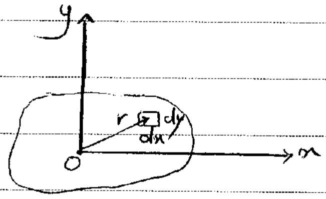
$$M_B = \frac{T}{L} \times a$$

$$M_C = T\left(\frac{a}{L} - 1\right) + \frac{T}{L} \times (L-a) = 0$$

$$\frac{aT}{L} - T = T\left(\frac{a}{L} - 1\right)$$

لنگر متمرکز در نقطه B تأثیری بر نمودار برش ندارد اما در نمودار لنگر یک جهش ایجاد می‌کند با توجه به اینکه این لنگر پادساعتگرد است و نمودار را از چپ به راست ترسیم می‌کنیم این جهش منفی است

ممان دوم اینرسی:



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int xy\, dA$$

$$J_0 = I_x + I_y$$

J_0: لنگر دوم قطبی نسبت به نقطه O

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad , \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$r_0^2 = r_x^2 + r_y^2 \qquad J_0 = \int r^2 dA$$

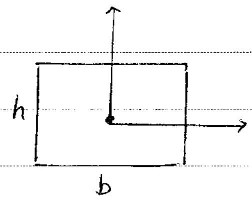
I_x, I_y: ممان‌های دوم اینرسی نسبت به دو محور x و y

r_x, r_y: شعاع‌های چرخش یا ژیراسیون نسبت به محورهای x و y

$$r_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$$

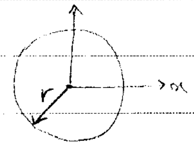
r_0: شعاع چرخش قطبی نسبت به مبدأ مختصات

ممان های اینرسی نسبت به چند شکل خاص:



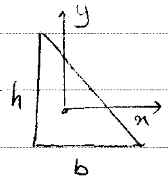
$I_x=\frac{bh^3}{12}$, $I_y=\frac{b^3h}{12}$, $r_x=\frac{h}{2\sqrt{3}}$, $r_y=\frac{b}{2\sqrt{3}}$

$J_0=\frac{bh}{12}(b^2+h^2)$ $r_0=\frac{\sqrt{b^2+h^2}}{2\sqrt{3}}$, $I_{xy}=0$



$I_x=I_y=\frac{\pi r^4}{4}$ $J_0=\frac{\pi r^4}{2}$ $r_x=r_y=r/2$

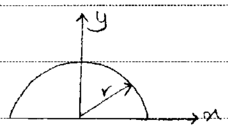
$r_0=\frac{r\sqrt{2}}{2}$ $I_{xy}=0$



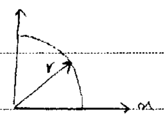
$I_x=\frac{bh^3}{36}$, $I_y=\frac{b^3h}{36}$ $J_0=\frac{bh}{36}(b^2+h^2)$

$r_x=\frac{h}{3\sqrt{2}}$ $r_y=\frac{b}{3\sqrt{2}}$, $r_0=\frac{\sqrt{b^2+h^2}}{3\sqrt{2}}$

اگر یکی از دو محور x و y محور تقارن شکل باشد I_{xy} (حاصلضرب سطح) صفر است



$I_x=I_y=\frac{\pi r^4}{8}$ $J_0=\frac{\pi r^4}{4}$ $I_{xy}=0$



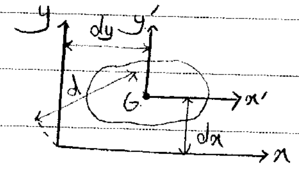
$I_x=I_y=\frac{\pi r^4}{16}$, $J_0=\frac{\pi r^4}{8}$ $I_{xy}\neq 0$

قضیه های محورهای موازی:

اگر محاسبه ممان اینرسی حول محوری غیر گذرنده از مرکز سطح مورد نظر باشد به شکل زیر عمل می کنیم:

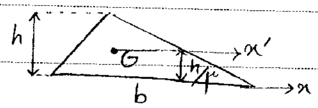
ابتدا محور دیگری به موازات محور اول از مرکز سطح عبور می دهیم و ممان اینرسی

حول محور جدید را محاسبه می کنیم اگر به مقدار محاسبه شده حاصلضرب مساحت مقطع در توان دوم فاصله دو محور اضافه شود ممان اینرسی حول محور اول بدست می آید



$$I_x = I_{x'} + A.d_x^2$$
$$I_y = I_{y'} + A.d_y^2$$
$$J_o = J_G + A.d^2$$
$$d^2 = d_x^2 + d_y^2$$

مثال: محاسبه ممان دوم اینرسی مثلث نسبت به قاعده آن؟



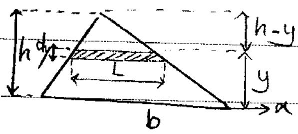
$$I_{x'} = \frac{bh^3}{36} \quad , \quad A = \frac{bh}{2} \quad , \quad d = h/3$$
$$I_x = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

ممان اینرسی اشکال مرکب:

در اشکال مرکب آن ها را به چند شکل ساده تقسیم می کنیم و ممان اینرسی اشکال ساده تر را حول محور مورد نظر بدست می آوریم و با هم جمع می کنیم اگر محور مورد نظر از مرکز سطح اشکال ساده شده عبور نکند باید از قضیه محورهای موازی نیز کمک بگیریم

$$I = \Sigma I_i$$

مثال: گشتاور دوم اینرسی یک مثلث حول قاعده اش را با روش انتگرال گیری محاسبه کنید؟



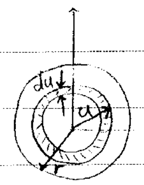
تشابه: $\frac{L}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow L = b \times \frac{h-y}{h}$

$$dA = L.dy = b \times \frac{h-y}{h} dy$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \left(b \times \frac{h-y}{h} dy\right) = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h-y)\, dy$$

$$= \frac{b}{h}\int_0^h (y^2h - y^3)\,dy = \frac{b}{h}\left[\frac{y^3h}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{b}{h}\left[\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right] = \frac{bh^4}{12h} = \frac{bh^3}{12}$$

مثال: گشتاور لختی قطبی یک دایره را نسبت به مرکز آن با روش انتگرال گیری بدست آورید.



$$J_o = \int r^2 dA$$

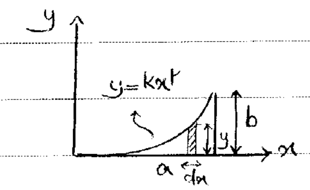
$$I_x = \int y^2 dA$$

$$dA = 2\pi u\,du$$

$$J_o = \int_0^r u^2(2\pi u\,du) = \int_0^r 2\pi u^3 du = 2\pi\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^r$$

$$= \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$$

مثال: مطلوبست محاسبه گشتاور دوم اینرسی شکل زیر حول محور x و y و محاسبه شعاع های ژیراسیون حول این دو محور.

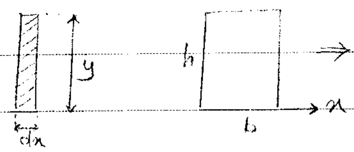


$$y = b \;,\; x = a \Rightarrow b = ka^2 \Rightarrow k = \frac{b}{a^2}$$

$$y = \frac{b}{a^2}x^2$$

$$I_x = \int dI_x$$

می‌توانیم برای المان انتخاب شده ممان دوم اینرسی را محاسبه و آنگاه انتگرال گیری کنیم.



$$\Rightarrow I_x = \frac{bh^3}{3} \Rightarrow dI_x = \frac{dx \times y^3}{3}$$

$$I_x = \int_0^a \frac{y^3}{3}dx = \int_0^a \frac{(\frac{b}{a^2}x^2)^3 dx}{3}$$

$$= \int_0^a \frac{b^3}{3a^6}x^6 dx = \frac{b^3}{3a^6}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^a = \frac{b^3 a}{21}$$

در این حالت چون برای المان مقدار y متغیر بود استفاده از روش مسأله قبل ساده نبود.

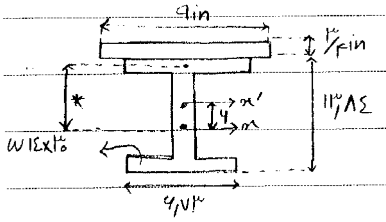
$I_y = \int x^2 dA$ در اینجا چون x برای المان انتخاب شده مقداری ثابت است و برای نقاط مختلف المان تغییر نمی‌کند نیازی به استفاده از روش قبل نیست و از روش عادی استفاده می‌کنیم

$$I_y = \int x^2 \times (y\,dx) = \int x^2 \frac{b}{a^2} x^2 dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^4 dx$$

$$= \frac{b}{a^2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{b}{a^2} \times \frac{a^5}{5} = \frac{ba^3}{5}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{b^3a/21}{ab/3}} = \frac{b}{\sqrt{7}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{\frac{ba^3}{5}}{ab/3}} = a\sqrt{\frac{3}{5}}$$

مثال: ممان دوم اینرسی و شعاع ژیراسیون مقطع نشان داده شده در شکل زیر را نسبت به محور گذرنده از مرکز سطح آن بدست آورید؟



ابتدا محاسبه محل مرکز سطح شکل مرکب:

وسط ارتفاع مقطع I شکل را مبنا در نظر گرفتیم و فاصله مرکز سطح تا این محور مبنا را از روابط محاسبه مراکز سطح اشکال مرکب محاسبه می‌کنیم

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} \qquad W14\times30 \begin{cases} A = 8.85\ in^2 \\ I_x = 291\ in^4 \end{cases}$$

$$* = \frac{13.84}{2} + \frac{3/4}{2} = 7.295$$

$$\bar{y} = \frac{8.85\times 0 + (9\times 3/4)\times 7.295}{8.85 + 9\times 3/4} = 3.156\ in$$

$$I_{x'} = \Sigma I_{x'i} = I_{x'1} + I_{x'2}$$

ورق $I_{x'1} = \frac{9\times(3/4)^3}{12} + (9\times 3/4)\times(7.295 - 3.156)^2 = 116\ in^4$

$$I_{x'2} = 291 + 8.85\times 3.156^2 = 379.1\ in^4$$

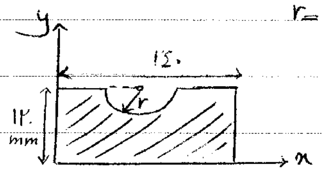
$$\Rightarrow I_{x'} = 495.1\ in^4$$

$$r_{x'} = \sqrt{\frac{I_{x'}}{A}} \Rightarrow A = 8.85 + 9\times 3/4 = 15.6 \quad r_{x'} = \sqrt{\frac{495.1}{15.6}} = 5.63\ in$$

مثال: ممان اینرسی شکل زیر را نسبت به محور x محاسبه کنید؟

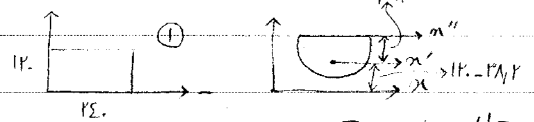
شکل زیر را به صورت یک مستطیل که از آن یک نیم دایره کم شده در نظر می‌گیریم

