درس انتقال حرارت (۱) :　　　جلسه اول　۹۰/۷/۱۲

سرفصل مطالب :

۱- مکانیزم های انتقال حرارت ، معادلات مربوط

۲- انتقال حرارت هدایتی ، معادله یک بعدی هدایت ، معادله یک بعدی در مختصات استوانه ای و کره ، هدایت با تولید شار حجمی
انتقال حرارت در سطوح گسترده و عملکرد آنها

۳- انتقال حرارت هدایتی دوبعدی و دائم در مختصات کارتزین ، استوانه ای و کروی - حل عددی مسائل انتقال حرارت

۴- هدایت گذرا در سیستم یکپارچه ، هدایت گذرای یک بعدی و دوبعدی ، حل عددی هدایت گذرا

۵- انتقال حرارت تشعشع ، شدت تشعشع ، تشعشع جسم سیاه و خاکستری ، ضریب شکل و ...

۶- انتقال حرارت جابجایی ، لایه مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی ، جریان آرام و مغشوش ، تشابه اصطکاک و انتقال حرارت
روابط تجربی جریان آرام و مغشوش ، جریان از روی استوانه و کره

۷- مبدل های حرارتی ، انواع مبدل های حرارتی ، مبدل های حرارتی با جریان موازی و مخالف ، روش NTU و ...

مرجع : کتاب انتقال حرارت اینکروپرا

Heat and mass transfer ; incropera

مکانیزم‌های انتقال حرارت:

نکته: انتقال همواره بین دو جسمی صورت می‌پذیرد که با یکدیگر اختلاف دما داشته باشند

در واقع نیروی محرکه انتقال حرارت اختلاف دما می‌باشد.

به عبارتی اگر دو جسم در تعادل گرمایی باشند هیچ انتقال حرارتی بین آن دو صورت نمی‌پذیرد.

مکانیزم‌های انتقال حرارت:

1. هدایتی (Conduction)
2. جابجایی (همرفت) Convection
   - جابجایی اجباری Forced conv.
   - جابجایی آزاد Free conv.
3. تشعشعی (Radiation)

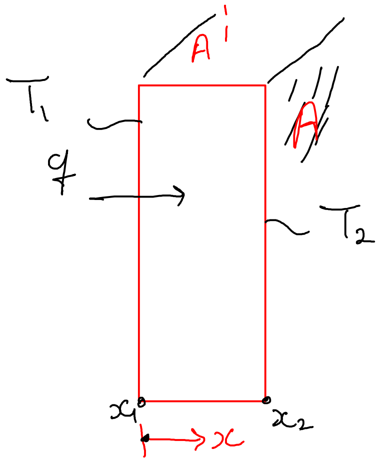
انتقال حرارت هدایتی: در این نوع انتقال حرارت فرض بر این است که انتقال گرما توسط عواملی مانند حرکت تصادفی مولکولها و یا ارتعاشات شبکه کریستالی جامد انجام می‌شود.

تجربه نشان داده است که انتقال حرارت همیشه از ناحیه‌ای که دارای درجه حرارت بالا است به ناحیه‌ای که دارای درجه حرارت پایین‌تر است انتقال می‌یابد. و نرخ انتقال حرارت در واحد سطح متناسب با گرادیان نرمال درجه حرارت است.

q: انتقال حرارت یا شار حرارتی

A: مساحت سطح نرمال

$$\frac{q}{A} \propto \frac{\partial T}{\partial x}$$



$T_1 > T_2$

$T_2 < T_1$

$x_2 > x_1$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \simeq \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} < 0$$

به جنس جسم بستگی دارد.

$$\frac{q}{A} = -K \frac{\partial T}{\partial x}$$

قانون هدایتی فوریه

ضریب انتقال حرارت هدایتی

$K_{\text{جامدات}} > K_{\text{مایعات}} > K_{\text{گازها}}$

q واحد ; W (وات) ; K واحد ; $W/m^{\circ}K$

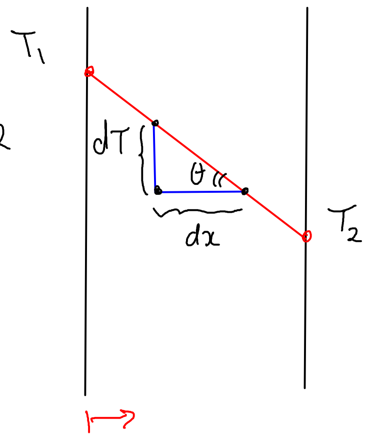
$$q = KA\frac{\partial T}{\partial x}$$

$W \quad ? \quad m^2 \quad \frac{^{\circ}K}{m}$

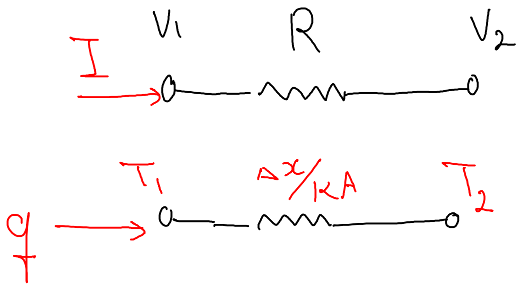
$\xrightarrow{\text{یک بعدی}} \frac{dT}{dx} = \frac{q}{KA} \Longrightarrow dT = \frac{q}{KA}dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} T = \frac{q}{KA}x + c$

نکته: بسیاری از اجسام موجود در طبیعت دارای ضریب انتقال حرارت هدایتی هستند که مقدار آن با تغییرات دما، تغییر میکند

فرض: $T_1 > T_2$



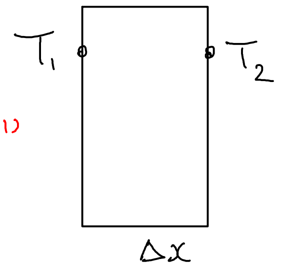
$$tg\,\theta = \frac{dT}{dx}$$



$$I = \frac{\Delta V}{R} \quad (1^*)$$

$$q = KA\frac{dT}{dx} = KA\frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (1)$$

$$\hookrightarrow q = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{KA}} \quad (2)$$



(1) = (2)

معادل‌سازی جریان الکتریسیته با هدایت حرارتی ;

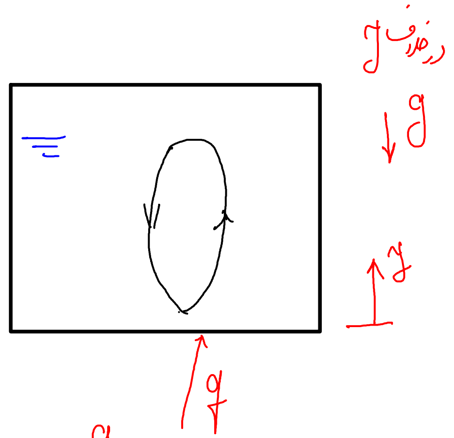
$$\begin{cases} \Delta V \equiv \Delta T \\ R \equiv \frac{\Delta x}{KA} \\ I \equiv q \end{cases}$$

۲- انتقال حرارت جابجایی (همرفت): زمانیکه یک سیال (مایع یا گاز) درمجاورت یک سطح جامد حرکت نماید و بین سطح جامد و سیال اختلاف دما وجود داشته باشد، انتقال حرارت جابجایی خواهیم داشت

جابجایی بر دو نوع است : ۱- جابجایی اجباری (Forced convection) ۲- جابجایی آزاد Free(Natural) convection

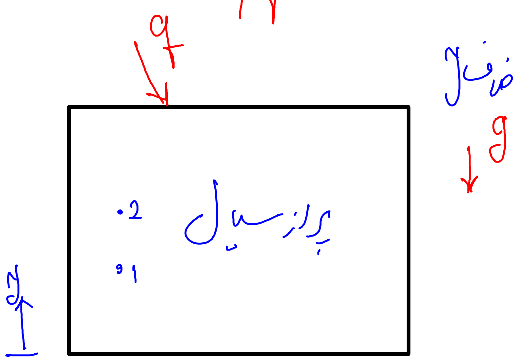
جابجایی اجباری: هنگامیکه سطح جامد در مقابل جریان سیال (مایع یا گاز) (با دمای کمتر یا بیشتر) قرار بگیرد انتقال حرارت بین سیال و جسم جامد صورت می‌پذیرد که به آن انتقال حرارت جابجایی اجباری گفته می‌شود مثل پنکه

جابجایی آزاد: هنگامیکه سیال اطراف جسم در اثر اختلاف دما و در نتیجه اختلاف دانسیته با سیال محیط اطراف جابجا شود، انتقال حرارت آزاد یا طبیعی صورت می‌پذیرد.



$\frac{\partial T}{\partial y} < 0$

$\frac{\partial \rho}{\partial y} > 0$ ⟶ جابجایی آزاد

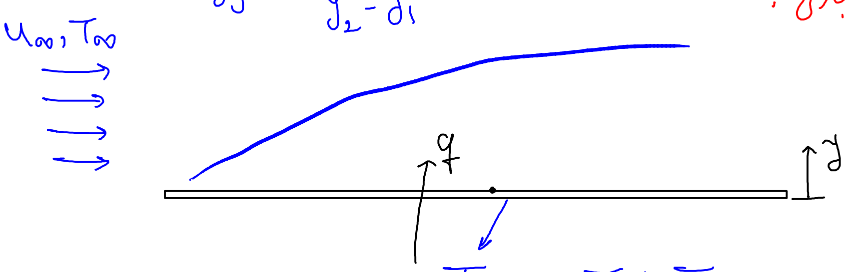


$\frac{\partial T}{\partial y} > 0$

$\frac{\partial \rho}{\partial y} < 0$ ⟶ جابجایی آزاد نخواهیم داشت

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{y_2 - y_1}$$

رابطه حاکم بر انتقال حرارت جابجایی اجباری:



T_s ; $T_s > T_\infty$

در محل تماس سیال به سطح دیواره، طبق قانون عدم لغزش، سرعت سیال برابر صفر است

در نتیجه شروع انتقال حرارت از جسم جامد به سیال بوسیله انتقال حرارت هدایتی خواهد بود.

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} \quad (1)$$

در انتقال حرارت اجباری، قانون سرمایش نیوتن به صورت زیر تعریف می‌شود:

ضریب انتقال حرارت جابجایی

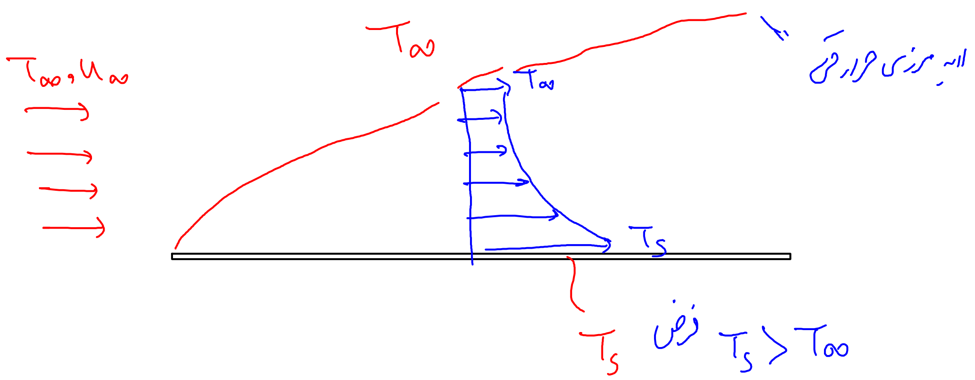
$$q = hA(T_s - T_\infty) \quad (2)$$

h : یک خاصیت سیال یا جسم جامد نمی‌باشد بلکه تابعی از سرعت سیال، نوع سیال و هندسه‌ای که سیال از آن عبور می‌کند دارد.

q انتقال یافته از صفحه به سیال مقداری ثابت می‌باشد در نتیجه روابط (1) و (2) یکسان خواهند بود:

$$-K \cancel{A} \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = h \cancel{A} (T_s - T_\infty) \Rightarrow \boxed{h = \frac{-K \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}} \; *$$

اگر پروفیل دما (تغییرات دما) در سیال معلوم باشد می‌توان با استفاده از رابطه فوق (*) ؛ مقدار h را محاسبه نمود.



$$q = hA(T_s - T_\infty) \longrightarrow h \text{ واحد: } W/m^2.°K \text{ یا } W/m^2°C$$

بنام خدا ؛ انتقال حرارت (۱) ؛ جلسه دوم

انتقال حرارت تشعشعی : (Radiation heat Transfer)

همه اجسام با استفاده از امواج الکترومغناطیس در دمای بیشتر از صفر درجه کلوین از خود انرژی ساطع می‌کنند به این نوع انتقال انرژی، انتقال حرارت تابشی (تشعشعی) گفته می‌شود.

انتقال حرارت تشعشعی به دو پارامتر اصلی بستگی دارد: نوع جسم، دمای جسم

ا) جسم سیاه : بعنوان یک جسم استاندارد پذیرفته شده است و جسمی است که همه انرژی ها را جذب می‌کند و همه انرژی ها را صادر می‌کند.

$$\varepsilon = \frac{\text{انرژی صادر شده از یک جسم به مساحت } dA}{\text{انرژی صادر شده از همان سطح اگر جسم سیاه فرض شود}} \quad ; \quad \text{ضریب صدور}$$

برای یک جسم سیاه، ضریب صدور برابر یک می‌باشد.

$$\alpha = \frac{\text{انرژی جذب شده توسط یک جسم به مساحت } dA}{\text{انرژی برخوردی به جسم}} \quad ; \quad \text{ضریب جذب}$$

برای یک جسم سیاه، ضریب جذب نیز برابر یک می‌باشد.

برای سایر اجسام ضریب جذب و صدور کوچکتر از یک می‌باشد.

جسم خاکستری: جسمی است که ضریب جذب و صدور آن با هم برابر بوده و کوچکتر از یک می‌باشد

اگر جسم سیاه باشد ; $\alpha = \varepsilon = 1$

اگر جسم خاکستری باشد ; $\alpha = \varepsilon < 1$ — در جسم خاکستری ε و α تابعی از دما می‌باشد

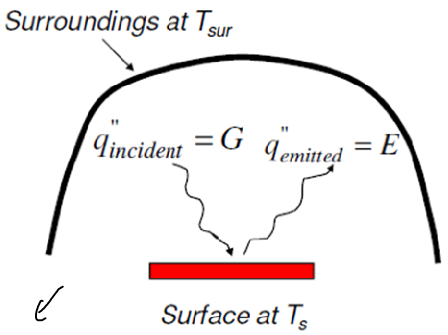
مزیت این انتقال حرارت نسبت به انتقال حرارت هدایتی و جابجایی این است که می‌تواند در خلأ نیز انتقال یابد.

همچنانکه در محیط‌های مختلف نیز انتقال می‌یابد.

مقدار انرژی که یک جسم سیاه دارا می‌باشد با رابطه σT^4 نمایش داده می‌شود.

ثابت استفان بولتزمن: $\sigma = 5.67\times 10^{-8}\ W/m^2.K^4$

$T =$ دمای جسم برحسب کلوین



$$q_r = \varepsilon \sigma A (T_s^4 - T_{sur}^4)$$

برای جسم خاکستری:

$$\begin{cases} \text{انرژی ساطع شده} = \varepsilon \sigma A T_1^4 \\ \text{انرژی جذب شده} = \alpha \sigma A T_2^4 \end{cases}$$

خالص انرژی = انرژی صادر شده − انرژی جذب شده

$$q_r = \varepsilon \sigma T_1^4 - \alpha \sigma T_2^4 \xrightarrow[\alpha = \varepsilon]{\text{برای جسم خاکستری}} q_r = \varepsilon \sigma A(\overset{\text{دمای جسم}}{T_1^4} - \underset{\text{دمای محیط}}{T_2^4})$$

مثال: اگر یک جسم کروی خاکستری با ضریب صدور $\varepsilon = 0.8$ و دمای $20^\circ C$ در داخل کوره‌ای با دمای $1000^\circ C$ قرار گیرد. مقدار انرژی تابشی که جسم به دست می‌آورد را حساب کنید. شعاع کره $= 5\ cm$

$$q_r = 0.8 \times 5.67 \times 10^{-8} \times A(\overset{\text{تقریبی}}{293^4} - 1273^4) = - ----$$

مقدار (−) نشان‌دهنده این است که جسم از طریق انتقال حرارت تابشی، انرژی جذب می‌کند.

مثال: عایق مخصوص دارای قابلیت هدایتی $K = 10^{-3}\ W/m^\circ C$ می‌باشد. چه ضخامتی از این عایق برای اثر نداشتن بر افت درجه حرارت $500^\circ C$ برای صفحه تخت، در انتقال حرارت $400\ W/m^2$ لازم است.

$$q'' = -K \frac{\Delta T}{\Delta x} = -10^{-3} \times \frac{500}{\Delta x} = 400 \Rightarrow \Delta x = 1.25\ cm$$

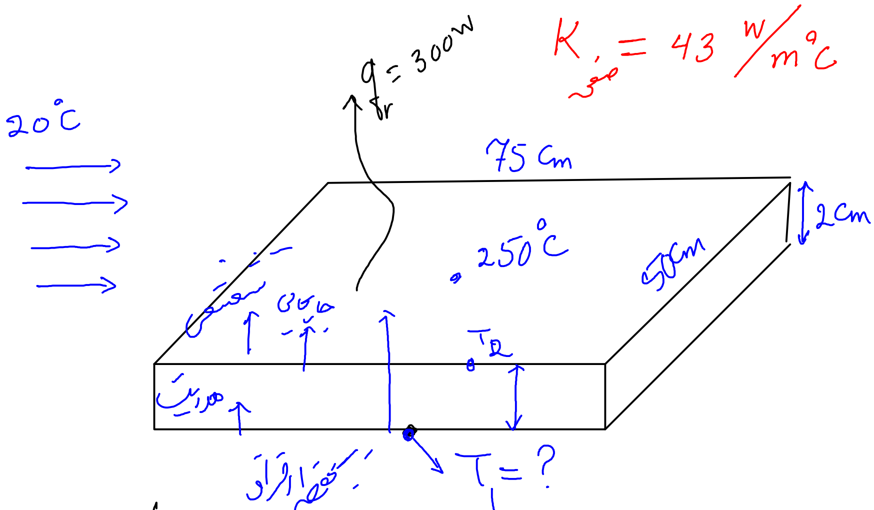
$$q_r = \varepsilon \sigma A(T_1^4 - T_2^4) = \varepsilon \sigma A(T_1^2 + T_2^2)(T_1^2 - T_2^2)$$

$$\Rightarrow q_r = \underbrace{\varepsilon \sigma A(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}_{h_r}(T_1 - T_2)$$

$$q_r = h_r\, A\, (T_1 - T_2)$$

h_r: ضریب انتقال حرارت تابشی

مثال: هوا در دمای 20°C بر روی صفحه‌ای به ابعاد 50×75 cm که درجه حرارت آن 250°C است می‌وزد. ضریب انتقال حرارت جابجایی برابر 25 W/m²°C می‌باشد. مقدار انتقال حرارت را محاسبه کنید. اگر ضخامت ورق 2 cm باشد و 300 W حرارت به واسطه تشعشع انتقال یابد. درجه حرارت داخلی صفحه را محاسبه کنید. $K_{\text{صفحه}} = 43\ W/m°C$



قسمت اول سؤال: $q = hA(T_s - T_\infty) = 25\,(0.5 \times 0.75)\,(250 - 20)$

$$\Rightarrow q = 2156\ W$$

$$q_{\text{دربدنه}} = -KA\frac{\Delta T}{\Delta x} = \text{انتقال حرارت جابجایی} + \text{انتقال حرارت تشعشعی}$$

$$-43 \times (0.5 \times 0.75) \times \frac{\overset{250}{T_2} - T_1}{0.02} = 2156 + 300$$

$$\Rightarrow T_1 = 2456 \times \left(\frac{0.02}{43 \times .75 \times .5}\right) + 250 \Rightarrow \boxed{T_1 = 253.05\ °C}$$

