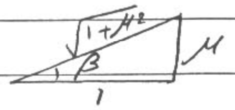
$$Q = \frac{\mu W}{\cos\beta + \mu \sin\beta}$$

Q مینیمم است اگر $y = \cos\beta + \mu \sin\beta$ ماکزیمم شود.

$$\frac{dy}{d\beta} = 0 \Rightarrow -\sin\beta + \mu \cos\beta = 0$$

$$\boxed{\tan\beta = \mu}$$

در رابطه بالا قرار داده و Q_{min} محاسبه شود.



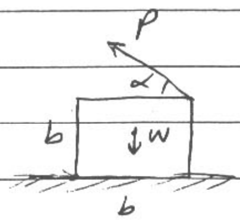
$$\sin\beta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

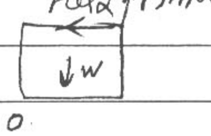
$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

$Q_{min} = \checkmark$

مثال) حداقل نیروی P با زاویه α که برای واژگون شدن لازم است؟

جواب: $\alpha = 45°$ و $P_{min} = \frac{\sqrt{2}}{4} W$





$$\Sigma M_o = 0$$

$$-P \sin\alpha\, b - P\cos\alpha\, b + \frac{Wb}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{W}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)}} \quad (1)$$

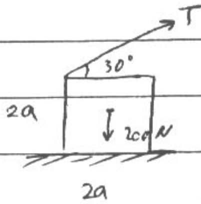
P مینیمم است اگر

$$(y = \sin\alpha + \cos\alpha)_{max}$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = 0 \rightarrow \cos\alpha - \sin\alpha = 0 \rightarrow \tan\alpha = 1 \quad \boxed{\alpha = 45°}$$

در رابطه (1) قرار داده $P_{min} = \frac{\sqrt{2}}{4} W$

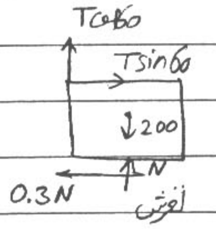
مثال) آیا جسم زیر واژگون می‌شود یا می‌لغزد؟



$\mu = 0.3$

هر دو حالت را باید حساب کنیم.

حل) حالت لغزش)

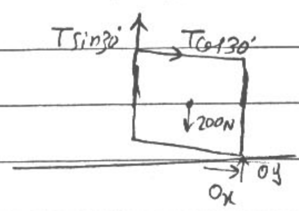


$\Sigma F_y = 0$

$T\cos 60° - 200 + N = 0$ (2)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\cos 30 = 0.3N \rightarrow N$ را حساب (۱) — (۱) را در (۲) قرار داده $\rightarrow T = 59N$

حالت واژگون)

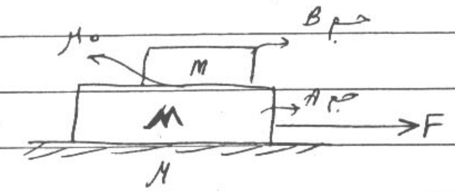


$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow -200(a) + T\cos 30°(2a) + T\sin 30°(2a) = 0$

$T = 36.5\ N$

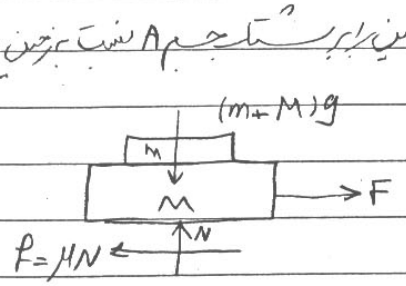
لذا جسم ابتدا واژگون می‌شود، چون تحت نیروی کمتری این پدیده فرا می‌رسد.

مثال) μ_0 حداقل باشد تا جسم B روی جسم A نلغزد؟



جواب) $\mu_0 = \frac{F}{(m+M)g} - \mu$

شرط یکسان بودن شتاب است. یعنی شتاب کل جسم نسبت به زمین برابر شتاب جسم A نسبت به زمین باشد.

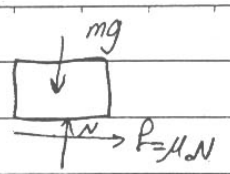


$\Sigma F_x = (m+M)a$

$F - \mu N = (m+M)a$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow W = (m+M)g$

$(1) \Rightarrow a = \frac{F - \mu(M+m)g}{m+M}$ (2)



شتاب [illegible]

$\Sigma F_x = ma$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow N = mg$

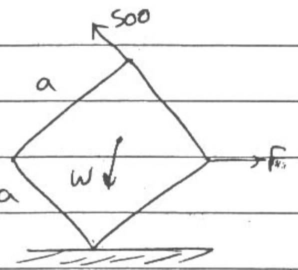
$\mu_0 N = ma$

$\mu_0 mg = ma$

$a = \mu_0 g$ ③

② = ③

$a = -\mu$



مثال) برآیند دو نیروی F و 500 چقدر است؟

(روش گشتاورگیری)

