# انتگرال گیری

در این فصل به انتگرال‌گیری عددی می‌پردازیم.برای این منظور ما روش سیمپسُن[1] و ذوذنقه‌ای را بررسی می‌کنیم.زیرا این روش‌ها ساده‌اند و نیز ایده‌ی خوبی از چگونگی عملکرد الگوریتم‌های انتگرال گیری در اختیار ما می‌گذارند.سایر الگوریتم‌ها را فقط مطرح می‌کنیم و برخی از خطاهای تخمینی آنها را یادآور می‌شویم.

## ۱.۰ مسأله: انتگرال گیری از یک منحنی(طیف)

در یک آزمایش،$\frac{dN(t)}{dt}$،تعداد ذرات وارد شده به یک شمارشگر بر واحد زمان،به عنوان تابعی از زمان اندازه‌گیری شده است.مسأله‌ی شما این است که برای به دست آوردن تعداد ذرات وارد شده به شمارشگر در ثانیه‌ی اول،$N(۱)$،از این منحنی انتگرال گیری کنید:

$$N(۱) = \int_{۰}^{۱} \frac{dN(t)}{dt}(t)dt. \qquad (۱)$$

## ۲.۰ مدل:چهارضلعی سازی و جمع کردن آنها

ممکن است زیرکی خاصی لازم باشد تا به طور تحلیلی یک انتگرال را محاسبه کنیم،اما این کار به کمک کامپیوتر تقریباً سرراست است.تعریف ریمانی یک انتگرال حاصلجمع مساحت مستطیل‌هایی با عرض $h$ است هنگامی که به طور حدی به صفر میل می‌کند:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{h\to ۰} [h \sum_{i=۱}^{\frac{b-a}{h}} f(x_i)] \qquad (۲)$$

در مسأله‌ی خاص مورد نظر ما $f$ به عنوان تابعی از زمان،$f(x) = \frac{dN(t)}{dt}$،مطرح است.

یک روش متداول برای اندازه‌گیری عددی مساحت این است که تعداد چهارضلعی‌های مشخصی که زیر منحنی نمودار این تابع قرار می‌گیرند را بشماریم.به همین دلیل انتگرال گیری عددی را چهار ضلعی سازی عددی نیز می‌گویند.

انتگرال یک تابع مثل $f(x)$ به طور تقریبی و به صورت عددی با جمع بستن روی چهارضلعی‌ها به صورت زیر است:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \sum_{i=۱}^{N} f(x_i)w_i. \qquad (۳)$$

در این مثال،$f$ در $N$ نقطه درون بازه‌ی $[a,b]$ سنجیده شده است،و تابع $f_i = f(x_i)$ در هرجمله در ضریب سنجه‌ی $w_i$ ضرب شده و جملات باهم جمع شده‌اند. به طور کلی عبارت (3) هنگامی کاملاً صحیح است که $N \longrightarrow \infty$.بنابراین فقط برای دسته‌های مشخصی از توابع با $N$ محدود این پاسخ دقیق است.

الگوریتم‌های انتگرال گیری مختلف به روش‌های مختلفی از انتخاب نقاط و ضرایب سنجه منجر می‌شوند.به طور کلی هرچه قدر $N$ بزرگتر می‌شود دقت افزایش می‌یابد تا اینکه خطای گردکردن این افزایش را محدود می‌کند.از آنجایی که

[1] Simpson

«بهترین» تقریب به رفتار بخصوص تابع $f(x)$ بستگی دارد،هیچ تقریب عمومی بهینه‌ای وجود ندارد. در واقع تعدادی طرح انتگرال گیری خودکار در زیربرنامه‌های کتاب‌خانه‌ها از یک روش به روش دیگر آزمایش می‌شوند تا بهترین طرح انتخاب شود.