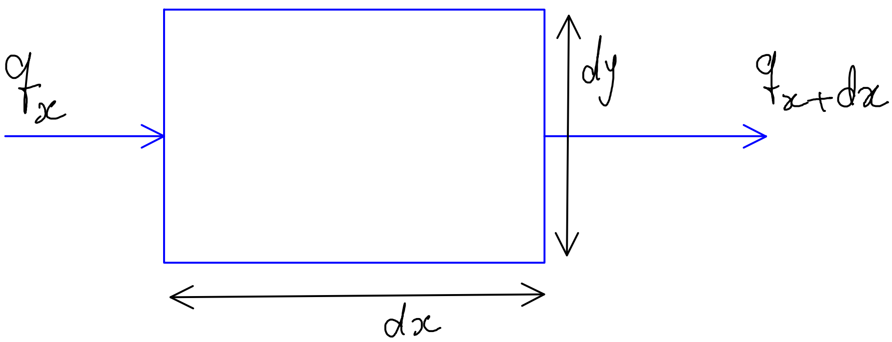
تمارین فصل (۱):

(۱) ، ۹ ، ۱۱ ، ۱۵ ، ۱۹ ، ۲۷ ، ۲۸ ، ۳۲

فصل دوم:

انتقال حرارت هدایتی:

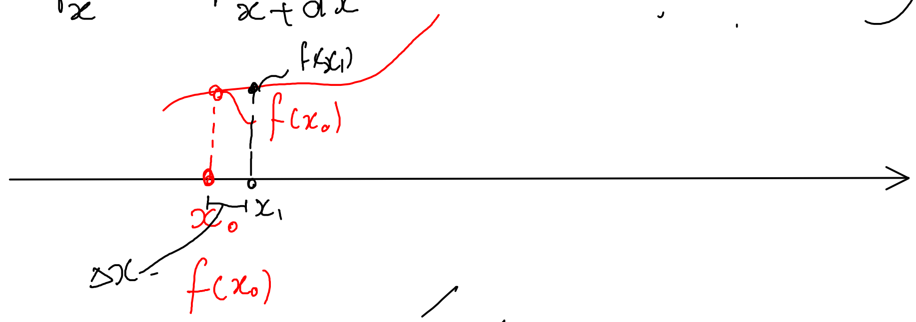
۱- انتقال حرارت هدایتی یک بعدی دائمی:



انرژی خروجی = انرژی ورودی = رابطه بالانس انرژی ←

$$q_x = q_{x+dx} \quad \textbf{(1)}$$

با فرض دائمی بودن ←



$f(x_0+\Delta x)=?$ $\quad x_1 \longrightarrow x_0$ خیلی نزدیک به ; $\quad \Delta x \ll 1$

$$f(x_1) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} \frac{\Delta x}{1!} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots$$

به بسط فوق، بسط تیلور گفته می‌شود.

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{(dx)^2}{2!} + \cdots$$

از مشتق دوم به بعد صرف‌نظر می‌کنیم.

$$\Rightarrow q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad \textbf{(2)}$$

از روابط (۱) و (۲) :

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx$$

رابطه (۱) ← $\parallel$

$$\cancel{q_x} = \cancel{q_x} + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial q_x}{\partial x}dx = 0 \\[2ex] dx \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial q_x}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$q_x = -KA\frac{dT}{dx} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dx}\left(-KA\frac{dT}{dx}\right) = 0}_{\text{معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت هدایت تک بعدی دائمی}} \quad **$$

بسط مشتق گیری
(-) را می‌توان حذف کرد

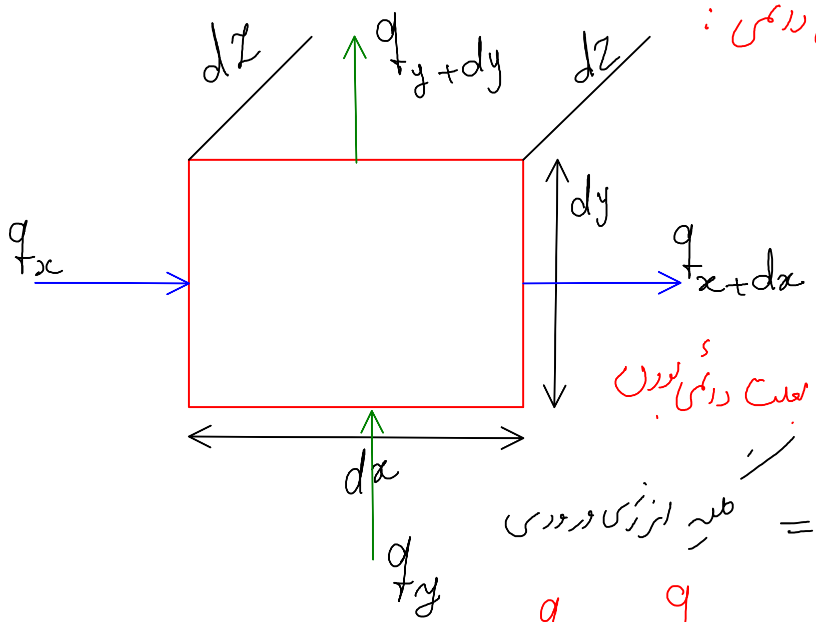
$$\rightarrow \frac{dK}{dx}\left(A\frac{dT}{dx}\right) + \frac{dA}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right) + KA\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

فرض ؛ $\begin{cases} K = \text{ثابت} \\ A = \text{ثابت} \end{cases} \longrightarrow KA\dfrac{d^2T}{dx^2} = 0 \Longrightarrow \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0$

مخالف صفر   مخالف صفر

انتگرال گیری $\Longrightarrow \underbrace{T(x) = ax + b}$

انتقال حرارت هدایت دوبعدی دائمی :



بعلت دائمی بودن

کلیه انرژی ورودی = کلیه انرژی خروجی

$$q_x + q_y = q_{x+dx} + q_{y+dy}$$

بسط تیلور ;

$$\begin{cases} q_{x+dx} = q_x + \dfrac{\partial q_x}{\partial x}\,dx + \cdots \\[2ex] q_{y+dy} = q_y + \dfrac{\partial q_y}{\partial y}\,dy + \cdots \end{cases}$$

جایگذاری در رابطه بالانس انرژی ;

$$\cancel{q_x} + \cancel{q_y} = \cancel{q_x} + \frac{\partial q_x}{\partial x}\,dx + \cancel{q_y} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\,dy$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial q_x}{\partial x}\,dx + \frac{\partial q_y}{\partial y}\,dy = 0$$

$$q_x = -K A_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad ; \quad q_y = -K A_y \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$A_x = dy\,dz \qquad\qquad A_y = dx\,dz$$

جایگذاری $\rightarrow$ $$\frac{\partial}{\partial x}\left(-K\,\cancel{dy}\,\cancel{dz}\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)\cancel{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-K\,\cancel{dx}\,\cancel{dz}\,\frac{\partial T}{\partial y}\right)\cancel{dy} = 0$$

طرفین در (-) ضرب $\Longrightarrow$ $$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0}$$

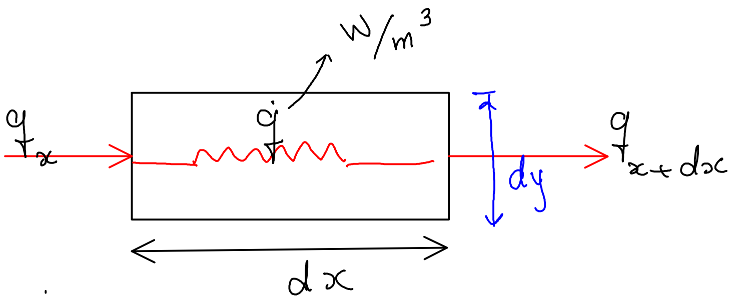
معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت هدایت دائمی دوبعدی با فرض سطح مقطع ثابت در دو راستای x و y

if $K = cte \longrightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0} \longrightarrow$ معادله لاپلاس

$T(x, y)$

بنام خدا : انتقال حرارت (۱) : جلسه سوم

انتقال حرارت هدایتی یک‌بعدی با تولید شار حجمی:



بالانس انرژی در حالت دائمی ; انرژی ورودی + انرژی تولیدی = انرژی خروجی

$$q_x + \dot q\,(dx)(dy)(1) = q_{x+dx}$$

$$\cancel{q_x} + \dot q\,(\cancel{dx})(dy)(1) = \cancel{q_x} + \frac{\partial q_x}{\partial x}\cancel{dx}$$

$$\Rightarrow \dot q\, dy = \frac{\partial q_x}{\partial x} \quad ; \quad q_x = -KA\frac{dT}{dx} \quad ; \quad A = dy \times (1)$$

جایگذاری ; $\dot q\, dy = \frac{d}{dx}\left(-K\, dy\,\frac{dT}{dx}\right)$

در صورت ثابت بودن مقطع اگر $\frac{dy}{dx}=0$; $\dot q\,\cancel{dy} + \cancel{dy}\left(\frac{d}{dx}K\frac{dT}{dx}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right) + \dot q = 0$$

معادله انتقال حرارت هدایت یک بعدی دائمی با تولید شار حجمی $\dot q$ اگر سطح مقطع ثابت باشد.

if $K = const \longrightarrow K\frac{d^2T}{dx^2} + \dot q = 0$ یا $\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot q}{K} = 0$

فرض ; $K = K_0 + aT$ ~ $\begin{cases} K_0 \\ a \end{cases} \longrightarrow$ هر دو ثابت

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right) + \dot q = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dx}\cdot\frac{dT}{dx} + K\frac{d^2T}{dx^2} + \dot q = 0 \quad ; \quad \frac{dK}{dx} = a\frac{dT}{dx}$$

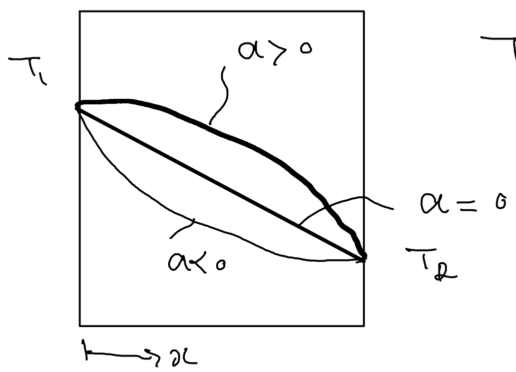
جایگذاری $\rightarrow a\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + K\frac{d^2T}{dx^2} + \dot q = 0$

مثال: هرگاه تغییرات ضریب انتقال حرارت هدایتی یک جسم جامد به صورت $K = K_0 + aT$ بیان شود که K_0 و a ضرایب ثابت و a ممکن است مثبت منفی یا صفر باشد. توزیع دما در حالت دائم برای یک دیوار مسطح برای سه حالت $a>0$ ، $a<0$ و $a=0$ بدست آورید.

معادله حالت دائمی بصورت متغیر بودن K $\longrightarrow$ $$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dT}{dx}\right)=0$$

$$\rightarrow \frac{dK}{dx}\frac{dT}{dx}+K\frac{d^2T}{dx^2}=0\ ;\quad \frac{dK}{dx}=a\frac{dT}{dx}$$

جایگذاری $\longrightarrow$ $$a\left(\frac{dT}{dx}\right)^2+K\frac{d^2T}{dx^2}=0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2}=-\frac{a}{K}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2$$



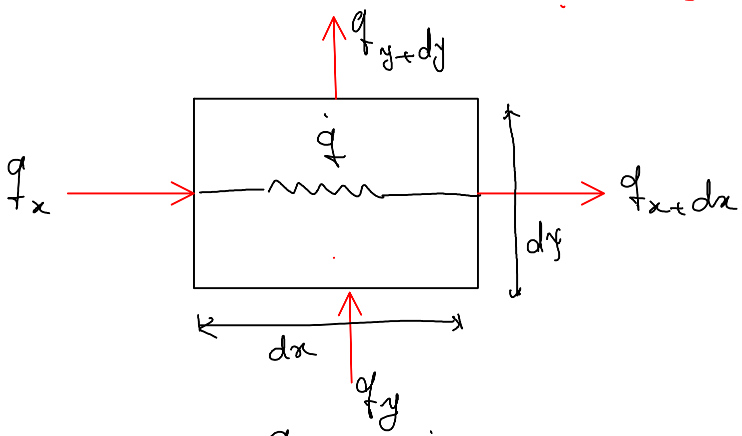
$T_1 > T_2$

$$a=0 \rightarrow \frac{d^2T}{dx^2}=0$$

انتگرال $\rightarrow$ $\dfrac{dT}{dx}=C$

انتگرال $\longrightarrow$ ، $T=\underline{Cx}+b$

معادله انتقال حرارت هدایت دوبعدی با تولید شار حجمی:



بالانس انرژی ؛ $$q_x+q_y+\dot{q}(dx)(dy)(1)=q_{x+dx}+q_{y+dy}$$

$$\dot{q}(dx)(dy)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(KA_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx-\frac{\partial}{\partial y}\left(KA_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy$$

اگر سطح مقطع‌ها ثابت باشد $\dfrac{dy}{dx}=0$ ؛

$A_x=dy(1)$

$A_y=dx(1)$

$$\Rightarrow \dot{q}\,\cancel{(dx)}\cancel{(dy)}=-\cancel{(dx)}\cancel{(dy)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right)-\cancel{(dx)}\cancel{(dy)}\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

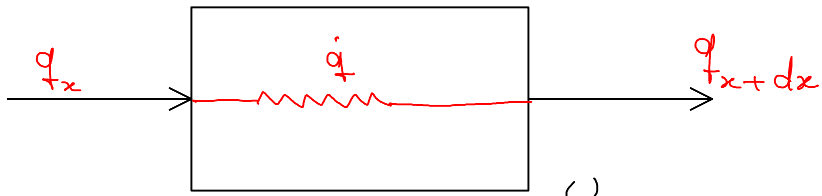
$$\longrightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{\underline{\underline{x}}}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{\underline{\underline{y}}}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\dot{q}=0}$$

تمرین: اگر $K=K_0+aT$: معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت هدایت دوبعدی دائمی را برای یک صفحه مسطح با سطح مقطع ثابت بدست آورید.

if $K = \text{const} \rightarrow \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\dot{q}}{K} = 0$

تمرین: اگر $K_x = K_0 + aT$, $K_y = K_0 + bT$: معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت هدایتی را بدست آورید.

معادله دیفرانسیلی هدایتی یک بعدی غیردائم با چشمه حرارت (شار حجمی)



بالانس انرژی ; انرژی ورودی + انرژی تولیدی = تغییرات انرژی داخلی بر حسب زمان + انرژی خروجی

$$q_x + \dot{q}\,(dx)(dy)(1) = mC\frac{dT}{dt} + q_{x+dx}$$

دانسیته ، گرمای ویژه ، $\rho V = \rho\,(dx)(dy)(1)$

$$\cancel{q_x} + \dot{q}\,(dx)(dy) = \rho C\,(dx)(dy)\frac{dT}{dt} + \cancel{q_x} + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx$$

$$\Rightarrow \dot{q}\,(dx)(dy) = \rho C\,(dx)(dy)\frac{dT}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-K A_x \frac{dT}{dx}\right)dx$$

اگر مقطع ثابت باشد $A_x = (dy)(1)$

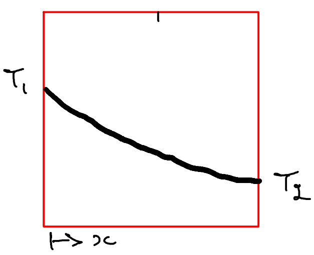
$$\Rightarrow \dot{q}\,\cancel{(dx)}\cancel{(dy)} = \rho C\,\cancel{(dx)}\cancel{(dy)}\frac{dT}{dt} - \cancel{(dx)}\cancel{(dy)}\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{dT}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{dT}{dx}\right) + \dot{q} = \rho C\frac{dT}{dt}}$$ اگر $K \neq \text{const}$

if $K = \text{const} \xRightarrow{\text{یک بعدی}} \dfrac{d^2T}{dx^2} + \dfrac{\dot{q}}{K} = \dfrac{\rho C}{K}\dfrac{dT}{dt}$

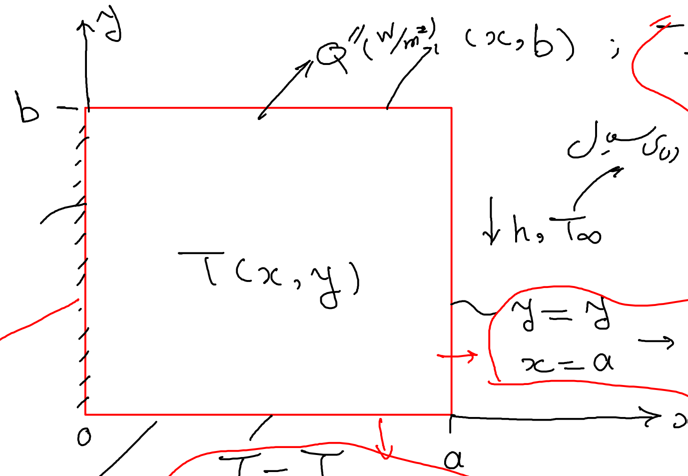
ضریب پخش حرارتی ; $\dfrac{K}{\rho C} = \alpha \Rightarrow \boxed{\dfrac{d^2T}{dx^2} + \dfrac{\dot{q}}{K} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{dT}{dt}}$

سؤال: معلوم کنید دیواره شکل زیر درحال گرم شدن است یا سرد شدن:



$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt}$$

چون تقعر منحنی به سمت T های مثبت (بالا) است، بنابراین مشتق دوم ($\dfrac{d^2T}{dx^2}$) بزرگتر از صفر می‌باشد پس $\dfrac{dT}{dt} > 0$ خواهد بود. یعنی دیواره درحال گرم شدن می‌باشد.



شرایط مرزی

(x,b) ; $-K\dfrac{\partial T(x,b)}{\partial y} = Q''$ $\rightarrow$ $-K\left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{x,b} = Q''$

سیال

$y=y$, $x=a$ $\rightarrow -K\cancel{A}\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{(a,y)} = h\cancel{A}(T_s - T_\infty)$ $\rightarrow$ $-K\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{(a,y)} = h(T_s - T_\infty)$

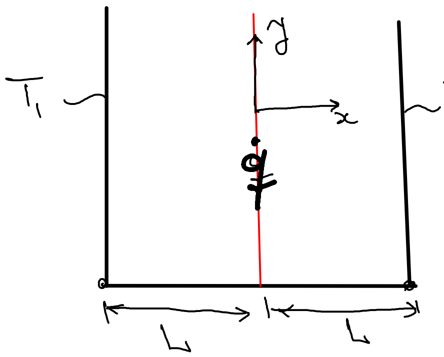
$y=y$, $x=0$: $T(0,y)$ $\rightarrow$ $\dfrac{\partial T(0,y)}{\partial x} = 0$ $\rightarrow$ $\underbrace{KA}_{\neq 0}\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{0,y} = 0$

$x=x$, $y=0$ $\xrightarrow{\text{نوشتن}}$ $T(x,0) = T_1$

$T = T_1$

خاصیت عایق این است که از انتقال حرارت جلوگیری می‌کند ؛ $\dfrac{\partial T}{\partial (\,)} = 0$

مثال ؛ توزیع دما در دیواره شکل نشان داده شده را در حالت دائمی بدست آورید.



