1

استاتیک

※ یک تمبر پستی موفقیتش را تضمین می‌کند

چون این توانایی را دارد

که تا رسیدن به هدف به چیزی بچسبد ※

* اگر منظره در مقصد بود

و در هیچ جاده‌ای از خود [illegible] *

استاتیک و مقاومت مصالح

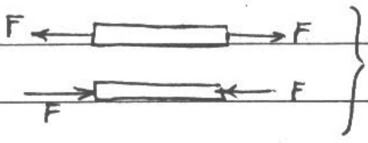
جلسه اول

استاتیک:

اولویت ها : 1. بحث انرژی
2. اعضاء دونیرویی
3. اعضاء سه نیرویی
4. خرپاها و قاب ها
مسائل عمومی
اصطکاک لغزشی و غلتشی
- سطوح شیبدار
- کابل ها
- تیرهای خمیده

مقدمه:

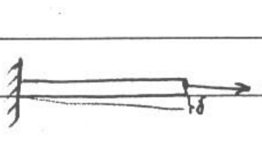
در استاتیک فرض بر صلبیت جسم است.



یکسان در استاتیک

برای حل مسائل مقاومت مصالح در فضای دو بعدی نیاز به:

1 - معادلات تعادل ← رابطه نیروهای خارجی بر روی دیاگرام آزاد جسم
2 - معادلات سازگاری ← رابطه نیروهای خارجی با تغییر مکان



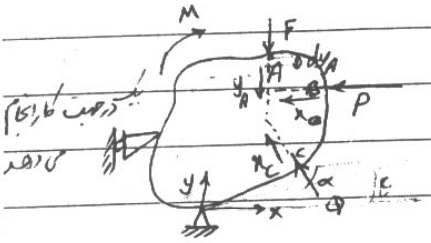
$\delta = \frac{Pl}{IE}$

در استاتیک اجازه نداریم از معادلات سازگاری استفاده کنیم به همین دلیل است که در استاتیک فصل انرژی آمده که در واقع این دو سری معادلات را در بر می گیرد.

هر مسئله نامعین در استاتیک داشتیم باید از روش انرژی برویم.

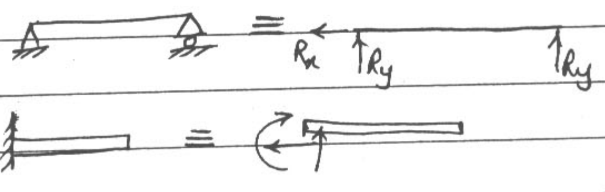
* در امتحان مسائل نامعین یا ظاهرا نامعین و مسائلی که دارای فنر است به کمک روش انرژی حل می‌شود.

بحث انرژی :


M
F
A
y_A
δy_A
B
P
x_B
x_C
C
α
Q
y
x
یک درجه کار انجام می‌دهد

جسم صلب است.

این تکیه‌گاه کار انجام نمی‌دهد چون نه در جهت x و نه در جهت y حرکت می‌کند.


R_x
R_y
R_y
تیر یک سر گیردار

هر نیرویی در راستای خودش تغییر مکانی دارد به نام y_A یا x_B یا ...

رابطهٔ تعادل

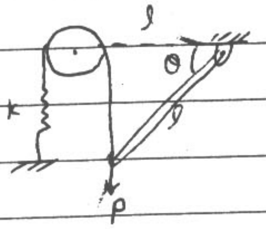
$$\boxed{F\cdot dy_A + P\cdot dx_B + Q\,dx_C + M\,d\theta = 0}$$

رابطهٔ تعادل رابطهٔ نیروهای خارجی با تغییر مکان سیستم است.

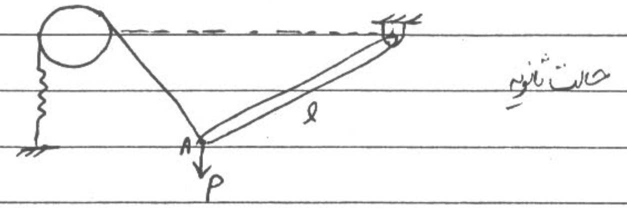
* این تغییر مکانها در راستای خودشان است.

در استاتیک ما دو دسته مسائل داریم :

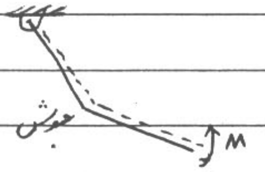
مسئله ۱ : حالت اولیه و ثانویه در دسترس است.



حالت اولیه ← در θ = 0 فنر آزاد است


حالت ثانویه
A
l
P

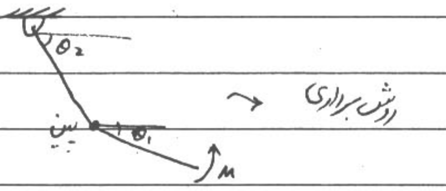
مسائل نوع 4 : حالت ثانویه در دسترس نیست.



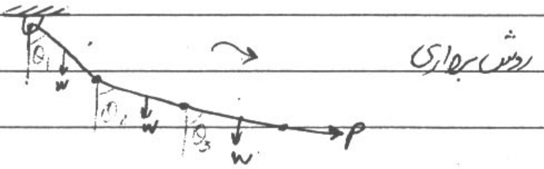
در اینصورت ما خودمان به سیستم یک تلنگر می‌زنیم

در این حالت دو حالت را در نظر می‌گیریم.

الف) روش برداری (شبه برداری)

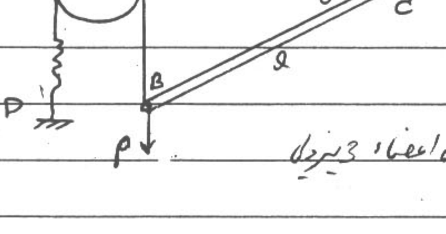

θ_2
روش برداری
پین
θ_1
M

ب) خودمان به سیستم یک چرخش جزئی می‌دهیم


روش برداری
θ_1
W
θ_2
W
θ_3
W
P

مسائل :

مثال) زاویه θ تعادل کدام است ؟ در $\theta=0$ فنر آزاد است.



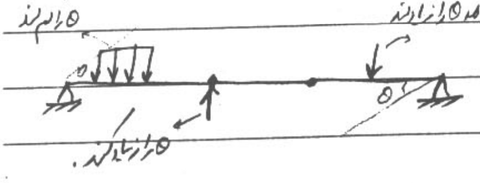
در اینجا حالت اولیه و ثانویه را داریم.

در اینجا چون فنر است حتماً از روش انرژی می‌رویم.
برای حل مسائل استاتیک اول نوع مسائل را (انرژی، اعضاء دو نیروئی، اعضاء 3 نیروئی) را مشخص کنید و آنها را حل کنید.

باید از روش انرژی استفاده کنیم. در مسائل ابتدا باید دیاگرام آزاد را بکشیم ولی در اینجا نکشیدیم

چون نیروها عمودی است پس dy در نظر می‌گیریم نه dx
اگر در استاتیک دو تا نیرو داشتیم یکی حتماً مثبت و دیگری منفی است.
نیروی P می‌خواهد θ را زیاد کند و فنر می‌خواهد جابجایی را کم کند.

* در مسائل نوع A علامت گذاری به همین شکل است. مثلاً :



$p\,dy_B - F\,dy_D = 0$

$y_B = l\sin\theta \qquad y_D = AB = l\sin\theta$

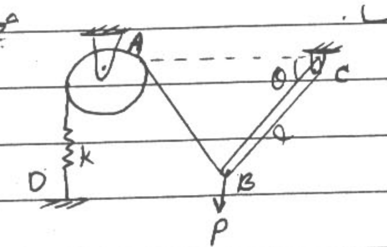
$dy_B = l\cos\theta\, d\theta \qquad dy_D = l\cos\theta\, d\theta$

$p\,dy_B - ky_D \cdot dy_D = 0 \rightarrow pl\cos\theta\, d\theta - kl\sin\theta \cdot l\cos\theta\, d\theta$

$\longrightarrow$ پاسخ $\boxed{\sin\theta = \frac{P}{kl}}$

مثال) θ تعادل کدام است؟ در θ = 0 فنر آزاد است. (حالت اولیه و ثانویه مشخص است)

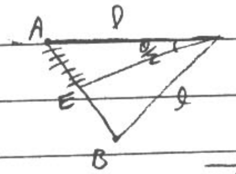
چون فنر داریم از روش انرژی



$p\,dy_B - \overset{\text{فنر}\ F}{\boxed{ky_D}}\, dy_D = 0$

$y_B = l\sin\theta \qquad dy_B = l\cos\theta\, d\theta$

$y_D = AB = ?$



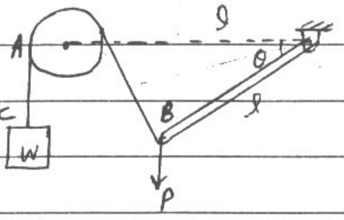
$y_D = 2AE = 2l\sin\theta/2$

$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

$dy_D = 2 \times \frac{1}{2} l \cos\theta/2\, d\theta$

$\boxed{\text{پاسخ}: \tan\theta = \frac{P}{kl}}$

مسئله: θ تعادل برحسب p، l، w کدام است؟



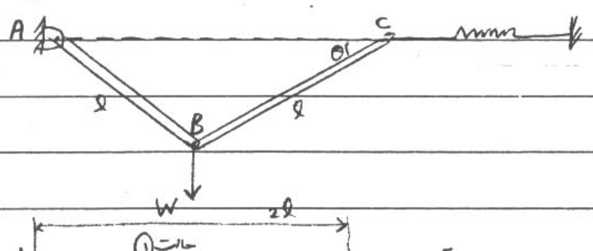
راهنمایی: $P\,dy_B - w\,dy_c = 0$

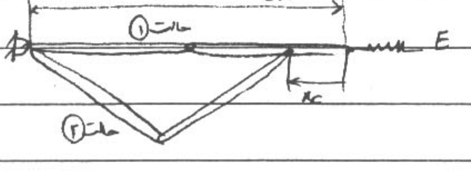
جواب: $\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{w}{2p}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$$y_B = l\sin\theta \longrightarrow dy_B = l\cos\theta . d\theta$$
$$y_c = 2l\sin\theta/_2 \longrightarrow dy_c = l\cos\theta/_2\, d\theta \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$p\,\cancel{l}\cos\theta\,\cancel{d\theta} - w\,\cancel{l}\cos\theta/_2\,\cancel{d\theta} = 0 \qquad \cos\theta = 2\cos^2\theta/_2 - 1$$
$$p(2\cos^2\theta/_2 - 1) - w\cos\theta/_2 = 0$$
$$\cos^2\theta/_2 - \frac{w}{2p}\cos\theta/_2 - \frac{1}{2} = 0$$

مسئله: θ تعادل کدام است؟

وقتی AB و BC در حالت افقی است، فنر آزاد است. فنر به روش انرژی حالت اولیه و ثانویه معلوم (نوع A)

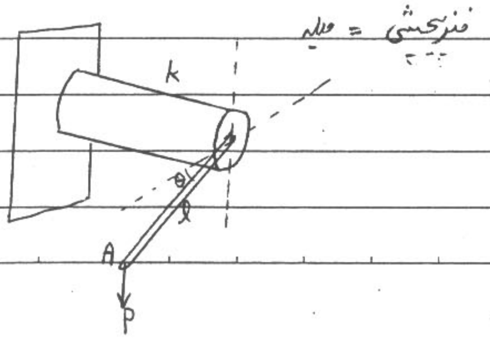




F فنر

$$w\,dy_B - \boxed{kx_c}\,.\,dx_c = 0$$
$$y_B = l\sin\theta \qquad dy_B = l\cos\theta\, d\theta$$
$$x_c = 2l - 2l\cos\theta \qquad dx_c = 2l\sin\theta\, d\theta$$