$R_{\text{برآیند}} = \sqrt{(\Sigma R_x)^2 + (\Sigma R_y)^2}$

$\Sigma R_x = F - 500\cos 45°$

$\Sigma R_y = 500\cos 45°$

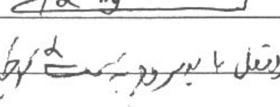
محاسبه F : $\Sigma M_o = 0$ $\quad F.a\sin 135° - 500\,\cancel{\sqrt{2}}\,a = 0$

$\boxed{F = 500\sqrt{2}}$

$\Sigma R_x = 500\sqrt{2} - 500\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Sigma R_y = 500\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \boxed{R = 500N}$

مثال) حداقل زاویه α برای اینکه شرط خودقفلی ایجاد بشه (یا جسم خود به خود پایین نیاید کدام است)



$mg\sin\alpha \leq \mu N$

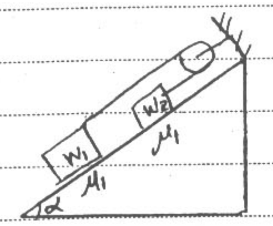
$N = mg\cos\alpha \longrightarrow \tan\alpha = \mu$

$\tan\alpha \leq \mu$

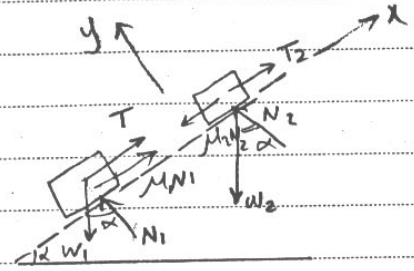
خودقفلی با بیشتر شدن α [illegible]

ادامهٔ استاتیک

مثال) نسبت $\frac{w_1}{w_2}$ چقدر باشد تا جسم بدون برخورد به یکدیگر در شرف حرکت باشند.



جواب: $$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\mu_2 + \tan\alpha}{\mu_1 - \tan\alpha}$$



حل: جهت حرکت w_1 به سمت پایین

$T_1 = T_2$

$\sum F_x = 0$

$\mu_1 N_1 + T - w_1 \sin\alpha = 0$ ①

$\sum F_y = 0 \Longrightarrow N_1 = w_1 \cos\alpha$ ②

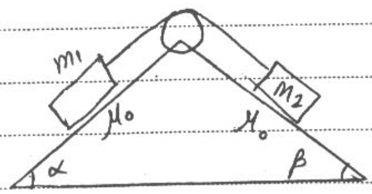
$T = w_1 \sin\alpha - \mu_1 w_1 \cos\alpha$ ③

② را در ① قرار داده T محاسبه می‌شود.

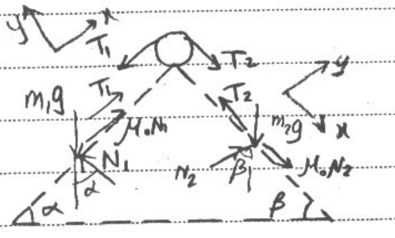
به همین ترتیب برای جسم ② مقدار T را محاسبه و مساوی رابطه ③ قرار می‌دهیم.

مثال) نسبت $\frac{m_1}{m_2}$ برای اینکه سیستم به سمت چپ حرکت نکند چیست؟ زاویه اصطکاک ϕ_0

جواب، $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin(\beta + \phi_0)}{\sin(\alpha - \phi_0)}$$



حل: سیستم به سمت چپ حرکت نمی‌کند (در شرف حرکت)



Subject:
Year. Month. Date. ( )

مانند مثال قبل :

$T_1 = T_2 = T$

در جسم 1 : $\sum F_x = 0 \Rightarrow T_1 + \overset{\tan\phi_0}{\mu_0} N_1 - m_1 g \sin\alpha = 0$ ①

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 \cos\alpha = m_1 g$ ②

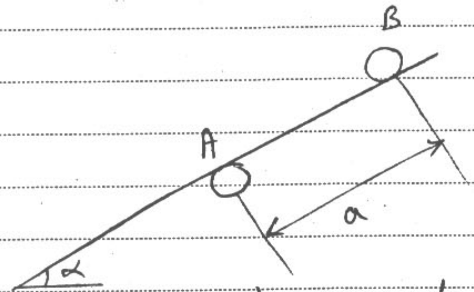
$1, 2 \Rightarrow T$ محاسبه

به همین ترتیب برای جسم ۲ مقادیر T را یکسان قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} T_1 = m_1 g \sin\alpha - m_2 g \cos\alpha \tan\phi_0 \\ T_2 = m_2 g \sin\beta + m_2 g \cos\beta \tan\phi_0 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