$r=90mm$



$\frac{4r}{3\pi}=38,2$

$I_x = I_{x_1} - I_{x_2}$



$I_{x_1}=\frac{bh^3}{3}=\frac{240\times120^3}{3}=138,2\times10^6\ mm^4$

مستطیل نسبت به قاعده

چون محور x از مرکز سطح نیم دایره نمی‌گذرد باید از قضیه محورهای موازی استفاده کنیم در اینجا محور x' را از مرکز نیم دایره عبور می‌دهیم اما ممان اینرسی نیم دایره حول این محور را نداریم و ممان اینرسی نیم دایره حول محوری که از مرکز نیم دایره را داریم که ابتدا باید با کمک آن و قضیه محورهای موازی $I_{x'}$ را بدست آوریم

$I_{x''}=I_{x'}+Ad^2 \Rightarrow \frac{\pi\times90^4}{8}=I_{x'}+\left(\frac{\pi\times90^2}{2}\right)\times38,2^2$

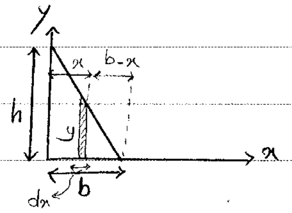
$\Rightarrow I_{x'}=7,2\times10^6\ mm^4$

حال دوباره از قضیه محورهای موازی جهت محاسبه ممان اینرسی نیم دایره حول محور x کمک می‌گیریم

$I_{x_2}=I_{x'}+Ad^2 \Rightarrow I_{x_2}=7,2\times10^6+\left(\frac{\pi\times90^2}{2}\right)\times81,8^2=92,3\times10^6\ mm^4$

$I_x=I_{x_1}-I_{x_2}=138,2\times10^6-92,3\times10^6=45,9\times10^6\ mm^4$

مثال: برای مثلث شکل زیر مطلوب است محاسبه حاصلضرب سطح نسبت به محورهای x و y برای مثلث شکل زیر؟

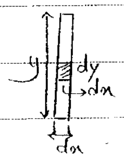


$I_{xy}=\int xy\,dA$

تشابه $\Rightarrow \frac{y}{h}=\frac{b-x}{b} \Rightarrow y=\frac{b-x}{b}h$

در المان انتخاب شده x ثابت و y متغیر است. پس ابتدا باید در هر نوار المان باریک انتگرال گیری مقدار حاصلضرب سطح را محاسبه کرده و سپس دوباره آن را انتگرال گیری شود

$$I_{xy}=\int xy\,dA=\int dI_{xy} \qquad xy\,dA=dI_{xy}$$



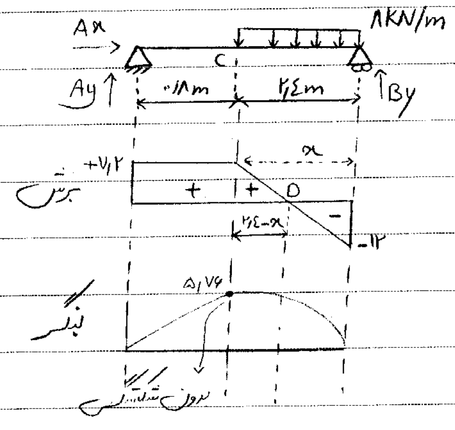
$$dI_{xy}=\int xy\,dA=\int_0^y xy\,dx.dy$$

$$=x\,dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^y=\frac{xy^2}{2}dx$$

$$I_{xy}=\int dI_{xy}=\int_0^b \frac{xy^2}{2}dx=\int_0^b \frac{x}{2}\times\left(\frac{b-x}{b}\times h\right)^2dx=\frac{h^2}{2b^2}\int_0^b (b^2x-2bx^2+x^3)\,dx$$

$$=\frac{h^2}{2b^2}\left[\frac{b^2x^2}{2}-\frac{2bx^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^b=\frac{h^2}{2b^2}\left(\frac{b^4}{2}-\frac{2b^4}{3}+\frac{b^4}{4}\right)=\frac{h^2}{2b^2}\times\frac{b^4}{12}=\frac{h^2b^2}{24}$$

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام برش و لنگر برای تیر با بارگذاری نشان داده شده؟



$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow A_x=0$$

$$\Sigma M_B=0 \Rightarrow -A_y\times 3.2+8\times 2.4\times 1.2=0$$

$$A_y=7.2\,KN\uparrow$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow 7.2-8\times 2.4+B_y=0 \Rightarrow B_y=12\,KN\uparrow$$

$$V_B=7.2-8\times 2.4=-12$$

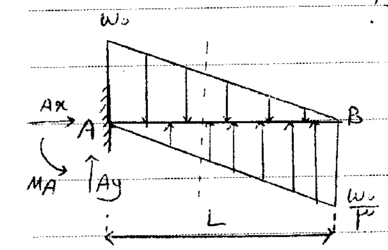
تشابه: $\dfrac{x}{2.4-x}=\dfrac{12}{7.2} \Rightarrow x=1.5\,m$