پاسخ: $(1-\cos\theta)\tan\theta = \frac{w}{4kl}$



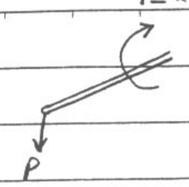
مسئله: برای تعادل

۱) $\cos\theta = \frac{k}{pl}\theta$

۲) $\sin\theta = \frac{k}{pl}\theta$

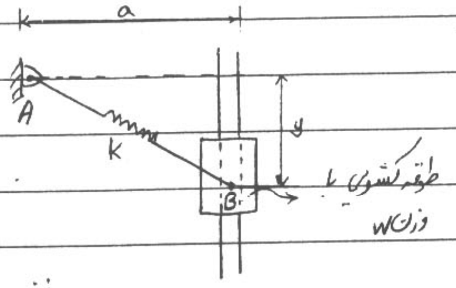
۳) $\tan\theta = \frac{k}{pl}\theta$

٤



در این مسئله ما یک فنر پیچشی داریم.

$$p\,dy_A - T\,d\theta = 0$$
$$y_A = l\sin\theta$$
$$dy_A = l\cos\theta\,d\theta$$
$$T = k\theta \longrightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{k}{pl}\theta}$$



a
A
k
y
B
طوقه کشویی با وزن W

مثال) y تعادل چقدر است؟

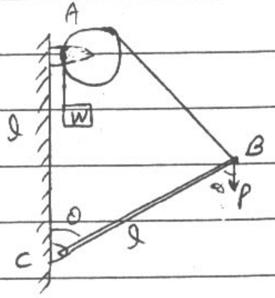
در روش انرژی تجزیه نیروها غلط است.

نیروی فنر تجزیه نکن! تغییر مکان در راستای نیروی فنر است.

$$w\,dy - k\overset{\text{فنر}}{s}\,ds = 0$$

$$s = \sqrt{a^2+y^2} - a \qquad ds = \frac{1}{2} \times 2y(a^2+y^2)^{-1/2}\,dy$$

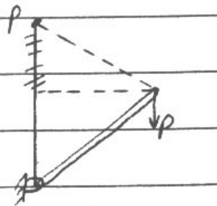
پاسخ: $y\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]^{-1} = w/k$



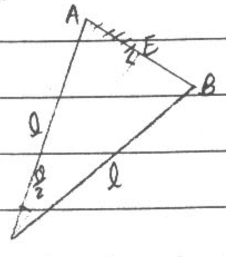
مثال) θ تعادل کدام است؟ مهم!!!

جواب: $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{w}{2p}$

$$p\,dy_B - w\,dy_C = 0$$
$$y_B = l - l\cos\theta$$
$$dy_B = l\sin\theta\,d\theta$$



اگر نیروی P افقی بود فاصله $l\sin\theta$ می‌شد.



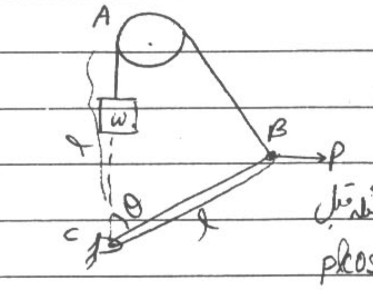
A
E
$\frac{l}{2}$
B
l
l
$\frac{\theta}{2}$

$$y_c = AB = 2AE$$
$$y_c = 2\overset{l}{\ }\sin\theta/2$$
$$dy_c = 2\overset{l}{\times}\tfrac{1}{2}\cos\theta/2\,d\theta$$

$* \sin\theta = 2\sin\theta/2 \cdot \cos\theta/2$

پاسخ: $\sin\theta/2 = w/2p$

مثال) مثال قبل حل شود مشروط بر آنکه نیروی P به طور افقی اعمال گردد.



$$P\,dx_B - w\,dy_C = 0$$

$$x_B = l\sin\theta \rightarrow dx_B = l\cos\theta\,d\theta$$

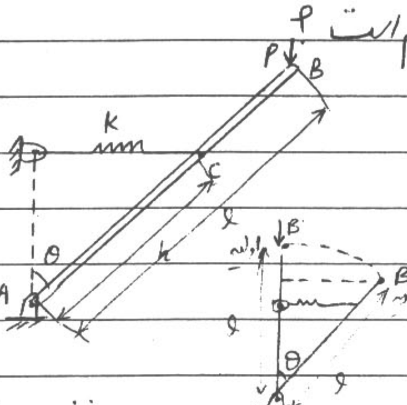
ش به مسئله قبل $y_A = AB = 2l\sin\theta/2 \qquad dy_A = l\cos\theta/_2\,d\theta$

$$Pl\cos\theta\,\cancel{d\theta} - wl\cos\theta/_2 \cdot \cancel{d\theta} = 0$$

$$P\cos\theta - w\cos\theta/_2 = 0 \rightarrow P(2\cos^2\theta/_2 - 1) - w\cos\theta/_2 = 0$$

$* \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 *$

مثال) میله بدون وزن است و در θ = 0 فنر آزاد است. θ کدام است؟



$$P\,dy_B - \overbrace{k x_C}^{F}\,dx_C = 0$$

«مهم»

$$y_B = l - l\cos\theta$$

$$dy_B = +\,l\sin\theta\,d\theta$$

$$x_C = h\sin\theta \qquad dx_C = h\cos\theta\,d\theta$$

$$\boxed{\cos\theta = Pl/_{kh^2}}$$

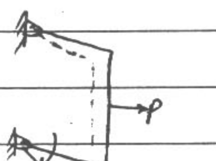
فنر ← روش انرژی

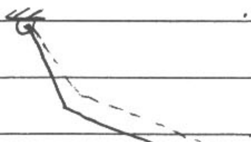
حالت اولیه و ثانویه معلوم ← مسئله نوع A

مسائل نوع B :

حالت اولیه یا ثانویه در دسترس نمی باشد. که شامل دو نوع مسئله است :

الف) مسئله ای که با ایجاد حرکت جزئی به راحتی قابل حل است.



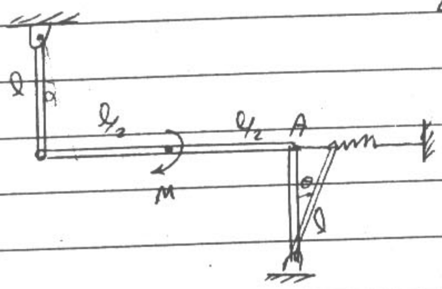


ب) مسائلی است که با ایجاد حرکت به راحتی نمی توان تغییر مکان سر نیرو یا سیستم را دنبال کرد. لذا روش برداری (شبه برداری) حل می شود.

۵

مثال) کدام θ تعادل جسم است؟

فنر ← روش انرژی



(۱ $\theta = M/kl^2$

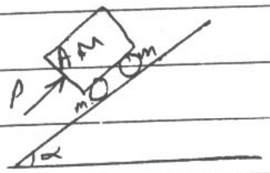
در این شکل چون θ به صورت مسئله داده شده پس به اندازه θ حرکت میدهیم. ولی اگر θ در صورت مسئله داده نشده بود به اندازه dθ حرکت میدهیم.

$F^{\text{فنر}} dx_A - M d\theta = 0 \longrightarrow kl\theta \cdot l d\theta - M d\theta = 0$

$x_A = l\theta \qquad dx_A = l d\theta \qquad \theta = M/kl^2$

مسائل ۱۰-۱۵ سال اخیر و مسائل کتاب را حتماً با روش انرژی حل کن.

مثال) تغییر مکان چرخ نصف تغییر مکان ارابه است. کدام صحیح است؟

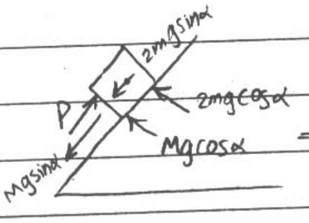


(۱ $P = (M+m) g \sin\alpha$

(۲ $P = (M+2m) g \sin\alpha$

(۳ $P = (M+m) g \tan\alpha$

نیروی چرخ ها را جدا می کنیم.



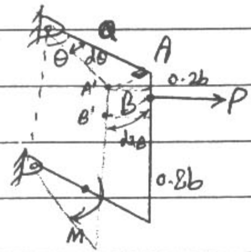
⇒ در راستای عمود بر سطح شیبدار کار انجام نمی گیرد.

فرض: ارابه به اندازه dx_A جابجا شده، لذا چرخها $\frac{dx_A}{2}$ جابجا شده اند

$P \cdot dx_A - Mg\sin\alpha \, dx_A - 2mg\sin\alpha \frac{dx_A}{2} = 0$

$\boxed{P = (M+m) g\sin\alpha}$

مدنی مکانیک 70



مثال) θ تعادل کدام است؟

در اینجا حالت ثانویه را نداریم.

چون نیروی P افقی است dx_B را می‌خواهیم.

در اینجا چون θ در مسئله هست به اندازه $d\theta$ حرکت می‌دهیم.

جواب: $\cos\theta = \frac{M}{Pa}$

$P\,dx_B - M\,d\theta = 0$

$AA' = a\,d\theta$

$AA' = BB' = a\,d\theta$

$dx_B = BB'\cos\theta = a\,d\theta\cos\theta$

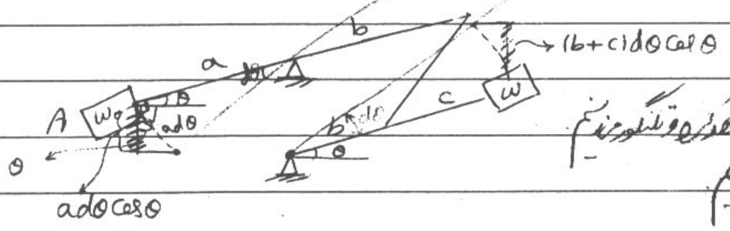
$Pa\cos\theta\,d\theta = M\,d\theta \longrightarrow \boxed{\cos\theta = M/Pa}$

همیشه تغییر مکان در راستای نیرو است.

* هرگاه نسبت به نقطه‌ای تغییر مکان می‌دهیم از جایی که جدا می‌شود از نقطه آن زاویه را 90° در نظر می‌گیریم. *

مثال) کدام رابطه تعادل صحیح است؟ (اتصالات چرخشی است)

جواب: $w_0 = \frac{b+c}{a} w$



وقتی چرخش باشد کل سیستم یکپارچه حرکت خواهد کرد و تغییر مکان می‌دهیم.
ولی وقتی پین بود باید از روش برداری برویم.

$w_0\,dy_{w_0} - w\,dy_w = 0$

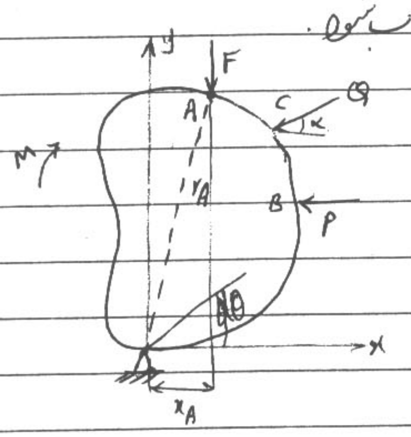
$w_0\,a\cos\theta\,d\theta - w(b+c)\cos\theta\,d\theta$

$$\boxed{w_0 = \frac{b+c}{a} w}$$

روش برداری:

در مسائلی که نمی‌توانیم حالت ثانویه را با یک تغییر مکان ایجاد کنیم، از روش برداری استفاده می‌کنیم. (یا تعداد پین‌ها زیاد است یا نیروها)

1) حتماً محور مختصات xy در نظر این که کار انجام نمی‌گیرد انتخاب شود.