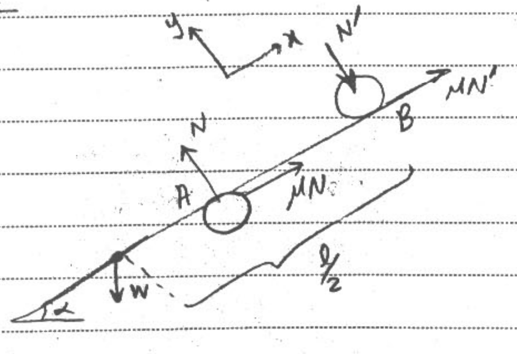
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_0 \cos\beta + \sin\beta}{-\mu_0 \cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{\frac{\sin\phi \cos\beta + \sin\beta \cos\phi}{\cos\phi}}{\frac{-\sin\phi \cos\alpha + \cos\phi \sin\alpha}{\cos\phi}} = \frac{\sin(\phi+\beta)}{\sin(\alpha-\phi)}$$

مثال) بین دو پین A و B به فاصله a یک تیر قرار دارد. ضریب اصطکاک تیر و پین‌ها μ است. مینیمم طول l که میله حرکت نکند



جواب : $l = a\left(1 + \frac{\tan\alpha}{\mu}\right)$

حل :



$\sum M_B = 0 \Rightarrow W\cos\alpha \cdot \frac{l}{2} - N \cdot a = 0$ $\qquad l = \frac{2aN}{W\cos\alpha}$ ①

محاسبه N :

$\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow +\mu N' + \mu N - W\sin\alpha = 0 \Rightarrow -N' + N - W\cos\alpha = 0$

PAPCO

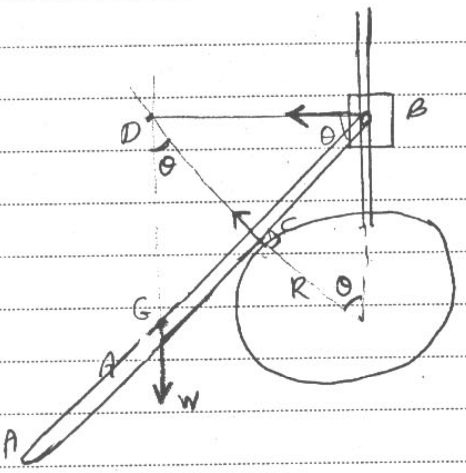
$$\begin{cases} N + N' = \dfrac{w \sin\alpha}{\mu} \\ N - N' = w\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow N = \frac{w\sin\alpha}{2\mu} + \frac{w\cos\alpha}{2}$$

در رابطه ① قرار دهیم.

مثال) θ تعادل کدام است؟ اصطکاک صفر است. وزن میله w و $AB = 2R$

تذکر مهم ← نوع مسائل سه نیرویی : a) از روش انرژی که قبلاً حل شد یعنی می‌بینیم 2 تا نیرو کار انجام می‌دهند

b) این نوع : یعنی یک نیرو کار انجام داده لذا از تعادل سه نیرویی مسائل حل می‌شود.



در اینجا حالت سه نیرویی است.

جواب : $\tan^3\theta + \tan\theta - 1 = 0$

حل : $BG = R = BC + CG$

$BC = R\tan\theta$

$CG = \underset{\sim}{CD}\tan\theta = BC\tan^2\theta$

از طرفی $CD = BC\tan\theta$

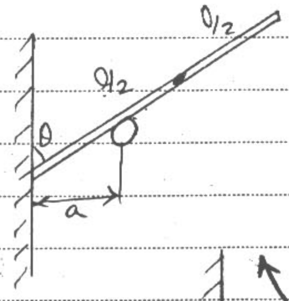
$R = R\tan\theta + R\tan^3\theta = 0$

$\Rightarrow \tan^3\theta + \tan\theta - 1 = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) میله نازکی به وزن W و طول l می‌باشد. زاویه θ تعادل کدام است؟ اصطکاک دیوار بین با میله صفر است.

* اگر میله سبک باشد می‌توان از وزن آن صرف نظر کرد.

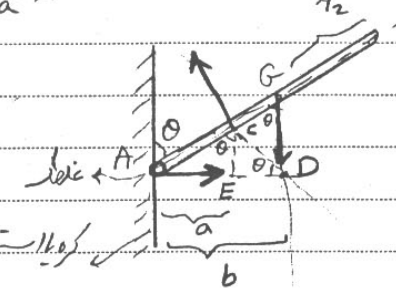


جواب: $\sin^3\theta = 2a/l$

سه تا نیرو دارم ← عمود بر نیرو

تنها نیروی خارجی که کار انجام می‌دهد وزن است.

← نوع ۳ یعنی مثلث نیروها را تشکیل می‌دهیم.

