۱

فضاهای خطی و نرم

۱-۱ فضاهای خطی

تعریف ۱-۱: یک مجموعه‌ی ناتهی $\mathbb{F}$ به همراه دو عمل تعریف شده بر آن به نام‌های جمع و ضرب که در اصول موضوع زیر صدق کنند یک میدان نامیده می‌شود.

اصول مربوط به جمع:

$A.1$) اگر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ آن‌گاه $\alpha + \beta \in \mathbb{F}$ ؛ یعنی $\mathbb{F}$ نسبت به جمع بسته است.

$A.2$) عنصری یکتا به نام عضو بی‌اثر عمل جمع و با نماد ۰ در $\mathbb{F}$ وجود دارد، به‌طوری‌که به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\alpha + 0 = \alpha.$$

$A.3$) اگر $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ ، آن‌گاه $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ؛ یعنی جمع شرکت‌پذیر است.

$A.4$) به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$، عنصری یکتا به نام قرینه‌ی α و با نماد $-\alpha$ در $\mathbb{F}$ وجود دارد به طوری‌که،

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

$A.5$) اگر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ، آن‌گاه $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ؛ یعنی جمع دارای خاصیت جابجایی است.

اصول مربوط به ضرب:

$M.1$) اگر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ، آن‌گاه $\alpha\beta \in \mathbb{F}$ ؛ یعنی $\mathbb{F}$ نسبت به ضرب بسته است.

$M.2$) عنصری یکتا به نام عضو بی‌اثر عمل ضرب و با نماد ۱ در $\mathbb{F}$ وجود دارد، به‌طوری‌که برای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ ، $\alpha 1 = \alpha$.

$M.3$) اگر $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ ، آنگاه $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$؛ یعنی ضرب شرکت‌پذیر است.

$M.4$) به‌ازای هر $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$، عنصری یکتا به نام وارون ضربی α و با نماد α^{-1} در $\mathbb{F}$ موجود است به طوری که $\alpha\alpha^{-1} = 1$.

$M.5$) اگر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ، آنگاه $\alpha\beta = \beta\alpha$؛ یعنی ضرب دارای خاصیت جابجایی است.

اصل توزیع‌پذیری (خاصیت پخشی):

D) اگر $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ ، آنگاه $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$؛ یعنی عمل ضرب روی جمع توزیع‌پذیر است.

اعضای یک میدان را اسکالر می‌نامند. اصول $(A.1)$ــ $(A.4)$ بیان می‌کنند که $(\mathbb{F}, +)$ یک گروه است. چنانچه $(A.5)$ نیز برقرار باشد، آنگاه $(\mathbb{F}, +)$ یک گروه آبلی خوانده می‌شود. اصول موضوع ضرب نیز بیان می‌کنند که $(\mathbb{F} - \{0\}, \times)$ یک گروه آبلی است.

✍ **مثال ۱-۱:** مجموعه‌ی اعداد حقیقی که با $\mathbb{R}$ نشان داده می‌شود، با جمع و ضرب معمولی یک میدان است.

✍**مثال ۱-۲:** مجموعه‌ی اعداد مختلط که با $\mathbb{C}$ نشان داده می‌شود، با جمع و ضرب اعداد مختلط یک میدان است.

تعریف ۱-۲: یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ مجموعه‌ای است مانند V، همراه با دو عمل تعریف شده بر آن به نام‌های جمع $(+: V \times V \to V)$ و ضرب اسکالر $(\cdot: \mathbb{F} \times V \to V)$ که در اصول موضوع زیر صدق می‌کنند:

$V.1$) $(V, +)$ یک گروه آبلی است؛

$V.2$) به‌ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و هر $v \in V$، $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$؛

$V.3$) به‌ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و هر $v \in V$، $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$؛

$V.4$) به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و هر $v, w \in V$، $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$؛

$V.5$) به‌ازای هر $v \in V$، $1v = v$.