در ساده‌ترین طرح انتگرال گیری،انتگرالده به کمک چند جمله از بسط تیلور تابع $f$ تقریب زده می‌شود و سپس این جملات انتگرال گیری می‌شوند.اگر انتگرالده در بازه‌های متوالی رفتار غیر معمولی داشته باشد،جملات باید دقیق و دقیق‌تر شوند.در این روش که به روش نیوتن_کوتس[۲] مشهور است بازه‌ی انتگرال گیری همان گونه که در شکل (۱-۴) نشان داده شده است به زیربازه‌های مساوی تقسیم می‌شود و انتگرالده در نقاط $x_i$ محاسبه می‌شود.این اگوریتم‌ها شامل قاعده‌ی ذوذنقه‌ای(مرتبه اول) و قاعده‌ی سیمپسُن(مرتبه دوم) هستند.ضرایب سنجه‌ی متناظر با هریک در جدول(۴_۱) داده شده است.بکارگیری این قواعد آسان است و چنانچه انتگرالده در امتداد فاصله‌های یکسان نقاط جدول‌بندی شده باشد،این قواعد،انتخاب منطقی ماست.

اگر نقاط مقید نباشند که به فاصله‌ی یکسان قرار بگیرند،قواعد انتگرال گیریِ دقیق‌تری نیز ممکن هستند.روش چهارضلعی سازی گاوسی فقط با ارزیابی $N$ برای انتگرال گیری دقیق از حاصل‌ضربِ یک تابع در یک چند جمله‌ای از درجه‌ی $۲N-۱$ توانایی خلاقانه‌ای دارد.این کار از ارزیابی حاصلجمع (3) سخت‌تر نیست و بیانگر این نکته است که چرا بعضی از محققان محاسباتی کار، کارهای روزمره‌ی گاوسی خود را با خودشان حمل می‌کنند.

به طور کلی نتایج حاصل از روش گاوسی نسبت به روش فاصله‌گذاری مساوی ممتازتر است البته تا زمانی که هیچ تکینگی در انتگرالده و مشتقش وجود نداشته باشد.در مورد اخیر استفاده از قاعده‌ی سیمپسُن ممکن است از وقوع یک فاجعه جلوگیری کند اما بهتر است قبل از این که هرگونه عمل چهارضلعی سازی عددی را انجام بدهید تکینگی را به طور تحلیلی از انتگرال گیری رفع کنید.

ممکن است که این کار را با شکست بازه‌ی اتگرال گیری به زیربازه‌هایی که تکینگی‌ها در نقاط انتهایی آنها قرار بگیرند،یعنی جایی که نقطه‌ی گاوس هرگز اتفاق نمی‌افتد و یا با تغییر متغیر انجام دهید مثلاً:

$$\int_{-۱}^{۱} |x| f(x)dx = \int_{-۱}^{۰} f(-x)dx + \int_{۰}^{۱} f(x)dx, \qquad (۴)$$

$$\int_{۰}^{۱} x^{۱/۳}dx = \int_{۰}^{۱} ۳y^{۳}dy, (y = x^{۱/۳}), \qquad (۵)$$

$$\int_{۰}^{۱} \frac{f(x)dx}{\sqrt{۱-x^{۳}}} = ۲\int_{۰}^{۱} \frac{f(۱-y^{۲})dy}{\sqrt{۲-y^{۲}}}, (y^{۲} = ۱-x). \qquad (۶)$$

به هر حال اگر انتگرالده‌ی شما تغییرات بسیار کندی در بعضی مناطق دارد،شما می‌توانید انتگرال گیری را به وسیله‌ی تغییر به متغیری که آن ناحیه را فشرده می‌کند تسریع کنید و چند نقطه آنجا قرار دهید.برعکس اگر انتگرالده تغییرات زیادی در بعضی مناطق دارد،ممکن است شما بخواهید به متغیری تغییر بدهید که آن ناحیه را تا جایی بسط می‌دهد که مطمئن شوید نوسانات حذف می‌شوند.

## ۳.۰ روش: قاعده‌ی ذوذنقه‌ای

قواعد انتگرال گیری ذوذنقه‌ای و سیمپسُن مقادیر $f(x)$ را در نقاطی که در فاصله‌ی یکسان روی محور $x$ واقعند استفاده می‌کنند.آنها $N$ نقطه‌ی $(i = ۱, ..., N), x_i$،را که به طور یکسان به فاصله‌ی $h$ از هم در بازه‌ی انتگرال گیری $[a, b]$ واقعند ونیز نقاط انتهایی را استفاده می‌کنند.یعنی تعداد $N-۱$ فاصله به طول $h$ وجود دارند:

$$h = \frac{b-a}{N-۱}, \qquad (۷)$$

$$x_i = a + (i-۱)h, i = ۱, N. \qquad (۸)$$

[۲] Newton-Cotes

به دو نکته توجه کنید اول اینکه ما شمارش خود را از $i = ۱$ شروع می‌کنیم و دوم اینکه در روش سیمپسُن تعداد فردی نقطه $N$ لازم دارد.