$$M_C=7.2\times 0.8=5.76$$

$$M_D=5.76+7.2\times 0.9=9$$

$$M_B=9-12\times 1.5=0$$

مثال: دیاگرام برش و لنگر تیر شکل زیر را ترسیم کنید؟



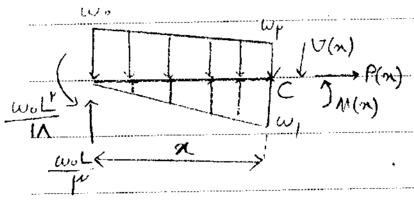
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{w_0 L}{2} + \frac{w_0}{3} \times \frac{L}{2} = 0$$

$$A_y = \frac{w_0 L}{3}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - \left(\frac{w_0 L}{2}\right)\frac{L}{3} + \left(\frac{w_0}{3} \times \frac{L}{2}\right) \times \frac{2L}{3} = 0$$

$$M_A = \frac{w_0 L^2}{18}$$



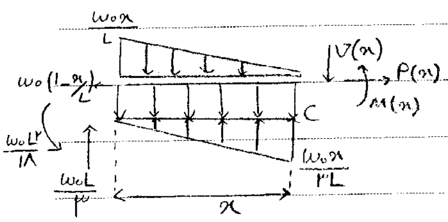
یک مقطع برای شکل کات میزنیم

مقادیر w_1 و w_2 باید با توجه به تشابه در هر یک از دو مثلث پایین و بالا محاسبه شود

مثلث پایین: $\frac{w_1}{w_0/3} = \frac{x}{L} \Rightarrow w_1 = \frac{w_0 x}{3L}$

مثلث بالا: $\frac{w_2}{w_0} = \frac{L-x}{L} \Rightarrow L w_2 = L w_0 - w_0 x \Rightarrow w_2 = \frac{L w_0 - w_0 x}{L} = w_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)$

ذوزنقه بالا را به یک مستطیل و مثلث تجزیه می‌کنیم



$$\Rightarrow w_0 - w_0(1 - x/L) = w_0 - w_0 + \frac{w_0 x}{L} = \frac{w_0 x}{L}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{w_0 L}{3} - \frac{w_0 x}{L} \times \frac{x}{2} - w_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)x + \frac{w_0 x}{3L} \times \frac{x}{2} - V(x)$$

$$= \frac{w_0 L}{3} - \frac{w_0 x^2}{2L} - w_0 x + \frac{w_0 x^2}{L} + \frac{w_0 x^2}{6L} - V(x)$$

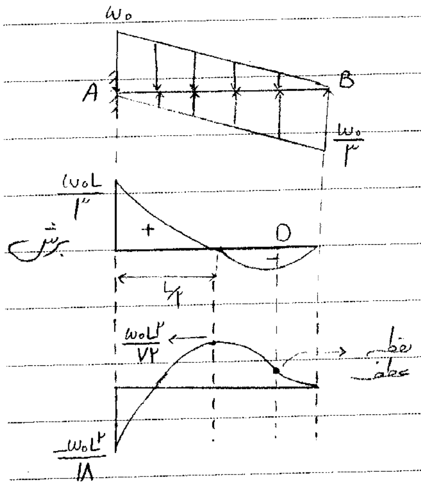
$$= \frac{w_0 L}{3} - w_0 x + \frac{2 w_0 x^2}{3L} - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \frac{2 w_0 x^2}{3L} - w_0 x + \frac{w_0 L}{3}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \frac{w_0 L^2}{18} - \frac{w_0 L x}{3} + \left[\frac{w_0 x}{L} \times \frac{x}{2}\right] \times \frac{2}{3}x + \left[w_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)x\right]\frac{x}{2} -$$

$$\left[\frac{w_0 x}{3L} \times \frac{x}{2}\right] \times \frac{x}{3} + M(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{w_0 L^2}{18} - \frac{w_0 L x}{3} + \frac{w_0 x^2}{2} + \frac{w_0 x^3}{L}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{18}\right] + M(x) = 0$$

$$M(x) = \frac{2 w_0 x^3}{9L} - \frac{w_0 x^2}{2} + \frac{w_0 L x}{3} - \frac{w_0 L^2}{18}$$



با توجه به معادله بدست آمده برای برش، نمودار برش یک سهمی است که چون ضریب x^2 مثبت است خم آن رو به بالا می‌باشد. برای رسم این سهمی مقدار برش در ابتدا و انتها و ترجیحاً نقطه‌ای که برش در آن صفر می‌شود را بدست می‌آوریم

$$V(0)=\frac{w_0L}{3} \quad و \quad V(L)=0$$

$$V(x)=0 \quad \left(V(x)\times\frac{3L}{2w_0}\right) \Rightarrow x^2-\frac{3L}{2}x+\frac{L^2}{2}=0$$

$$\Delta=\left(\frac{3L}{2}\right)^2-\frac{4L^2}{2}\times 1=\frac{9L^2}{4}-\frac{4L^2}{2}=\frac{L^2}{4}$$

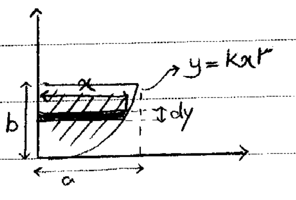
$$x=\frac{3L/2\pm\sqrt{L^2/4}}{2} \begin{cases} x=L \\ x=L/2 \checkmark \end{cases} \Rightarrow V(L/2)=0$$

دیاگرام خمش از درجه ۳ می‌باشد. از ابتدا تا وسط تیر که برش مثبت است لنگر صعودی است و از وسط تا انتها نزولی