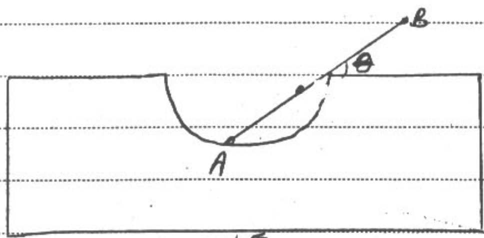


$\Delta ACD: \quad AC = b\sin\theta \quad ①$

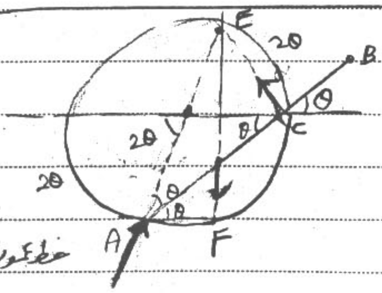
$\Delta ACE: \quad a = AC\sin\theta \quad ② \quad \Longrightarrow \quad a = b\sin^3\theta$

$\Delta AGD: \quad b = AG.\sin\theta = \frac{l}{2}\sin\theta \quad \Longrightarrow$

مثال) θ تعادل کدام است؟ $AB = 3R$ و اصطکاک صفر است. وزن میله W است.



مسئله از نوع 3 نیرویی است.



نقطه E روی محیط دایره است. زیرا زاویه محاطی C، $90°$ است.

؛ مهم ؛

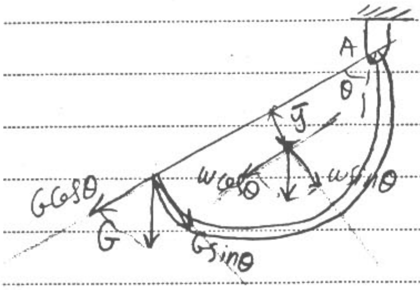
$\Delta AGF: \quad AF = 1.5R\cos\theta \quad ①$

$\Delta AEF: \quad AF = 3R\cos 2\theta$

?

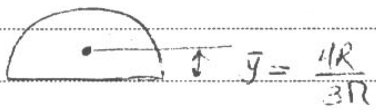
$$1.5R\cos\theta = 3R\cos 2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$8\cos^2\theta - 3\cos\theta - 4 = 0$$
$$\cos\theta = 0.7$$

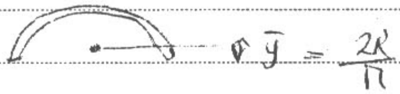
مثال) θ تعادل کدام است؟ وزن میله نیم دایره لهی باشد



چون دو تا نیرو که موازیند پس از روابط تعادل استفاده می کنیم.

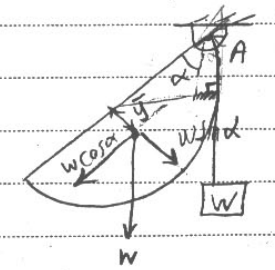
جواب: $\tan\theta = \dfrac{2W}{\pi(W+2G)}$

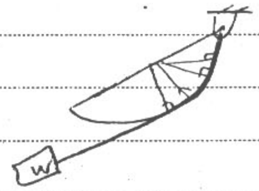




$$\Sigma M_o = 0$$
$$-W\sin\theta R + W\cos\theta \cdot \frac{2R}{\pi} - G\sin\theta \cdot 2R = 0$$
$$\tan\theta = \frac{2W}{\pi(W+2G)}$$

مثال) وزن دیسک w است. θ تعادل کدام است؟





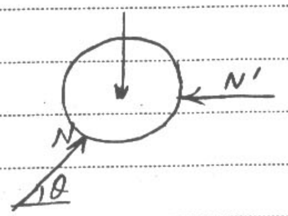
تا هر جا نخ چسبیده به دیسک عمود است.

$$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow w(R - R\sin\alpha) - W\sin\alpha . R + w\cos\alpha\left(\frac{4R}{3\pi}\right) = 0$$

جواب: $\dfrac{4}{3\pi}\cos\theta - 2\sin\theta + 1 = 0$

Subject: ۳۲
Year. Month. Date. ( )

در اینجا چون در سه گزینه عدد بالای یک و فقط گزینه عددی زیر یک است جواب واضح است.

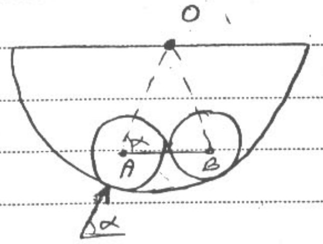


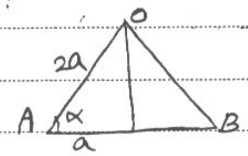
$$\Sigma F_x = 0$$

$$-N' + N\cos\alpha = 0$$

$$\frac{N'}{N} = \cos\alpha \Longrightarrow$$ چون $\cos\alpha$ همواره از یک کمتر است پس گزینه ۱ صحیح است.

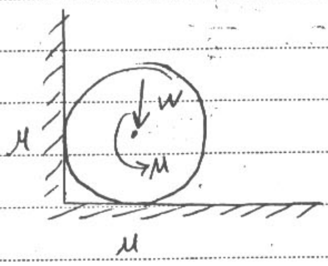
حل تشریحی :





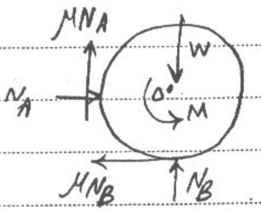
$$\cos\alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\frac{N}{N'} = 0.5}$$

مثال) مقدار M برای شروع حرکت کدام است؟



وقتی یک کره بین دو دیواره قرار می‌گیرد لغزش داریم.