یک فضای خطی V روی میدان $\mathbb{F}$ را معمولاً به صورت $(V, \mathbb{F})$ یا اگر بیم ابهام نرود تنها با V نشان می‌دهیم. اگر $\mathbb{F}$ میدان اعداد حقیقی باشد، V را یک فضای خطی حقیقی و اگر $\mathbb{F}$ میدان اعداد مختلط باشد، V را یک فضای خطی مختلط می‌نامیم.

تعریف ۱-۳: فرض کنیم $(V, \mathbb{F})$ یک فضای خطی باشد. زیرمجموعه‌ی ناتهی W از V را یک زیرفضای خطی V نامیم هرگاه W نیز با همان جمع و ضرب اسکالر تعریف شده بر V یک فضای خطی باشد. می‌توان نشان داد که این تعریف معادل است با اینکه به‌ازای هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{F}$ و هر دو بردار $w_1, w_2 \in W$ داشته باشیم:

$$\alpha w_1 + w_2 \in W.$$

اگر W یک زیرفضای خطی V باشد می‌نویسیم $W \leq V$.

ما اغلب با فضاهای خطی حقیقی سروکار داریم. با این حال تعاریف و قضایای مشابهی برای فضاهای خطی مختلط نیز برقرار است. از این پس هرگاه اصطلاح فضای خطی را بدون هیچ توضیحی به کار بردیم منظورمان فضای خطی حقیقی است مگر در مواردی که نوع فضا را به صراحت مشخص کنیم.

مثال ۱-۳: فرض کنید $V = \mathbb{R}$، یعنی مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی و $x+y$ و αx جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی باشند. در این صورت V با دو عمل بالا، یک فضای خطی است.

مثال ۱-۴: فرض کنید $V = \mathbb{C}$، یعنی مجموعه‌ی تمام اعداد مختلط و $x+y$ و αx به ترتیب جمع معمولی اعداد مختلط و ضرب عدد مختلط x در عدد حقیقی α باشند. در این صورت V با دو عمل بالا، یک فضای خطی است. توجه کنید که اگرچه عناصر V اعداد مختلط هستند، اما V یک فضای خطی حقیقی است زیرا اسکالرهایش حقیقی هستند. به سادگی می‌توان دید که $W = \mathbb{R}$ یک زیرفضای خطی V است.

مثال ۱-۵: فرض کنید n عددی طبیعی و $V = \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ی تمام بردارهای n مؤلفه‌ای از اعداد حقیقی باشد. یعنی $V = \{(x_1, \ldots, x_n) |\ x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\}$. به ازای هر عدد حقیقی α و هر $x, y \in V$ تعریف می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
x + y &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),\\
\alpha x &= (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),
\end{aligned}
$$

در این صورت V با دو عمل بالا، یک فضای خطی است. بیشتر اصطلاحات فنی در حالت کلی از این مثال برگرفته شده‌اند. به همین دلیل است که معمولاً به یک فضای خطی، فضای برداری و به اعضای آن نقطه یا بردار می‌گویند. به سادگی می‌توان دید که $\mathbb{C}^n$ نیز به همراه دو عمل بالا یک فضای خطی و $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی از آن است.

مثال ۱-۶: فرض کنید m و n اعدادی طبیعی و $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. به ازای هر عدد حقیقی α و هر $A, B \in V$ تعریف می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
(A + B)_{ij} &= (A)_{ij} + (B)_{ij},\\
(\alpha A)_{ij} &= \alpha (A)_{ij},
\end{aligned}
$$

که در آن $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$. در این صورت V با دو عمل بالا، یک فضای خطی است. به سادگی می‌توان دید که $\mathbb{C}^{m \times n}$ نیز به همراه دو عمل بالا یک فضای خطی و $\mathbb{R}^{m \times n}$ یک زیرفضای خطی از آن است.

در نظریه‌ی تقریب معمولاً با فضاهایی خطی که اعضای آن‌ها توابعی حقیقی هستند سروکار داریم. بنابراین در ادامه مثال‌هایی از فضاهای خطی تابعی می‌آوریم.

اگر f و g توابعی با قلمرو مشترک D باشند و α عددی حقیقی باشد، آنگاه به‌ازای هر $x \in D$ تعریف می‌کنیم:

$$
(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) = \alpha\big(f(x)\big)
$$

در این صورت هر یک از مجموعه‌های زیر با دو عمل جمع و ضرب اسکالر بالا تشکیل یک فضای خطی می‌دهد.