در شکل (۲-۴) می‌بینیم که در قاعده‌ی ذوذنقه‌ای ما بازه‌ی انتگرال گیری $i$ را می‌گیریم و در آن ذوذنقه‌ای به عرض $h$ بنا می‌کنیم.این کار $f(x)$ را به وسیله‌ی یک خط راست در بازه‌ی $i$ تقریب می‌زند و مقدار میانگین ارتفاع $\frac{f_i+f_{i+۱}}{۲}$ را به عنوان مقدار $f$ در همان بازه در نظر می‌گیرد.بنابراین مساحت این ذوذنقه برابر است با:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \simeq \frac{h(f_i+f_{i+۱})}{۲} = \frac{۱}{۲}hf_i + \frac{۱}{۲}f_{i+۱}. \quad (۹)$$

که از مقایسه‌ی این رابطه با رابطه‌ی (3) می‌بینیم که $N = ۲$ نقطه با $w_i = \frac{۱}{۲}$ حاصل می‌شود.

به منظور اعمال قاعده‌ی ذوذنقه‌ای به تمام بازه‌ی $[a, b]$ ما سهم هر زیربازه را باهم جمع می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{۱}{۲}f_۱ + hf_۲ + hf_۳ + ... + hf_{N-۱} + \frac{۱}{۲}f_N. \quad (۱۰)$$

خواهید دید که چون هر نقطه‌ی داخلی دوبار شمرده می‌شود،بنابراین ضریب سنجه‌ی آن $h$ است درحالی که نقاط انتهایی فقط یک‌بار شمرده می‌شوند بنابراین ضریب سنجه برای آنها $\frac{h}{۲}$ است.در جملات رابطه‌ی انتگرال گیری استانداردمان (۳-۴) داریم:

$$w_i = \{\frac{h}{۲}, h, ..., h, \frac{h}{۲}\}. \quad (۱۱)$$

## ۴.۰ روش: قاعده‌ی سیمپسُن

در قاعده‌ی سیمپسُن ما تابع $f(x)$ را به وسیله‌ی یک سهمی تقریب می‌زنیم:

$$f(x) \approx \alpha x^۲ + \beta x + \gamma, \quad (۱۲)$$

برای هر بازه،همچنان باید فاصله‌ها یکسان باشد(زیربازه‌ها باهم مساوی باشند).مساحت هر قسمت برابر است با مساحت این سهمی یعنی:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} (\alpha x^۲ + \beta x + \gamma)dx = \frac{\alpha x^۳}{۳} + \frac{\beta x^۲}{۲} + \gamma x|_{x_i}^{x_i+h} \quad (۱۳)$$

این کار معادل است با انتگرال گیری از سری تیلور فقط تا جمله‌ی مربعی.برای ارتباط دادن $\gamma, \beta, \alpha$ به تابع یک بازه از ـ۱ تا۱ در نظر می‌گیریم پس داریم:

$$\int_{-۱}^{۱} (\alpha x^۲ + \beta x + \gamma)dx = \frac{۲\alpha}{۳} + ۲\gamma. \quad (۱۴)$$

اما توجه می‌کنیم که:

$$f(-۱) = \alpha - \beta + \gamma, f(۰) = \gamma, f(۱) = \alpha + \beta + \gamma, \Longrightarrow \alpha = \frac{f(۱)+f(-۱)}{۲} - f(۰), \beta = \frac{f(۱)+f(-۱)}{۲}, \gamma = f(۰) \quad (۱۵)$$

در این روش ما می‌توانیم انتگرال را به عنوان حاصلجمع ضرایب سنجه روی مقادیر تابع در سه نقطه توضیح دهیم:

$$\int_{-۱}^{۱} (\alpha x^۲ + \beta x + \gamma)dx = \frac{f(-۱)}{۳} + \frac{۴f(۰)}{۳} + \frac{f(۱)}{۳}. \quad (۱۶)$$