$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{K} = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{K}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{K}x + C_1$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} T(x) = -\frac{\dot{q}}{2K}x^2 + \underline{\underline{C_1}}\,x + \underline{\underline{C_2}}$$

شرایط مرزی ;

$$\begin{cases} x=-L \rightarrow T=T_1 \Rightarrow T_1 = -\dfrac{\dot{q}}{2K}L^2 - LC_1 + C_2 & (1) \\ x=L \rightarrow T=T_1 \Rightarrow T_1 = -\dfrac{\dot{q}}{2K}L^2 + LC_1 + C_2 & (2) \end{cases}$$

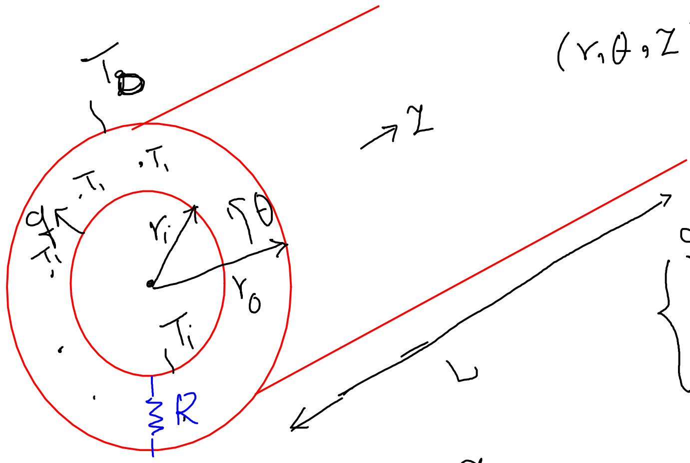
$$-\cancel{\frac{\dot{q}}{2K}}L^2 - LC_1 + \cancel{C_2} = -\cancel{\frac{\dot{q}}{2K}}L^2 + LC_1 + \cancel{C_2} \Rightarrow 2LC_1 = 0 \rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

در جایگذاری (1) $\rightarrow$ $T_1 = -\dfrac{\dot{q}}{2K}L^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = T_1 + \dfrac{\dot{q}}{2K}L^2$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{q}}{2K}x^2 + T_1 + \frac{\dot{q}}{2K}L^2 \Rightarrow \underbrace{T(x) - T_1 = \frac{\dot{q}}{2K}(L^2 - x^2)}$$

بنام خدا　　　انتقال حرارت (۱) :　　　جلسه چهارم

انتقال حرارت شعاعی در لوله : (حالت دائمی) (r,θ,z)



$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=0 \;;\; \frac{\partial T}{\partial z}=0 \;;\; \frac{\partial T}{\partial r}\neq 0$$

$$\begin{cases} q=-KA\dfrac{dT}{dr} \\ A=2\pi r L \end{cases}$$

$$\Rightarrow q=-K(2\pi r L)\frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{2K\pi L}\,\frac{dr}{r}=-dT \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{q}{2\pi K L}\int_{r_i}^{r_o}\frac{dr}{r}=-\int_{T_i}^{T_o}dT$$

$$\Rightarrow \frac{q}{2\pi K L}\,\ln r\Big|_{r_i}^{r_o}=-(T)\Big|_{T_i}^{T_o} \Rightarrow \frac{q}{2\pi K L}(\ln r_o-\ln r_i)=T_i-T_o$$

$$\Rightarrow \frac{q}{2\pi K L}\ln\frac{r_o}{r_i}=T_i-T_o \Rightarrow q=\frac{T_i-T_o}{\ln\frac{r_o}{r_i}\Big/2\pi K L} \qquad (1)$$

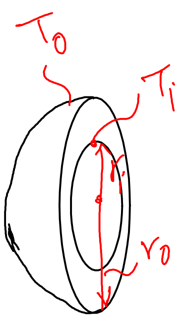
$$I=\frac{\Delta V}{R} \equiv q=\frac{\Delta T}{R} \;;\; (2)$$

پس با توجه به رابطه (۱) و (۲) : مقاومت معادل برای انتقال حرارت هدایتی دائمی در داخل لوله برابر است با :

$$\boxed{R=\frac{\ln r_o/r_i}{2\pi K L}} \;;\; q=(KA)\,\Delta T/\Delta x$$

$$q=\frac{\Delta T}{R} \rightarrow R=\frac{\Delta T}{q} \;;\; {}^{\circ}K/W \text{ یا } {}^{\circ}C/W$$

انتقال حرارت هدایتی یک بعدی در داخل کره توخالی :



$$r,\theta,\varphi \;;\; \frac{\partial T}{\partial \theta}=0 \,,\; \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0 \;;\; \frac{\partial T}{\partial r}\neq 0$$

$$\begin{cases} q=-KA\dfrac{dT}{dr} \\ A=4\pi r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = -KA\dfrac{dT}{dr} \\ A = 4\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow q = -K(4\pi r^2)\frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{q}{4K\pi}\frac{dr}{r^2} = -dT$$

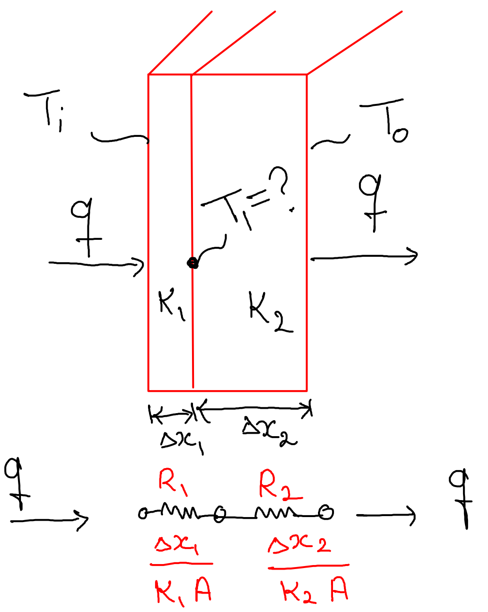
$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{q}{4K\pi}\int_{r_i}^{r_o}\frac{dr}{r^2} = -\int_{T_i}^{T_o} dT \Rightarrow \frac{q}{4K\pi}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_i}^{r_o} = T_i - T_o$$

$$\Rightarrow \frac{q}{4K\pi}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}\right) = T_i - T_o \Rightarrow q = \frac{T_i - T_o}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}\right)/4K\pi}$$

$$R = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}{4K\pi}$$

دیوارهای چندلایه یا کامپوزیت: (در حالت دائمی)

برای تحلیل دیوارهای چند لایه، از مقاومت معادل دیوارها استفاده می‌نماییم.



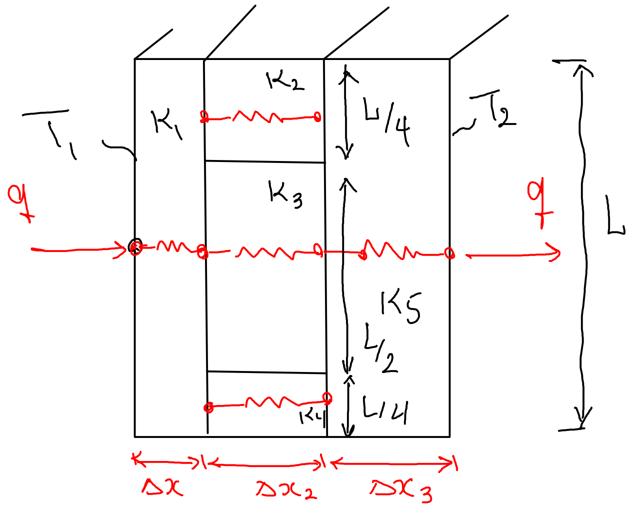
$$R_1 = \frac{\Delta x_1}{K_1 A} \quad ; \quad R_2 = \frac{\Delta x_2}{K_2 A}$$

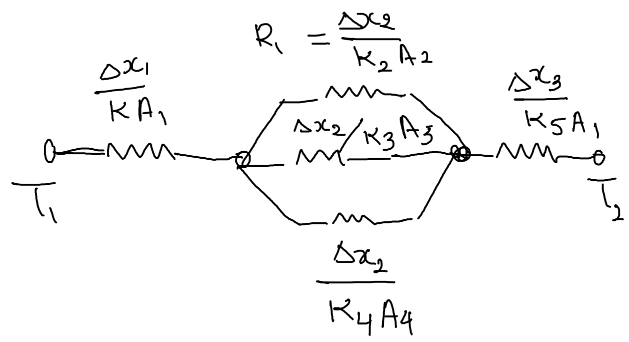
برای مقاومت سری ; $R_{tot} = R_1 + R_2$

$$I = \frac{\Delta V}{R_{tot}} \rightarrow q = \frac{T_i - T_o}{\frac{\Delta x_1}{K_1 A} + \frac{\Delta x_2}{K_2 A}}$$

برای محاسبه T_1، ابتدا q را بدست می‌آوریم:

$$q = \frac{T_i - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_o}{R_2}$$





$$R_{\text{موازی}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

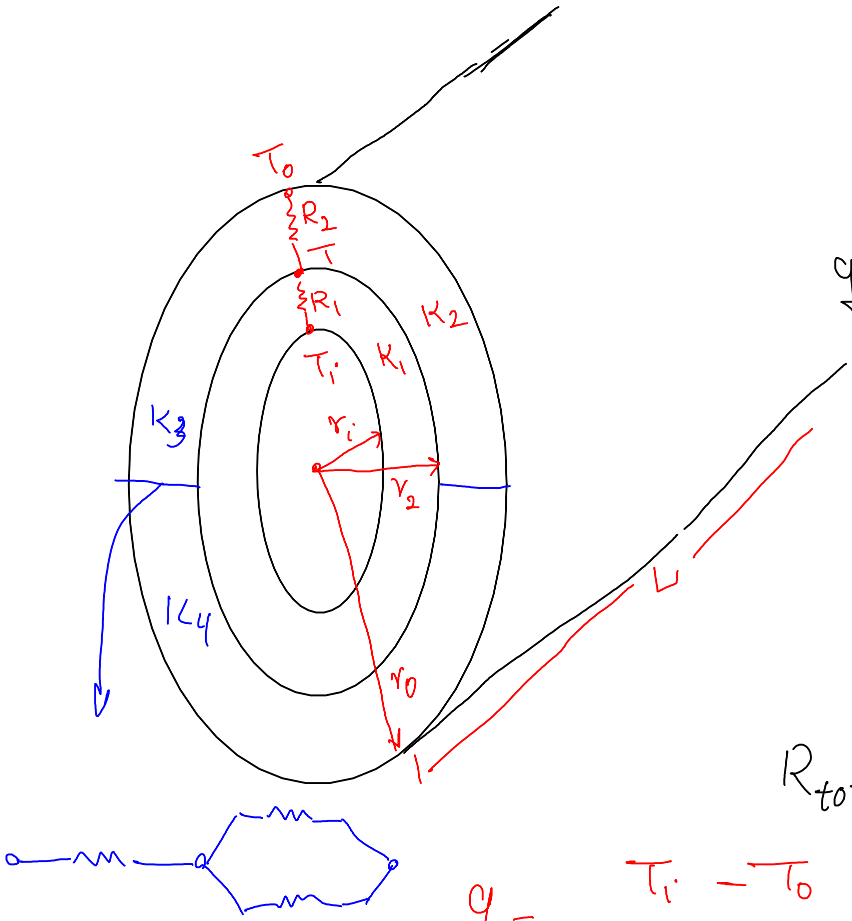
$$R_1 = \frac{\Delta x_1}{K_1 A_1} \; ; \quad R_2 = \frac{\Delta x_2}{K_2 A_2} \; ; \quad R_3 = \frac{\Delta x_2}{K_3 A_3} \; ; \quad R_4 = \frac{\Delta x_2}{K_4 A_4} \; ;$$

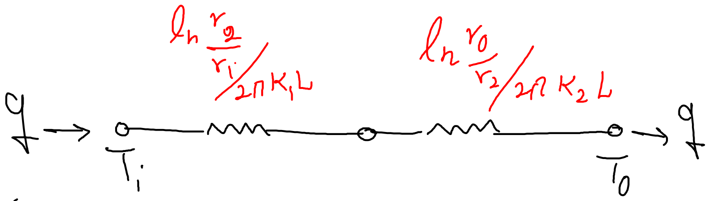
$$R_5 = \frac{\Delta x_3}{K_5 A_1} \; ; \quad A_2 = \frac{A_1}{4} \; ; \quad A_3 = \frac{A_1}{2} \; ; \quad A_4 = \frac{A_1}{4}$$

$$A_1 = A \; ; \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \; ; \quad R_{23,4} = \frac{R_{23} R_4}{R_{23} + R_4}$$

$$R_{tot} = R_1 + R_{23,4} + R_5 \; ; \quad q = \frac{T_1 - T_2}{R_{tot}}$$

انتقال حرارت دائم در لوله های کامپوزیت!





$$R_1 = \frac{\ln \frac{r_2}{r_i}}{2\pi K_1 L}$$

$$R_2 = \frac{\ln r_0/r_2}{2\pi K_2 l}$$

$$R_{tot} = R_1 + R_2$$

$$q = \frac{T_i - T_0}{R_{tot}}$$

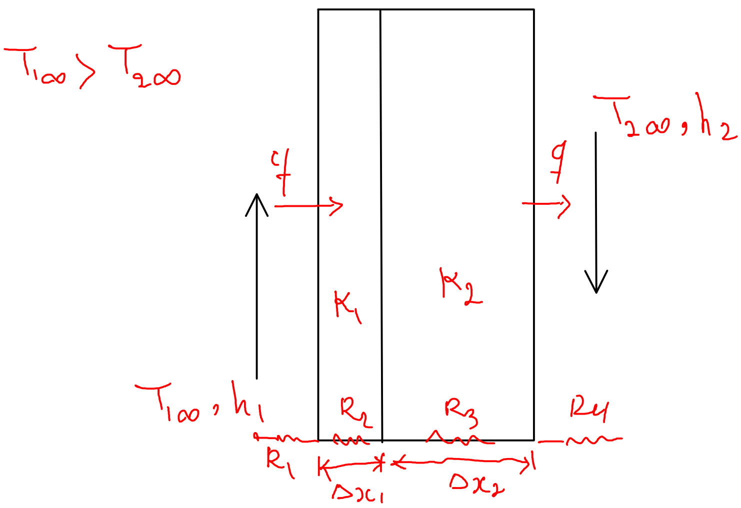
ضریب انتقال حرارت عمومی :

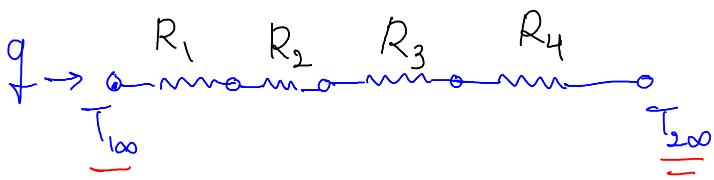
(حالت دائمی)

$$q = hA(T_s - T_\infty) \Rightarrow q = \frac{T_s - T_\infty}{1/hA}$$

مقاومت معادل برای انتقال حرارت جابجایی

اگر یک دیواره مرکب داشته باشیم که از دو طرف آن دو سیال با دماهای $T_{1\infty}$ و $T_{2\infty}$ عبور کند. می‌خواهیم مقدار q عبوری از دیواره را به دست آوریم.





$$R_1 = \frac{1}{h_1 A} \quad ; \quad R_2 = \frac{\Delta x_1}{K_1 A} \quad ; \quad R_3 = \frac{\Delta x_2}{K_2 A} \quad ; \quad R_4 = \frac{1}{h_2 A}$$

$$q = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{R_{tot}} \qquad R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

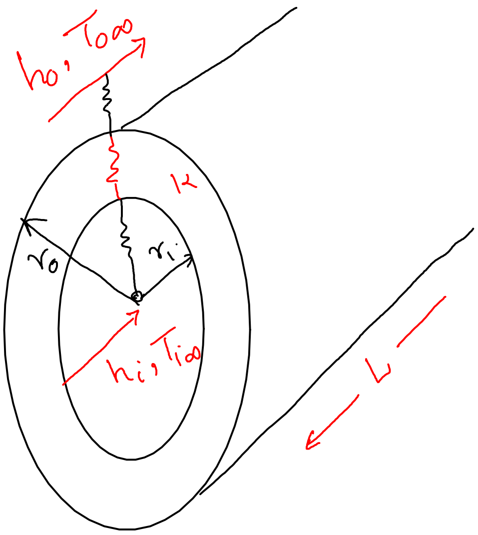
$$\Rightarrow q = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{\Delta x_1}{K_1 A} + \frac{\Delta x_2}{K_2 A} + \frac{1}{h_2 A}} \Rightarrow q = \frac{T_{1\infty} - T_{2\infty}}{\frac{1}{A}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x_1}{K_1} + \frac{\Delta x_2}{K_2} + \frac{1}{h_2}\right)}$$

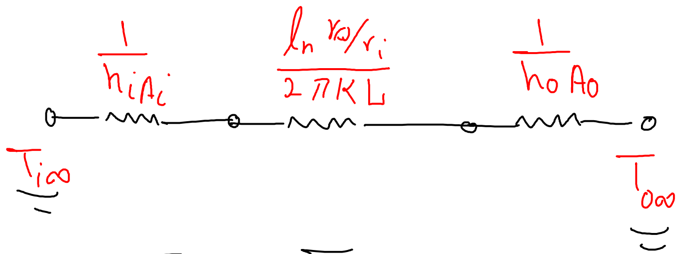
$$\Rightarrow q = \frac{A(T_{1\infty} - T_{2\infty})}{\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x_1}{K_1} + \frac{\Delta x_2}{K_2} + \frac{1}{h_2}} \quad ; \quad q = U A \Delta T$$

ضریب انتقال حرارت عمومی

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x_1}{K_1} + \frac{\Delta x_2}{K_2} + \frac{1}{h_2}}$$

ضریب انتقال حرارت عمومی برای سیستم شعاعی:





$$q = \frac{T_{i\infty} - T_{o\infty}}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln r_o/r_i}{2\pi K L} + \frac{1}{h_o A_o}}$$

ضریب انتقال حرارت عمومی بر اساس سطح دیواره داخلی لوله:

$$q = U A_i \Delta T$$

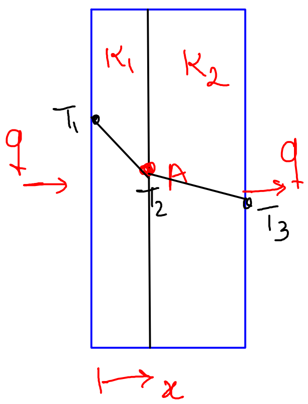
$$\Rightarrow q = \frac{A_i (T_{i\infty} - T_{o\infty})}{\frac{1}{h_i} + \frac{A_i \ln r_o/r_i}{2\pi K L} + \frac{A_i}{h_o A_o}}$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{A_i \ln r_o/r_i}{2\pi K L} + \frac{A_i}{h_o A_o}}$$

ضریب انتقال حرارت عمومی بر اساس سطح خارجی $\longrightarrow$ $U_o = \dfrac{1}{\frac{A_o}{h_i A_i} + \frac{A_o \ln r_o/r_i}{2\pi K L} + \frac{1}{h_o}}$

به عنوان تمرین بدست آورید.