مثال ۱-۷: مجموعه‌ی تمام توابع حقیقی تعریف شده بر بازه‌ای چون $[a, b]$.

مثال ۱-۸: مجموعه‌ی تمام توابع حقیقی و پیوسته بر بازه‌ی چون $[a, b]$. این فضا را با $C[a, b]$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۹: مجموعه‌ی تمام توابع حقیقی که بر بازه‌ی $[a, b]$ مشتق nام پیوسته دارند (n یک عدد طبیعی است). این فضا را با $C^n[a, b]$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۱۰: مجموعه‌ی تمام توابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر بر بازه‌ی $[a, b]$. این فضا را با $C^\infty[a, b]$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۱۱: مجموعه‌ی تمام چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی.

مثال ۱-۱۲: مجموعه‌ی تمام چندجمله‌ای‌های از درجه‌ی حداکثر n که n ثابت است. این فضا را با P_n نشان می‌دهیم.

توجه کنید که مجموعه‌ی تمام چندجمله‌ای‌های از درجه‌ی n یک فضای خطی نیست. زیرا مجموع دو چندجمله‌ای از درجه‌ی n، لزوماً از درجه‌ی n نیست.

مثال ۱-۱۳: مجموعه‌ی تمام توابع f که $f(1) = 0$.

در اینجا عدد صفر مهم است. اگر 0 را با عددی ناصفر عوض کنیم، اصول موضوع بسته بودن نقض می‌شوند.

مثال ۱-۱۴: مجموعه‌ی تمام جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل خطی همگن $y'' + ay' + by = 0$ که در آن a و b اعداد معلومی هستند.

در اینجا نیز عدد صفر مهم است. مجموعه‌ی جواب‌های یک معادله‌ی دیفرانسیل غیرهمگن در اصول موضوع بسته بودن صدق نمی‌کنند.

مثال ۱-۱۵: مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته و متناوب با دوره تناوب مفروض T.

مثال ۱-۱۶: مجموعه‌ی تمام توابعی که بر یک بازه‌ی مفروض $[a, b]$ ریمان انتگرال‌پذیرند.

مثال ۱-۱۷: مجموعه‌ی تمام توابع اندازه‌پذیر f که به‌ازای آن‌ها $|f|^p$ بر یک بازه‌ی مفروض $[a, b]$ انتگرال‌پذیر لبگ است ($0 < p < \infty$ عددی حقیقی است). این فضا را با $L_p[a, b]$ نشان می‌دهیم.

خواننده‌ای که ممکن است با انتگرال لبگ آشنا نباشد می‌تواند در این مثال انتگرال‌پذیری ریمان را در نظر بگیرد. در حالت خاص فضای $L_2[a, b]$ یعنی فضای تمام توابع مربعی انتگرال‌پذیر بر $[a, b]$، یک فضای خطی است.

مثال ۱-۱۸: مجموعه‌ی تمام دنباله‌های نامتناهی مانند $a = (a_1, a_2, \dots)$ از اعداد حقیقی (یا به عبارتی همه توابع حقیقی تعریف شده بر مجموعه‌ی اعداد طبیعی) که به‌ازای آن‌ها و به ازای عدد ثابتی چون $0 < p < \infty$،

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty.$$

این فضا را با $\ell_p(\mathbb{N})$ یا تنها با ℓ_p نشان می‌دهیم.

در ادامه به بیان مفاهیم استقلال و وابستگی خطی، و پایه و بعد در یک فضای خطی می‌پردازیم.

تعریف ۱-۴: فرض کنید $(V, \mathbb{F})$ یک فضای خطی، $v_1, \dots, v_n$ عناصری از V و $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ عناصری از $\mathbb{F}$ باشند. در این صورت حاصل‌جمع $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ را یک ترکیب خطی از $v_1, \dots, v_n$ می‌نامیم.