(تکیه‌گاه‌های غلتکی را نمی‌توان محور مختصات در نظر گرفت
چون در یک جهت حرکت می‌کنند و کار انجام می‌دهند)

* نیروی Q را تجزیه نکن!

** علامت نیروها را با توجه به جهت محورهای مختصات تعیین می‌کنیم.

2) نیروها را به صورت ماتریسی و ردیفی می‌نویسیم یعنی مثلاً:

$$[F] = [F_x, F_y] = [0, -F]$$

$$[P] = [P_x, P_y] = [-P, 0]$$

* یکی را به صورت ماتریس و دیگری را به صورت ردیفی می‌نویسیم تا قانون ضرب رعایت شود.

3) بردار تغییر مکان ستونی نوشته شود.

$$\left\{r_A\right\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix}$$

$$\left\{r_B\right\} = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix}$$

در روش مجازی برای M بردار متعامل نمی‌نویسیم به همان شکل $Md\theta$ می‌نویسیم.

$$\left\{r_c\right\} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix}$$

رابطهٔ انرژی:

$$\boxed{[F]\left\{dr_A\right\} + [Q]\left\{dr_c\right\} + [P][dr_B] + Md\theta = 0}$$

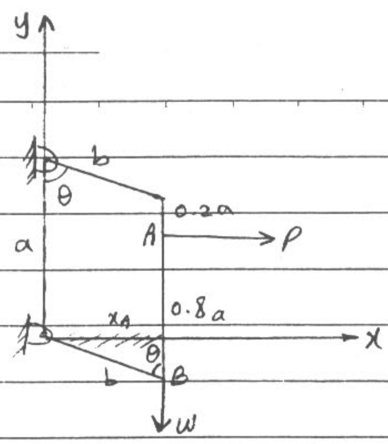
همیشه مثبت چون قبلاً علامت‌ها را منظور کردیم

$$\left\{r_A\right\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix}$$

$$\left\{dr_A\right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_A}{\partial\theta}\,d\theta \\ \frac{\partial y_A}{\partial\theta}\,d\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_A}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y_A}{\partial\theta} \end{Bmatrix} d\theta$$

نهال
NAHAL

مثال) θ تعادل کدام است ؟


y
b
θ
0.2a
A
P
a
x_A
0.8a
x
θ
b
B
w

جواب : $\tan\theta = \frac{w}{p}$

$$[P]\{dr_A\} + [w]\{dr_B\} = 0$$

$$[P] = [+P, 0]$$

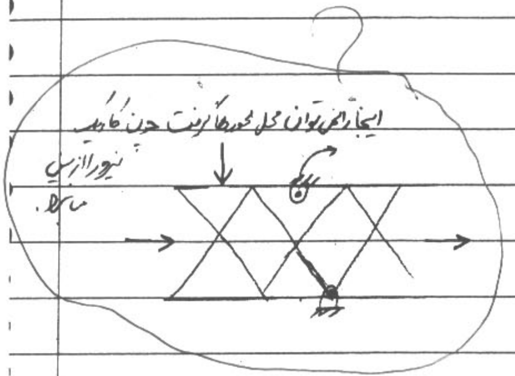
$$[w] = [0, -w]$$

$$\{r_A\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b\sin\theta \\ 0.8a - b\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\{dr_A\} = \begin{Bmatrix} b\cos\theta \\ +b\sin\theta \end{Bmatrix} d\theta$$

$$\{r_B\} = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b\sin\theta \\ -b\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\{dr_B\} = \begin{Bmatrix} b\cos\theta \\ +b\sin\theta \end{Bmatrix} d\theta$$


اینجا نمی‌توان محل محورها گرفت چون کار
نیرو از بین
می‌رود.

$$\Longrightarrow \quad Pb\cos\alpha - wb\sin\alpha = 0$$

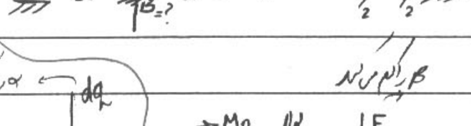
$$\tan\alpha = \frac{P}{w}$$

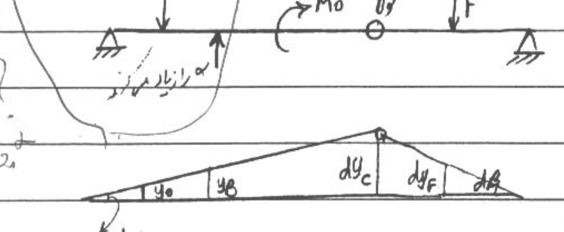
مسائل : مقدار نیروی B چقدر است ؟

در اینجا حالت ثانویه را نداریم.

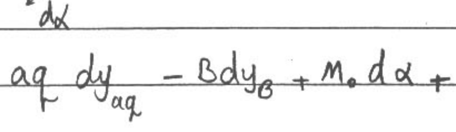
از روش مجازی هم می‌توان رفت چون کار نیروها صفر می‌شوند.

سپس یک تلنگر به سیستم می‌دهیم.


q نیرو
M_0
لولا
F
a
B=?
a
a
a/2
a/2


α را کم می‌کند
dq
M_0
لولا
F
β را کم می‌کند
α را زیاد می‌کند

حل :


y_0
y_B
dy_C
dy_F
$d\beta$
$d\alpha$

$$aq\, dy_{aq} - B\,dy_B + M_0\, d\alpha + F\,dy_F = 0$$

$$dy_{aq} = \frac{a}{2}\, d\alpha \qquad dy_B = a\,d\alpha \qquad dy_F = \frac{a}{2}\, d\beta$$

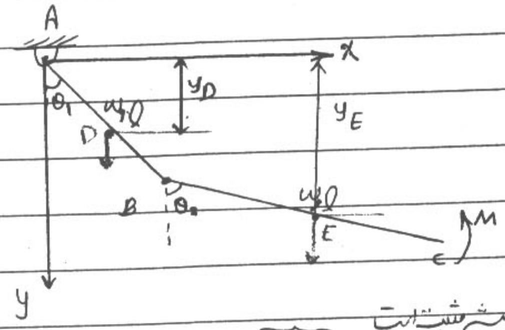
از طرفی $d\alpha$ و $d\beta$ با هم رابطه دارند.

$dy_c = a\,d\beta = 3a\,d\alpha$

$\boxed{d\beta = 3\,d\alpha}$

در این مسئله α و β با هم رابطه داشتند ولی در مسئله بعدی اینطور نیست.

مثال) θ_1 و θ_2 تعادل کدام است؟ وزن میله‌ها W و طول l می‌باشد.



در این مسئله هیچ رابطه‌ای بین θ_1 و θ_2 نداریم. باید جوابهای یکی را صفر کنیم تا دیگری بدست آید.

* M در جهت عقربه‌های ساعت مثبت است و $d\theta_2$ هم هم جهت با M علامت گذاری می‌شود.

M خلاف جهت عقربه‌های است و $d\theta_2$ هم خلاف جهت

$$w\,dy_D + w\,dy_E + \overbrace{M\,d\theta_2}^{\text{علامتش مثبت است}} = 0$$

در اینجا بایستی نیروها و مختصات حتماً علامت گذاری شود یعنی:

$(+w)(+dy_D) + (+w)(+dy_E) + (-M)(-d\theta_2) = 0$

$y_D = \frac{l}{2}\cos\theta_1$

$dy_D = -\frac{1}{2}l\sin\theta_1\,d\theta_1$

$y_E = l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta_2 \qquad dy_E = -l\sin\theta_1\,d\theta_1 - \frac{1}{2}l\sin\theta_2\,d\theta_2$

یا مثال) کدام صحیح است؟

$w(-\frac{1}{2}l\sin\theta_1\,d\theta_1) + w(-l\sin\theta_1\,d\theta_1 - \frac{1}{2}l\sin\theta_2\,d\theta_2) + M\,d\theta_2 = 0$

فرض $d\theta_1 = 0$

(1 $\sin\theta_2 = \frac{2M}{wl}$

(2 $\sin\theta_2 = \frac{M}{wl}$

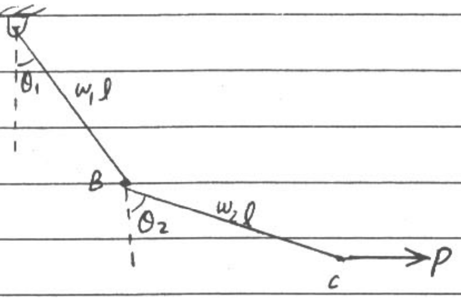
(3 $\sin\theta_2 = \frac{3M}{wl}$

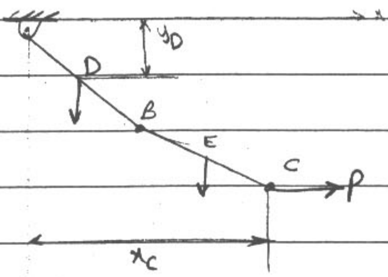
$\boxed{\sin\theta_2 = 2M/wl}$ $\qquad$ $\boxed{\sin\theta_1 = 0}$

در تمام مسائلی که با دو تا متغیر سروکار داریم و این میله‌ها با هم رابطه ندارند باید فرض $d\theta_1 = 0$ یا $d\theta_2 = 0$ را حتماً در نظر بگیریم.

در انتهای مسئله

مثال) θ_1 یا θ_2 تعادل چقدر است ؟





$$W\,dy_D + w\,dy_E + P\,dx_C = 0$$

$y_D = \frac{l}{2}\cos\theta_1 \longrightarrow dy_D$ محاسبه میشود

$y_E = (l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta_2) \Rightarrow dy_E$ محاسبه

$$x_C = l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2$$

$$dx_C = l\cos\theta_1\,d\theta_1 + l\cos\theta_2\,d\theta_2$$

با قرار دادن در رابطه قبلی

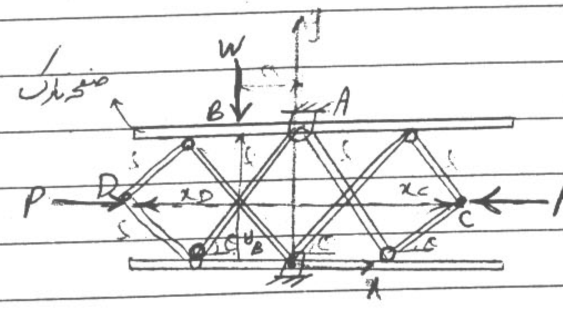
$$-w_1(\tfrac{l}{2}\sin\theta_1\,d\theta_1) - w_2(l\sin\theta_1\,d\theta_1 - \tfrac{1}{2}l\sin\theta_2\,d\theta_2) + P(l\cos\theta_1\,d\theta_1 + l\cos\theta_2\,d\theta_2) = 0$$

چون بین $d\theta_1$ و $d\theta_2$ رابطه موجود نیست لذا :

۱) اگر $d\theta_2=0$ باشد ← $\tan\theta_1 = \frac{2P}{3W}$

۲) اگر $d\theta_1=0$ باشد ← $\tan\theta_2 = \frac{2P}{W}$

مثال) θ تعادل کدام است؟


صفحه ثابت
W
B
A
P
D
x_D
x_C
C
P
y_B
l
x

۱- انتخاب محور xy : xy در نقطه A انتخاب بشود چون کار نیروی W را از بین می برد.