از آنجایی که سه مقدار از تابع مورد نیاز است،ما این نتیجه را به وسیله‌ی محاسبه‌ی انتگرال روی دو بازه‌ی مجاور برای مسئله‌ی خودمان تعمیم می‌دهیم بنابراین ما مقدار تابع را در دو نقطه‌ی انتهایی و ابتدایی و نیز نقطه‌ی وسط نیاز داریم:

$$\int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx + \int_{x_i-h}^{x_i} f(x)dx \simeq \frac{h}{۳}f_{i-۱} + \frac{۴h}{۳}f_i + \frac{h}{۳}f_{i+۱}. \qquad (۱۷)$$

برای به کارگیری قاعده‌ی سیمپسُن لازم است انتگرال گیری اولیه روی یک زوج بازه باشد که ایجاب می‌کند تعداد بازه‌ها زوج یا $N$ فرد باشد. که برای کل بازه،سهم تمام زوج زیربازه‌ها باهم جمع کنیم البته نقاط ابتدایی و انتهایی را دوبار می‌شماریم:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{۳}f_۱ + \frac{۴h}{۳}f_۲ + \frac{۲h}{۳}f_۳ + \frac{۴h}{۳}f_۴ + ... + \frac{۴h}{۳}f_{N-۱} + \frac{h}{۳}f_N. \qquad (۱۸)$$

که با توجه به (3) داریم :

$$w_i = \{\frac{h}{۳}, \frac{۴h}{۳}, \frac{۲h}{۳}, \frac{۴h}{۳}, ..., \frac{۴h}{۳}, \frac{h}{۳}\}. \qquad (۱۹)$$

جمع کردن این ضرایب سنجه آزمودن انتگرال شما را تضمین می‌کند:

$$\sum_{i=۱}^{N} w_i = (N-۱)h. \qquad (۲۰)$$

به خاطر داشته باشید که $N$ باید فرد باشد.

## ۵.۰ ارزیابی: خطای انتگرال گیری،تحلیلی

به طور کلی،شما می‌خواهید یک قاعده‌ی انتگرال گیری را انتخاب کنید که با استفاده از کمترین تعداد نقاط انتگرال گیری پاسخی دقیق بدهد.برای خطای تقریب صریح یا خطای الگوریتمی $E$ و خطای نسبی $\epsilon$ به وسیله‌ی بسط تیلور $f(x)$ حول نقطه‌ی میانی بازه‌ی انتگرال گیری یک احساسی به دست می‌آوریم.سپس این خطا را در تعداد بازه‌های $N$ ضرب می‌کنیم تا خطا را برای تمام بازه‌ی $[a,b]$ تخمین بزنیم.برای قواعد ذوذنقه‌ای و سیمپسُن این نتایج حاصل می‌شود:

$$E_t = O(\frac{|b-a|^۳}{N^۲})f^{(۲)}, \qquad (۲۱)$$

$$E_s = O(\frac{|b-a|^۵}{N^۴}f^{(۴)}, \qquad (۲۲)$$

$$\epsilon_{t,s} = \frac{E_{t,s}}{f}. \qquad (۲۳)$$

می‌بینیم که جمله‌ی مشتق سوم در قاعده‌ی سیمپسُن حذف می‌شود(خیلی شبیه به روش اختلاف مرکزی در دیفرانسیل گیری).معادلات (21)و(22) به وسیله‌ی چگونگی افزایش تحریف یک قاعده‌ی انتگرال گیری که منجر به خطا می‌شود روشن می‌شوند که این خطا در توان‌های بالاتر $N$ کاهش می‌یابد،البته هنوز با مشتقات بالاتر $f$ متناسب است،در نتیجه،برای بازه‌های کوچک و توابع با مشتقات خوش‌رفتار$f(x)$، قاعده‌ی سیمپسُن باید بسیار سریع‌تر از قاعده‌ی ذوذنقه‌ای همگرا شود.