تعریف ۱-۵: فرض کنید $(V, \mathbb{F})$ یک فضای خطی و $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعه‌ای از عناصر V باشد. به سادگی می‌توان دید که مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی اعضای S که آن را با $\mathrm{span}(S)$ نشان می‌دهیم، یعنی:

$$\mathrm{span}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{F}, v_i \in S, 1 \leq i \leq n\},$$

یک زیرفضای خطی V است. این زیر فضا را زیرفضای تولید شده توسط S می‌نامیم.

تعریف ۱-۶: فرض کنید که $(V,\mathbb{F})$ یک فضای خطی و S زیرمجموعه‌ای از V باشد. S را وابسته‌ی خطی می‌نامیم هرگاه عناصری چون $v_1,\dots,v_n$ در S و اسکالرهایی چون $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ در $\mathbb{F}$ که همگی صفر نیستند، موجود باشند به‌طوری که $\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n=0$. مجموعه‌ی S مستقل خطی نامیده می‌شود اگر وابسته‌ی خطی نباشد. به عبارت دیگر به ازای هر $v_1,\dots,v_n$ در S، رابطه‌ی $\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n=0$ ایجاب کند که:

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0.$$

از تعریف فوق، نتایج زیر به‌سادگی حاصل می‌شوند:

نتیجه ۱-۱: هر مجموعه‌ی شامل یک مجموعه‌ی وابسته‌ی خطی، وابسته‌ی خطی است.

نتیجه ۱-۲: هر زیر مجموعه‌ی یک مجموعه‌ی مستقل خطی، مستقل خطی است.

نتیجه ۱-۳: هر مجموعه‌ی شامل عنصر صفر، وابسته‌ی خطی است.

استقلال و وابستگی خطی خواصی برای مجموعه‌ها هستند. با این حال گاهی این اصطلاحات را برای خود عناصر به‌کار می‌بریم. مثلاً اگر $S=\{v_1,\dots,v_n\}$، آنگاه به‌جای اینکه بگوییم S مستقل (یا وابسته‌ی) خطی است می‌گوییم $v_1,\dots,v_n$ مستقل (یا وابسته‌ی) خطی هستند.

مثال ۱-۱۹: فرض کنید به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $v_1(x)=\sin^2 x$، $v_2(x)=\cos^2 x$ و $v_3(x)=1$. از آن جا که:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

داریم $v_1+v_2-v_3=0$. بنابراین v_1، v_2 و v_3 وابسته‌ی خطی هستند.

مثال ۱-۲۰: فرض کنید به ازای $k=0,1,\dots,n$، و هر $x\in\mathbb{R}$، $v_k(x)=x^k$. در این صورت مجموعه‌ی

$$S=\{v_0,\dots,v_n\}$$

بر $\mathbb{R}$ مستقل خطی است. برای اثبات این مطلب توجه کنید که هر رابطه به شکل $\alpha_0 v_0+\cdots+\alpha_n v_n=0$ بدین معنی است که به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n=0.$$

از اینجا با قرار دادن $x=0$ داریم $\alpha_0=0$. سپس با مشتق‌گیری از رابطه‌ی فوق و قرار دادن $x=0$ در آن خواهیم داشت $\alpha_1=0$. به همین ترتیب با مشتق‌گیری پیاپی و قرار دادن $x=0$ می‌بینیم که تمامی ضرایب α_k صفرند.

حال نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی فوق بر هر بازه چون $[a,b]$ نیز مستقل خطی است. برای این منظور $n+1$ نقطه‌ی دو به دو متمایز $x_0,x_1,\dots,x_n$ از بازه‌ی مذکور انتخاب می‌کنیم و در رابطه‌ی $\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n=0$ قرار می‌دهیم. با این کار به یک دستگاه معادلات خطی $Ay=0$ می‌رسیم که در آن $y^T=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ و ماتریس ضرایب A به صورت زیر است:

$$A=\begin{pmatrix}1 & x_0 & \dots & x_0^n\\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n\end{pmatrix}$$

ماتریس A ماتریس واندرموند نام دارد و ثابت می‌شود که $\det(A)=\prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)$. با توجه به این که

$x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط دو به دو متمایز هستند داریم $\det(A) \neq 0$. بنابراین دستگاه $Ay = 0$ دارای جواب یکتای $y = 0$ است. یعنی $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$، که استقلال خطی v_kها را بر $[a, b]$ ثابت می‌کند.