سؤال: آیا در جدار تماس دو لایه ی دیواره کامپوزیت، گرادیان دما ثابت است؟



$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_A \overset{?}{=}$ ثابت یا $\frac{\partial T_1}{\partial x_1} \overset{?}{=} \frac{\partial T_2}{\partial x}$

$q =$ ثابت ، $q = -K_1 A \frac{\partial T_1}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\frac{q}{K_1 A}$

$q = -K_2 A \frac{\partial T_2}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial T_2}{\partial x} = -\frac{q}{K_2 A}$

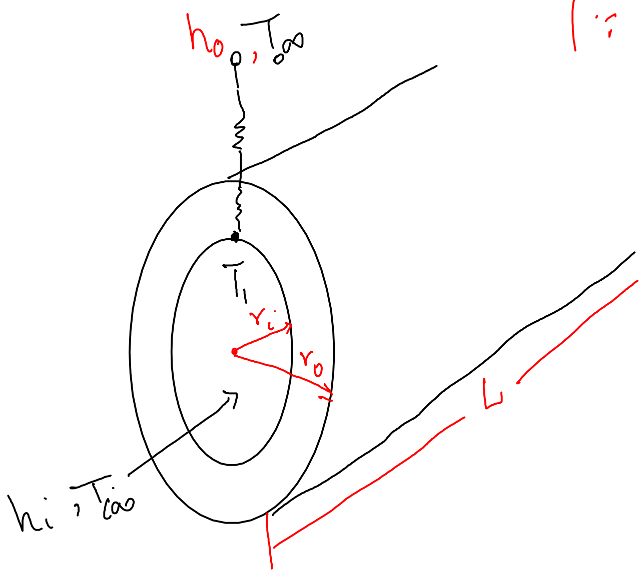
چون $K_1 \neq K_2$ می باشد پس $\frac{\partial T_1}{\partial x}$ و $\frac{\partial T_2}{\partial x}$ برابر نمی باشند.

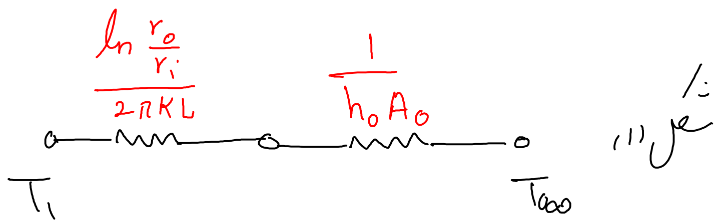
رابطه فوق نشان می دهد که دما در نقطه تماس پیوسته می باشد ولی مشتق پذیر نمی باشد.

بنام خدا

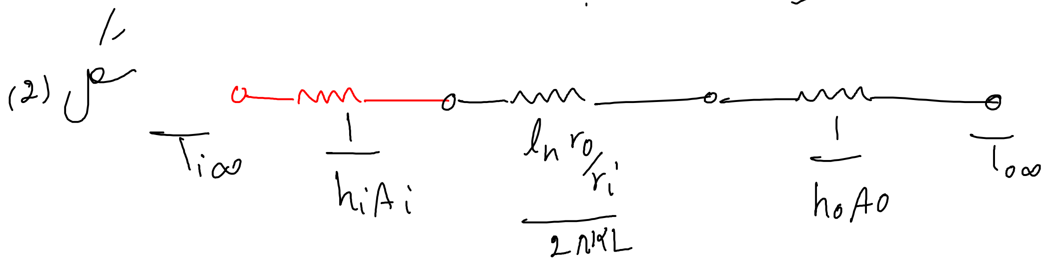
انتقال حرارت (۱) جلسه پنجم

ضخامت بحرانی عایق برای سیستم شعاعی:





اگر داخل لوله سیالی مانند آب در حرکت باشد:



از شکل (۱)

$$q = \frac{T_1 - T_{o\infty}}{\frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2\pi K L} + \frac{1}{h_o A_o}} \quad (1)$$

از شکل (۲) ;

$$q = \frac{T_{i\infty} - T_{o\infty}}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln r_o/r_i}{2\pi K L} + \frac{1}{h_o A_o}} \quad (2)$$

برای بررسی تغییرات q نسبت به r_o ، از q نسبت به r_o مشتق گیری کرده و مساوی صفر قرار میدهیم

$$A_o = 2\pi r_o L$$

از معادله (۱) ;

$$q = \frac{T_1 - T_{o\infty}}{\frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2\pi K L} + \frac{1}{h_o (2\pi r_o L)}}$$

ضریب انتقال حرارتی عایق

$$; \ln r_o/r_i = \ln r_o - \ln r_i \longrightarrow \frac{d}{dr_o} = 1/r_o$$

$$\frac{dq}{dr_o} = 0 \implies \frac{-\left[\frac{1}{2\pi K L}\left(\frac{1}{r_o}\right) + \frac{1}{2\pi h_o L}\left(-\frac{1}{r_o^2}\right)\right](T_1 - T_{o\infty})}{(\text{مخرج})^2} = 0$$

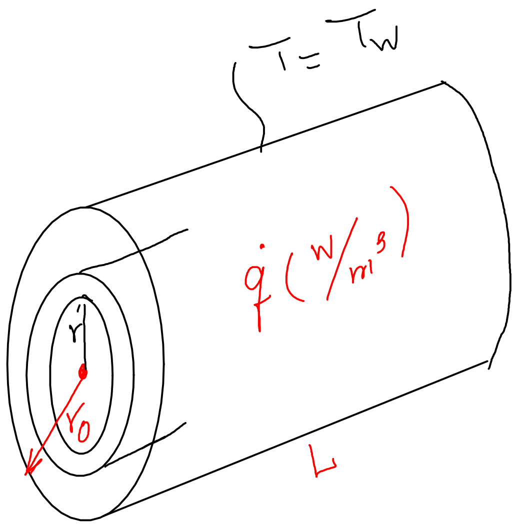
$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi K L}\left(\frac{1}{r_o}\right) - \frac{1}{2\pi h_o L}\left(\frac{1}{r_o^2}\right) = 0 \implies \frac{1}{2\pi L r_o}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{h_o r_o}\right) = 0$$

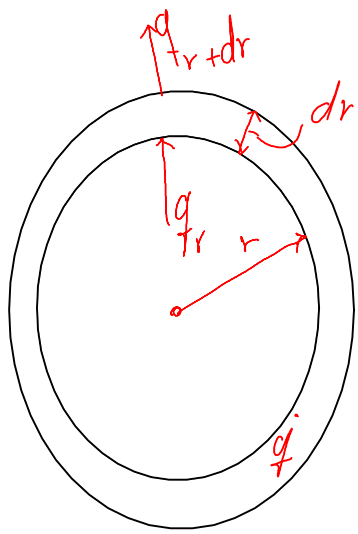
$$\Rightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{h_o r_o} = 0 \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{h_o r_o} \Rightarrow \underbrace{r_o = \frac{k}{h_o}} = r_{critical}$$

r_{cr} = شعاع بحرانی

در اجسام کروی شکل، شعاع بحرانی از رابطه $r_{cr} = \frac{2K}{h}$ محاسبه می‌شود. (اثبات شود)

انتقال حرارت در استوانه توپر با چشمه حرارتی:





معادله بالانس انرژی:

انرژی خروجی از المان = انرژی تولیدی در المان + انرژی ورودی به المان

$$q_r + \dot{q}(2\pi r\, dr)L = q_{r+dr}$$

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q}{\partial r}dr + \cdots$$

$$\xrightarrow{\text{بنابراین}} \quad \dot{q}(2\pi r \cancel{dr} L) = \frac{\partial q}{\partial r}\cancel{dr} \Rightarrow 2\pi r L \dot{q} = \frac{\partial}{\partial r}\overbrace{\left(-KA\frac{dT}{dr}\right)}^{q}$$

چون فقط در راستای r تغییرات دمایی داریم

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial r} = \frac{d}{dr}$$

$$\Rightarrow 2\pi r \dot{q} = \frac{d}{dr}\left(-KA\frac{dT}{dr}\right) \quad ; \quad A = 2\pi r L$$

$$\rightarrow \cancel{2\pi} r \cancel{L} \dot{q} = \frac{d}{dr}\left(-K \cancel{2\pi} r \cancel{L} \frac{dT}{dr}\right) \Rightarrow \underbrace{\dot{q} r = -\frac{d}{dr}\left(Kr\frac{dT}{dr}\right)}$$

اگر K ثابت نباشد ; $\dot{q} r = -\frac{dK}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) - K\frac{dT}{dr} - Kr\frac{d^2T}{dr^2}$

اگر K ثابت باشد $\rightarrow -\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = \frac{\dot{q}}{K} r \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{\dot{q}}{K} r$

از طرفین نسبت به r انتگرال گیری ; $r\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{\dot q}{k}\dfrac{r^2}{2} + C_1$

چپ و راست معادله بر r تقسیم $\longrightarrow$ $\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{\dot q}{k}\dfrac{r}{2} + \dfrac{C_1}{r}$

انتگرال از طرفین نسبت به r $\longrightarrow$ $T = -\dfrac{\dot q}{k}\dfrac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2 \quad (1)$

چون در مرکز استوانه دما یک مقدار معین می‌باشد ولی در معادله فوق (1): در نقطه $r=0$ (مرکز استوانه) تابع $\ln r$ تعریف شده نمی‌باشد لذا برای صادق بودن معادله فوق، ضریب C_1 برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

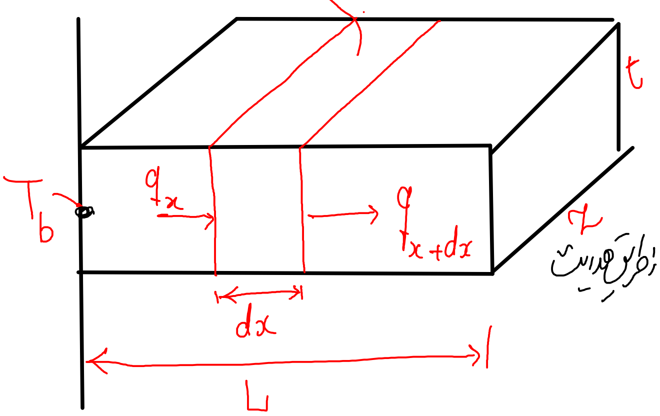
$r = r_0 \longrightarrow T = T_w$ (wall $\longrightarrow$ دیواره)

$$T_w = -\frac{\dot q}{4k} r_0^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = T_w + \frac{\dot q}{4k} r_0^2$$

جایگذاری در معادله (1) به جای C_2 و C_1 $\longrightarrow$ $T(r) = -\dfrac{\dot q}{4k} r^2 + \dfrac{\dot q}{4k} r_0^2 + T_w$

$$T(r) - T_w = \frac{\dot q}{4k}\left(r_0^2 - r^2\right)$$

انتقال حرارت از سطوح گسترده (Extended surface; fins)



بالانس انرژی ;

انرژی ورودی از طریق هدایت = انرژی خروجی از طریق هدایت + انرژی خروجی از طریق جابجایی

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv}$$

بسط تیلور ; $q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$

$0 = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + dq_{conv}$; $\begin{cases} q_x = -KA_c \frac{dT}{dx} \\ dq_{conv} = hA_s(T-T_\infty) \end{cases}$

$\begin{cases} A_c = \text{سطح عمود بر انتقال حرارت هدایتی} = zt \\ A_s = \text{جابجایی} \;\;\text{''}\;\;\text{''}\;\;\text{''} = \underbrace{(2z+2t)}_{p} dx = p\,dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(-KA_c \frac{dT}{dx}\right)dx + hA_s(T-T_\infty) = 0$$ رابطه کلی برای فین ها

اگر $K = cte$ و A_c ثابت، در اینصورت می‌توان نوشت :

$$\rightarrow -KA_c \frac{d^2T}{dx^2}\cancel{dx} + hp\,\cancel{dx}\,(T-T_\infty) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{KA_c}(T-T_\infty) = 0 \qquad (1)$$

تغییر متغیر : $\theta = T - T_\infty$; $\frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx}$; $\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d^2T}{dx^2}$

$$\frac{hP}{KA_c} = m^2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در (1)}} \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \qquad (2)$$

[یادآوری ; $y'' - a^2y = 0$; $(D^2 - a^2)y = 0 \rightarrow D^2 - a^2 = 0 \Rightarrow D = \pm a$

$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$)

با توجه به یادآوری فوق : جواب معادله (2) را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \longrightarrow \theta \sim x$$

جواب اخیر یک جواب کلی برای فین‌ها، با شرایط مذکور می‌باشد.

$$\boxed{\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}}$$

ضرایب C_1 و C_2 با استفاده از شرایط مرزی محاسبه می‌شوند؛

برای فین‌ها (سطوح گسترده) چهار نوع شرط مرزی درنظر گرفته می‌شود:

شرط اول ; $x=0 \longrightarrow T = T_b \rightarrow T - T_\infty = T_b - T_\infty \rightarrow \theta = \theta_b$

شرط دوم :

فین خیلی بلند فرض شود ; $T(L) = T_\infty \longrightarrow T - T_\infty = 0 \rightarrow \theta = 0$

فین در انتها عایق باشد ; $x = L \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \rightarrow x = L \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$

فین در انتهای دارای دمای معین باشد ; $x = L \rightarrow T = T_1 \Rightarrow x = L \rightarrow \theta = \theta_1$

فین در انتهای دارای انتقال حرارت جابجایی باشد ; $x = L \rightarrow -K \frac{\partial T}{\partial x} = h (T - T_\infty)$

یا $x = L \Rightarrow -K \frac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta$

شرایط (۱) ; $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \theta = \theta_b & (1) \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow \theta = 0 & (2) \end{cases}$; $\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$

چون $x \rightarrow \infty \Rightarrow \theta \rightarrow 0$ درنتیجه باید ضریب C_1 برابر صفر فرض شود چون درغیر اینصورت

با میل کردن $x \rightarrow \infty$، θ نیز به سمت ∞ میل می‌کند.

شرط اول $\rightarrow x = 0 \rightarrow \theta = \theta_b \Rightarrow \theta_b = C_2 \Rightarrow C_2 = \theta_b$

جایگذاری $\rightarrow \theta = \theta_b e^{-mx}$ یا $\underbrace{\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}}$

بنام خدا　　　　انتقال حرارت (۱)　　　　جلسه ششم

یادآوری: نحوه بدست آوردن معادله انتقال حرارت برای فین‌های خیلی بلند ($x\to\infty$; $T\to T_\infty$) و فین هایی که انتهای آنها دارای عایق می‌باشد بایستی یادگرفته شود.

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

برای فین انتها عایق :

شرط اول برای همه فین ها : $x=0 \longrightarrow \theta=\theta_b \longrightarrow C_1 + C_2 = \theta_b$ (1)

شرط دوم برای فین انتها عایق ; $x=L \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x}=0 \longrightarrow \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=L}=0$

از θ نسبت x مشتق گیری $\longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = mC_1 e^{mx} - mC_2 e^{-mx}$

جایگذاری به جای $x\to L$ $\longrightarrow \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=L}=0 \Longrightarrow mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL} = 0$ (2)

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \theta_b \\ m\left(C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL}\right) = 0 \xrightarrow{m\neq 0} C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = 0 \end{cases}$$

با توجه به معادلات اخیر ضرایب C_1 و C_2 محاسبه خواهند شد.

استفاده از کرامر ; ضرایب C_1 و C_2 $\longrightarrow$ ماتریس ضرایب $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{mL} & -e^{-mL} \end{bmatrix}$

ماتریس جواب ; $B \begin{bmatrix} \theta_b \\ 0 \end{bmatrix}$

دترمینان ماتریس ضرایب ; $|A| = -e^{-mL} - e^{mL}$

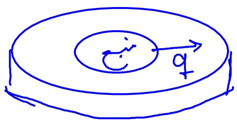
برای محاسبه C_1، به جای ستون اول (ضرایب C_1) ماتریس جواب قرار داده می‌شود:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \theta_b & 1 \\ 0 & e^{-mL} \end{vmatrix}}{-e^{-mL} - e^{mL}} = \frac{e^{-mL}\,\theta_b}{-e^{-mL} - e^{mL}} \quad ; \quad C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \theta_b \\ e^{mL} & 0 \end{vmatrix}}{-e^{-mL} - e^{mL}} = \frac{-e^{mL}\,\theta_b}{-e^{-mL} - e^{mL}}$$

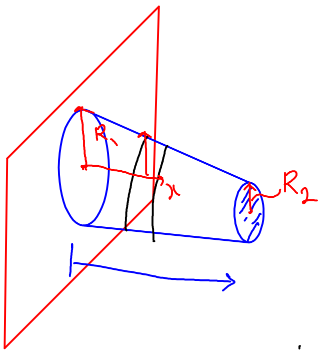
با جایگذاری در معادله اصلی به جای ضرایب C_1 و C_2؛ جواب θ برای فین انتها عایق به صورت زیر خواهد بود:

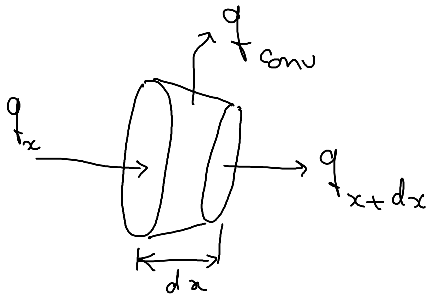
$$\theta = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}\,\theta_b$$

تمرین : معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت را برای یک فین حلقوی بدست آورید.



پره با سطح متغیر :





بالانس انرژی $\longrightarrow$ $q_x = q_{x+dx} + q_{conv}$

جایگذاری $\longrightarrow$ $\frac{d}{dx}\left(-KA_c\frac{dT}{dx}\right)dx + h\,(dA_s)(T-T_\infty)=0$

$\frac{dA_c}{dx}\neq 0$; $\frac{dA_s}{dx}\neq 0$

طرفین معادله فوق بر dx تقسیم ؛ $\frac{d}{dx}\left(-KA_c\frac{dT}{dx}\right) + h\left(\frac{dA_s}{dx}\right)(T-T_\infty)=0$

($K=$ ثابت) مشتق گیری $\longrightarrow$ $-\frac{dA_c}{dx}\cdot\frac{dT}{dx}\times K - KA_c\frac{d^2T}{dx^2} + h\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0$

طرفین بر $-KA_c$ تقسیم $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{A_c}\frac{dA_c}{dx}\cdot\frac{dT}{dx} - \frac{h}{KA_c}\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0}$

دو پارامتر مهم برای فین ها :

۱- اثر بخشی فین :

اپسیلون

$$\varepsilon_f = \frac{\text{نرخ انتقال حرارت از فین}}{\text{نرخ انتقال حرارت زمانیکه فین نداشته باشیم}}$$

۲- راندمان فین

$$\eta = \frac{\text{نرخ انتقال حرارت از فین}}{\text{نرخ انتقال حرارت از فین درصورتیکه کل فین در دمای ریشه باشد}}$$

θ_b

$$\text{نرخ انتقال حرارت از فین} = q_f = -KA_c \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=0}$$

نرخ حرارتی که از فین به محیط انتقال می‌یابد برابر است با نرخ انتقال حرارتی که از منبع حرارتی در $x=0$ وارد فین می‌شود.