به طور خیلی خاص فرض می‌کنیم که بعد از $N$ مرحله خطای نسبی گردکردن،تصادفی و به شکل زیر است:

$$\epsilon_{ro} = \sqrt{N}\epsilon_m \qquad (۲۴)$$

که در آن $\epsilon_m$ دقت ماشین($\sim ۱۰^{-۷}$ برای دقت معمولی و $\sim ۱۰^{-۱۵}$ برای دقت مضاعف).ما می‌خواهیم $N$ای را به دست آوریم که خطای کل را که حاصلجمع خطای تقریب و خطای گردکردن است کمینه کنیم:

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_{ro} + \epsilon_{approx}. \quad (۲۵)$$

و این زمانی اتفاق می‌افتد که دو خطای نسبی تقریباً بزرگی یکسانی داشته باشند،یعنی:

$$\epsilon_{ro} = \epsilon_{approx} = \frac{E_{trap,simp}}{f}. \quad (۲۶)$$

برای ادامه‌ی کار به منظور پیدا کردن مقدار بهینه‌ی $N$ برای یک تابع عام ما مقیاس اندازه‌ی تابع را با فرض زیر بنا می‌کنیم:

$$\frac{f^{(n)}}{f} \approx ۱, \quad (۲۷)$$

و نیز مقیاس طول را با فرض

$$b - a = ۱ \Rightarrow h = \frac{۱}{N} \quad (۲۸)$$

در نظر می‌گیریم.

تخمین (26) هنگامی که روی قاعده‌ی ذوذنقه‌ای اعمال شود نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\sqrt{N}\epsilon_m \approx \frac{f^n(b-a)^۳}{fN^۲} = \frac{۱}{N^۲}, \quad (۲۹)$$

$$\Rightarrow N \approx \frac{۱}{(\epsilon_m)^{۲/۵}}. \quad (۳۰)$$

از آنجایی که دقت ماشین $\epsilon_m$ برای دقت‌های معمولی و مضاعف متفاوت است،مقدار بهینه‌ی تعداد مراحل $N$ برای قاعده‌ی ذوذنقه‌ای مقادیر زیر را دارد:

$$N = \frac{۱}{h} = \begin{cases} (\frac{۱}{۱۰^{-۷}})^{۲/۵} = ۶۳۱ (for single prcision), \\ (\frac{۱}{۱۰^{-۱۵}})^{۲/۵} = ۱۰^۶ (for double precision), \end{cases} \quad (۳۱)$$

بنابراین خطاهای متناظر برابرند با:

$$\epsilon_{ro} \approx \sqrt{N}\epsilon_m = \begin{cases} ۳\times۱۰^{-۶}, (for single prcision), \\ ۱۰^{-۱۲}, (for double precision), \end{cases} \quad (۳۲)$$

و هنگامی که تخمین (26) به قاعده‌ی سیمپسُن اعمال شود نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\sqrt{N}\epsilon_m = \frac{f^{(۴)}(b-a)^۵}{fN^۴} = \frac{۱}{N^۴}, \quad (۳۳)$$

$$\Rightarrow N = \frac{۱}{(\epsilon_m)^{۲/۹}}. \quad (۳۴)$$

که برای دقت معمولی و مضاعف منجر به رابطه‌ی زیر می‌شود:

$$N = \frac{۱}{h} = \begin{cases} (\frac{۱}{۱۰^{-۷}})^{۲/۹} = ۳۶, (for single prcision), \\ (\frac{۱}{۱۰^{-۱۵}})^{۲/۹} = ۲۱۵۴, (for double precision), \end{cases} \quad (۳۵)$$

اکنون خطاهای متناظر برابرند با:

$$\epsilon_{ro} \approx \sqrt{N}\epsilon_m = \begin{cases} ۶\times۱۰^{-۷}, (for single prcision), \\ ۵\times۱۰^{-۱۴}, (for double precision), \end{cases} \quad (۳۶)$$

این نتایج نشان می‌دهند:

- قاعده‌ی سیمپسُن پیشرفته‌تر از قاعده‌ی ذوذنقه‌ای است.
- به دست آوردن یک خطای نزدیک به دقت ماشین در روش سیمپسُن(و نیز با سایر الگوریتم‌های انتگرال گیری مراتب بالاتر)امکان‌پذیر است.
- به دست آوردن بهترین تقریب عددی برای یک انتگرال به وسیله‌ی قرار دادن $N \to \infty$ به دست نمی‌آید اما با $N \leq ۱۰۰۰$ به دست می‌آید.