مثال ۱-۲۱: اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ اعداد حقیقی متمایزی باشند، آنگاه n تابع نمایی

$$v_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \dots, v_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

بر $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند. این مطلب را به استقرا بر n ثابت می‌کنیم. نتیجه برای $n = 1$، بدیهی است. پس فرض می‌کنیم برای $n - 1$ تابع نمایی نیز درست باشد و به‌ازای اسکالرهایی چون $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ داشته باشیم:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{\lambda_k x} = 0.$$

اگر $\lambda_M = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ آنگاه با ضرب طرفین رابطه‌ی بالا در $e^{-\lambda_M x}$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{(\lambda_k - \lambda_M)x} = 0.$$

وقتی که $k \neq M$، عدد $(\lambda_k - \lambda_M)$ منفی است. بنابراین اگر $x \to +\infty$، هر جمله با $k \neq M$ به صفر میل می‌کند و خواهیم داشت $\alpha_M = 0$. حال اگر جمله‌ی Mام را حذف کنیم و فرض استقرا را به‌کار ببریم می‌بینیم که هر یک از $n - 1$ ضریب باقیمانده نیز صفر است.

تعریف ۱-۷: فرض کنید که $(V, \mathbb{F})$ یک فضای خطی باشد. اگر عناصری چون $v_1, \dots, v_n$ در V مستقل خطی باشند ولی هر زیرمجموعه‌ی $n + 1$ عضوی از V وابسته‌ی خطی باشد، آنگاه n را بعد V می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\dim V = n.$$

اگر به ازای هر $n > 0$، مجموعه‌ای از n عنصر مستقل خطی در V موجود باشد، آنگاه V را نامتناهی البعد می‌نامیم.

تعریف ۱-۸: زیرمجموعه‌ی B از فضای خطی $(V, \mathbb{F})$ را یک پایه می‌نامیم هرگاه:

الف) مستقل خطی باشد.

ب) فضای V را تولید کند. یعنی $\operatorname{span}(B) = V$.

ملاحظه کنید که اگر $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای فضای خطی $(V, \mathbb{F})$ باشد، آنگاه هر $v \in V$ نمایش منحصر به فردی به صورت

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

دارد. این نمایش موجود است زیرا B فضای V را تولید می‌کند، و منحصر به فرد است زیرا B مستقل خطی است. بنابراین نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

نتیجه ۱-۴: فضای خطی $(V, \mathbb{F})$ از بعد متناهی n است اگر و تنها اگر پایه‌ای از n عضو داشته باشد. همچنین هر مجموعه‌ی مستقل خطی n عضوی تشکیل پایه‌ای برای یک فضای خطی n بعدی می‌دهد.

برای وقتی که $(V, \mathbb{F})$ یک فضای خطی نامتناهی البعد است، مفهوم معادل پایه توسط یک سری همگرا بیان می‌شود که آن را در بخش بعد بیان می‌کنیم.

مثال ۱-۲۲: فضای $\mathbb{R}^n$ دارای بعد n است و مجموعه‌ی

$$B = \{(1,0,0, \dots ,0), (0,1,0, \dots ,0), \dots , (0,0,0, \dots ,1)\}$$

پایه‌ای برای آن است. این پایه را پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم.

مثال ۱-۲۳: فضای P_n دارای بعد $n+1$ است و مجموعه‌ی

$$B = \{1, x, x^2, \dots , x^n\}$$

پایه‌ای برای آن است. این پایه را پایه‌ی استاندارد P_n می‌نامیم.

مثال ۱-۲۴: فضای جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل $y'' - 2y' - 3y = 0$ دارای بعد ۲ است و مجموعه‌ی

$$B = \{e^{-x}, e^{3x}\}$$

پایه‌ای برای آن است. هر جواب معادله، یک ترکیب خطی از این دو تابع است.