فین خیلی بلند ;
$$\begin{cases} \theta = e^{-mx}\,\theta_b \\ \theta = T - T_\infty \; ; \; \theta_b = T_b - T_\infty \end{cases}$$

$$q_f = -KA_c\left(-m e^{-mx}\right)\Big|_{x=0} = KA_c m \theta_b \; ; \; m = \sqrt{\frac{hp}{KA_c}}$$

$$\Rightarrow q_f = KA_c\sqrt{\frac{hp}{KA_c}}\,\theta_b = \sqrt{hpKA_c}\,\theta_b$$

نرخ انتقال حرارت در صورت عدم وجود فین از سطح تماس فین با منبع حرارتی ; $q = hA_c(T_b - T_\infty) = hA_c\theta_b$

اثربخشی برای فین خیلی بلند $\varepsilon_f = \dfrac{q_f}{q} = \dfrac{\sqrt{hpKA_c}\,\cancel{\theta_b}}{hA_c\,\cancel{\theta_b}} = \sqrt{\dfrac{KP}{hA_c}}$

نکته: معمولاً فین‌ها برای سیستم‌هایی طراحی می‌شوند که اثربخشی آن بزرگتر یا مساوی ۲ باشد.
$\varepsilon_f \geq 2$

نکته: فین برای مکان‌هایی طراحی می‌شود که دارای ضریب انتقال حرارت جابجایی (h) پایین باشد چون در اینصورت با توجه به رابطه اثربخشی فین، فین موثرتر خواهد بود.

محاسبه راندمان برای فین خیلی بلند:

$$\eta_f = \frac{q_f}{\text{نرخ انتقال حرارت اگر کل فین در دمای ریشه باشد} \rightarrow q'}$$

$$q' = hA_s(T_b - T_\infty) = hA_s\theta_b \quad ; \quad A_s = \text{سطح جانبی} = PL$$

$$\eta_f = \frac{\sqrt{hpKA_c}\,\cancel{\theta_b}}{hpL\,\cancel{\theta_b}} \Rightarrow \eta_f = \frac{\sqrt{\frac{KA_c}{hp}}}{L} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{KA_c}{hp}} = \frac{1}{mL}$$

فین انتها عایق :

$$\theta = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}\theta_b \quad ; \quad q_f = -kA_c \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{\cosh(mL)}\left[-m\sinh[m(L-x)]\right]\theta_b$$

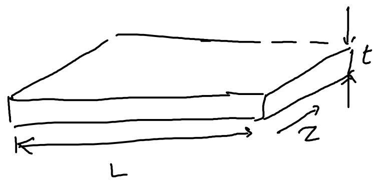
$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{\cosh(mL)}\left[-m\sinh(mL)\right] = -m\theta_b \tanh(mL)$$

$$q_f = -kA_c\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0} = \theta_b k A_c\sqrt{\frac{hP}{kA_c}}\tanh(mL) = \sqrt{hPkA_c}\,\theta_b\tanh(mL)$$

$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{q} = \frac{\sqrt{hPkA_c}\,\cancel{\theta_b}\tanh(mL)}{hA_c\cancel{\theta_b}} = \sqrt{\frac{kP}{hA_c}}\tanh(mL)$$

$$\eta_f = \frac{q_f}{q'} = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

$$mL = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}}\,L$$



$$P = 2z + 2t \qquad A_c = zt \quad ; \quad z \gg t \longrightarrow 2z+2t \simeq 2z$$

$$\Rightarrow mL = \sqrt{\frac{h(2\cancel{z})}{k\cancel{z}t}}\,L = \sqrt{\frac{2h}{kt}}\,L = \sqrt{\frac{2h}{ktL}}\,L^{3/2}$$

$Lt = A_p =$ سطح پروفیل فین

$$\eta_f = \frac{\tanh\left[\sqrt{\frac{2h}{kA_p}}\,L^{3/2}\right]}{\sqrt{\frac{2h}{kA_p}}\,L^{3/2}} \qquad (1)$$

نکته : اگر $\left(\frac{ht}{2k}\right)^{1/2} < 1/2$ باشد آنگاه برای محاسبه راندمان فین‌هایی که در انتها عایق نیستند در رابطه (1) به طول فین مقدار $\frac{t}{2}$ را اضافه کرده که به آن طول تصحیح شده می‌نامند. خطای چنین تقریبی حدود 5٪ می‌باشد.

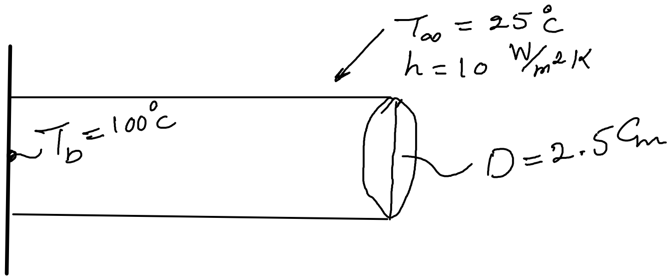
$$\eta_f = \frac{\tanh\left[\sqrt{\frac{2h}{kA_p}}\,(L+t/2)^{3/2}\right]}{\sqrt{\frac{2h}{kA_p}}\,(L+t/2)^{3/2}} \qquad A_p = (L + t/2)\,t$$

مثال:

یک فین بلند دایروی در هوای آزاد قرار داده شده است:

الف: مقدار q انتقال داده شده از فین درصورتیکه
۱- فین از جنس مس باشد
۲- از جنس فولاد باشد

ب: چه طولی از این فین در مقایسه با فین انتها عایق، بعنوان طول بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود.



$$K_{cu} = 398 \ W/mK$$

$$K_{st} = 14 \ W/mK$$

الف؛ $q_f = \sqrt{hPKA_c}\,\theta_b$; $\begin{cases} P = \pi D = 3.14 \times 0.025 \\ A_c = \pi D^2/4 = \dfrac{3.14 \times (0.025)^2}{4} \end{cases}$

$\theta_b = T_b - T_\infty = 100-25 = 75$

$K_{st} = 14 \longrightarrow (q_f)_{st} = 5.5\ W$; $K_{cu} = 398 \longrightarrow (q_f)_{cu} = 29.4\ W$

ب؛

$$(q_f)_{\text{فین بلند}} = \sqrt{hPKA_c}\,\theta_b$$

$$(q_f)_{\text{فین انتها عایق}} = \sqrt{hPKA_c}\,\theta_b\, tgh(mL)$$

درصورتیکه دو انتقال حرارت فوق برابر خواهند شد که $tgh(mL)=1$ ولی چون این مقدار

تعریف شده نیست پس $tgh(mL)=0.99$ فرض می‌کنیم: لذا داریم:

$$tgh(mL) = 0.99 \Longrightarrow mL = tgh^{-1}(0.99) = 2.65$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_{cu} = 1.32m \\ L_{st} = 0.25\ m \end{cases}$$

تمرین فصل دوم:

1، 3، 4، 6، 8، 9، 10، 25، 26، 29

بنام خدا   انتقال حرارت (۱)   جلسه هفتم

تمرین های فصل سوم : ۱ ، ۲ (الف) ، ۵ ، ۸ (الف) ، ۴۶ ، ۷۶ ، ۷۷ ، ۷۹ ، ۹۱

انتقال حرارت دوبعدی :

این مسائل انتقال حرارت را می‌توان از روش جداسازی متغیرها حل نمود به شرطی که :

۱- یکی از جهت مسائل را بتوان بوسیله یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن جدا نمود.

۲- جهت دیگر مسائل را بتوان با یک شرط مرزی همگن و یک شرط مرزی غیرهمگن نمایش داد.

نکته : شرط همگن ، شرطی است که اگر در آن تابع متغیر را در مقدار ثابت C (مخالف صفر) ضرب کنیم شرط مرزی تغییر نکند.

مثال   شرط عایق ;

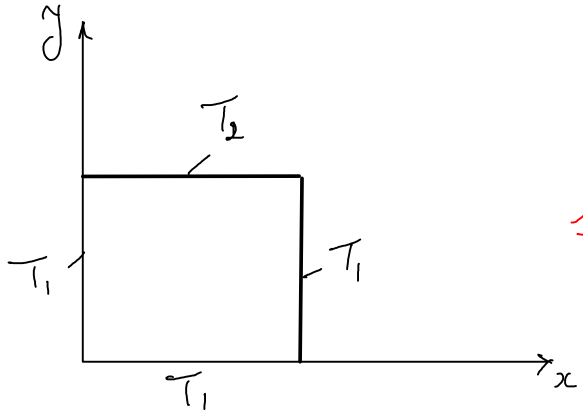
$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x}=0 \xrightarrow{\text{T در C ضرب}} \dfrac{\partial CT}{\partial x}=0 \longrightarrow C\dfrac{\partial T}{\partial x}=0 \xrightarrow{C\neq 0} \dfrac{\partial T}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial y}=0 \end{cases}$$

شرط مرزی همگن

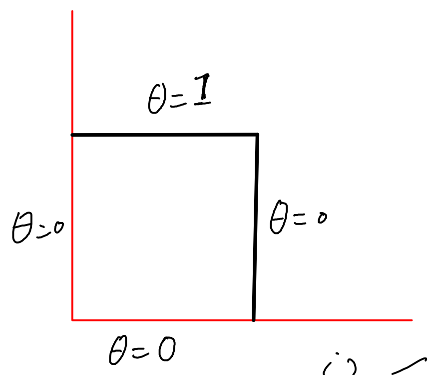
شرط مرزی جابجایی ; $-k\dfrac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty)$

T در C ضرب $\longrightarrow -kC\dfrac{\partial T}{\partial x}=h(CT-T_\infty)$ → شرط مرزی غیرهمگن

نکته : در بعضی از مواقع شرط مرزی غیرهمگن را می‌توان با تغییر متغیر به شرط مرزی همگن تبدیل نمود.



تغییر متغیر → $\theta=\dfrac{T-T_1}{T_2-T_1}$

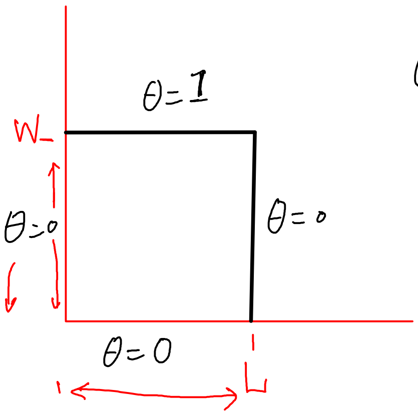


$y=0 \longrightarrow T=T_1$ ≠ غیرهمگن است
$CT=T_1$

همگن $y=0 \longrightarrow \theta=0$ ← یکسان
$\hookrightarrow C\theta=0 \longrightarrow \theta=0$

انتقال حرارت دوبعدی دائم بدون تولید شار حجمی:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad *$$



$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad ; \quad T = T_1 + (T_2 - T_1)\,\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_2 - T_1)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = (T_2 - T_1)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

جایگذاری در معادله اصلی

$$(T_2 - T_1)\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right] = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (**)$$

هدف: حل تحلیلی معادله (**) با درنظرگرفتن شرایط مرزی فوق

نکته: معادله باید در راستای همگن جواب نوسانی داشته باشد (در راستای همگن جواب باید بصورت ترکیبی از معادله سینوسی و کسینوسی باشد)

با توجه به شرایط مرزی فوق، معادله باید در راستای x (راستای همگن) سینوسی یا کسینوسی یا ترکیبی از این دو باشد.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \theta(x,y)$$

$$\theta(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

مشتقات $\theta(x,y) = X(x)\,Y(y)$ را محاسبه کرده و در معادله انتقال حرارت جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = Y X'' \; ; \; X'' = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = X Y'' \; ; \; Y'' = \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

جایگذاری ; $Y X'' + X Y'' = 0 \xrightarrow{\text{طرفین بر } XY \text{ تقسیم}} \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$

یا $\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$

دو تابع فوق تنها درصورتی می‌توانند مساوی باشند که نتیجه رابطه یک عدد ثابت باشد.

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda^2$$

برای اینکه در راستای x، جواب نوسانی داشته باشیم
عدد ثابت سمت راست منفی در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2 \longrightarrow \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0 \qquad (1)$$

$$-\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda^2 \longrightarrow \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \lambda^2 Y = 0 \qquad (2)$$

جواب معادله (1) $\longrightarrow X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x \quad (3)$

جواب معادله (2) $\longrightarrow Y(y) = C_3 \sinh \lambda y + C_4 \cosh \lambda y \quad (4)$

اعمال شرایط مرزی ; سمت چپ ; $\theta(0,y) = 0 \rightarrow X(0)\,Y(y) = 0 \rightarrow \begin{cases} Y(y) \neq 0 \\ X(0) = 0 \end{cases}$

در معادله (3) ; $X(0) = C_1 \times 0 + C_2 \times 1 = 0 \Longrightarrow C_2 = 0 \rightarrow X(x) = C_1 \sin \lambda x$

شرط مرزی پایینی ; $\theta(x,0) = 0 \Rightarrow X(x)\,Y(0) = 0 \rightarrow \begin{cases} X(x) \neq 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases}$

جایگذاری در (4) $\quad Y(0) = C_3 \times 0 + C_4 \times 1 = 0 \Longrightarrow C_4 = 0$

$$\theta(x,y) = C_1 \sin \lambda x \, C_3 \sinh \lambda y = C_n \sin \lambda x \sinh \lambda y$$

شرط مرزی سمت راست ; $\theta(L,y) = 0 \longrightarrow C_n \underbrace{\sin \lambda L}\, \sinh \lambda y = 0$

$$\begin{cases} C_n \neq 0;\ \sinh \lambda y \neq 0 \longrightarrow \text{چون در این صورت } \theta(x,y) \text{ کلاً صفر خواهد شد} \\ \sin \lambda L = 0 \longrightarrow \lambda L = n\pi \longrightarrow \lambda = \dfrac{n\pi}{L} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \theta(x,y) = C_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sinh \frac{n\pi}{L} y$$

با مشخص شدن مقدار λ، جواب نهایی قبل از اعمال شرط مرزی بالا به صورت یک مجموعه جواب نوشته می‌شود.

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sinh \frac{n\pi}{L} y$$

برای محاسبه C_n از شرط مرزی چهارم استفاده می‌شود:

$$\theta(x, w) = 1$$

$$\theta(x,w) = \underset{f(x)}{1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x \sinh\frac{n\pi}{L}w$$

$$C_n \sinh\frac{n\pi}{L}w = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \rightarrow C_n = \frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{L}w}\frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

یادآوری

$$\sum C_n \sin\frac{n\pi}{L}x = f(x) \longrightarrow C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

C_n در رابطه θ جایگذاری شده و معادله تحلیلی زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x \sinh\frac{n\pi}{L}y}$$

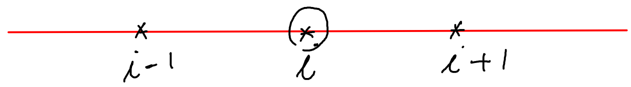
روش های عددی: در روش عددی، معادلات دیفرانسیل جزئی تبدیل به معادلات جبری می‌شود.

۱- روش اختلاف محدود: finite difference : این روش ساده که برای اشکال هندسی پیچیده مناسب نمی‌باشد

۲- روش حجم محدود: finite volume : بیشتر مسائل مکانیک سیالات از این روش تحلیل می‌شوند

۳- روش المان محدود: finite element : بیشتر مسائل تحلیل سازه‌ای از این روش استفاده می‌کنند.

روش اختلاف محدود:



بسط تیلور

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(dx)^2}{2!} + \cdots$$

$$T_{i+1} = T_i + \frac{\partial T}{\partial x}(\Delta x) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \overset{\text{اردر}}{O}(\Delta x)^3 \qquad (1)$$

$$T_{i-1} = T_i + \frac{\partial T}{\partial x}(-\Delta x) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\frac{(-\Delta x)^2}{2!} + O(\Delta x)^3 \qquad (2)$$

$$T_{i+1} - T_{i-1} = 2\frac{\partial T}{\partial x}(\Delta x) + O(\Delta x)^3$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2(\Delta x)}} + O(\Delta x)^2$$

هرچه توان (Δx) بزرگتر باشد خطای آن کمتر است

اختلاف محدود مرکزی ; Central finite difference

$$\text{از (1)} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}} + O(\Delta x)$$

اختلاف محدود پیشرو ; forward finite difference

$$\text{از معادله (2)} \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

اختلاف محدود پسرو ; backward finite difference

$$T_{i+1} + T_{i-1} = 2T_i + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + O(\Delta x)^4$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2}} + O(\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{(\Delta y)^2}$$

$i \leftarrow x$

$j \leftarrow y$

$$T = T(i,j) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \dfrac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \end{cases}$$

معادله انتقال حرارت دوبعدی داریم ; $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$

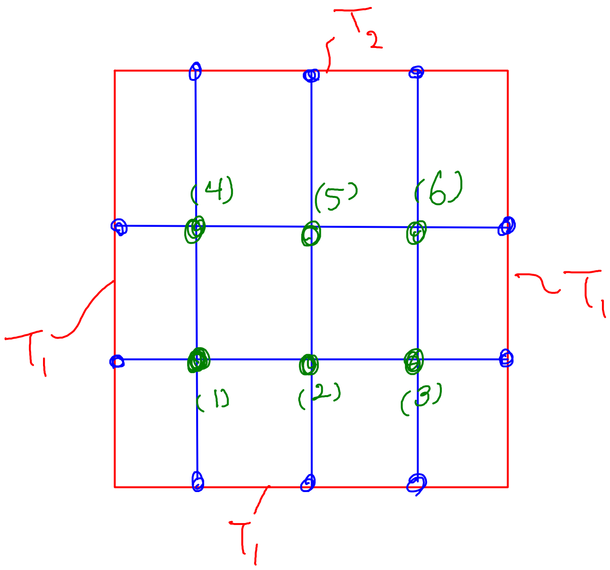
$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

Δx و (Δy) فاصله بین نقاط در راستای x و y می‌باشند و بصورت اختیاری، انتخاب می‌گردند. بدیهی است هرچه مقادیر (Δx) و (Δy) کوچکتر باشد، جوابها دقیق‌تر خواهد بود.

یکی از انتخاب‌های این است که مقادیر (Δx) و (Δy) یکسان انتخاب شوند.

اگر $\Delta x = \Delta y$

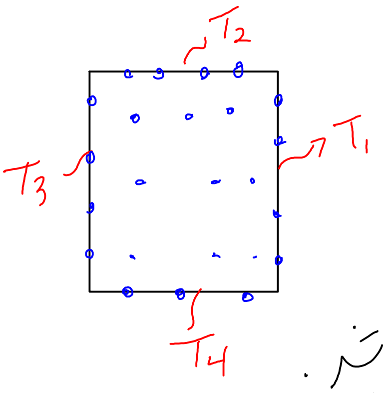
$$\rightarrow T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$



برای تحلیل مسأله روبرو، هر یک از نقاط داخلی (۱→۶) نیاز به معادله خود خواهد داشت. با نوشتن معادله برای همه نقاط یک دستگاه ۶ معادله و ۶ مجهول بدست می‌آید که با حل این دستگاه، دماهای نقاط بدست می‌آیند.

بنام خدا   انتقال حرارت (۱)؛   جلسه هشتم

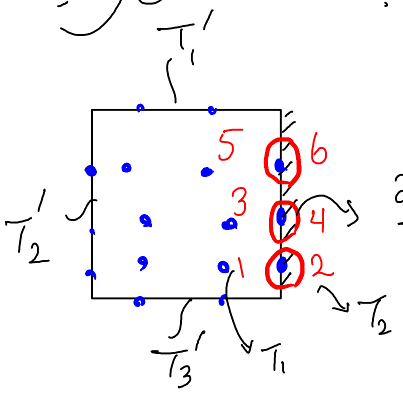
برای کاربرد روش عددی در مرزهای میدان حل، با دو سری مرز مواجه خواهیم بود:



۱- مرزهایی که شرایط دمایی در شبکه دارند یعنی مقدار دما در مرز مشخص است،
فقط برای نقاط داخلی، معادله جبری نوشته شده و با استفاده از حل دستگاه
n معادله و n مجهول، دمای نقاط داخلی محاسبه می‌شود. که n تعداد نقاط داخلی باشد.