جواب) $M = \mu W R \left[\frac{1+\mu}{1+\mu^2}\right]$



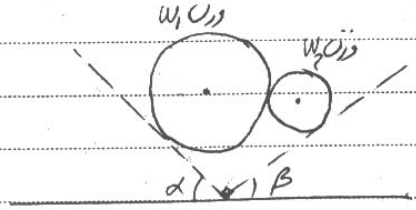
$$\Sigma M_O = 0$$

$$-M + \mu N_B R + \mu N_A R = 0$$

$$M = \mu R (N_A + N_B)$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad N_A = \frac{\mu w}{1+\mu^2} \qquad N_B = \frac{\mu w}{1+\mu^2}$$

$$\Sigma F_y = 0$$



مثال) نیروی تماس را محاسبه کنید. (سه سطح تماس وجود دارد) اصطکاک صفر است.

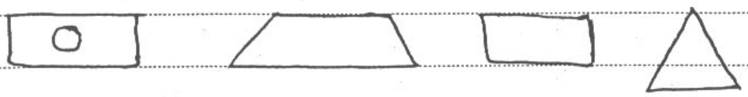
Subject:
Year. Month. Date. ( )

* ممان دوم (اول) سطح :

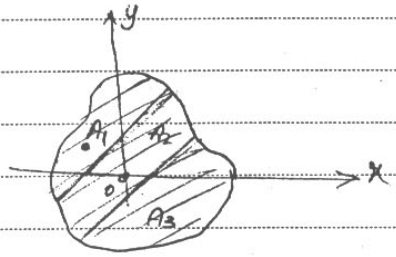
مطالعه شخصی :

محاسبات ابتدایی محاسبه I_x ، I_y و I_{xy}

مقاطع ساده :



رابطه کلی :



ممان نیرو
ممان سطح
ممان حجم

$$A_1y_1 + A_2y_2 + \cdots = (A_1 + A_2 + A_3)\,\bar{y} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{A}$$

$$A_1x_1 - \cdots = (A_1 + A_2)\,\bar{x} \qquad \bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{A}$$

فرمول کلی برای مرکز سطح :

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} = \frac{Q_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} = \frac{Q_x}{A}$$

روابط روبرو برای سطح نامعین بکار می‌رود.

ممان (اول)

$$Q_x = \int y\,dA$$

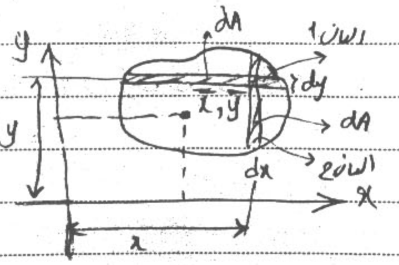
$$Q_y = \int x\,dA$$

ممان دوم

$$I_x = \int y^2\,dA$$

$$I_y = \int x^2\,dA$$

$$I_{xy} = \int xy\,dA$$



تذکر مهم : I_x و I_y محاسبه شود.

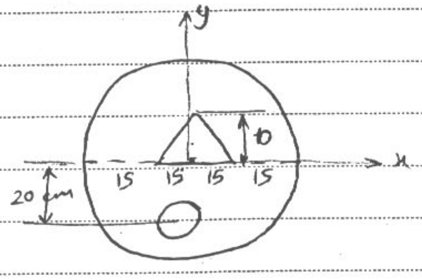
$$I_x = \int y^2\, dA \; * \quad , \quad Q_x = \int y\, dA \; *$$

$$I_y = \int x^2\, dA \quad , \quad Q_y = \int x\, dA$$

برای محاسبه روابط * I_x و Q_x حتماً بایستی با توجه به شکل المان 1 (المان افقی) انتخاب شود نه المان 2.

برای $I_y = \int x^2 dA$, $Q_y = \int x\, dA$ حتماً المان 2 انتخاب شود

برای محاسبه A یعنی $A = \int dA$ المان 1 یا 2 فرقی ندارد



مثال) دایره بزرگ ورق دایره‌ای به قطر 60cm می‌باشد. یک مثلث متساوی الساقین برداشته‌ام. می‌خواهم سوراخ دیگری بر راستای A ایجاد کنم. قطر سوراخ در زیر دایره که به مرکز A و به فاصله 20cm از مرکز دایره چقدر باشد تا مرکز شکل کل همان مرکز دایره اصلی باشد.

$$\bar{y} = \frac{\overset{0}{y_1}A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 0$$

در مسائلی که شکل که معین هستند از رابطه زیر استفاده می‌کنیم ?

$$y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3 = 0$$

A برای سوراخ و مثلث را منفی باشند ؟

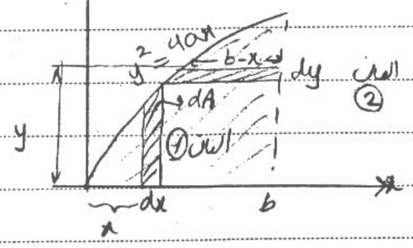
دایره بزرگ | $y_1 = 0$, $A_1 = \pi(30)^2$