از ابتدا تا نقطه D که برش نزولی است خم منحنی لنگر رو به پایین و از نقطه D تا انتهای تیر که برش صعودی است خم منحنی لنگر رو به بالا می‌باشد. نقطه D نقطه عطف منحنی است

$$M(0)=-\frac{w_0L^2}{18}, \quad M(L/2)=\frac{w_0L^2}{72} \quad M(L)=0$$

مثال: ممان اینرسی شکل زیر را با انتگرال‌گیری نسبت به محورهای x و y بدست آورید



$$x=a,\ y=b \Rightarrow b=ka^3$$

$$\Rightarrow k=\frac{b}{a^3} \Rightarrow y=\frac{b}{a^3}x^3$$

$$I_x=\int y^2 dA$$

برای تمام نقاط المان y مقداری ثابت است

$$dA=dy\times x \qquad y=\frac{b}{a^3}x^3 \Rightarrow x^3=\frac{a^3y}{b} \longrightarrow x=a\sqrt[3]{y/b}$$

چون برحسب dy انتگرال گیری انجام می‌شود باید تمام متغیرها نیز برحسب y باشد

$$dA = a\sqrt[3]{y/b} \times dy \Rightarrow I_x = \int_0^b y^2 \times a\sqrt[3]{y/b}\, dy = \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \int_0^b y^{7/3} dy$$

چون انتگرال برحسب y است حدود انتگرال نیز برحسب y تعیین می‌شود

$$\Rightarrow I_x = \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \left[\frac{y^{10/3}}{10/3} \right]_0^b = \frac{3a}{10\sqrt[3]{b}} \times b^{10/3} = \frac{3}{10} a b^3$$

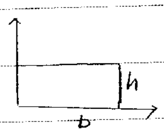
برای I_y می‌توان با همین المان انتگرال گیری کرد و یا از یک المان عمودی استفاده کرد. در اینجا از همین المان افقی استفاده می‌کنیم

در اینجا مقدار x در نقاط مختلف المان متغیر است پس

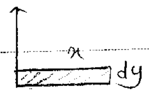
$$I_y = \int x^2 dA$$

بجای این روش ممان اینرسی المان را با توجه به ممان اینرسی مستطیل حساب و از آن انتگرال گیری می‌کنیم

$$I_y = \int_0^b dI_y$$



$$\Rightarrow I_y = \frac{b^3 h}{3}$$

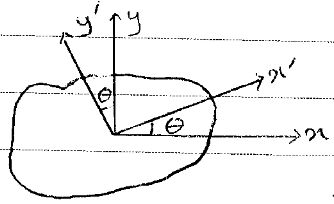


$$\Rightarrow dI_y = \frac{x^3 dy}{3}$$

چون انتگرال گیری برحسب y انجام می‌شود باید x را نیز برحسب y بنویسیم

$$\Rightarrow dI_y = \frac{(a\sqrt[3]{y/b})^3 dy}{3} = \frac{a^3 y}{3b} dy \qquad I_y = \int_0^b \frac{a^3 y}{3b} dy = \frac{a^3}{3b} \int_0^b y\, dy$$

$$= \frac{a^3}{3b} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^b = \frac{a^3 b^2}{6b} = \frac{a^3 b}{6}$$



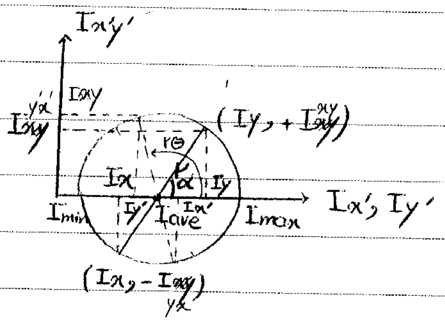
محاسبه ممان اینرسی حول محورهای مورب:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

روابط بالا را می توان بصورت یک دایره تحت نام دایره موهر ممان اینرسی نمایش داد



$$\begin{cases} I_{max} = I_{ave} + R \\ I_{min} = I_{ave} - R \end{cases}$$

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

برای محاسبه ممان های اینرسی در دستگاه مختصات $x'y'$، قطر اولیه دایره را که ممان های اینرسی در دستگاه مختصات xy را مشخص می کند به اندازه 2θ می چرخانیم. جهت چرخش هم جهت با چرخشی است که محورهای x باید داشته باشد تا به محورهای $x'y'$ تبدیل شوند

ممان های اینرسی برای هر دستگاه مختصات با محورهای متعامد با یکی از قطرهای دایره موهر قابل نمایش است. در دایره موهر محور افقی نشان دهنده ممان های اینرسی حول دو محور اصلی و محور عمودی نشان دهنده ممان اینرسی حاصلضرب سطح مقطع است

در حالتی که برای یک دستگاه مختصات حاصلضرب سطح مقطع صفر باشد محورهای آن دستگاه مختصات را محورهای اصلی می نامند. در این حالت ممان اینرسی حول یکی از دو محور max و حول محور دیگر min می شود

α : زاویه محورهای اصلی با محورهای xy

در محورهای اصلی : $I_{xy} = 0$

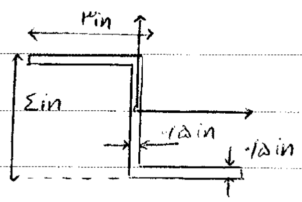
$$I_x, I_y = I_{max}, I_{min}$$

قطری از دایره مور که منطبق بر محور افقی است نشان دهنده ممان های اینرسی در دستگاه مختصات اصلی است

نکته: اگر قطر نشان دهنده ممان های اینرسی در دایره به صورت عمودی در آید مقدار حاصلضرب سطح max و برابر شعاع دایره و ممان های اینرسی با هم برابر و مساوی مختصات مرکز دایره می شود