## ۶.۰ روش:چهارضلعی سازی گاوسی

رسم بر این است که بازنویسی فرمول اساسی انتگرال گیری (3) به شکلی است که در آن ضریب سنجه‌ی $w(x)$ را از انتگرالده جدا می‌کنیم:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \equiv \int_{\alpha}^{\beta} W(x)F(x)dx \approx \sum_{i=۱}^{N} w_i F(x_i). \qquad (۳۷)$$

در رهیافت چهارضلعی سازی گاوسی،$N$ ضریب سنجه‌ی $w_i$ طوری انتخاب شده‌اند که اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $۲N - ۱$ باشد خطای تقریب واقعاً صفر می‌شود.برای به دست آوردن این بهینه‌سازی باورنکردنی،نقاط $x_i$ طوری قرار می‌گیرند که یک آرایش بخصوص روی بازه‌ی $[a, b]$ ایجاد کنند.(اگر $f$ فقط به واسطه‌ی جدولی با فاصله‌گذاری یکسان داده شده است، روش سیمپسُن یا ذوذنقه‌ای ساده‌تر است اگرچه هر الگوریتم انتگرال گیری‌ای می‌تواند استفاده شود).

به طور کلی اگر $f(x)$ هموار است یا می‌تواند به وسیله‌ی فاکتور $w(x)$ هموار شود،الگوریتم‌های گاوسی دقت بیشتری نسبت به روش‌هایی با مراتب پائین‌تر دارند،یا به طور معکوس، با نقاط کمتری دقتی مشابه با آن روشها دارند.اگر تابعی که انتگرال گیری می‌شود هموار نیست،استفاده از یک روش مرتبه بالا همچون چهارضلعی سازی گاوسی ممکن است به دقت کمتری منجر شود.گاهی تابع ممکن است در نواحی مختلفی رفتارهای متفاوتی داشته باشد و به این خاطر هموار نباشد در چنین مواردی بهتر است هر قسمت را به طور مجزا به کمک یک روش انتگرال گیری مرتبه پائین انتگرال گیری کرد و در نهایت پاسخ‌ها را جمع زد.در واقع بعضی از زیرروال‌های انتگرال گیری «تیز» برای تعداد بازه‌های مورد استفاده و نوع قاعده انتگرال گیری در هر بازه تصمیم می‌گیرند.

تمام قواعدی که در جدول (۲-۴) نمایش داده شده‌اند از نوع گاوسی با شکل عمومی (37)هستند.می‌توانیم ببینیم که در یکی از موارد تابع وزنی(ضریب سنجه) نمایی،در مورد دیگری گاوسی،و در بسیاری از موارد یک تابع انتگرال پذیر مخصوص است.بر خلاف قواعدی که برای نقاط با فاصله‌ی یکسان داشتیم،هیچ نقطه‌ی انتگرال گیری در انتهای بازه‌ها وجود ندارد اما هنوز تمام نقاط و توابع وزنی با تغییر $N$ تغییر می‌کنند.

مقادیر $\beta, \alpha$ در (37) برای تعریف هر طرح انتگرال گیری کمک می‌کند.اگر انتگرالی که می‌خواهید بگیرید فراتر از حد $(a, b)$ باشد که با $(\alpha, \beta)$ متفاوت است، شما باید $(a, b)$ را به کمک یکی از روش‌های گفته شده در زیر روی $(\alpha, \beta)$ پیاده کنید.

اگرچه بحث مفصل را به مراجع دیگر مربوط می‌دانیم اما توجه می‌کنیم که برای انتگرال گیری گاوسی معمولی(گاوس-لژاندر) نقاط $x_i$ باید $N$ صفر(ریشه)از چندجمله‌ای لژاندر، با وزن‌هایی مرتبط با مشتقات آن باشند:

$$P_N(x_i) = ۰, w_i = \frac{۲}{(۱ - x_i^۲)[P'_N(x_i)]^۲}. \qquad (۳۸)$$

### ۱.۶.۰ مقیاس‌بندی با قواعد انتگرال گیری

قرارداد استاندارد (3) برای هر بازه‌ی عمومی $[a, b]$ به صورت

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \sum_{i=۱}^{N} f(x_i)w_i. \qquad (۳۹)$$

است.اما هنگامی که نقاط و وزن‌ها$(y_i, w_i')$ برای انتگرال گیری با حد ثابت(همچون روش گاوسی)، پارامترها باید بازه‌ی گاوسی $[a, b]$ را مقیاس‌بندی کنند.در اینجا چند نمونه‌ی مفید را ذکر می‌کنیم:

در مقیاس‌بندی‌های زیر،$(y_i, w_i')$ها نقاط ابتدایی گاوسی هستند و وزنها نیز برای بازه‌ی $[۱, -۱]$ آورده شده‌اند و ما می‌خواهیم به $x$ مقیاس کنیم.