۲- رابطه کلی انرژی را با حفظ علامت می نویسیم.

$(-P)(dx_C)+(+P)(-dx_D)+(-W)(+dy_B)=0$

$-P\,dx_C-P\,dx_D-W\,dy_B=0$

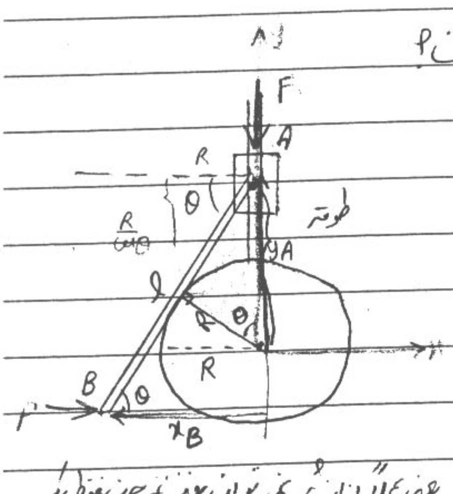
$P\,dx_C+P\,dx_D+W\,dy_B=0$

$x_C=x_D=3l\cos\theta \qquad dx_C=dx_D=-3l\sin\theta\,d\theta$

$y_B=2l\sin\theta \qquad dy_B=2l\cos\theta\,d\theta$

$$\boxed{\tan\theta=\frac{W}{3P}}$$

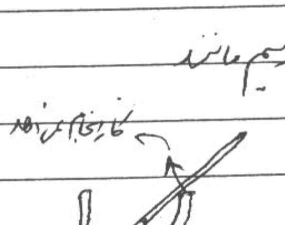
مثال) اصطکاک صفر است. میله بدون وزن، θ تعادل کدام است؟

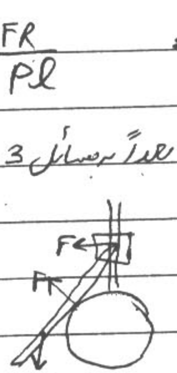

A
F
A
R
θ
$\frac{R}{\cos\theta}$
طوقه
y_A
l
R
θ
R
B
θ
P
x_B

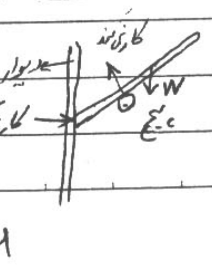
جواب : $\cos^2\theta=\frac{FR}{Pl}$

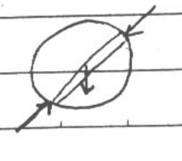
تذکر: بعداً بر مسائل 3 نیرویی می رسیم مانند

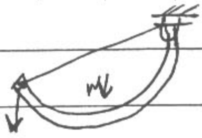
یعنی عملاً از انرژی نمی توان رفت چون فقط یک نیرو فعال است.


کار انجام می دهد
کار انجام می دهد




کار می کند
دیوار
W
پیچ
کار نمی کند





رینگی تحت وزن خودش ؟

→ چون دوتا نیرو فعال است می‌توان از انرژی یا تعادل استفاده کرد.

در مسائل سه نیرویی که یک نیرو فعال است نمی‌توان از انرژی حل کرد و از تعادل حل می‌شود

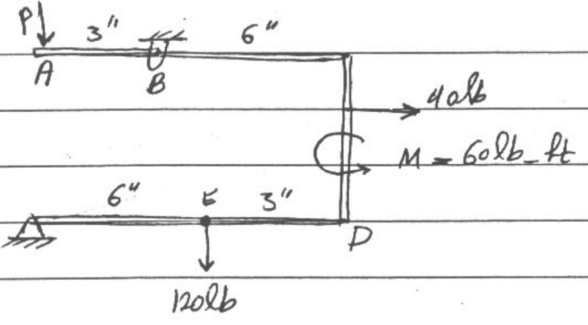
در این مسئله چون دوتا نیرو فعال است لذا می‌توان از انرژی یا تعادل مسئله را حل کرد.

$$(-F)(+dy_A)+(+P)(-dx_B)=0$$
$$F\,dy_A+P\,dx_B=0$$

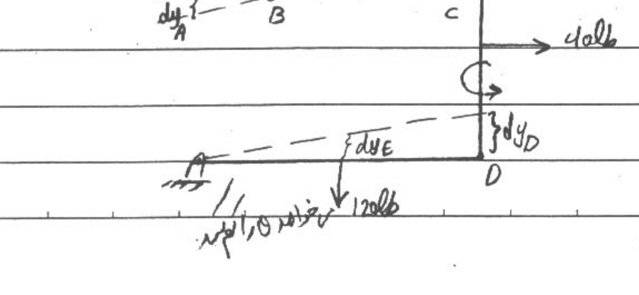
$$\cos\theta=R/y_A \qquad y_A=\frac{R}{\cos\theta} \qquad dy_A=\frac{R\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$x_B=l\cos\theta \qquad dx_B=-l\sin\theta\,d\theta \rightarrow \boxed{\cos^2\theta=\frac{FR}{Pl}}$$

مثال) نیروی P تعادل کدام است ؟


P
3"
6"
A
B
40lb
M = 60lb_ft
6"
E
3"
D
120lb

مسئله از روش برداری حل نمی‌شود چون محورها در پاشنه کار صفر انجام می‌دهند لذا مسائل نوع 1 :


می‌خواهد θ را زیاد کند
P
A
dy_A
B
$d\theta$
dy_C
C
40lb
dy_D
dy_E
D
120lb
می‌خواهد θ را کم کند

با زدن تلنگر میله CD به صورت قائم بالا می‌رود و بنابراین نیروی 40lb و گشتاور M دچار جابجایی نمی‌شوند پس در روش انرژی منظور نمی‌گردد.

9

$P\,dy_A - 120\,dy_E = 0$

$dy_A = 3d\theta$

$dy_C = 6d\theta$

$dy_D = dy_C = 6d\theta \qquad \frac{dy_E}{dy_D} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

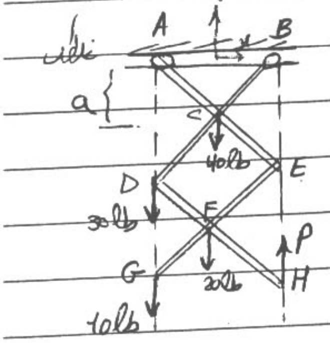
$dy_E = \frac{2}{3} \times 6\,d\theta \quad dy_E = 4d\theta \longrightarrow$

[illegible] M, 40lb

$P.3\,d\theta = 120 \times 4d\theta$

$\boxed{P = 160kN}$

مثال) P برای نگهداری سیستم کدام است؟


ثابت
A
B
y
x
a
C
40lb
D
E
30lb
F
P
G
20lb
H
10lb

۱- انتخاب محور xy

$(-40)(-dy_C) + (-30)(-dy_D) + (-10)(-dy_G) +$

$(-20)(-dy_F) + (P)(-dy_H) = 0$

فرض کنیم فاصله a است.

$y_C = a \longrightarrow dy_C = da$

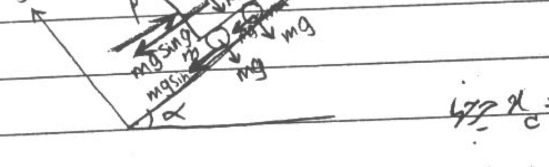
$y_D = 2a \longrightarrow dy_D = 2da$

$y_F = 3a \longrightarrow dy_F = 3da$

$y_G = 4a \longrightarrow dy_G = 4da \Rightarrow \boxed{P = 50lb}$

مثال:

$P = ?$


ارابه
x
y
P
M
Mg
m
mg
mgsing
mgsin
mg
mg
m
α

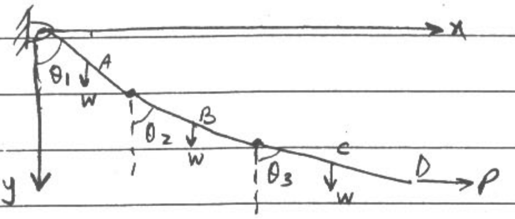
روش برداری :

ارابه: $x_C = \frac{1}{2} x_A$ چرخ

$P(+dx_A) - Mg\sin\alpha\, dx_A - 2mg\sin\alpha\, (\frac{1}{2} dx_A) = 0$

$P = Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha = \boxed{(M+m)g\sin\alpha}$

مثال) روش برداری : $\theta_1, \theta_2, \theta_3 = ?$



$W(+dy_A) + W(+dy_B) + W(+dy_C) + P(dx_D) = 0$

$y_A = \frac{l}{2}\cos\theta_1 \quad dy_A = -l/_2 \sin\theta_1 d\theta_1$

$y_B = l\cos\theta_1 + l/_2 \cos\theta_2 \rightarrow dy_B = -l\sin\theta_1 d\theta_1 - l/_2 \sin\theta_2 d\theta_2$

$y_C = l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2 + l/_2\cos\theta_3 \longrightarrow dy_C = -l\sin\theta_1 d\theta_1 - l\sin\theta_2 d\theta_2 - l/_2 \sin\theta_3 d\theta_3$

$x_P = l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2 + l\sin\theta_3 \longrightarrow dx_P = l(\cos\theta_1 d\theta_1 + \cos\theta_2 d\theta_2 + \cos\theta_3 d\theta_3)$

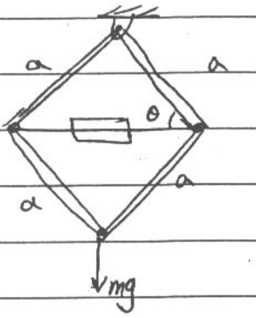
$d\theta_2, d\theta_3 = 0 \longrightarrow \tan\theta_1 = \frac{2P}{5W}$

$d\theta_1, d\theta_3 = 0 \longrightarrow \tan\theta_2 = \frac{2P}{3W}$

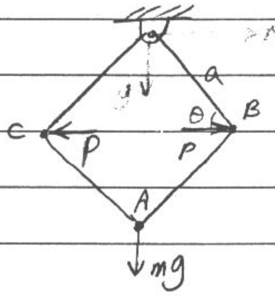
$d\theta_1, d\theta_2 = 0 \longrightarrow \tan\theta_3 = \frac{2P}{W}$

بپرس C

مثال) θ تعادل کدام است؟ P نیروی سیلندرها است.



جواب : $P = mg\cot\theta$



$(mg)(dy_A) + (P\,dx_B) + (-P)(-dx_C) = 0$

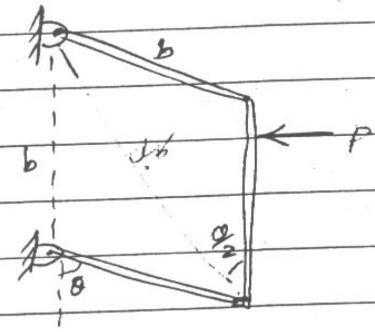
$y_A = 2a\sin\theta \qquad x_B = x_C = a\cos\theta$

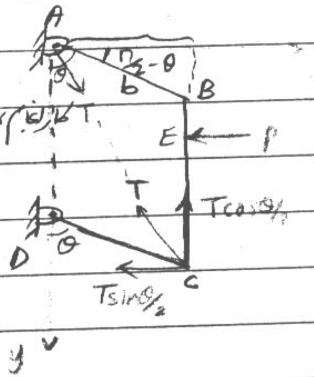
$dy_A = 2a\cos\theta d\theta \qquad dx_B = dx_C = -a\sin\theta d\theta$

$$\boxed{P = mg\cot\theta}$$

مثال) مطلوبست نیروی کشش سیم اهرمبندی T را که توسط نیروی افقی P سیستم متوازی الاضلاع را در تعادل نگه داشته است.