۲- مرزهایی که دما در آن مرزها مشخص نمی‌باشد بلکه معادله دمایی برای آن مرز وجود دارد. مانند شکل زیر:

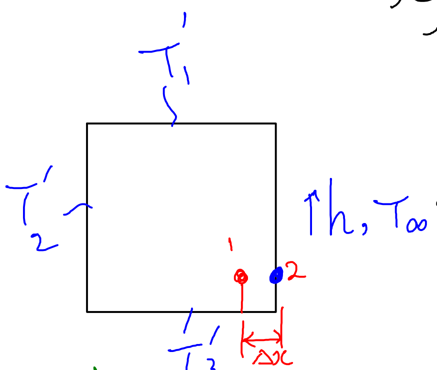
در چنین شرایطی، معادله دیفرانسیلی مرزی را به معادله جبری تبدیل می‌کنیم.



$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 \rightarrow \frac{T_2-T_1}{\Delta x}=0 \rightarrow T_2=T_1$$

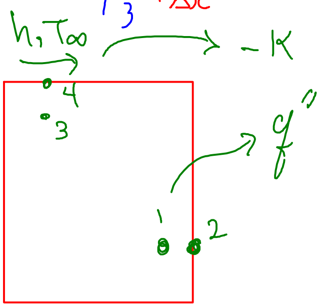
نکته: برای اینکه شرط فوق از دقت بالایی برخوردار شود نیاز است تا شبکه ریزتر طراحی شود بطوریکه نقطه (۲) حتی‌الامکان به نقطه (۱) بسیار نزدیک شود.

با توجه به شکل فوق، ۶ معادله جبری برای نقاط داخلی و ۳ معادله مرزی جبری برای نقاط روی مرز نوشته شده و دستگاه معادلات حل خواهد شد. با حل دستگاه معادلات دمای نقاط مجهول بدست می‌آید.



$$-k\frac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty)$$

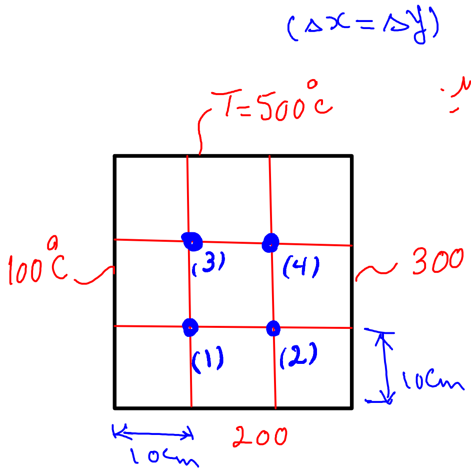
$$\rightarrow -k\frac{T_2-T_1}{\Delta x}=h(T_2-T_\infty)$$



$$-k\frac{T_4-T_3}{\Delta y}=h(T_4-T_\infty)$$

$$-k\frac{T_2-T_1}{\Delta x}=q''$$

مثال: با بکار بردن روش عددی اختلاف محدود، دمای نقاط داخلی را بدست آورید.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{T_{i,j+1}-2T_{i,j}+T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}=0$$

$$\underbrace{T_{i+1,j}+T_{i-1,j}+T_{i,j+1}+T_{i,j-1}-4T_{i,j}=0}\ *$$

نقطه (1) ; $1\rightarrow i,j \rightarrow T_{i+1,j}=T_2\ ;\ T_{i-1,j}=100\ ;\ T_{i,j+1}=T_3\ ;\ T_{i,j-1}=200$

$$\rightarrow T_2+100+T_3+200-4T_1=0 \rightarrow -4T_1+T_2+T_3=-300$$

نقطه (2) ; $(2)\rightarrow i,j \rightarrow T_{i+1,j}=300\ ;\ T_{i-1,j}=T_1\ ;\ T_{i,j+1}=T_4\ ;\ T_{i,j-1}=200$

جاگذاری ; $300+T_1+T_4+200-4T_2=0 \Rightarrow T_1-4T_2+T_4=-500$

برای نقطه (3) $\rightarrow T_4+100+500+T_1-4T_3=0 \rightarrow T_1-4T_3+T_4=-600$

برای نقطه (4) $\rightarrow 300+T_3+500+T_2-4T_4=0 \rightarrow T_2+T_3-4T_4=-800$

$$③\ \begin{cases}-4T_1+T_2+T_3=-300 \\ T_1-4T_2+T_4=-500 \\ T_1-4T_3+T_4=-600 \\ T_2+T_3-4T_4=-800\end{cases}$$

$$\rightarrow T_1=-75-\frac{T_2}{4}-T_3/4$$

$$\rightarrow -75-\frac{T_2}{4}-\frac{T_3}{4}-4T_2+T_4=-500$$

$$\rightarrow T_4=-500+75+\frac{17}{4}T_2+\frac{T_3}{4}$$

$$\rightarrow T_4=-425+\frac{17}{4}T_2+T_3/4$$

③ در ; $-75-\frac{T_2}{4}-\frac{T_3}{4}-4T_3-425+\frac{17}{4}T_2+\frac{T_3}{4}=-600$

$$-75+4T_2-4T_3-425=-600 \rightarrow 4T_2-4T_3=-100$$

$$\rightarrow T_2-T_3=-25 \rightarrow T_2=-25+T_3$$

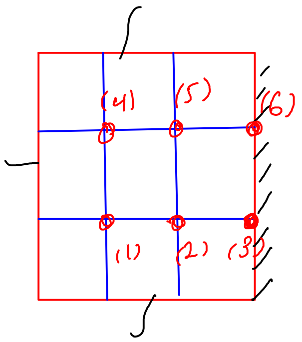
$$-25+T_3+T_3-4\left(-425+\frac{17}{4}(-25+T_3)\right)+\frac{T_3}{4}=-800$$

$$\begin{cases} -4T_1 + T_2 + T_3 = -300 \\ T_1 - 4T_2 + T_4 = -500 \\ T_1 - 4T_3 + T_4 = -600 \\ T_2 + T_3 - 4T_4 = -800 \end{cases}$$

ماتریس ضرایب ; $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$; ماتریس جواب = $\begin{bmatrix} -300 \\ -500 \\ -600 \\ -800 \end{bmatrix} = B$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = A^{-1} \times B \quad ; \quad [A][T] = [B] \rightarrow \underbrace{[A]^{-1}[A]}_{I}[T] = [A^{-1}][B]$$

$$\rightarrow [T] = [A]^{-1}[B]$$

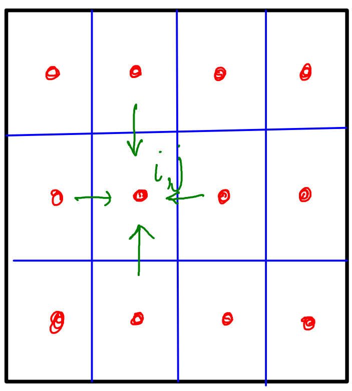


تمرین: حل کنید.

روش بالانس انرژی (حالت خاص از روش حجم محدود):

به محل تقاطع خطوط عمود برهم، گره و به هر یک از مربع‌های حاصل، سلول گفته می‌شود.

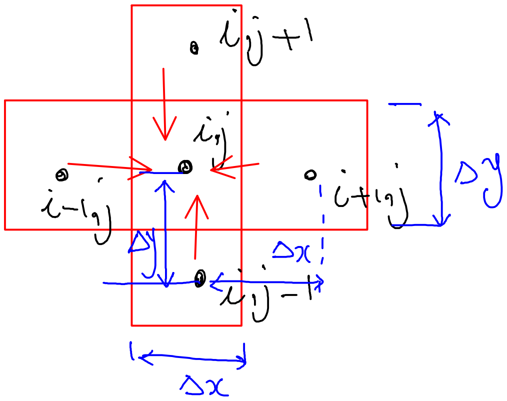
در روش اختلاف محدود، با گره‌ها سروکار داریم و در روش حجم محدود با مرکز سلول‌ها.



کلیه انرژی‌های ورودی به سلول + انرژی تولیدی در سلول = تغییر دمای سلول بر واحد زمان

در حالت دائمی ; 〃 + 〃 = 0

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = 0$$



نکته: همواره انتقال انرژی از یک سلول به سلول دیگر از مرز مشترک دو سلول صورت می‌گیرد.

اولین قدم برای نوشتن معادله انتقال انرژی، یافتن سلول‌هایی است که با سلول مورد نظر مرز مشترک دارند.

همیشه جهت انرژی را از سلول‌های مجاور به سمت سلول مورد نظر، انتخاب می‌کنیم.

$$q_{i-1,j \to i,j} = -kA\frac{\partial T}{\partial x} = -k(\Delta y)\frac{T_{i,j}-T_{i-1,j}}{\Delta x} = k(\Delta y)\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{\Delta x}$$

$$q_{i+1,j \to i,j} = -kA\frac{\partial T}{\partial x} = -k(\Delta y)\frac{T_{i,j}-T_{i+1,j}}{\Delta x} = k(\Delta y)\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x}$$

$$q_{i,j-1 \to i,j} = k(\Delta x)\frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{\Delta y}$$

$$q_{i,j+1 \to i,j} = k(\Delta x)\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta y}$$

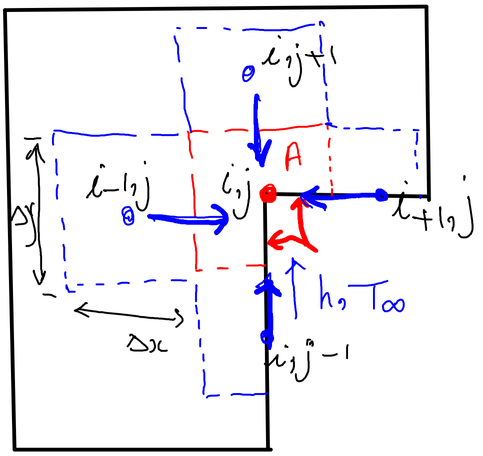
$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = 0 \;;\quad \dot{E}_g = 0 \to \dot{E}_{in} = 0$$

$$k\Delta y\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{\Delta x} + k(\Delta y)\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x} + k(\Delta x)\frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{\Delta y} + k(\Delta x)\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta y} = 0$$

اگر $\Delta x = \Delta y$ ؛ $T_{i-1,j} - T_{i,j} + T_{i+1,j} - T_{i,j} + T_{i,j-1} - T_{i,j} + T_{i,j+1} - T_{i,j} = 0$

$$\Rightarrow T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

مثال: معادله جبری انتقال حرارت را برای نقطه A از روش بالانس انرژی بدست آورید.



$$q_{i-1,j\to i,j} = K(\Delta y)\,\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{\Delta x}$$

$$q_{i+1,j\to i,j} = K\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x}$$

$$q_{i,j+1\to i,j} = K(\Delta x)\,\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta y}$$

$$q_{i,j-1\to i,j} = K\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{\Delta y}$$

$$q_{\text{از سیال}\to i,j} = h\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(T_\infty - T_{i,j}) + h\,\frac{(\Delta y)}{2}(T_\infty - T_{i,j})$$

$$= h\left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta y}{2}\right)(T_\infty - T_{i,j})$$

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = 0 \xrightarrow{\dot{E}_g=0} \dot{E}_{in} = 0$$

$$\to K(\Delta y)\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{\Delta x} + K\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x} + K(\Delta x)\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta y}$$

$$+ K\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{\Delta y} + h\left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta y}{2}\right)(T_\infty - T_{i,j}) = 0$$

اگر ؛ $\Delta x = \Delta y \to K(T_{i-1,j}-T_{i,j}) + \frac{K}{2}(T_{i+1,j}-T_{i,j}) + K(T_{i,j+1}-T_{i,j})$

$$+ \frac{K}{2}(T_{i,j-1}-T_{i,j}) + h(\Delta x)(T_\infty - T_{i,j}) = 0$$

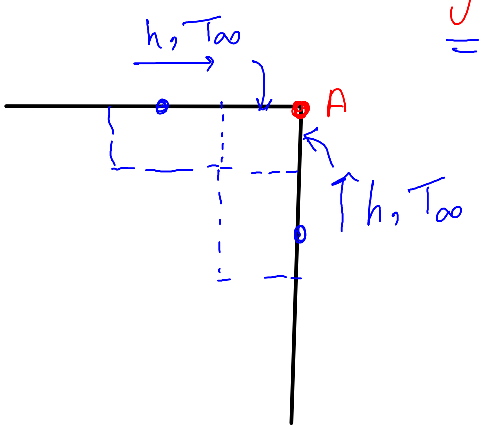
در ۲ ضرب
بر K تقسیم

$$2T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j} - T_{i,j} + 2T_{i,j+1} - 2T_{i,j}$$

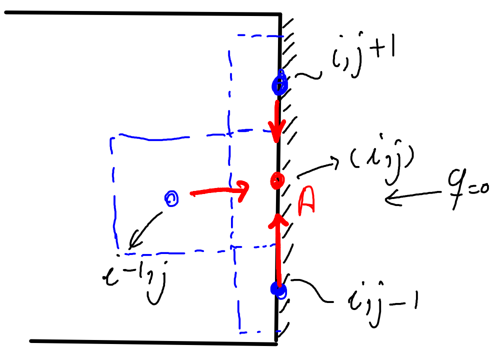
$$+ T_{i,j-1} - T_{i,j} + \frac{2h\Delta x}{K}T_\infty - \frac{2h\Delta x}{K}T_{i,j} = 0$$

$$\to 2T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + 2T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - \left(6 + \frac{2h\Delta x}{K}\right)T_{i,j} + \frac{2h\Delta x}{K}T_\infty = 0$$

تمرین : با در نظر گرفتن انتقال حرارت همرفت دو بعدی دائمی و $\dot{E}_g=0$. با استفاده از روش موازنه انرژی در حل عددی ، رابطه ای جبری برای نقطه A بدست آورید .



مثال : معادله انتقال حرارت را برای نقطه A از روش بالانس انرژی بدست آورید . (دائمی ، $\dot{E}_g=0$)



$$q_{i-1,j\to i,j} = K(\Delta y)\,\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{\Delta x}$$

$$q_{i,j+1\to i,j} = K\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta y}$$

$$q_{i,j-1\to i,j} = K\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{\Delta y}$$

$$\dot{E}_{in}+\dot{E}_g=0 \rightarrow K\,\Delta y\,\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{\Delta x}+K\left(\frac{\Delta x}{2\Delta y}\right)\left[T_{i,j+1}+T_{i,j-1}-2T_{i,j}\right]=0$$

اگر $\Delta x=\Delta y$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم } K} T_{i-1,j}-T_{i,j}+\frac{1}{2}\left[T_{i,j+1}+T_{i,j-1}-2T_{i,j}\right]=0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{i-1,j}+\frac{1}{2}\left(T_{i,j+1}+T_{i,j-1}\right)-2T_{i,j}=0}$$

بنام خدا — انتقال حرارت (۱): جلسه نهم

- انتقال حرارت هدایت گذرا:

در مختصات کارتزین دو بعدی:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

در مختصات استوانه‌ای:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \text{ضریب پخش حرارتی}$$

معادله یک بعدی کارتزین $\longrightarrow \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t} \longrightarrow T(x,t)$

۱- روش ظرفیت انباشته: Lumped capacity system

اگر یک قطعه کوچک داشته باشیم که ناگهان در محیطی که دمای آن با دمای قطعه یکسان نباشد قرار دهیم مانند: قرار دادن یک گوی کروی در داخل کوره یا قرار دادن یک قطعه داغ کوچک در هوای آزاد یا استخر آب:

۱- خواص فیزیکی قطعه:
- ρ جرم حجمی
- c گرمای ویژه
- V حجم
- A سطح جابجایی
- T_0 دمای اولیه

در انتقال حرارت انباشته، فرض می‌شود که توزیع دما در جسم (قطعه) یکنواخت و تنها تابعی از زمان باشد همچنین مقاومت حرارتی هدایتی در برابر مقاومت حرارتی جابجایی خیلی کم باشد.

$$\text{مقاومت هدایتی} = \frac{\Delta x}{kA}$$

$$\text{مقاومت جابجایی} = \frac{1}{hA}$$

$$\frac{\text{مقاومت هدایتی}}{\text{مقاومت جابجایی}} \ll 1 \longrightarrow \frac{\Delta x / kA}{1/hA} \ll 1 \Longrightarrow \frac{h\Delta x}{k} \ll 1$$

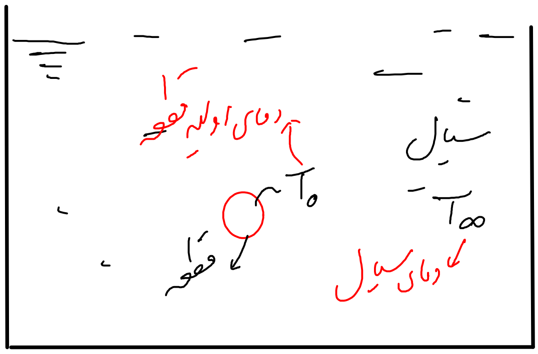
شرط لازم برای استفاده از روش ظرفیت انباشته این است که مقاومت هدایتی خیلی کوچکتر از مقاومت جابجایی باشد.

$\frac{h\,\Delta x}{k}$ = عدد بیوت = Bi ; Biot Number

$\Delta x =$ طول مشخصه $= \frac{V}{A} = \frac{\text{حجم قطعه}}{\text{سطح جابجایی}}$

اگر عدد بیوت (Bi) کوچکتر از ۰.۱ باشد می‌توان از روش ظرفیت انباشته استفاده نمود:

شرط لازم ; $Bi < 0.1$



$T_0 \neq T_\infty$

بالانس انرژی ;

انرژی که سیال می‌گیرد = انرژی که قطعه از دست می‌دهد

$$-mc\frac{dT}{dt} = hA(T-T_\infty)$$

$$m = \rho V$$

$$\Rightarrow -\rho V c\, dT = hA(T-T_\infty)\,dt \Rightarrow \frac{dT}{T-T_\infty} = \frac{-hA}{\rho V c}\,dt$$

انتگرال‌گیری ; $\ln(T-T_\infty) + \ln C = -\frac{hA}{\rho V c}t$

$$\ln C(T-T_\infty) = -\frac{hA}{\rho V c}t \Rightarrow C(T-T_\infty) = e^{-\frac{hA}{\rho V c}t}$$

شرط اولیه ; $t=0 \rightarrow T=T_0 \rightarrow C(T_0-T_\infty)=1 \Rightarrow C=\frac{1}{T_0-T_\infty}$

جاگذاری $\Rightarrow$ $\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho V c}t}$ $\quad$ t: زمان برحسب ثانیه

طول مشخصه $= \frac{V}{A} = L_c$; $\frac{A}{V} = \frac{1}{L_c}$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$ $\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty} = e^{-\frac{h}{\rho L_c c}t}$

$$\frac{ht}{\rho c L_c} \times \frac{kL_c}{kL_c} = \frac{hL_c}{k}\cdot\frac{k}{\rho c}\times\frac{t}{L_c^2} = Bi\cdot\frac{\alpha t}{L_c^2} = Bi\cdot F_o$$

عدد فوریه $= F_o$

بی‌بعد $\quad$ بی‌بعد

$T - T_\infty = \theta$

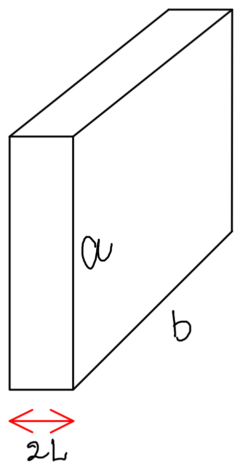
$T_0 - T_\infty = \theta_0$

$$\xrightarrow[\text{معادله } T]{\text{جایگذاری در}} \quad \frac{\theta}{\theta_0} = e^{-Bi \cdot F_o}$$

یا ; $\frac{\theta}{\theta_0} = \exp(-Bi\, F_o)$

برای استوانه ; $L_c = \frac{V}{A} = \frac{\pi r^2 h}{2\pi r h} = \frac{r}{2}$;

برای کره ; $L_c = \frac{4/3\, \pi r^3}{4\pi r^2} \Rightarrow L_c = \frac{r}{3}$



$L << a, b$; سطح جانبی کل $= 2ab + \underbrace{4aL + 4bL}_{\text{ناچیز}}$

$L_c = \frac{ab(2L)}{2ab} = L$

مثال: یک محور فولادی به شعاع 0.1 متر در کوره‌ای با دمای 1200K و ضریب جابجایی $100\ W/m^2K$ قرار داده می‌شود. اگر دمای اولیه محور، 300K باشد چه مدت طول می‌کشد تا دمای مرکز آن به 800K برسد.