مثال ۱-۲۵: فضای $C[a, b]$ نامتناهی البعد است.

۱–۲ نرم‌ها

تعریف ۱-۹: فرض کنیم V یک فضای خطی باشد و $x \in V$. هر عنصر $y \in V$ که $x - y \neq 0$ یک تقریب برای x نامیده می‌شود. اگر $y \in V$ تقریبی از x باشد، آنگاه تفاضل $x - y$ را خطای این تقریب می‌نامیم.

هنگام تحلیل روش‌های تقریبی، اغلب به سنجش اندازه خطای تقریب‌های مختلف نیاز داریم و در اصطلاح باید فاصله‌ی بین دو نقطه از فضا را پیدا کنیم. بنابراین مفاهیم آشنای فاصله و طول را به فضاهای خطی توسعه می‌دهیم. با معرفی یک نرم بر فضا این امکان فراهم می‌شود.

تعریف ۱-۱۰: فرض کنیم V یک فضای خطی باشد. تابع حقیقی $\|\cdot\|$ را که بر V تعریف شده است یک نرم می‌نامیم هرگاه در سه ویژگی زیر صدق کند:

$N.1$) به‌ازای هر $x \in V$، $\|x\| \geq 0$. به علاوه $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

$N.2$) به‌ازای هر $x \in V$ و هر عدد حقیقی α، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛

$N.3$) به‌ازای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ویژگی سوم نامساوی مثلثی نام دارد و معادل است با این‌که به‌ازای هر $x, y, z \in V$،

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|.$$

هر فضای خطی V را که به یک نرم مجهز شده باشد، یک فضای خطی نرم‌دار می‌نامیم.

از نامساوی مثلثی، نتیجه‌ی مفید زیر به دست می‌آید که آن را نامساوی مثلثی پسرو می‌نامند.

نتیجه ۱-۵: اگر $\|\cdot\|$ یک نرم روی فضای خطی V باشد، آنگاه برای هر $x, y \in V$:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

اثبات. با توجه به نامساوی مثلثی داریم:

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x-y\|.$$

به طور مشابه:

$$\|y\| - \|x\| \le \|y-x\| = \|x-y\|.$$

در نتیجه:

$$|\|x\| - \|y\|| = \max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\} \le \|x-y\|.$$

اکنون فرض کنید که V یک فضای خطی نرم‌دار باشد. به‌ازای هر $x, y \in V$ تعریف می‌کنیم:

$$d(x,y) = \|x-y\|,$$

در این صورت (V,d) یک فضای متریک است و بنابراین تمام مفاهیم مربوط به فضاهای متریک مانند همسایگی، مجموعه‌های باز و بسته، کرانداری، فشردگی، همبندی، همگرایی و ... را می‌توان در این فضا نیز بیان نمود. تابع d متریک القا شده توسط نرم و عدد نامنفی $\|x-y\|$ فاصله‌ی بین x و y نامیده می‌شود.

مثال ۱-۲۶: در $\mathbb{R}^n$ می‌توانیم نرم یک بردار x را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

این نرم را نرم اقلیدسی می‌نامیم که در حقیقت طول هندسی بردار x را نشان می‌دهد. در حالت کلی به‌ازای هر عدد مانند $1 \le p < \infty$ می‌توانیم یک نرم به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

برای آن‌که نشان دهیم این رابطه در حقیقت یک نرم تعریف می‌کند باید ثابت کنیم که ویژگی‌های N .1 تا N .3 از تعریف نرم برقرارند. دو ویژگی اول برای هر نرم‌ـp به‌سادگی قابل ملاحظه است. می‌ماند این که نامساوی مثلثی را برای $\|\cdot\|_p$ را ثابت کنیم. این نامساوی که به نامساوی مینکوفسکی معروف است در ادامه ثابت می‌شود.

تعریف ۱-۱۱: مجموعه‌ی ناتهی $S \subseteq \mathbb{R}^n$ را محدب گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in S$ و هر $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$. به عبارت دیگر $S \subseteq \mathbb{R}^n$ محدب است هرگاه هر دو نقطه از S را که در نظر بگیریم، پاره‌خط واصل بین آن دو کاملاً در مجموعه‌ی S قرار گیرد.