روش برداری :


b
b
کابل
P
$\theta/2$
θ


A
$\pi/2-\theta$
θ
b
B
T کار انجام نمی دهد
E
P
T
$T\cos\theta/2$
D
θ
C
$T\sin\theta/2$
y

$$(-P)(+dx_E) + (-T\cos\theta/_2)(dy_C) - (T\sin\theta/_2)(dx_C) = 0$$

$x_E = b\sin\theta$

$dx_E = b\cos\theta\, d\theta$

$y_C = b + b\cos\theta$

$dy_C = -b\sin\theta\, d\theta$

$x_C = b\sin\theta$

$dx_C = b\cos\theta\, d\theta$

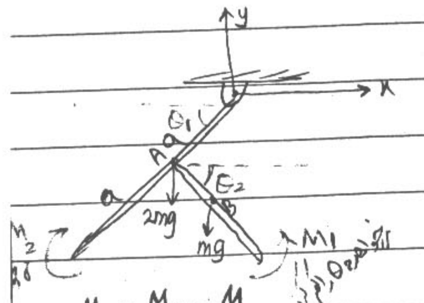
$\longrightarrow P\cos\theta = T(\cos\theta/_2 \cdot \sin\theta - \sin\theta/_2 \cos\theta)$

$P\cos\theta = T\sin(\theta - \theta/_2)$

$P\cos\theta = T\sin\theta/_2$

$$\longrightarrow \boxed{T = P\frac{\cos\theta}{\sin\theta/_2}}$$

مسئله) جرم هر میله m است، θ_1 و θ_2 تعادل کدام است؟ (اجباری نیست)


y
x
θ_1
A
a
θ_2
a
2mg
mg
M_2
M_1

$M_1 = M_2 = M$

یکبار $d\theta_1$ را صفر می کنیم تا θ_2 بدست بیاید.
" $d\theta_2$ " " θ_1 " " .

جواب : $\cos\theta_1 = \dfrac{2M}{3mga}$ و $\cos\theta_2 = \dfrac{2M}{mga}$

نهال
NAHAL

$y_A = a\sin\theta_1 \longrightarrow dy_A = a\cos\theta_1 d\theta_1$

$y_B = a\sin\theta_1 + \frac{a}{2}\sin\theta_2 \longrightarrow dy_B = a\cos\theta_1 d\theta_1 + \frac{a}{2}\cos\theta_2 d\theta_2$

$-2mg(-dy_A) - mg(-dy_B) - M_1 d\theta_2 - M_2 d\theta_1 = 0$

$2mg\, a\cos\theta_1 d\theta_1 + mg(a\cos\theta_1 d\theta_1 + \frac{a}{2}\cos\theta_2 d\theta_2) - M_1 d\theta_2 - M_2 d\theta_1 = 0$

$3mga\cos\theta_1 \cancel{d\theta_1} = M_2 \cancel{d\theta_1}$ ← یکبار $d\theta_2 = 0$ قرار می‌دهیم

اشکال

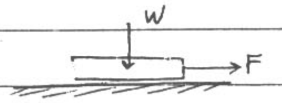
$\boxed{\cos\theta_1 = \frac{M}{3mga}}$

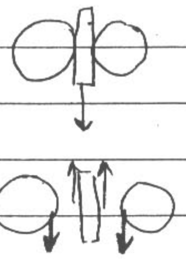
$mg\frac{a}{2}\cos\theta_2 = M_1$ ← یکبار $d\theta_1 = 0$ قرار می‌دهیم

$\rightarrow \boxed{\cos\theta_2 = \frac{2M_1}{mga}}$

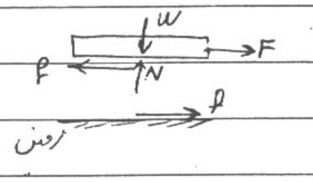
یادآوری نکات مهم :

ضریب اصطکاک لغزشی μ :

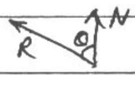




صفحه در هر جهتی حرکت می‌کند به دیسکها در همان جهت نیروی اصطکاک وارد می‌شود. و به خود صفحه در خلاف جهت نیرو وارد می‌شود.



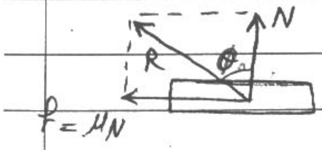
نیروی اصطکاک لغزشی : $f = \mu N$



عکس العمل نرمال N

عکس العمل سطح R

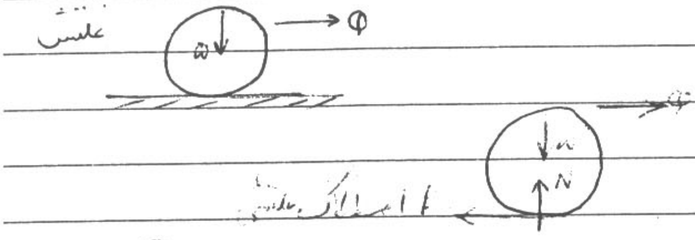
زاویه اصطکاک Φ_0



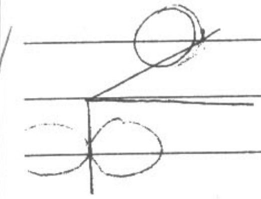
$\tan\phi_0 = \mu$

زاویه بین عکس العمل نرمال N و عکس العمل سطح R

ضریب اصطکاک غلتشی :

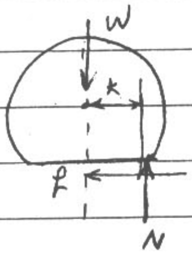


در مسائل غلتش اجسام همواره کروی اند ولی در لغزش هر شکل می‌توانند باشند.



چون N و W که هم را خنثی می‌کنند ولی ← دیاگرام آزاد غلط
P و f یک کوپل ایجاد می‌کنند که یعنی جسم همواره حرکت می‌کند.

در مسائل بیان دیاگرام غلط را رسم نکنید ولی مقدار f را از رابطه زیر بدست آورید.



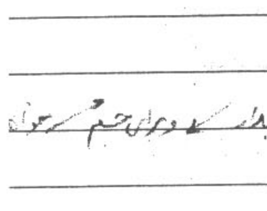
ضریب اصطکاک غلتشی k برحسب (cm)
↓
یعنی همان میزان پخش

$N.k = f.R$

$$\boxed{f = \frac{k}{R} N}$$

واحد ضریب اصطکاک غلتشی cm است

لذا از این به بعد در مسائل دیاگرام آزاد غلط زیر استفاده می‌شود.

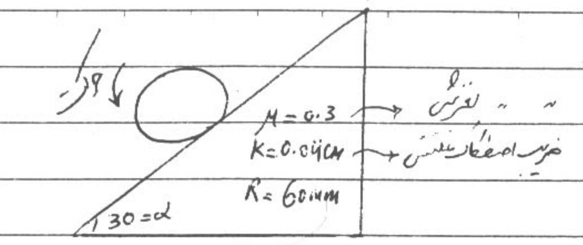


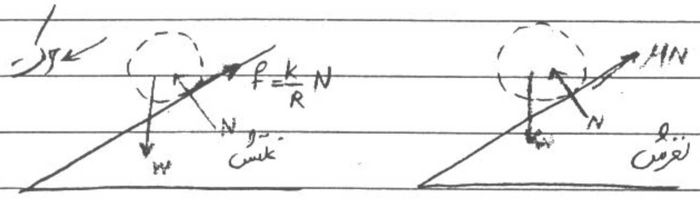
نسبت ضریب اصطکاک غلتشی $\frac{k}{R}$

ضریب اصطکاک فقط به جنس ماده وابسته است. لذا $\frac{k}{R}$ نسبت ضریب اصطکاک غلتشی است و k را ضریب اصطکاک غلتشی می‌نامند.

(با بجای اینکه جسم حرکت کند به سمت پایین سطح شیبدار حرکت کند به سمت بالا این اصطکاک سطح شیبدار است و برای جسم [illegible]
بود برای مثال بعد)

مثال) کدام گزینه صحیح است؟
۱) ابتدا جسم می‌غلتد.
۲) ابتدا جسم می‌لغزد.
۳) همزمان می‌غلتد و می‌لغزد.

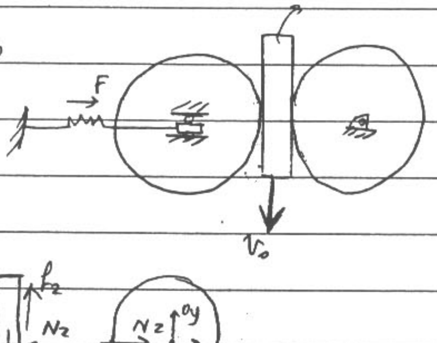

حرکت
$\mu = 0.3$ → لغزش
$K = 0.04cm$ → ضریب اصطکاک غلتش
$R = 60mm$
$30 = \alpha$


حرکت
$f = \frac{k}{R} N$
N
W
نیرو
غلتش
μN
N
دیاگرام آزاد لغزش

اگر $\mu > \frac{k}{R}$ ابتدا می‌غلتد و اگر $\frac{k}{R} > \mu$ ابتدا می‌لغزد و اگر $\mu = \frac{k}{R}$ همزمان می‌غلتد و می‌لغزد.

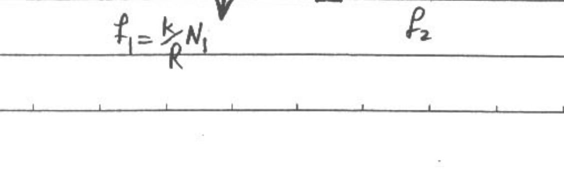
مثال) کدام گزینه صحیح است؟

W وزن قند ?
R شعاع غلتک
k ضریب اصطکاک غلتشی
F نیروی فنر



جواب: $W = \frac{2k}{R} F$

صفحه با سرعت ثابت V_0 حرکت می‌کند و از لغزش جلوگیری شده است.