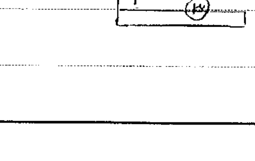
$$(I_{xy})_{max} = R \qquad I_x = I_y = I_{ave}$$

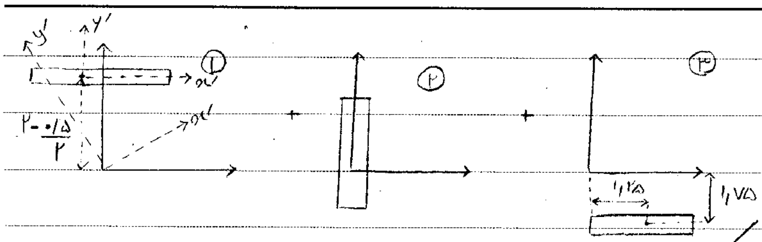
مثال: مقطعی در شکل نشان داده شده است لنگرهای لختی این مقطع نسبت به محورهای x و y عبارتند از: $I_x = 10{,}38\ in^4$ ، $I_y = 6{,}97\ in^4$. مطلوبست تعیین: الف) جهت گیری محورهای اصلی مقطع حول نقطه O ب) لنگرهای لختی اصلی مقطع حول نقطه O



ابتدا مقدار I_{xy} را محاسبه می کنیم:

برای این منظور شکل را به ۳ مستطیل تقسیم می کنیم





$I_{xy} = I_{x'y'} + A\cdot\bar{x}\bar{y}$ محورهای x'y' را از مرکز سطح شکل عبور می‌دهیم

چون برای هر ۳ شکل محورهای x'y' گذرنده از مراکز سطح سه شکل

محورهای تقارن آن‌ها نیز هستند مقدار $I_{x'y'}$ برای هر سه شکل صفر است

$I_{xy_1} = 0 + (3\times0.5)\times(-1.25\times1.75) = -3.28\ in^4$

$I_{xy_2} = 0$

$I_{xy_3} = 0 + (3\times0.5)\times(1.25\times-1.75) = -3.28$

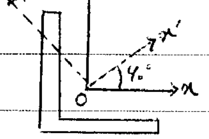
$I_{xy} = -3.28 + 0 - 3.28 = -6.56\ in^4$

$\tan2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{-2\times6.56}{10.38-6.97} = 3.85 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 75.4 \\ 2\alpha = 255.4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 37.7 \\ \alpha = 127.7 \end{cases}$

$I_{max,min} = \frac{I_x+I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y-I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{10.38+6.97}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10.38-6.97}{2}\right)^2 + (-6.56)^2}$

$\Rightarrow \begin{cases} I_{max} = 15.45 \\ I_{min} = 1.897 \end{cases} in^4$

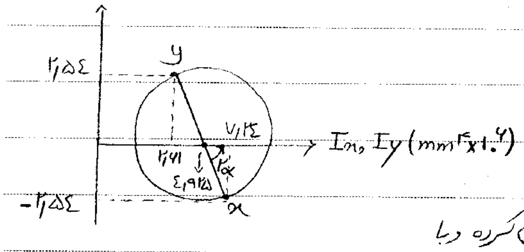
مثال: مقطع مطابق شکل مفروض است. لنگرهای حاصلضرب لختی این مقطع نسبت به محورهای x و y عبارتند از: $I_y = 2.61\times10^6\ mm^4$ و $I_x = 7.24\times10^6\ mm^4$ و $I_{xy} = -2.54\times10^6$ با استفاده از رابطه دوایر موهر مطلوبست تعیین: الف) محورهای اصلی مقطع حول نقطه O ب) لنگرهای لختی اصلی مقطع حول نقطه O ج) لنگرها و حاصلضرب لختی این مقطع نسبت به محورهای x' و y' که با محورهای x و y زاویه ۶۰° می‌سازند



مختصات مرکز دایره:

$$I_{ave}=\frac{I_x+I_y}{2}=10^6\times\frac{7{,}24+2{,}61}{2}=4{,}925\times10^6\ mm^4$$

$$R=\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2}=10^6\sqrt{\left(\frac{7{,}24-2{,}61}{2}\right)^2+(-2{,}54)^2}=3{,}437\times10^6\ mm^4$$



$$x\,(I_x, I_{xy})=x\,(7{,}24\ ,\ -2{,}54)\times10^6$$

$$y\,(I_y, -I_{xy})=y\,(2{,}61\ ,\ 2{,}54)\times10^6$$

روی دایره دو نقطه با مختصات زیر را مشخص کرده و با اتصال آنها به هم قطر متناظر در دایره را رسم می‌کنیم

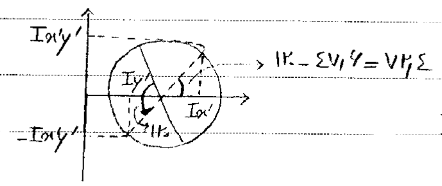
$$\tan 2\alpha=\frac{2{,}54}{(7{,}24-2{,}61)/2}=1{,}097$$

$$\Rightarrow 2\alpha=47{,}6 \Rightarrow \alpha=23{,}8^\circ$$

$$I_{max}=I_{ave}+R=(4{,}925+3{,}437)\times10^6=8{,}36\times10^6\ mm^4$$

$$I_{min}=I_{ave}-R=(4{,}925-3{,}437)\times10^6=1{,}49\times10^6\ mm^4$$

برای محاسبه ممان‌های اینرسی حول محورهای x' و y' قطر فعلی دایره را که مشخص کننده ممان‌های اینرسی در دستگاه مختصات xy است به اندازه 120° و پادساعتگرد می‌چرخانیم



$$I_{x'}=I_{ave}+R\cos 72{,}4=(4{,}925+3{,}437\cos 72{,}4)\times10^6=5{,}96\times10^6\ mm^4$$

$$I_{y'}=I_{ave}-R\cos 72{,}4=(4{,}925-3{,}437\cos 72{,}4)\times10^6=3{,}89\times10^6\ mm^4$$

$$I_{x'y'}=R\sin 72{,}4=3{,}437\times10^6\sin 72{,}4=3{,}28\times10^6\ mm^4$$

کار مجازی :