سوراخ | $y_3 = -20$, $A_3 = \frac{\pi d^2}{4}$

مثلث | $y_2 = 10/3$, $A_2 = -\frac{30 \times 10}{2}$

$d = 5.6\,cm$ ← در رابطه بالا قرار میدهیم

مثال) مرکز سطح کدام است ؟



جواب) $\bar{y} = \frac{3}{4}(ab)^{1/2}$, $\bar{x} = \frac{3}{5}b$

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A} = \frac{Q_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A} = \frac{Q_x}{A}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محاسبهٔ A : از المان 1 یا 2 استفاده می‌کنیم.

المان 1 : $A = \int dA = \int y\,dx = \int_0^b (4ax)^{\frac{1}{2}}\,dx$ بهتر است.

المان 2 : $A = \int dA = \int (b-x)\,dy$

$$A = 2a^{\frac{1}{2}} \int_0^b x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{4}{3}(ab^3)^{\frac{1}{2}}$$

تست ۱۰ ص ۱۹۳

محاسبهٔ $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA = Q_y}{A}$$

برای Q_y حتماً از المان 1 استفاده شود چون.

$$Q_y = \int x\,dA = \int_0^b xy\,dx$$

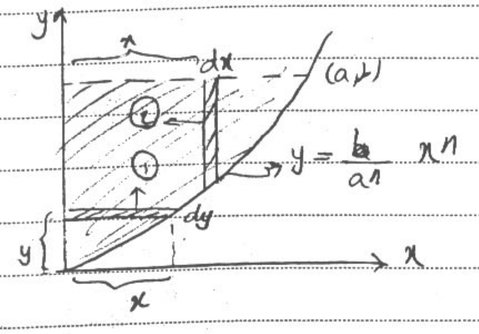
$$Q_y = 2a^{\frac{1}{2}} \int_0^b x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{4}{5}(ab^5)^{\frac{1}{2}}$$

برای محاسبهٔ Q_x حتماً از المان 2 استفاده شود.

$$Q_x = \int y\,dA = \int y(b-x)\,dy = \int_0^{2\sqrt{ab}} y(b-x)\,dy = \int_0^{2\sqrt{ab}} y\left(b-\frac{y^2}{4a}\right)dy$$

$$= ab^2 \implies$$ $\bar{x}$ و $\bar{y}$ محاسبه می‌شوند.

مثال) $\bar{y}$ چقدر است؟



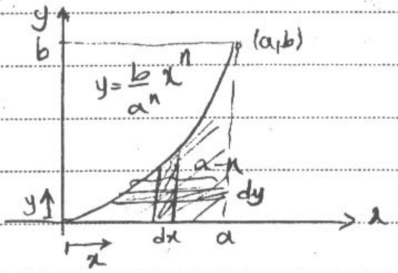
$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} \qquad \bar{x} = \frac{Q_y}{A}$$

$$A = \int dA = \int_0^b x\,dy =$$

$Q_x = \int y\,dA = \int yx\,dy$ المان 1

$Q_y = \int x\,dA = \int x(b-y)\,dx$ المان 2

مثال) $\bar{x}$ و $\bar{y}$ چقدر است؟



$$A=\int_0^a y\,dx=\int_0^a \frac{b}{a^n}x^n dx$$

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dA}{A}=\frac{Q_y}{A}$$ → المان عمودی

$$Q_y=\int x\,dA=\int_0^a x\,y\,dx=\int_0^a x^{n+1}\frac{b}{a^n}dx$$

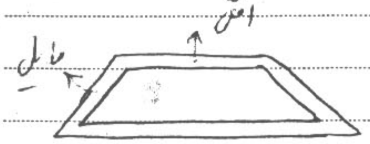
$$\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{A}=\frac{Q_x}{A}$$ → المان افقی

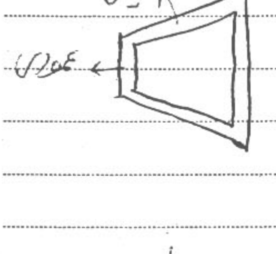
$$Q_x=\int y\,dA=\int_0^b (a-x)\frac{b}{a^n}x^n dy$$

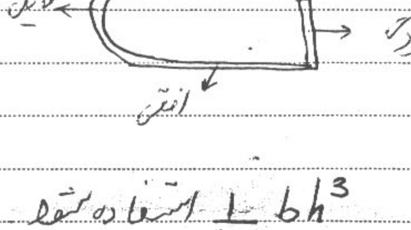
تذکر مهم: برای محاسبه I_x ، I_y یا (Q_x ، Q_y) برای مقاطع جدار نازک حتماً جملات t^2 و به بالا حذف شوند

برای محاسبه I_x ، I_y (Q_x یا Q_y) سه حالت وجود دارد:

مقاطع جدار نازک معمولاً ترکیبی از اعضای افقی، عمودی و مایل می‌باشند





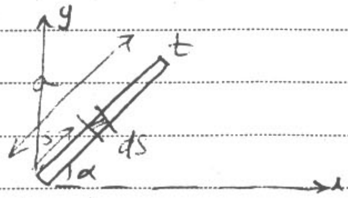


* مقاطع دایره‌ای را مایل می‌گیریم.