F
O_y
N_1
f_2
f_2
N_1
W
N_2
N_2
O_y
O_x
$f_1 = \frac{k}{R} N_1$
f_2

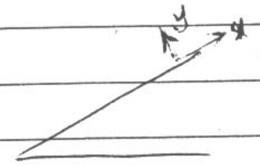
۱۲

$W = f_1 + f_2$

$W = \frac{k}{R} N_1 + \frac{k}{R} N_2$

$N_1 = N_2 \Rightarrow W = \frac{2k}{R} N_1$

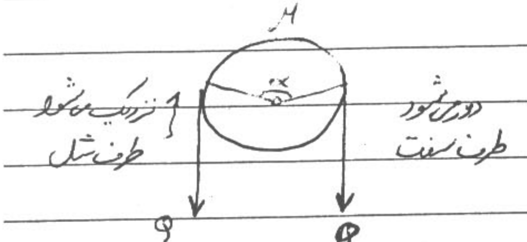
1 درشکل $\sum F_x = 0 \Rightarrow F = N_1$ $\boxed{W = \frac{2kF}{R}}$



** در سطوح شیبدار محورهای مختصات را در راستای محور انتخاب می کنیم.

قرقره‌ها :

رابطه اویلر :



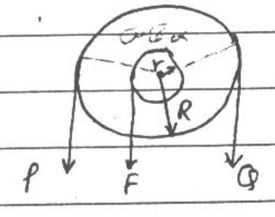
زاویه تماس طناب : α

ضریب اصطکاک طناب و قرقره μ

$$P_{\text{سفت}} = Q_{\text{شل}} \cdot e^{\alpha\mu}$$

$$Q = P \cdot e^{-\alpha\mu}$$

مثال) کدام رابطه صحیح است؟ $\begin{cases} P = Qe^{\mu\alpha} \\ Q = Pe^{\alpha\mu} \end{cases}$



$\sum M_O = 0$

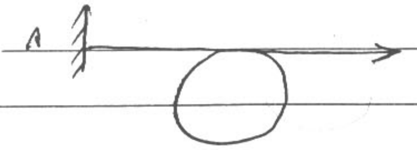
$-PR + QR - Fr = 0$

$QR = PR + Fr$

$Q > P$ لذا Q طرف سفت است

$\rightarrow Q = P_{\text{شل}} \cdot e^{\alpha\mu}$

مثال) طناب چند دور حول قرقره بچرخد تا نیروی کشش در تکیه‌گاه A برابر 800N شود؟ $\mu=0.1$



$$2000 = 800e^{0.1\alpha}$$

$\alpha = ⬭$ رادیان مهم

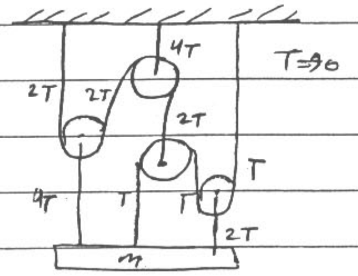
تعداد دور $n = \frac{\alpha}{2\pi}$ ⬭

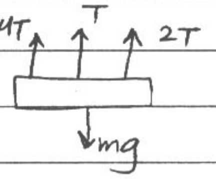
$\boxed{\alpha = 2\pi N}$

زاویه پیچش طناب

تعداد دور

مثال) کدام نیروی کشش T صحیح است؟ اصطکاک صفر است.

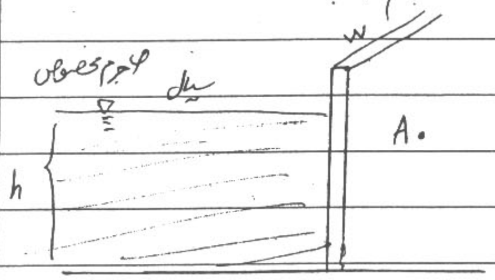

4T
2T
2T
2T
T
4T
T
T
2T
m
T=90



$T = \frac{1}{mg}$ (1

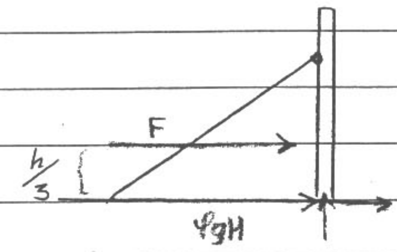
$T = \frac{1}{7} mg$ (2

نکته) پس در قرقره‌ای که اصطکاک نداریم $\mu=0$ یعنی طرف شل و سفت با هم برابرند.


ρ جرم مخصوص
سیال
h
W
A₀

تذکر:

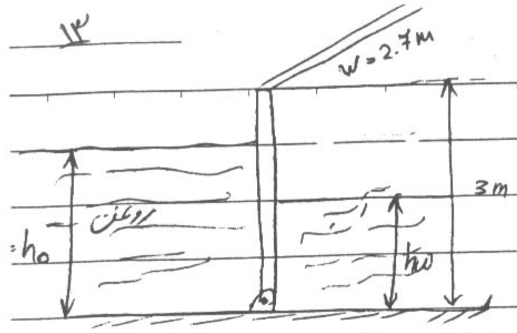
نیروی وزن سیال در دیاگرام آزاد سد تأثیر ندارد.



$$F = \frac{1}{2}\overbrace{\rho g h}^{P} . hw \qquad P = \frac{F}{A}$$

$$F = \frac{1}{2} A_0 \rho g h$$

۱۳

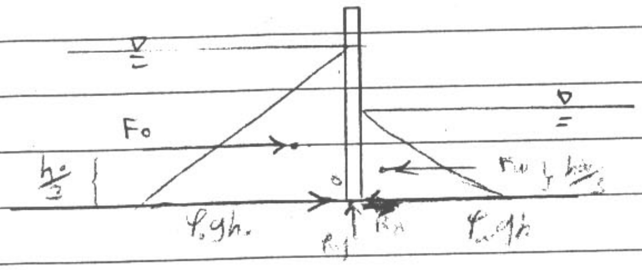

w = 2.7m
3m
روغن
آب
h_o
h_w

مثال) حداکثر ارتفاع h کدام است ؟

اگر سیال در یک ظرف بود حتماً باید تعادل در نظر می گرفتیم.
ولی ما در اینجا در هر دو طرف سیال داریم پس تعادل نمی گذاریم

$\rho_o = 0.85 \, gr/cm^3$ جرم مخصوص روغن ρ_w جرم مخصوص آب $= 1 \, gr/cm^3$

جواب مسئله : 1.9m


F_o
$\frac{h_o}{3}$
$\rho_o g h_o$
F_w
$\frac{1}{3} h_w$
$\rho_w g h_w$
R_x
R_y
O

F نیرو $= \gamma h_c A$

وارد بر سطح افقی

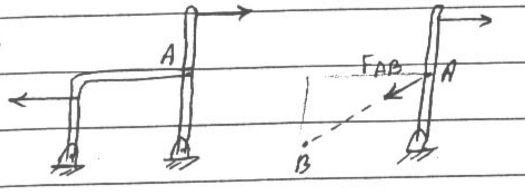
فاصله مرکز سطح تا سطح آزاد

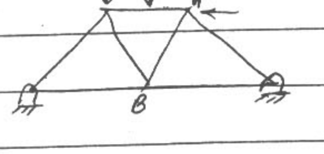
$$F_o = \frac{1}{2} \rho_o g h_o \cdot h_o \cdot w \rightarrow 2.7m$$
$$F_w = \frac{1}{2} \rho_w g h_w \cdot h_w \cdot w$$
$$\Sigma M_o = 0$$
$$F_o \cdot \frac{1}{3} h_o = F_w \cdot \frac{1}{3} h_w \rightarrow h_w =$$ بدست می آید.

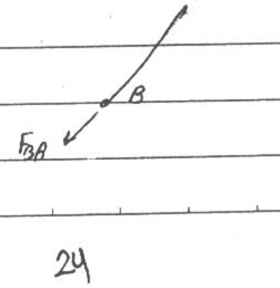
اعضای دونیرویی :

در هر سال حداقل ۲ تا مسئله دونیرویی

اعضایی که فقط در دو نقطه بر آنها نیرو وارد می شود. مثلاً تمام خرپاها دونیرویی هستند مگر اینکه نیروی سومی هم به عضو خرپا وارد شده است





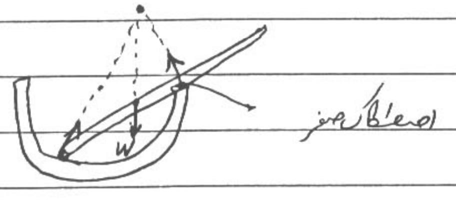


عکس العمل های روی این اعضاء در راستای خطی است که ابتدا و انتهای (نقاط اثر دو نیرو) را با هم وصل کند.

اعضای سه نیروی :

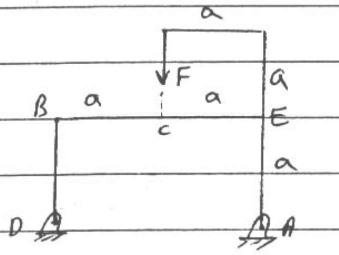
در یک صفحه سه نیرو موقعی در حال تعادل است که هر سه نیرو از یک نقطه عبور کند.

شرط : اگر حداقل دو نیرو باشند شامل سه نیروی نمی شود.



W
اصطکاک صفر

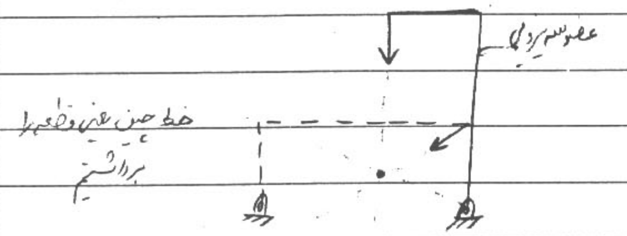
مثال) عکس العمل A از کدام نقطه می گذرد؟



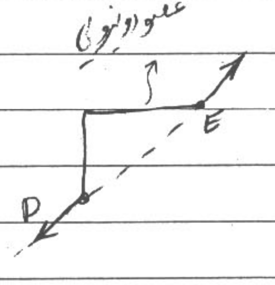
a
F
a
B
a
a
E
c
a
D
A

[✓ 1) B]   3) D

2) C   4) E



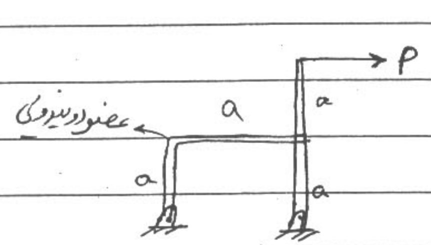
عضو سه نیرویی
خط چین یعنی قطعه را برداشتیم



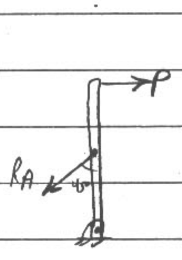
عضو دو نیرویی
E
D

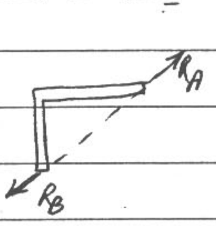
مثال) عکس العمل A چقدر است؟

حل)



P
a
a
a
a
عضو دو نیرویی
A
B

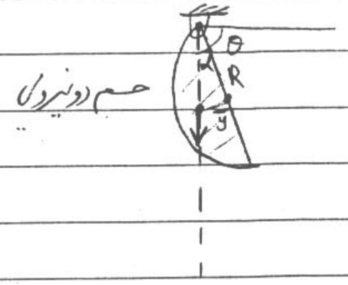




$$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow P(2a) - R_A \cdot a\sin 45^\circ = 0$$

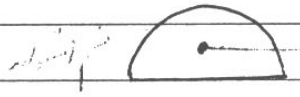
$$R_A = \square$$

مثال) θ تعادل کدام است؟ وزن نیم استوانه W است.

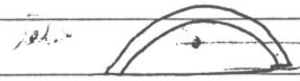

θ
α
R
$\bar{y}$
جسم دونیرویی

حل مسئله:

تذکر مهم:


نیم استوانه

$\updownarrow \bar{y} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$



$\updownarrow \bar{y} = \frac{2R}{\pi}$

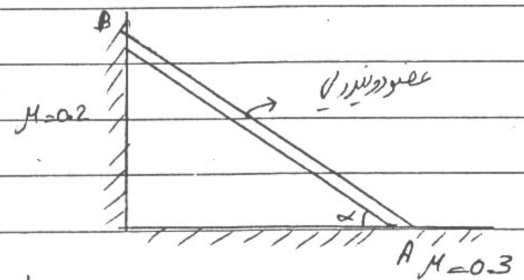
$\tan\alpha = \frac{\bar{y}}{R} = \frac{4R}{3\pi R} = \frac{4}{3\pi}$

$\theta = 90 - \alpha$

$\cot\theta = \tan\alpha = 4/3\pi$

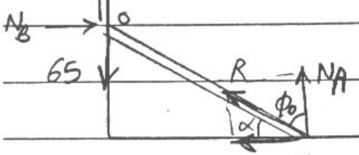
$\theta = \mathrm{arc}\cot \frac{4}{3\pi}$

مثال) شخصی با وزن 65kg می‌خواهد، می‌خواهد خود را به بالاترین نقطه نردبان سبک برساند، حداکثر α چقدر است.