کار یک نیرو

کار نیرو $= F \cdot r$

$= |F| \times |r| \times \cos\alpha$

F: نیرو

r: جابجایی

α: زاویه بردار نیرو و بردار جابجایی

کار یک گشتاور:

$M \times \theta$

θ: میزان دوران

اگر جابجایی و دوران هم جهت با نیرو یا گشتاور باشد کار مثبت است در غیر اینصورت کار منفی است

اصل کار مجازی:

جسمی را در نظر بگیرید که به آن نیروهای $F_1, F_2, \ldots, F_n$ و گشتاورهای $M_1, M_2, \ldots$ و M_m وارد می‌شود به جسم تغییر شکلی کوچک می‌دهیم به گونه‌ای که نقاط محل اثر نیروها ۲
دچار بردارهای جابجایی $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ و نقاط محل اثر گشتاورها دچار چرخش‌های $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_m$ شود حال اگر جسم دارای تعادل باشد باید مجموع کارهای انجام شده توسط نیروها و گشتاورها برابر صفر شود این مساله را اصل کار مجازی می‌گوییم

$$W = \vec{F_1}\cdot\vec{\delta_1} + \vec{F_2}\cdot\vec{\delta_2} + \ldots + \vec{F_n}\vec{\delta_n} + M_1\theta_1 + M_2\theta_2 + \ldots + M_m\theta_m = 0$$

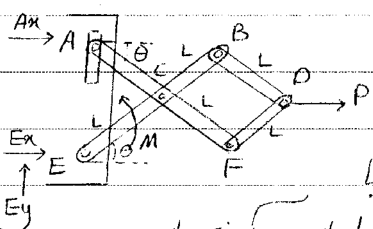
W: کار مجازی

- استفاده از اصل کار مجازی جهت حل مسائل تعادل اجسام صلب:

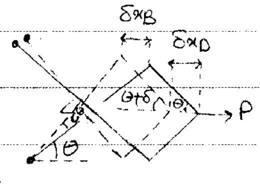
در جسم دوران یا تغییر شکلی کوچک به صورت مجازی ایجاد می‌کنیم و بر اساس آن در نقاط مختلف جسم که به جسم نیرو وارد می‌شود تغییر شکل‌ها را محاسبه می‌کنیم یعنی در محل اثر نیروها بردار جابجایی و در محل اثر گشتاورها مقدار دوران را به دست می‌آوریم این محاسبات بر اساس تغییر شکل مجازی اولیه فرض شده را

جسم می باشد و در محاسبات از خاصیت صلبیت جسم نیز استفاده می شود سپس اصل کار مجازی را می نویسیم و بر اساس آن مقادیر نیروهای مجهول را بر اساس اینکه جسم دارای تعادل باشد بدست می آوریم توجه کنید که چون نقطه نیروها و گشتاورهای تکیه گاهی اثر آنها دچار تغییر شکل نمی شود کار انجام نمی دهند و گشتاورهای تکیه گاهی که محل اثر آنها ثابت است کاری انجام نمی دهند و توسط این روش قابل محاسبه نیستند

مثال: با استفاده از روش کار مجازی اندازه کوپل M را که برای تعادل مجموعه زیر لازم است تعیین کنید.

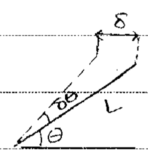


فرض می کنیم زاویه θ مربوط به راستای EB به اندازه δθ بزرگ شود
نیرو و گشتاورهای تکیه گاهی با توجه به آنکه نقطه اثر آن ها ثابت است کاری انجام نمی دهند و در اینجا تنها گشتاور M و نیروی P هستند که می توانند کار انجام دهند که بر اساس آن باید مقدار دوران قطعه EB و جابجایی افقی نقطه D محاسبه شود، دوران قطعه EB را δθ فرض کرده ایم بر اساس همین دوران باید جابجایی افقی نقطه D را نیز محاسبه کنیم



در اثر بزرگ شدن زاویه θ نقاط C و B به سمت چپ حرکت کرده و اجباراً نقطه A به سمت بالا و F به سمت پایین و چپ حرکت می کند
نقاط B و F از هم دور می شوند که در نتیجه باعث می شود نقطه D به سمت چپ حرکت کند.