نقطه‌ی میانی $\frac{A+B}{۲} = [-۱, ۱] \to [A, B]$,

$$x_i = \frac{B+A}{۲} + \frac{B-A}{۲} y_i \tag{۴۰}$$

$$\Rightarrow \int_A^B f(x)dx = \frac{B-A}{۲} \int_{-۱}^{۱} f[x(y)]dy \tag{۴۱}$$

$$\Rightarrow w_i = \frac{B-A}{۲} w_i' \tag{۴۲}$$

نقطه‌ی میانی $A = [۰ \to \infty]$,

$$x_i = A\frac{۱+y_i}{۱-y_i}, \tag{۴۳}$$

$$w_i = \frac{۲A}{(۱-y_i)^۲} w_i'. \tag{۴۴}$$

مقیاس با استفاده از $A$ تنظیم می‌شود $[-\infty \to \infty]$,

$$x_i = A\frac{y_i}{۱-y_i^۲}, \tag{۴۵}$$

$$w_i = \frac{A(۱+y_i^۲)}{(۱-y_i^۲)^۲} w_i'. \tag{۴۶}$$

نقطه‌ی میانی $A + ۲B = [B \to \infty]$,

$$x_i = \frac{A+۲B+Ay_i}{۱-y_i}, \tag{۴۷}$$

$$w_i = \frac{۲(B+A)}{(۱-y_i)^۲} w_i'. \tag{۴۸}$$

نقطه‌ی میانی $\frac{AB}{B+A} = [۰ \to B]$,

$$x_i = \frac{AB(۱+y_i)}{B+A-(B-A)y_i}, \tag{۴۹}$$

$$w_i = \frac{۲AB^۲}{(B+A-(B-A)y_i)^۲} w_i', \tag{۵۰}$$

می‌توانید ببینید که اگر حدود انتگرال گیری به سمت بینهایت میل کند،نقاطی با$x$های بزرگ اما نه محدود وجود خواهد داشت.همان طور که تعداد نقاط شبکه $N$ را افزایش می‌دهید بزرگترین $x_i$ بیشتر و بیشتر می‌شود.

## ۷.۰ پیاده‌سازی: انتگرال گیری

برنامه‌ای برای انتگرال گیری عددی با استفاده از قاعده‌ی ذوذنقه‌ای،قاعده‌ی سیمپسُن و چهارضلعی سازی گاوسی بنویسید.برای نمایش بسیار سریع اثرات خطا از دقت معمولی استفاده کنید.

برای این مسأله نزول نمایی را فرض می‌کنیم بنابراین یک پاسخ تحلیلی به شکل زیر وجود دارد:

$$\frac{dN(t)}{dt} = e^{-t} \tag{۵۱}$$

$$N(۱) = \int_{۰}^{۱} e^{-t}dt = ۱ - e^{-۱}. \tag{۵۲}$$

## ۸.۰ ارزیابی: تخمین خطای تجربی

خطای نسبی

$$\epsilon = |\frac{numeric - exact}{exact}|, \tag{۵۳}$$

را برای قواعد ذوذنقه‌ای،سیمپسُن و چهارضلعی‌سازی مربعی مقایسه کنید.

۱. جدولی به شکل زیر بسازید.
$N$ مقدار از ۱۶۰،۸۰،۴۰،۲۰،۱۰،۲،... را بیازمایید.

۲. نموداری شبیه شکل (۳-۴) از $\log_{۱۰}\epsilon$ برحسب $\log_{۱۰}h$ بکشید.توجه کنید که محور عرض‌ها(قائم) تعداد مکان‌های ده‌تایی در خطا را نشان می‌دهد.