$\rho = 7832\ kg/m^3$; $K = 51.2\ W/mK$; $C = 541\ J/kgK$; $\alpha = 1.21\times10^{-5}\ m^2/s$

$r = 0.1$, $T_\infty = 1200\ K$; $h = 100$; $T_0 = 300K$; $T = 800\ K$; $t = ?$

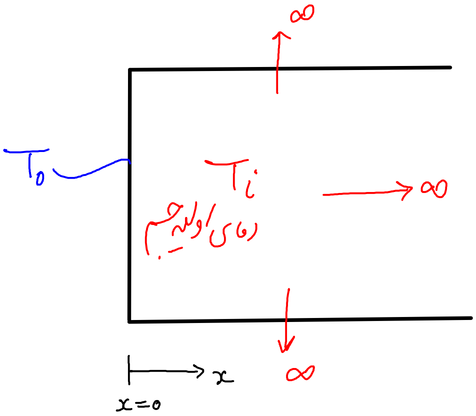
$Bi = \frac{hL_c}{K}$, $L_c = \frac{r}{2} = 0.05\ m$; $Bi = \frac{100\times 0.05}{51.2} = 0.097 < 0.1$

بنابراین می‌توان از روش ظرفیت انباشته استفاده نمود:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho VC}t} \Rightarrow \frac{800 - 1200}{300 - 1200} = e^{-\frac{100\times t}{7832\times 541\times \underbrace{0.05}_{L_c}}}$$

$$\ln(4/9) = -\frac{100}{7832\times 541\times 0.05}\, t \Rightarrow \boxed{t = 860\ (s)}$$

- هدایت گذرا در جسم نیمه بینهایت (Semi-infinite) ؛



الف: ناگهان در لحظه $t=0$ دمای یک سطح را به دمای T_0 برسانیم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad ; \quad T(x,t)$$

شرط اولیه ; $T=T_i$; $t=0$; $T(x,0)=T_i$

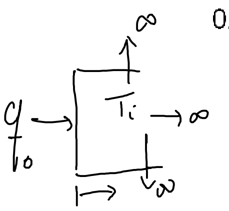
شرط مرزی ; $t=t \to x=0 \to T=T_0$; $T(0,t)=T_0$

$$T(x,t) = ?$$

$$\frac{T(x,t)-T_0}{T_i-T_0} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) ;$$

erf = error function ; تابع خطا ; $erf(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^w e^{-v^2}dv$

$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$erf\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$
0.00	0.00000	0.76	0.71754	1.52	0.96841
0.02	0.02256	0.78	0.73001	1.54	0.97059
0.04	0.04511	0.80	0.74210	1.56	0.97263
0.06	0.06762	0.82	0.75381	1.58	0.97455
0.08	0.09008	0.84	0.76514	1.60	0.97636
0.10	0.11246	0.86	0.77610	1.62	0.97804
0.12	0.13476	0.88	0.78669	1.64	0.97962
0.14	0.15695	0.90	0.79691	1.66	0.98110



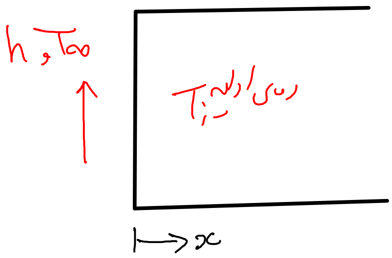
ب: شار حرارتی ثابت: سطح در لحظه $t=0$ ناگهان در معرض شار حرارتی ثابت قرار گیرد؛

شرط اولیه $= T(x,0) = T_i$

شرط مرزی ; $-KA\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q_0$ یا $-K\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{q_0}{A}$

$$T(x,t)-T_i=\frac{2q_0}{kA}\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}-\frac{q_0}{kA}\,x\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right]$$

سطح جسم نیمه نهایت ناگهان در محیط با دمای T_∞ قرار می‌گیرد:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,0)=T_i \qquad t=0$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=h(T_\infty-T)\big|_{x=0} \qquad t>0$$

$$\frac{T-T_i}{T_\infty-T_i}=1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)-\left[\exp\left(\frac{hx}{k}+\frac{h^2\alpha t}{k^2}\right)\right]\left[1-\operatorname{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}+\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right]\right]$$

مثال: یک قطعه بزرگ فولادی $[k=45\ W/m\,^\circ K\ ;\ \alpha=1.4\times10^{-5}\ m^2/s]$ ابتدا در درجه حرارت یکنواخت $35^\circ C$ قرار دارد. سطح این قطعه به طرق زیر در معرض حرارت قرار می‌گیرد:

الف: بالا بردن ناگهانی درجه حرارت سطح تا $250^\circ C$

ب: اعمال شار حرارتی ثابت در سطح به مقدار $3.2\times10^5\ W/m^2$ $\left(\frac{q_0}{A}=3.2\times10^5\ W/m^2\right)$

درجه حرارت در عمق $2.5\ cm$ پس از گذشت زمان $t=30s$ برای هر دو حالت را محاسبه کنید.

الف؛ $\dfrac{T(x,t)-T_0}{T_i-T_0}=\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$; $\dfrac{x}{2\sqrt{\alpha t}}=\dfrac{0.025}{2\sqrt{1.4\times10^{-5}\times30}}=0.61$

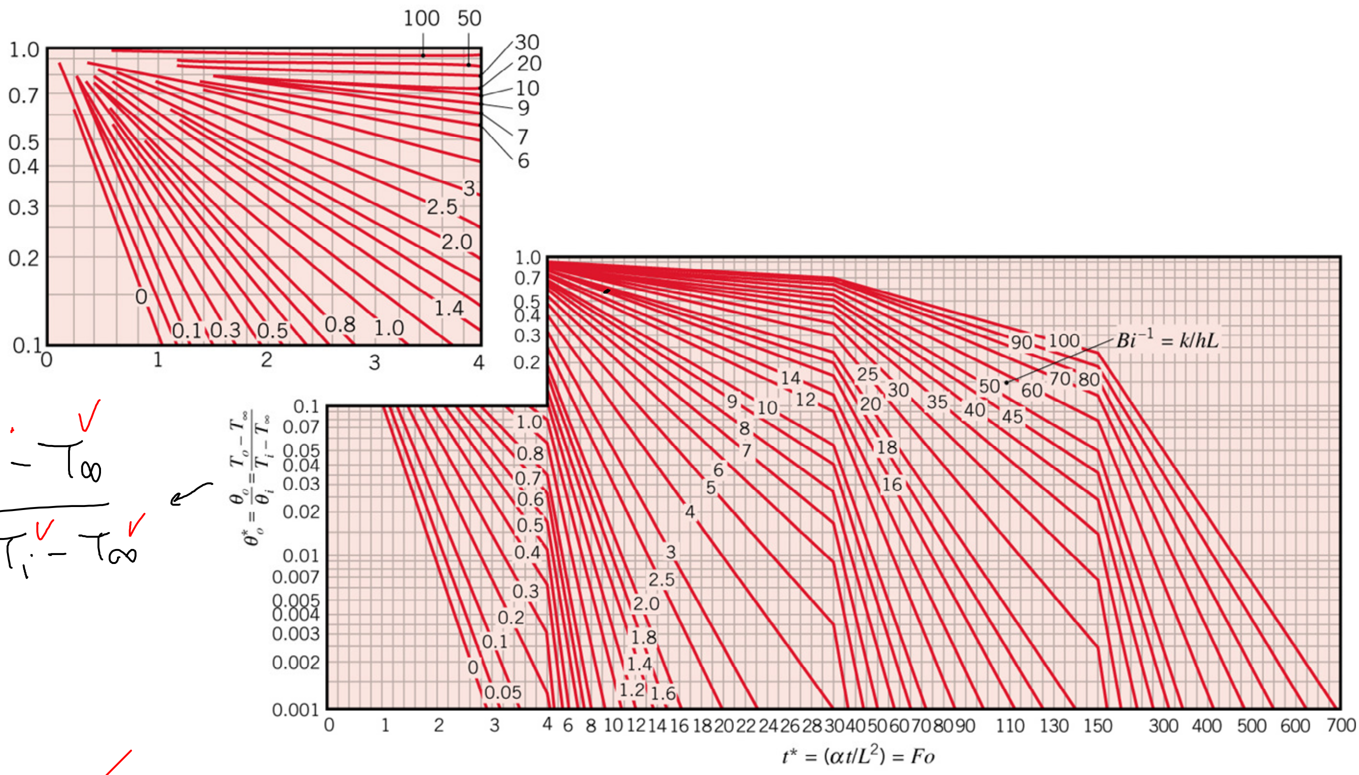
با استفاده از جدول: $\operatorname{erf}(0.61)=0.61164$

$$\rightarrow T(2.5\,cm, 30\,s)=250+(35-250)(0.61164)=118.5\,^\circ C$$

ب) $\dfrac{q_0}{A}=3.2\times10^5 \rightarrow T=79.3\,^\circ C \longleftarrow$ با استفاده از رابطه حالت (ب)

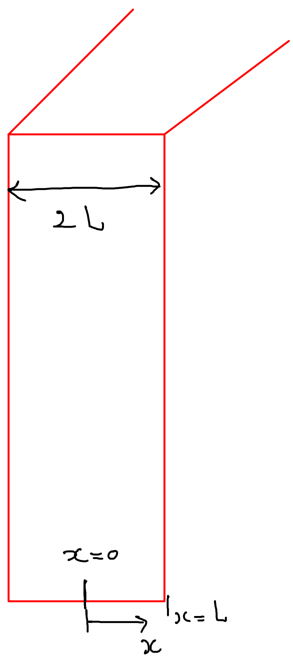
اگر در محاسبات انتقال حرارت هدایت گذرا، عدد بیوت (Bi) بزرگتر از 0.1 به دست آمد این بدان معنی است که بین سطح جانبی قطعه و مرکز آن اختلاف دما وجود خواهد داشت، در نتیجه در اینگونه مسائل دما تنها تابعی از زمان نبوده بلکه تابعی از مکان و زمان خواهد بود. بنابراین در داخل قطعه پروفیل دما وجود خواهد داشت. برای حل اینگونه مسائل از منحنی هایی بنام منحنی های هسلر استفاده می کنیم.

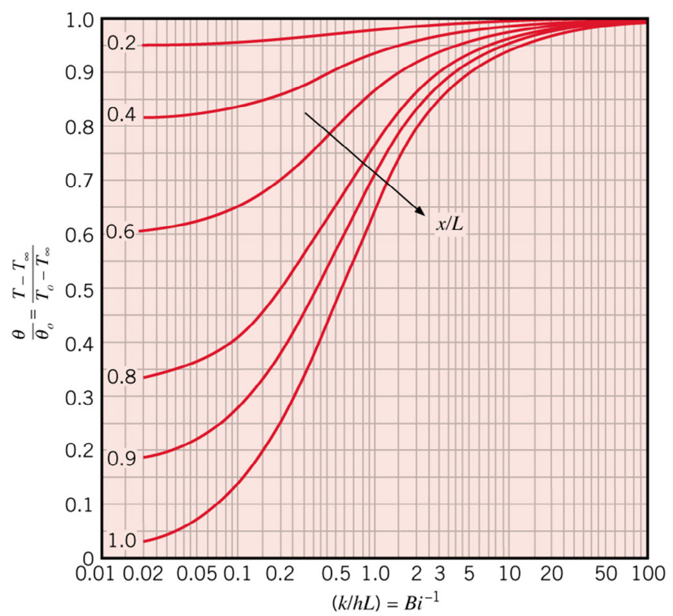
ابتدا با استفاده از یک منحنی، دمای مرکز قطعه به دست می آید.



?

$$\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$





بنام خدا

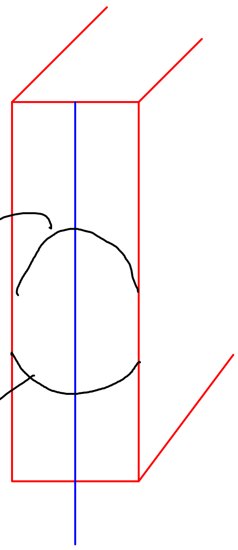
انتقال حرارت (۱)

جلسه دهم

منحنی های هسلر :

$$\begin{cases} \text{کره} = r_0/3 \\ \text{استوانه} = r_0/2 \end{cases}$$

نکته: برای استفاده از منحنی های هسلر، معیار $Bi = \frac{hL_c}{k} > 0.1$ باید رعایت شود. اما در نمودار های مربوط به استوانه و کره، اعداد مشخص شده برای Bi به صورت $Bi = \frac{hr_0}{k}$ می باشد.



درحال سرد شدن

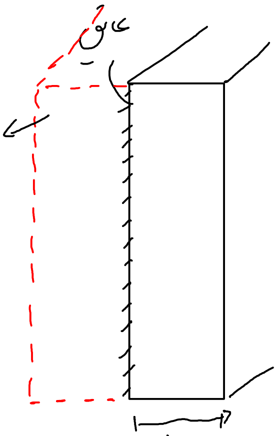
درحال گرم شدن

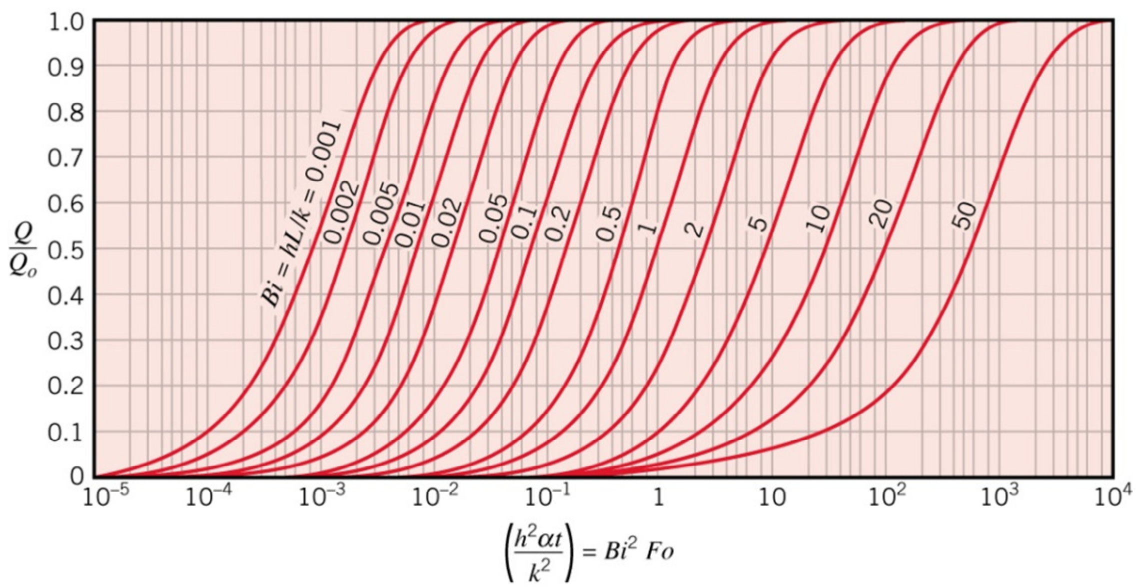
$x=0$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

که شرط عایق می باشد

نکته: اگر قطعه تخت شکل، با شرط دمای یک طرف عایق داشته باشیم، میتوان صفحه عایق را به صورت صفحه مرکزی یک قطعه تخت شکل در نظر گرفت در صورتیکه ضخامت آن را به صورت دو برابر ضخامت قطعه اولیه در نظر بگیریم.





مقدار Q_0 از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$Q_0 = mC(T_0 - T_\infty)$$

Q_0 انرژی است که جسم در زمان بینهایت از دست می دهد یا بدست می آورد.

مثال: یک لوله بزرگ فولادی به قطر یک متر، دارای ضخامت دیواره 40 mm می‌باشد که دیواره خارجی آن عایق شده است. دمای اولیه لوله $-20^\circ C$ می‌باشد. اگر در این دما، روغن داغ با دمای $60^\circ C$ در داخل لوله پمپ شود و ضریب انتقال حرارت جابجایی در مجاورت جداره داخلی لوله $500\ W/m^2K$ باشد. مطلوبست:

خواص فولاد

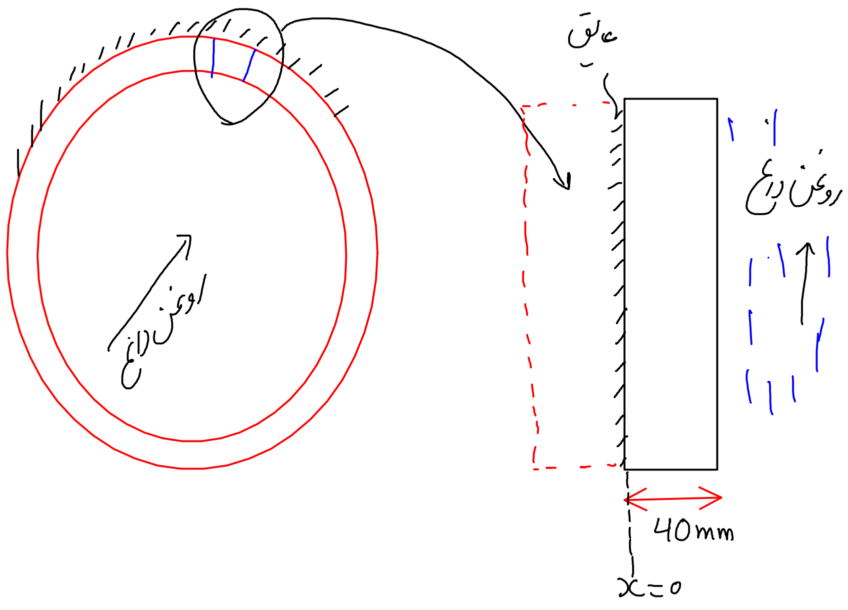
$$\begin{cases} \rho = 7823\ kg/m^3 \\ C = 434\ J/kg^\circ K \\ K = 63.9\ W/m^\circ K \\ \alpha = 18.8\times10^{-6}\ m^2/s \end{cases}$$

الف: عدد Bi و F_o بعد از 8 دقیقه؛

ب: در $t = 8\ min$ دمای خارجی لوله که با عایق پوشیده است؟

ج: مقدار شار حرارتی q'' از روغن به جداره لوله در $t = 8\ min$

د: مقدار انرژی بر واحد طول لوله که از طرف روغن در مدت زمان 8 دقیقه بدست می‌آورد.