برای مقاطع افقی یا عمودی از فرمول $\frac{1}{12}bh^3$ استفاده شود

$I_x=\frac{1}{12}bt^3$

$I_y=\frac{1}{12}tb^3$ ؟



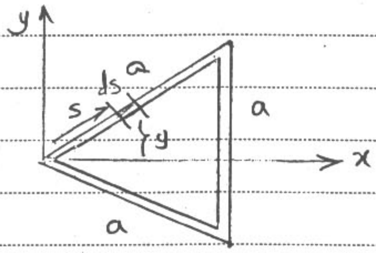
برای مقاطع مایل ← حتماً از انتگرال گیری استفاده می‌کنیم.

$I_x=?$

$Q_x=?$

$I_x=\int y^2\,dA$ و $Q=\int y\,dA$

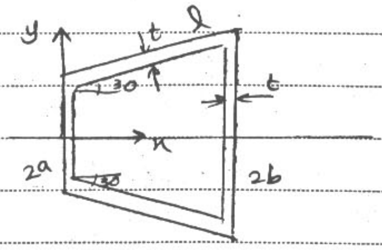
مثلاً $I_x=\int_0^a (S\sin\alpha)^2\,t\,dS$, $Q_x=\int_0^a S\sin\alpha\cdot t\,dS$



مثال) I_x کدام است؟

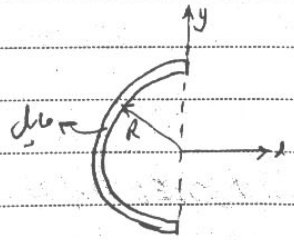
$I_x=\frac{1}{12}ta^3+2\int y^2\,dA=\frac{1}{12}ta^3+2\int_0^a (S\sin 30^\circ)^2\,t\cdot ds$

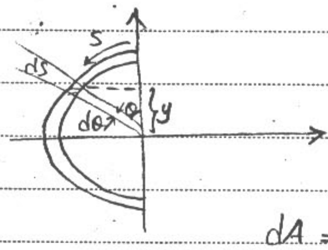
$I_x=\frac{1}{12}ta^3+2(\sin 30^\circ)^2\cdot t\frac{1}{3}a^3$



مثال)

$I_x=\frac{1}{12}t(2a)^3+\frac{1}{12}t(2b)^3+2\int y^2\,dA\to 2\int_0^l (S\sin 30+a)^2\,t\,ds$





مثال) $I_x=?$

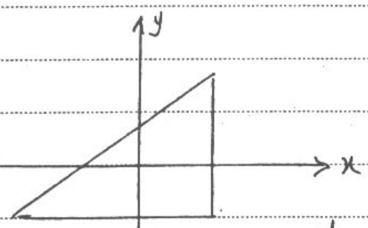
$I_x=\int y^2\,dA$

$y=R\cos\theta$

$dA=t\,ds=tR\,d\theta$

$I_x=\int_0^{\pi}(R\cos\theta)^2\,t\,R\,d\theta$

ممان دوم سطح (یا اول سطح) در اثر چرخش سطح :



مثال) در مثلث زیر

$I_x = 1458\ mm^4$

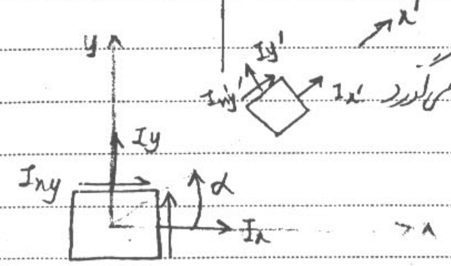
$I_y = 365\ mm^4$ $\quad I_{xy} = 365\ mm^4$

تعیین کنید :

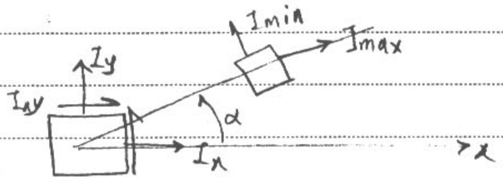
۱) حداکثر ممان دوم سطح مثلث را که نسبت به محوری که از مرکز سطح می‌گذرد

۲) جهت محوری را که ممان دوم سطح نسبت به آن ماکزیمم می‌باشد.

1)



2)



حل

$$I_{max,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

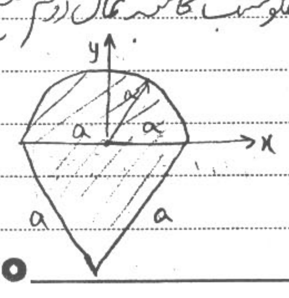
$I_{max} = 15687.9\ mm^4$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \qquad \alpha = 106.9°$

بحث کلی :

در استاتیک بحث دو بعدی است.