۳. از نمودارتان برای مشخص کردن بستگی تابعی تقریبی خطا به تعداد نقاط $N$ استفاده کنید.(توجه کنید که ممکن است قادر نباشید به رژیم خطای گردکردن برای قاعده‌ی ذوذنقه‌ای برسید زیرا خطای تقریب بزرگ‌تر است).

۴. (اختیاری)ببینید پاسخ شما برای دقت مضاعف چگونه تغییر می‌کند.

## ۹.۰ ارزیابی: آزمایش

دو انتگرال زیر را بیازمایید:

$$F_{۱} = \int_{۰}^{۲\pi} \sin(۱۰۰x)dx, F_{۲} = \int_{۰}^{۲\pi} \sin^{x}(۱۰۰x)dx. \tag{۵۴}$$

توضیح دهید که چرا کامپیوتر ممکن است با این انتگرال‌ها مشکل پیدا کند.

## ۱۰.۰ روش: برون‌یابی رومبرگ

به طور مشابه با دیفرانسیل گیری عددی،می‌توانیم از بستگی تابعی‌های شناخته شده‌ی خطا به اندازه‌ی بازه‌ی $h$ برای کاهش خطا در انتگرال گیری استفاده کنیم.برای قواعد ساده شبیه ذوذنقه‌ای و سیمپسُن تخمین‌های تحلیلی(26) را داریم.در حالی که برای روش‌های دیگر ممکن است مجبور باشیم یک وابستگی را مشخص کنیم.مثلاً اگر $A(h)$ و $A(h/۲)$ مقادیر انتگرال‌هایی هستند که به روش ذوذنقه‌ای روی بازه‌ی $h$ و $h/۲$ به دست آمده‌اند، می‌توانیم این انتگرال‌ها را به شکل زیر بسط دهیم:

$$A(h) \approx \int_{۰}^{b} f(x)dx + \alpha h^{۲} + \beta h^{۴} + ..., \tag{۵۵}$$

$$A(\frac{h}{۲}) \approx \int_{۰}^{b} f(x)dx + \frac{\alpha h^{۲}}{۴} + \frac{\beta h^{۴}}{۱۶} + .... \quad (۵۶)$$

درنتیجه ما جمله‌ی $h^{۲}$ را به وسیله‌ی محاسبه و مقایسه حذف می‌کنیم:

$$\frac{۴}{۳}A(\frac{h}{۲}) - \frac{۱}{۳}A(h) \approx \int_{a}^{b} f(x)dx - \frac{\beta h^{۴}}{۴} + .... \quad (۵۷)$$

به وضوح پیداست که این حقه(برون‌یابی رومبرگ[۳]) فقط در صورتی امکان‌پذیر است که جمله‌ی $h^{۲}$ بر خطا چیره شود و سپس باید فقط مشتقات تابع خوش‌رفتار باشند.برون‌یابی مشابهی می‌تواند برای سایر الگوریتم‌ها ساخته شود.

## ۱.۱۰۰۰ فرمول‌های دیگر مشابه با نیوتن- کوتس

در جدول (۱-۴) ضرایب سنجه(وزن‌ها) را برای تعدادی از قواعد بازه‌های معادل نشان داده‌ایم.همان گونه که قاعده‌ی سیمپسُن از دو بازه استفاده می‌کرد قاعده‌ی $\frac{۳}{۸}$ از چهار قانون مقابل و میلنه[۴] استفاده می‌کند.(این‌ها قوانین بازه‌های منفرد هستند و باید باهم ترکیب شوند تا قانونی برای تمام محدوده انتگرال گیری به دست آید.یعنی نقاطی که پایان یک بازه هستند و آغاز بازه‌ی دیگر دوبار وزن می‌شوند). به آسانی می‌توانید تعداد بازه‌های اولیه‌ای که انتگرال گیری می‌شوند را به دست آورید،و به وسیله‌ی جمع کردن وزن‌ها برای هر قانون ببینید که آیا وزن‌ها را درست نوشته‌اید یا نه.این حاصلجمع برابر با انتگرال $f(x) = ۱$ است و باید براب ر با حاصل‌ضرب $h$ در تعداد بازه‌ها باشد (که برابر با $b - a$ می‌شود):

$$\sum_{i=۱}^{N} w_i = h \times N_{intervals} = b - a. \quad (۵۸)$$

[۳] Romberg
[۴] Milne