$\delta x_B = 2L\delta\theta\sin\theta$ جابجایی افقی نقطه B



$\delta = L\sin\theta\,\delta\theta$
به شرط آنکه δθ کوچک باشد

جابجایی نسبی D به B : $BD \times \sin\theta\,\delta\theta = L\delta\theta\sin\theta$

جابجایی افقی D = $\delta x_D = 2L\delta\theta\sin\theta + L\sin\theta\delta\theta = 3L\sin\theta\delta\theta$

جابجایی افقی نقطه D برابر است با مجموع جابجایی افقی نقطه B و جابجایی نسبی افقی نقطه D نسبت به B

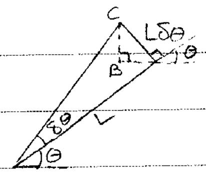
قطعه EB به طول 2L به اندازه δθ دوران کرده است که در نتیجه نقطه B به اندازه δθ به سمت چپ حرکت می کند

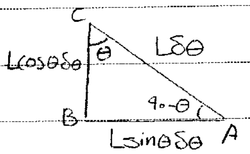
قطعه BD نیز به اندازه δθ دوران کرده است که در نتیجه نقطه D به اندازه Lδθ به B نزدیک شده است

کار نیروی P با توجه به آنکه بردار نیرو و بردار جابجایی خلاف جهت هم هستند منفی است اما کار گشتاور M با توجه به آنکه بردار گشتاور و جهت چرخش هم جهت است مثبت است

$$+M\delta\theta - P.(3L\underset{\sin\theta}{\delta\theta}) = 0 \Rightarrow M\delta\theta = 3PL\delta\theta\sin\theta$$

$$\Rightarrow M = 3PL\sin\theta$$

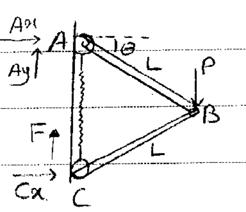




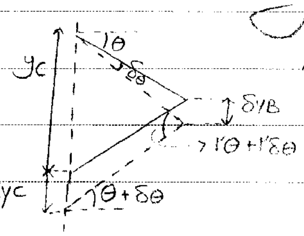
چون δθ در برابر θ کوچک است از آن صرف نظر می کنیم

مثال: در شکل زیر مطلوب است محاسبه زاویه θ و نیروی فنر متناظر با حالت تعادل؟

فرض می کنیم میله AB به اندازه δθ و بصورت ساعتگرد دوران کند در نتیجه نقطه B به سمت پایین و چپ حرکت می کند و با توجه به آنکه طول میله BC ثابت است نقطه C نیز مجبور است به سمت پایین حرکت کند و زاویه θ مربوط به میله BC نیز بزرگ شود



چون مثلث ABC قبل و بعد از دوران متساوی الساقین است دوران قطعه BC نیز مساوی دوران قطعه AB است



$$y_C = 2L\sin\theta$$

$$\delta y_B = L\cos\theta\,\delta\theta$$

$$\delta y_C = 2L\cos\theta\,\delta\theta$$

جابجایی عمودی نقطه C برابر مجموع جابجایی عمودی نقطه B و جابجایی عمودی نسبی C به B است که هر دو نیز با هم برابرند

h: طول آزاد فنر

K: ثابت فنر ⇐ داده مسأله

$y_C - h = 2L\sin\theta - h$ افزایش طول فنر (قبل از دوران مجازی)

نیروی فنر قبل از دوران $F = K(2L\sin\theta - h)$

چون مقدار دوران مجازی کوچک فرض می‌شود در حین دوران فرض می‌کنیم تغییر شکل فنر و نیروی فنر قبل و بعد از این دوران با هم یکسان است

اصل کار مجازی: در اینجا فقط P و F کار انجام می‌دهند که از این بین کار نیروی F منفی است

$$P\delta y_B - F\delta y_C = 0 \Rightarrow P\delta y_B = F\delta y_C$$

$$PL\cos\theta\,\delta\theta = k(2L\sin\theta - h)\,2L\cos\theta\,\delta\theta$$

$$P = 2k(2L\sin\theta - h) \Rightarrow P = 4kL\sin\theta - 2kh \qquad \sin\theta = \frac{P + 2kh}{4kL}$$

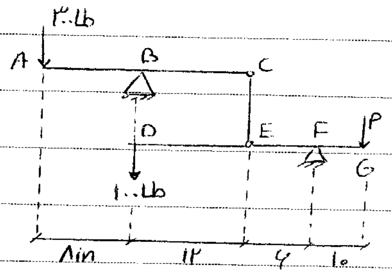
$$\Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{P + 2kh}{4kL}\right)$$

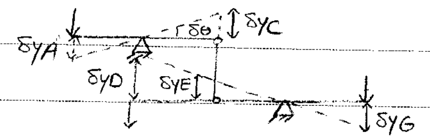
$$\delta y_B = \tfrac{1}{2}\delta y_C \Rightarrow P\,\delta y_C/2 = F\delta y_C \Rightarrow F = P/2$$

مثال: مطلوبست تعیین نیروی عمودی P که مجموعه در تعادل باشد.

فرض می‌شود که میله ABC به اندازه $\delta\theta$ و

پاد ساعتگرد دوران می‌کند





$\delta y_A = \delta\theta \times 8$

$\delta y_C = \delta y_E = 12\delta\theta$

تشابه: $\dfrac{\delta y_E}{\delta y_D} = \dfrac{6}{18} \Rightarrow \delta y_D = 3\delta y_E \qquad \delta y_D = 36\delta\theta$

$\dfrac{\delta y_E}{\delta y_G} = \dfrac{6}{10} \Rightarrow \delta y_G = \dfrac{10}{6}\delta y_E \qquad \delta y_G = \dfrac{10}{6} \times 12\delta\theta = 20\delta\theta$

کار نیروهای ۳۰ و P مثبت و ۱۰۰ منفی است

اصل کار مجازی:

$30 \times 8\delta\theta - 100 \times 36\delta\theta + P \times 20\delta\theta = 0$

$20P\delta\theta = 1200\delta\theta \Rightarrow P = 60\,lb$

شهلا نیابتی

Tamasha