B
عضو دونیرویی
$\mu = 0.2$
α
A
$\mu = 0.3$

راه دوم) $\Sigma M_o = 0 \quad 0.3\cancel{N_A}\,\cancel{l}\sin\alpha = \cancel{N_A}\,\cancel{l}\cos\alpha$

$\tan\alpha = \frac{1}{0.3}$


$0.2N_B$
N_B
o
65
R
N_A
ϕ_o
α
$0.3N_A$

راه اول) $\alpha = 90 - \phi_o$

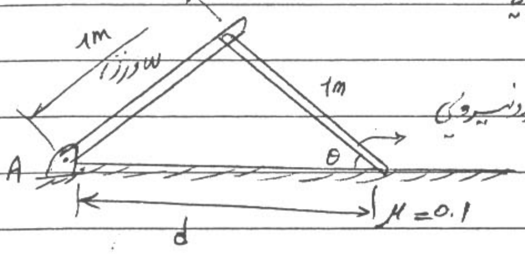
$\phi_o = \mathrm{arc}\tan 0.3$

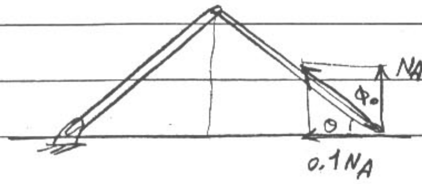
α = ثابت می‌شود

چون عضو دونیرویی است عکس العمل ها باید راستای خطی باشد که ابتدا را به انتها برساند.

در مسائل استاتیک ابتدا باید جسم را در آستانه لغزش قرار دهیم.

مثال) حداقل d چقدر است؟ یا
θ تعادل کدام است؟


1m
w وزن
1m
عضو دو نیرویی
A
θ
d
μ = 0.1



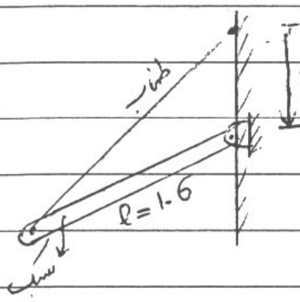
ضمناً عکس العمل دو نیرویی در راستای میله است.

$\phi_0 = \text{artan}\, 0.1 \qquad \tan\phi_0 = 0.1$

$\theta = 90 - \phi_0$

$\cot\theta = \tan\phi_0 = 0.1 = \dfrac{d/2}{\sqrt{1 - d^2/4}} \longrightarrow d =$ بدست می‌آید.

مثال) ماکزیمم مقدار x کدام است؟

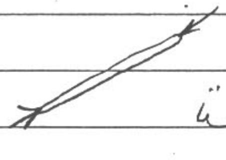

طناب
x
l = 1.6
سیب

$x = 1.6$ (1

$x = 0.8$ (2

$x = 3.2$ (3

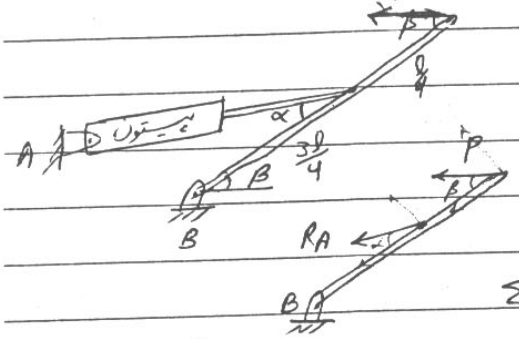
$x = 0$ (4



$x = 0$ چون میله عضو دو نیرویی است
پس باید طناب بر میله منطبق شود تا نیروها هم راستا
شوند $\leftarrow \boxed{x = 0}$ ④

۱۵

مثال) عکس العمل A چقدر است ؟


P
β
$\frac{l}{4}$
α
A
پیستون
$\frac{3l}{4}$
β
B
P
β
R_A
α
B

جواب: $R_A = \frac{4P}{3} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\phi}$

سیلندر عضو دو نیرویی است

$\Sigma M_B = 0$

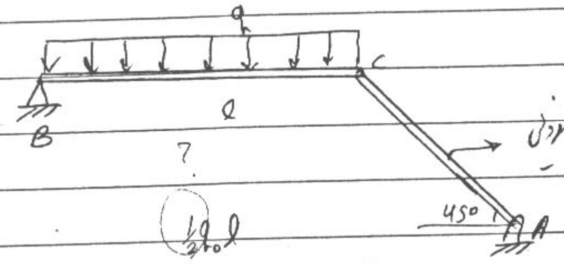
$-Pl\sin\beta - R_A \frac{3l}{4} \sin\alpha = 0$

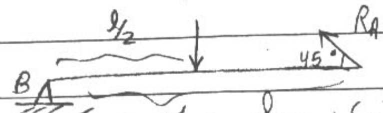
$R_A =$ بدست می آید.

* مرکز گشتاورها) حول B نیرو را در امتداد میله و عمود بر آن تجزیه می کنیم

مثال) عکس العمل A در هر دو شکل زیر کدام است ؟

(1)


q_0
C
B
l
عضو دو نیرویی
45°
A
?
$\frac{1}{2} q_0 l$

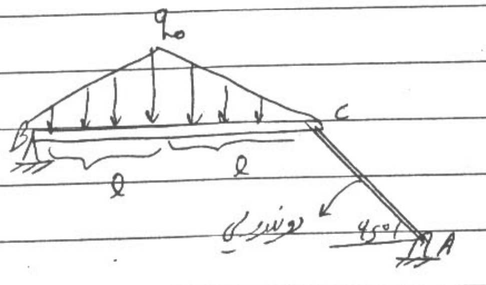

$\frac{l}{2}$
R_A
45°
B
l

$R_A \sin 45° \times l = \frac{1}{2} q_0 l \times \frac{l}{2}$

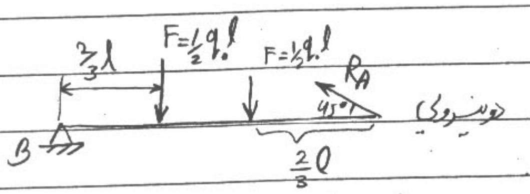
(نیروها را در امتداد میله و عمود بر آن تجزیه می کنیم)

$\Rightarrow R_A$ بدست می آید.

(2)

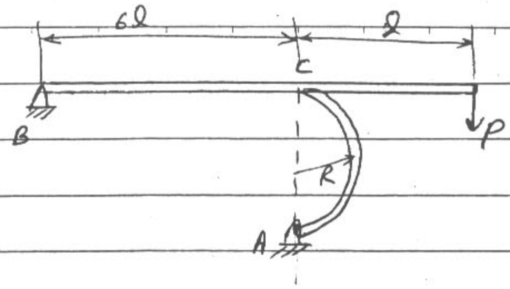

q_0
B
C
l
l
دو نیرویی
45°
A

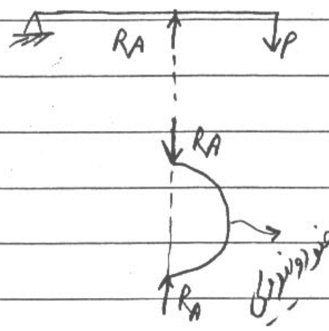
در اینجا چون عکس العمل ها مجهول است می توان بار گسترده را به صورت متمرکز درآورد.


$\frac{2}{3}l$
$F = \frac{1}{2} q_0 l$
$F = \frac{1}{2} q_0 l$
R_A
45°
دو نیرویی
B
$\frac{2}{3}l$

$\Sigma M_B = 0 \rightarrow \frac{1}{2} q_0 l \cdot \frac{2}{3} l + \ldots = 0$

R_A بدست می آید

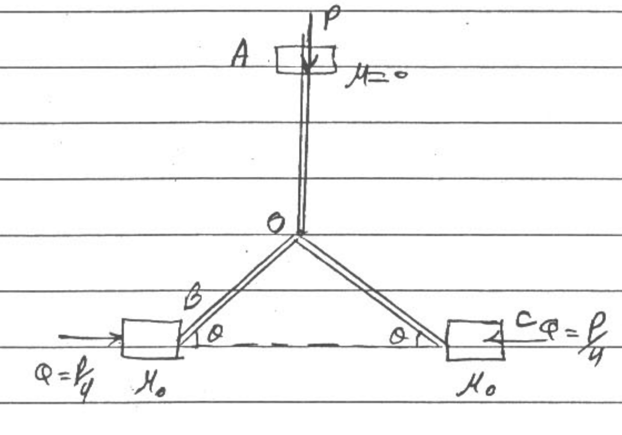



R_A
P
R_A
عضو دو نیرویی
R_A

$\Sigma M_B = 0$

$P(7l) - R_A \cdot 6l = 0$

$R_A =$ حساب می‌کنید


P
A
μ=0
O
B
θ
θ
C
Q = P/4
Q = P/4
μ₀
μ₀

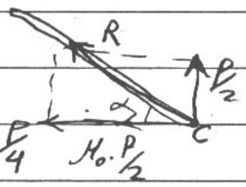
مثال) کدام θ تعادل صحیح است؟

$\tan\theta = \frac{2}{1+\mu}$ (1

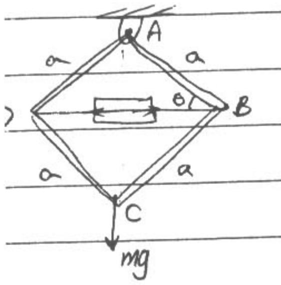
$\tan\theta = \frac{2}{1+2\mu}$ (2

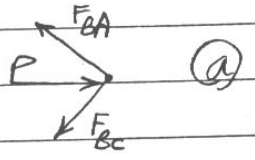
چون شکل متقارن است. $P/2$ می‌گیریم.

$$\tan\alpha = \frac{P/2}{P/4 + \mu_0 P/2} = \frac{2}{2\mu_0 + 1}$$

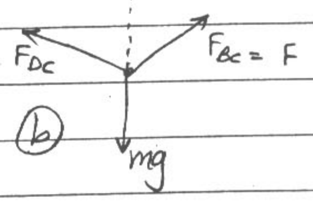

R
P/2
α
C
P/4
μ₀·P/2

مثال) کدام نیروی سیلندر (P) صحیح است ؟ یا θ تعادل کدام است ؟


A
a
a
B
θ
a
a
C
mg



$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow F_{BC} = F_{BA} = F$



$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow F_{DC} = F_{BC} = F$

$\Sigma F_y = 0 \qquad mg = 2F \underbrace{\sin\theta}_{\cos\alpha}$

$\boxed{F = \frac{mg}{2\sin\theta}}$

حال در ⓐ داریم :

$\Sigma F_x = 0$

$p = 2F_{BA} \cos\theta$

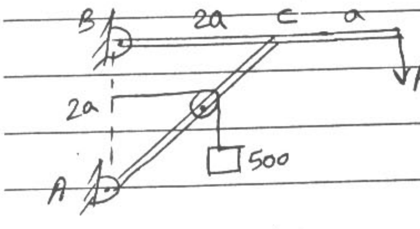
از رابطه 2 قرار میدهیم. $\leftarrow$ $\boxed{p = mg\cot\theta}$

قابها و خرپاها :

اگر از قاب سؤال بیاید به صورت مثال 2 و مثال 3 خواهد بود. مثال (1) در امتحان مطرح نیست.