مثال) در شکل زیر ممان دوم سطح نسبت به محور x و y ، I_x و I_y است. مطلوب است محاسبه ممان دوم سطح حول محور x' که با محور x زاویه 45° می‌سازد. (در خلاف جهت عقربه ساعت) * در خلاف جهت عقربه ساعت می‌چرخانیم.

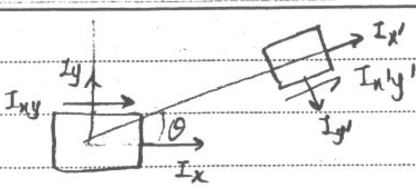


۱) $I_{x'} = \frac{\sqrt{2}}{2} I_x - \sqrt{2} I_y$

$I_{y'} = I_x - \frac{\sqrt{2}}{2} I_y$ ~~۲)~~

۳)

Subject:
Year. Month. Date. ( )



روش دوم) روش ماتریس انتقال

$$\begin{cases} I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'} = I_{max} + I_{min} \\ I_x I_y - I_{xy}^2 = I_{x'} I_{y'} - I_{x'y'}^2 = I_{max} \cdot I_{min} \end{cases}$$

روابط فوق روابط مهم است . (روش تستی)

۲) روش انتقال محور

$$[I'] = [t][I][t]^T \quad ①$$

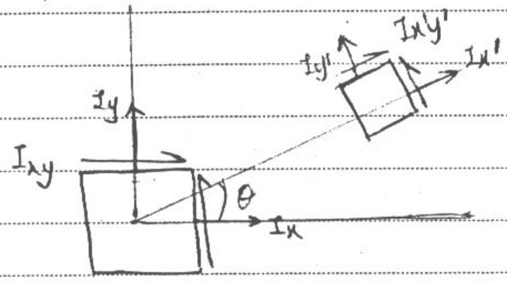
$$\begin{bmatrix} I_{x'} & I_{x'y'} \\ I_{y'x'} & I_{y'} \end{bmatrix} = [t] \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix} [t]^T$$

	x	y
x'	$\cos\theta$	$\sin\theta$
y'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} I_{x'} & I_{x'y'} \\ I_{y'x'} & I_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

از حل این ماتریس روابط روش ۱ نیز حاصل می‌شوند .

بحث کلی :



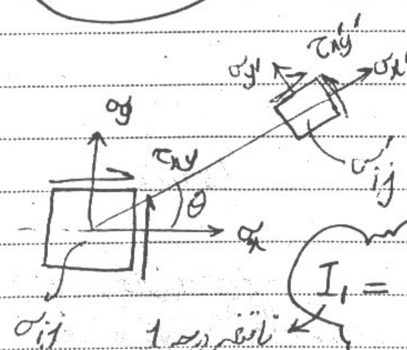
روش اول :

$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = I_y \cos^2\theta + I_x \sin^2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

اینها برای max , min نیست .



روش دوم) روش ماتریس انتقال

۹۰٪ مسائل با این فرمولها حل می‌شوند .

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_1 + \sigma_2$$

ناتغییر درجه 1

مهم

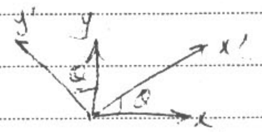
$$I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_{x'} \sigma_{y'} - \tau_{x'y'}^2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

Subject: ۳۶
Year. Month. Date. ( )

$$\boxed{\left[\sigma'_{ij}\right] = [t]\left[\sigma_{ij}\right][t]^T}$$ مهم

ماتریس انتقال

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix} = [t]\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}[t]^T$$



	x	y
x'	l_x	l_y
y'	m_x	m_y

cos زاویه بین محور x' با x

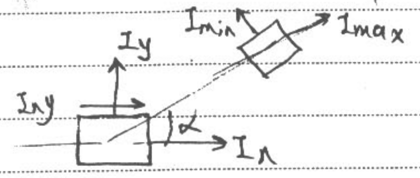
cos زاویه بین محور y' با y

	x	y
x'	$\cos\theta$	$\sin\theta$
y'	$\cos(90+\theta)$	$\cos\theta$

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[t]^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

روش سوم : احتمالاً ماکزیمم ممان دوم سطح (I_{max}) یا مینیمم ممان دوم سطح (I_{min}) و همچنین زاویه آن یعنی α مجهول است



روش تستی :
$$I_x + I_y = I_{max} + I_{min}$$

$$I_x \cdot I_y - I_{xy}^2 = I_{max} \cdot I_{min}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$[I] = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix}$$

محاسبه I_{min} و I_{max} :

$$\begin{vmatrix} I_x - I & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y - I \end{vmatrix} = 0$$

$$I^2 + AI + B = 0$$

از ریشه‌های این معادله I_{max} و I_{min} استخراج می‌شود:

$$I_{max,\,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$ زاویه

PAPCO