الف)

$$Bi = \frac{hL_c}{K} = \frac{500\times0.04}{63.9} = 0.313 > 0.1 \ ;$$

$$F_o = \frac{\alpha t}{L_c^2} = \frac{18.8\times10^{-6}\times\overbrace{8\times60}^{\text{ثانیه}}}{(0.04)^2} = 5.64$$

در نمودارهای جسم مکعبی شکل عدد بیوت معکوس $Bi = \frac{hL}{K}$ تعریف شده است. بنابراین:

$$Bi^{-1} = \frac{K}{hL} = \frac{63.9}{500\times0.04} = 3.2$$

ب: دمای سطح عایق شده، دمای مرکز جسم مکعبی شکل می‌باشد. بنابراین با استفاده از نمودارهای هسلر داریم:

با استفاده از نمودار $\begin{cases} F_o = 5.6 \\ B_i^{-1} = 3.2 \end{cases} \longrightarrow \dfrac{\theta_o}{\theta_i} = 0.22 \rightarrow \dfrac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.22$

$$\Rightarrow \frac{T_o - 60}{-20-60} = 0.22 \rightarrow T_o = 60 - 0.22 \times 80 = 42\,^\circ C$$

ج: مقدار شار حرارتی را در این لحظه $(t = 8\,min)$ بدست می‌آوریم:

$$q'' = h[T_\infty - T(L, 480s)]$$

$T(L, 480) = ?$ $\xrightarrow{\text{با نمودار هسلر (نمودار دوم)}}$; $\dfrac{\theta}{\theta_o} = 0.86 = \dfrac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$

$$\Rightarrow \frac{T-60}{42-60} = 0.86 \longrightarrow T(L, 480s) = 60 + 0.86(-18) = 45\,^\circ C$$

$$q'' = h(T_\infty - T(L, 480s)) = 500(60-45) = 7500\ W/m^2$$

د: برای حل این قسمت از منحنی سوم نمودار هسلر استفاده می‌کنیم:

$$Q_o = mc(T_\infty - T_i)$$

$$\frac{Q}{Q_o} = 0.78 \Rightarrow Q = 0.78\, mc(T_\infty - T_i) = 0.78\, \rho V c (60-(-20))$$

$$V = \pi D L \times \text{ضخامت} = \pi \times 1 \times L \times 0.04$$

$$Q = 0.78\, \rho c\, (\pi \times 1 \times L \times 0.04) \times 80 \Rightarrow \frac{Q}{L} = 0.78 \times 7823 \times 434$$

$$\times (3.14 \times 0.04) \times 80 = 2.7 \times 10^{7}\ J/m$$

روش عددی:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\frac{\text{دمای نقطه (ز و ...) در زمان } n+1 - \text{ دمای نقطه (ز و ...) در زمان } n}{\text{اختلاف زمان بین دو حالت}}$$

روش صریح (Explicit): اگر مشتقات پاره‌ای نسبت به مکان در زمان n نوشته شوند به این روش، روش صریح گفته می‌شود.

روش ضمنی (Implicit): اگر مشتقات پاره‌ای (جزئی) نسبت به مکان در زمان n+1 نوشته شوند.

هدف از استفاده روش صریح و ضمنی بدست آوردن دمای نقاط مختلف جسم در زمان n+1 می‌باشد.

یعنی دمای کلیه نقاط در زمان n مشخص می‌باشد.

نکته: در زمان صفر ($n=0$): دمای کلیه نقاط جسم (به استثنای مرزهای جسم)، دمای اولیه آن می‌باشد.

$$\frac{T_{i+1,j}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2}+\frac{T_{i,j+1}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^{n}}{\Delta t}$$

در روش صریح، تنها یک مجهول در معادله ظاهر می‌شود که براحتی قابل محاسبه می‌باشد.

$$T_{i,j}^{n+1}=T_{i,j}^{n}+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left[T_{i+1,j}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i-1,j}^{n}\right]+\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta y)^2}\left[T_{i,j+1}^{n}-2T_{i,j}^{n}+T_{i,j-1}^{n}\right]$$

اگر فرض: $\Delta x=\Delta y\longrightarrow$

$$T_{i,j}^{n+1}=\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[T_{i+1,j}^{n}+T_{i-1,j}^{n}+T_{i,j+1}^{n}+T_{i,j-1}^{n}\right]+\left[1-\frac{4\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}\right]T_{i,j}^{n}$$

برای روش صریح، شرط همگرایی تعیین می‌شود:

شرط همگرایی برای شکل قبلی این است که ضریب $T_{i,j}^{n}$ را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = F_0$$

$$\Rightarrow 1-4F_0 \geq 0 \rightarrow F_0 \leq 1/4 \rightarrow \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1/4$$

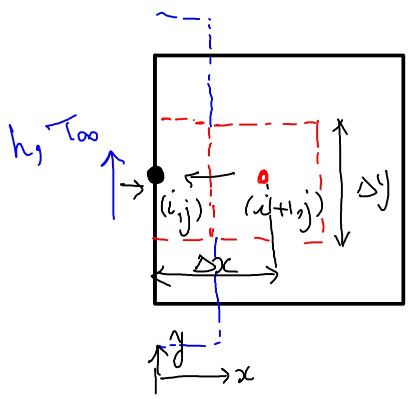
تمارین فصل چهارم:

اثبات جداول 4-2 ؛ تمرین ۴۲، ۵۱، ۷۲

فصل پنجم:

۵، ۷، ۸، ۵۱، ۵۲، ۵۹، ۶۲، ۷۲، ۷۸، ۸۹، ۹۳، ۹۸

روش بالانس انرژی:



در حالت یک بعدی فقط شبکه بندی در راستای x مورد نیاز می باشد.

در حالت دو بعدی، هم شبکه بندی در راستای x و هم شبکه بندی در راستای y ضروری می باشد.

انرژی ذخیره شده در سلول = انرژی تولیدی در سلول + انرژی ورودی به سلول ؛ بالانس انرژی

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = \dot{E}_s$$

$$q_{\text{سیال} \to (i,j)} = hA_1(T_\infty - T_{i,j})$$ ؛ برای حالت یک بعدی $T_{i,j} = T_i$

$$q_{i+1,j \to i,j} = KA_2 \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}$$ ، برای یک بعدی $= KA_2 \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$

انرژی ذخیره شده در سلول $= mc\frac{\partial T}{\partial t} = \rho V c \frac{\partial T}{\partial t} = \rho c \left(\frac{\Delta x}{2}\right)(\Delta y) \frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta t}$

$A_1 = \Delta y$; $A_2 = \Delta y$

جاگذاری در معادله بالانس انرژی ; $h(\cancel{\Delta y})(T_\infty - T_i^n) + k(\cancel{\Delta y})\frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x}$

$$= \rho c\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(\cancel{\Delta y})\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (1)$$

(معادله صریح)

$$h(T_\infty - T_i^n) + k\frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x} = \frac{\rho c \Delta x}{2\Delta t}(T_i^{n+1} - T_i^n)$$

$$\Rightarrow T_i^{n+1} = T_i^n + \underbrace{\frac{2h\Delta t}{\rho c \Delta x}}_{F_o Bi}(T_\infty - T_i^n) + \underbrace{\frac{2\overset{\alpha}{k}\Delta t}{\rho c(\Delta x)^2}}_{F_o}(T_{i+1}^n - T_i^n)$$

$$\frac{h\Delta t}{\rho c \Delta x} \times \frac{k\Delta x}{k\Delta x} = F_o Bi$$

(α)

برای نوشتن معادله بصورت ضمنی، کمیت زمانهای n در سمت چپ معادله (1)، در زمان $n+1$ نوشته شوند.

نکته: کلیه زمانهای n در یک طرف معادله و کلیه زمانهای $n+1$ در سمت دیگر معادله باید نوشته شوند.

بنام خدا   انتقال حرارت (۱)   جلسه یازدهم

انتقال حرارت جابجایی :

رابطه اصلی و کاربردی انتقال حرارت جابجایی، همان قانون سرمایش نیوتن است.

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

هدف در این مبحث ارائه روابطی برای محاسبه h می باشد

مقدار h تابع هندسه جسم و اعداد بی بعدی مانند Re و P_r (عدد پرانتل) می باشد.

$$P_r = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{پخش مومنتوم}}{\text{پخش حرارت}}$$

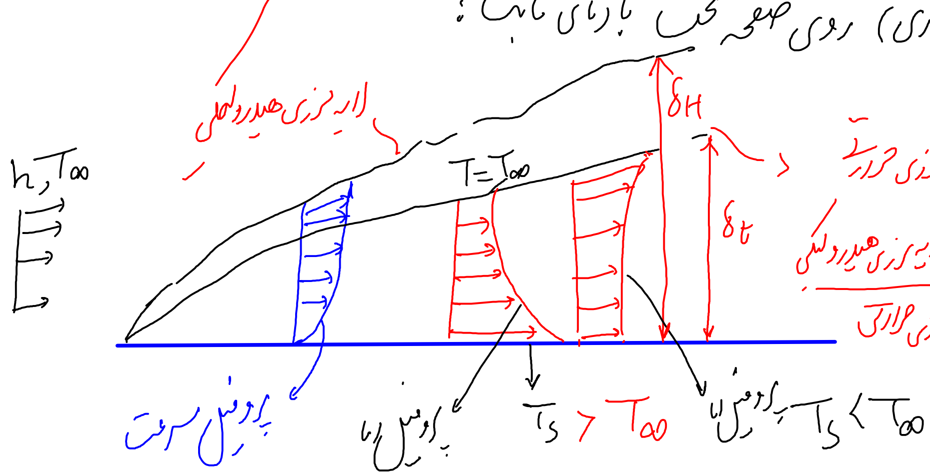
در این فصل، عدد پرانتل (P_r) ثابت در نظر گرفته می شود.

برای گازها، عدد پرانتل (P_r) در محدوده یک می باشد : $P_{r\,\text{هوا}} \simeq 0.7$

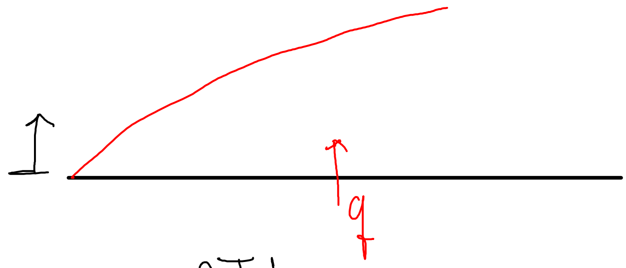
برای فلزات مایع عدد پرانتل بسیار کوچک (محدوده $0.001 \sim 0.1$) می باشد.

برای روغن ها عدد پرانتل بسیار بزرگتر از ۱ می باشد $P_{r\,(\text{روغن})} \gg 1$

- بررسی انتقال حرارت جابجایی (اجباری) روی صفحه تخت با دمای ثابت :



$$\frac{\text{ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی}}{\text{ضخامت لایه مرزی حرارتی}} = \frac{\delta_H}{\delta_t} = P_r^{1/3}$$



$$q = -KA\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

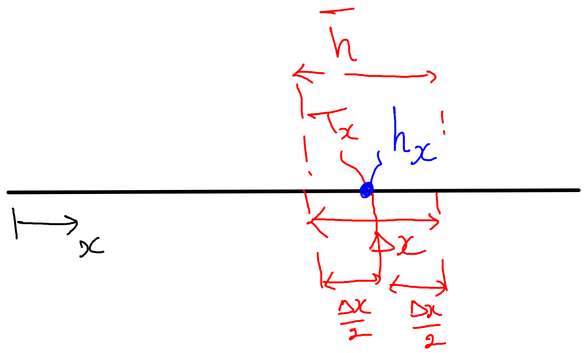
$$\Rightarrow \underbrace{h = \frac{-K\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_s - T_\infty}} \quad *$$

اگر پروفیل دما در سیال مشخص باشد می‌توان با استفاده از رابطه فوق (*)، ضریب انتقال حرارت جابجایی (h) را محاسبه کنیم.

برای ضریب انتقال حرارت جابجایی، دو تعریف ارائه می‌شود:

۱- ضریب انتقال حرارت جابجایی موضعی (محلی) (h_x)

۲- ضریب انتقال حرارت جابجایی متوسط ($\bar{h}$)



$$\underbrace{A}_{A=\Delta x \times 1} \quad ; \quad q_{\Delta x} = h_x \Delta x (T_x - T_\infty)$$

$$q_{\Delta x} = \bar{h}\,\Delta x\,(T_{\Delta x} - T_\infty)$$

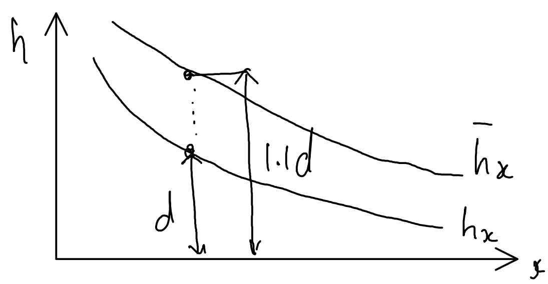
دمای متوسط طول Δx

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\,dx$$

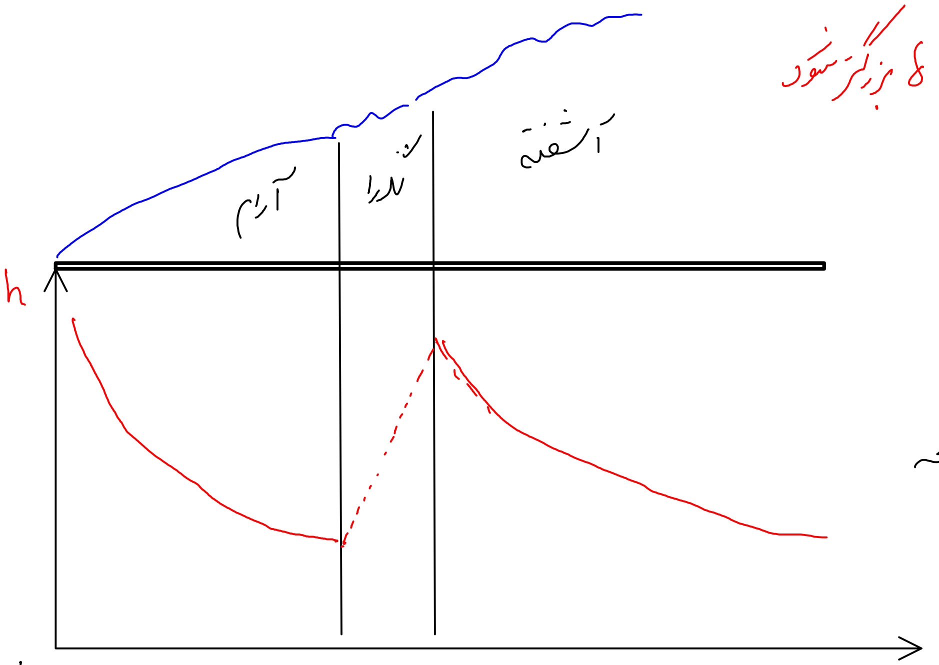
ضریب انتقال حرارت جابجایی متوسط بر طول x = $\bar{h}_x = \frac{1}{x}\int_0^x h_x\,dx$

تمرین: اگر $h_x = ax^{-0.1}$ ، رابطه‌ای برای $\bar{h}_x$ بدست آورید:

$$\bar{h}_x = \frac{1}{x}\int_0^x h_x\,dx = \frac{1}{x}\int_0^x ax^{-0.1} = \frac{10}{9}\,\frac{1}{x}\,ax^{0.9} = 10/9\; ax^{-0.1} = \frac{10}{9}h_x$$



در حالت کلی، تغییرات ضریب انتقال حرارت جابجایی، برای یک صفحه تخت بصورت زیر می‌باشد.



در یک رژیم جریان ثابت، هرچه x بزرگتر شود مقدار h کوچکتر می‌شود.

نرخ انتقال حرارت از صفحه با سرعت سیال در مجاورت صفحه نسبت مستقیم دارد.

با افزایش ضخامت لایه مرزی، به دلیل کاهش سرعت سیال در مجاورت صفحه تخت، مقدار h کاهش می‌یابد.

تشابه رینولدز-کلبورن: (رابطه‌ای است بین ضریب اصطکاک و انتقال حرارت روی صفحه تخت)

عدد نوسلت ; Nusselt Number $= \dfrac{hx}{K_f}$; $Bi = \dfrac{hx}{K_s}$

ضریب هدایتی سیال

ضریب هدایتی جامد

عدد استانتون ; Stanton Number ; $St = \dfrac{Nu}{Re\, P_r}$

رابطه تشابهی رینولدز-کلبورن ; $St\, P_r^{2/3} = \dfrac{C_f}{2}$

C_f : ضریب اصطکاک

رابطه تشابهی رینولدز-کلبورن، هم برای جریان آرام و هم برای جریان آشفته بکار می‌رود.

برای جریان آرام ; $C_f = 0.664\, Re_x^{-1/2}$ در رابطه تشابهی جایگذاری $\dfrac{Nu}{Re\, P_r} \cdot P_r^{2/3} = 0.332\, Re^{-1/2}$

$$\begin{cases} \underbrace{Nu_x = 0.332\, Re^{1/2}\, P_r^{1/3}} \\ \overline{Nu}_L = 0.664\, Re^{1/2}\, P_r^{1/3} \end{cases}$$

; $Nu_x = \dfrac{h_x\, x}{K_f} \rightarrow h_x = \dfrac{Nu_x \cdot K_f}{x}$

ضریب انتقال حرارت جابجایی موضعی

برای جریان آشفته ؛ $C_f = 0.0592\, Re_x^{-1/5}$ $\qquad 5\times10^5 < Re_x < 10^7$

جایگذاری در رابطه تشابهی ؛ $\dfrac{Nu}{Re\, Pr}\, Pr^{2/3} = 0.0296\, Re^{-1/5}$

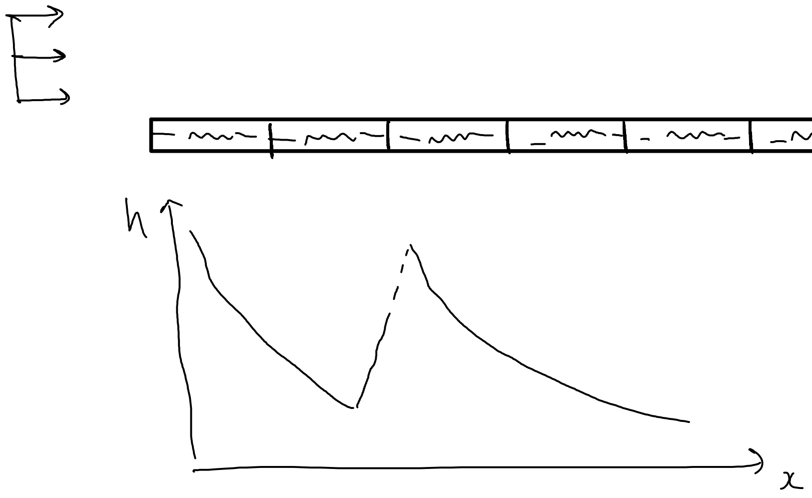
$$\Rightarrow \underbrace{Nu_x = 0.0296\, Re^{4/5}\, Pr^{1/3}}$$

اگر جریان ابتدا آرام و سپس آشفته باشد ، رابطه نوسلت بصورت زیر خواهد بود:

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = (0.037\, Re_L^{4/5} - 871)\, Pr^{1/3} \qquad \begin{cases} 0.6 < Pr < 60 \\ 5\times10^5 < Re \leq 10^8 \end{cases}$$

مثال (۷-۲) کتاب اینکروپرا ؛ ص ۳۸۰ ؛

$60\, m/s$ ، $25°C$



تمرین :

فصل ششم : ۱، ۲، ۴، ۱۰، ۳۰، ۳۵، ۴۰، ۴۱، ۴۴

فصل هفتم : ۹، ۱۴، ۱۵، ۱۹، ۳۲، ۳۳