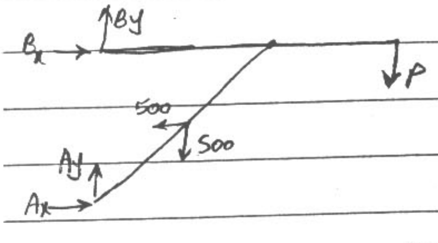
چون عضو دو نیرویی ندارد

مثال 1) در قاب زیر عکس العمل A چقدر است ؟

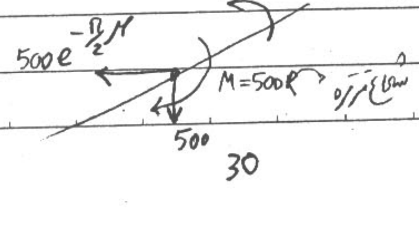

B
2a
C
a
P
2a
500
A

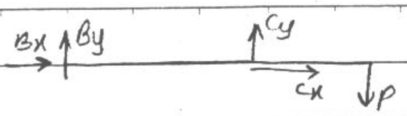
حل : ابتدا دیاگرام آزاد اصلی رسم شود.

سه معادله با ۴ مجهول $\cdot A_x, A_y, B_x, B_y$


By
Bx
P
500
500
Ay
Ax

اگر قرقره اصطکاک داشت ؟


$M = 500e^{-\frac{\pi}{2}\mu}$
R
$500e^{-\frac{\pi}{2}\mu}$
M=500R
شعاع قرقره
500

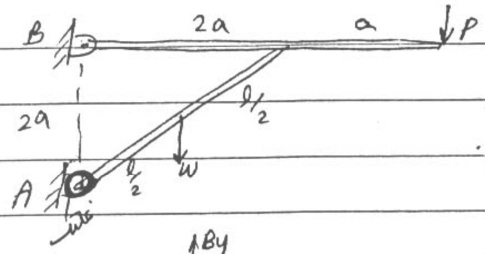


سه معادله با مجهول C_x و C_y ، B_x , B_y

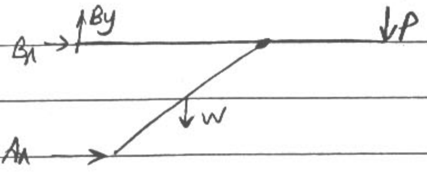
حال 6 معادله با 6 مجهول حل می شود

فرق این مثال با مثال قبل در این است که ۳ تا تکیه گاه مجهول داریم ولی در مثال قبل ۴ تا تکیه گاه مجهول بود زیرا در دو مثال عضو دو نیرویی اند

مثال 2) عکس العمل A چقدر است؟


B
2a
a
P
2a
l/2
W
l/2
A
غلتک

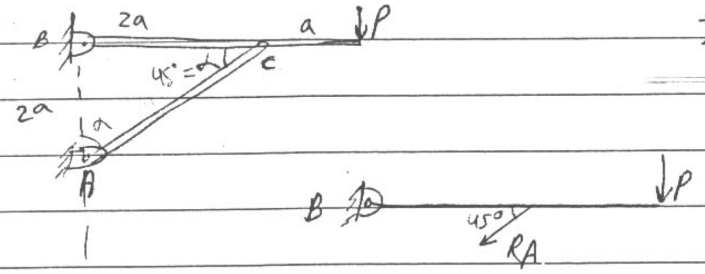
حل) عضو دو نیرویی وجود ندارد. در تکیه گاه ها سه مجهول وجود دارد.



$\Sigma M_B=0 \longrightarrow A_x$ بدست می آید

با مفصل جابجا شده

مثال 3) عکس العمل A چقدر است؟


B
2a
a
P
45° = α
C
2a
α
A
B
P
45°
RA

حل) عضو AC دو نیرویی است.

$\Sigma M_B=0 \qquad p(3a)+R_A\cdot 2a\ \sin 45^\circ=0$

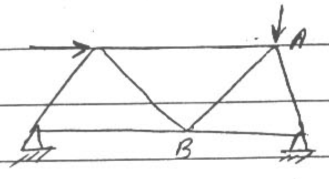
R_A بدست می آید

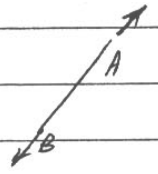
جهت R_A باید عوض شود چون منفی است.

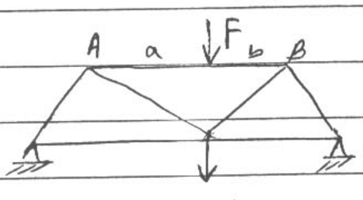
خرپاها :

نکات مهم :

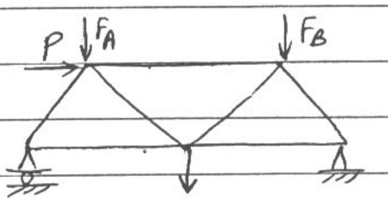
1. خرپاها حتماً بایستی به عنوان اعضاء دو نیرویی درآیند و حل شوند.





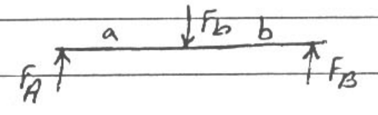


معادل ≡

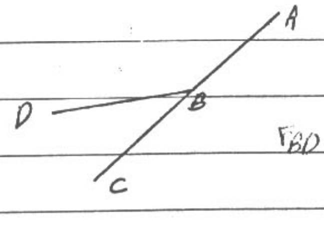


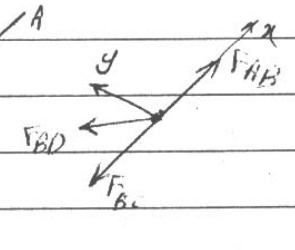
در اینجا عضو AB دو نیرویی نیست

در اینجا تمام اعضاء دو نیرویی شده



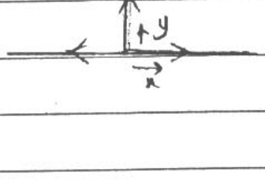
2. شناخت اعضاء صفر نیرویی :

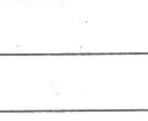



x
y
F_{AB}
F_{BD}
F_{BC}

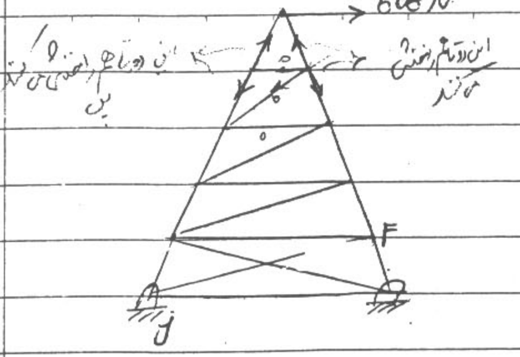
$\Sigma F_y = 0$

$F_{BD} = 0$





مثال) $F_{Fj} = ?$

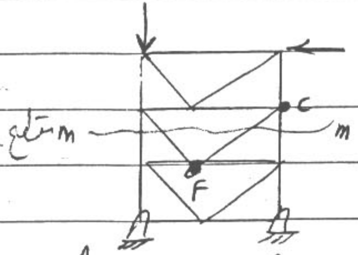

600 N
این دو تا هم صفر می شن
این دو تا هم خنثی می کنند
0
0
0
F
J

$\boxed{F_{Fj} = 0}$

درسته که همیشه وقتی گزینه ای که $F=0$ داشتیم روی آن شک کنید چون ممکن است عضو صفر نیرو باشد.

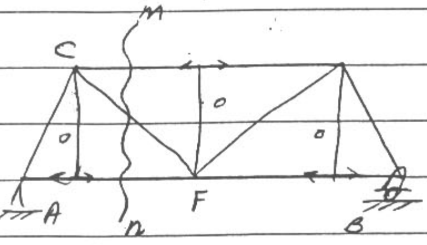
3. هرگاه نیروی داخلی در یک عضو سؤال شد دقت شود که همواره نیاز به محاسبه عکس العمل تکیه گاهها به منظور تعیین این نیروی داخلی نیست.

مثال) $F_{Fc} = ?$


مقطع m
m
C
F
A
B

در اینجا چون تکیه گاه A و B در یک طرف قطع mn واقع است نیازی به محاسبه عکس العمل تکیه گاهها نیست.

مثال) $F_{cF} = ?$

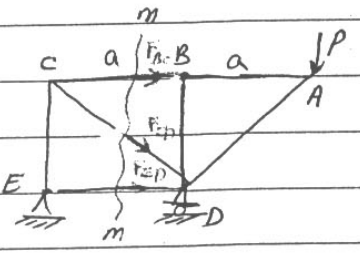


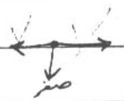
در اینجا حتماً نیاز به محاسبه تکیه گاه A یا B داریم. چون در دو طرف nm واقع شده است.

۱۸

!! اصولاً در تست‌ها سعی شود از روش مقاطع برای محاسبهٔ نیروهای داخلی استفاده شود مگر در حالتهای بسیار خاص که هم نیاز به روش مقاطع و هم مفصل با یکدیگر می‌باشد.

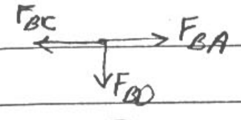
مثال) تعیین کنید F_{BD} و F_{BC}


m
c
a
F_{BC}
B
a
P
A
F_{BD}
F_{ED}
E
m
D

عضو BD صفر نیرویی است چون در گره B :


عضو BD فقط برای پایداری سیستم قرار داده شده است.

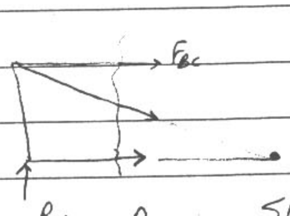
$F_{BD}=0 \Rightarrow$



سعی کنید از روش مقاطع استفاده کنید.
اگر عکس العمل‌ها را خواستند از روابط تعادل استفاده می‌کنیم. ولی اگر نیروهای داخلی را خواستند یا مقاطع یا مفاصل ولی بهتر است از روش مقاطع استفاده کنیم.

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow \boxed{F_{BD}=0}$

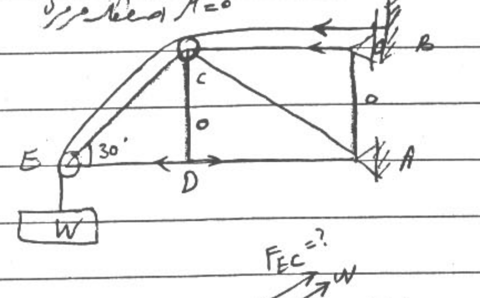
$\Sigma M_D=0 \Rightarrow R_{yE}=P$

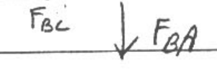


سمت راست مقطع m m را کنار گذاشته
* سعی کنید مقاطع را طوری انتخاب کنید که حداکثر سه تا مجهول باشد و یا اگر ۴ تا مجهول است حداقل چندتا از یک نقطه بگذرند.

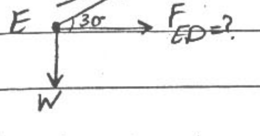
$R_{yE}=P \qquad \Sigma M_D=0 \Rightarrow \boxed{F_{BC}=P}$

مثال) $F_{CD}=?$
$F_{AB}=?$
$F_{CE}=?$


μ=0 اصطکاک صفر
B
C
0
0
E
30°
D
A
W



$\rightarrow F_{AB}=0$
$F_{CD}=0$


$F_{EC}=?$
W
E
30°
$F_{ED}=?$
W