تعریف ۱-۱۲: فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای محدب باشد. تابع $f: S \to \mathbb{R}$ را محدب نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in S$ و هر $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

به عبارت دیگر خط واصل بین هر دو نقطه مانند $(x, f(x))$ و $(y, f(y))$، هیچ‌گاه پایین‌تر از منحنی نمایش f قرار نگیرد.

لم ۱-۱: (نامساوی یانگ) برای هر دو عدد حقیقی $a, b \geq 0$ و هر $p, q > 1$ که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، داریم:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

اثبات. اگر a یا b صفر باشد، نتیجه بدیهی است. پس فرض کنیم $a, b > 0$. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = e^x$ تابعی محدب است. در نتیجه:

$$ab = \exp(\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)) \leq \frac{1}{p}\exp(\ln(a^p)) + \frac{1}{q}\exp(\ln(b^q)) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

لم ۱-۲: (نامساوی هولدر) برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$ و هر $p, q > 1$ که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

اثبات. اگر $u = 0$ یا $v = 0$، نتیجه بدیهی است. پس فرض کنیم $u, v \neq 0$. با توجه به نامساوی یانگ به‌ازای هر اندیس i می‌توان نوشت:

$$\frac{|u_i|}{\|u\|_p} \cdot \frac{|v_i|}{\|v\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|u_i|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|v_i|^q}{\|v\|_q^q}.$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{\|u\|_p \|v\|_q} \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| = \sum_{i=1}^{n} (\frac{|u_i|}{\|u\|_p} \cdot \frac{|v_i|}{\|v\|_q}) \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{|u_i|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{|v_i|^q}{\|v\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

اکنون با ضرب طرفین در $\|u\|_p \|v\|_q$، نامساوی هولدر بدست می‌آید.

قضیه ۱-۱: (نامساوی مینکوفسکی) به‌ازای هر عدد $1 \leq p < \infty$ و هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ داریم:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

اثبات. اگر $x = 0$ یا $y = 0$ یا $p = 1$ نامساوی بدیهی است. پس فرض کنیم $x, y \neq 0$ و $1 < p < \infty$.

داریم:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}
\end{aligned}$$

فرض کنید $1 < q < \infty$ چنان باشد که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ملاحظه کنید که $(p-1)q = p$. اکنون نامساوی هولدر را برای هر یک از مجموع‌های سمت راست نامساوی بالا به‌کار می‌بریم. داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}},$$

و به‌طور مشابه:

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leq \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p &\leq (\|x\|_p+\|y\|_p)\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= (\|x\|_p+\|y\|_p)\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &= (\|x\|_p+\|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

حال با ساده کردن $\|x+y\|_p^{p-1}$ از طرفین، نتیجه می‌شود:

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p.$$

مثال ۱-۲۷: اگر $x \in \mathbb{R}^n$، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|,$$

به سادگی می‌توان دید که $\|\cdot\|_\infty$ در ویژگی‌های نرم صدق می‌کند. این نرم را نرم ماکزیمم یا نرم بی‌نهایت می‌نامیم. نامگذاری اخیر همراه با نماد، از این حقیقت می‌آید که:

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \lim_{p\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|.$$

تعاریفی مشابه با نرم p و نرم بی‌نهایت در $\mathbb{R}^n$، می‌تواند برای فضاهای L_p بیان شود.

مثال ۱-۲۸: اگر $p \geq 1$ و $f \in L_p[a,b]$ آنگاه $\|\cdot\|_p$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

توجه کنید که اگرچه $L_p[a,b]$ به‌ازای هر $0<p<\infty$ یک فضای خطی است، اما رابطه‌ی بالا تنها به‌ازای $p\geq 1$ یک نرم تعریف می‌کند. اگر $0<p<1$، آنگاه نامساوی مثلثی در تعریف نرم برقرار نخواهد بود.

چنانچه f بر $[a,b]$ کراندار باشد، آنگاه نرم بی‌نهایت f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_\infty = \sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|.$$

ادامه دارد ...