Applied Nymerical Methods with MATLAB

فهرست مطالب

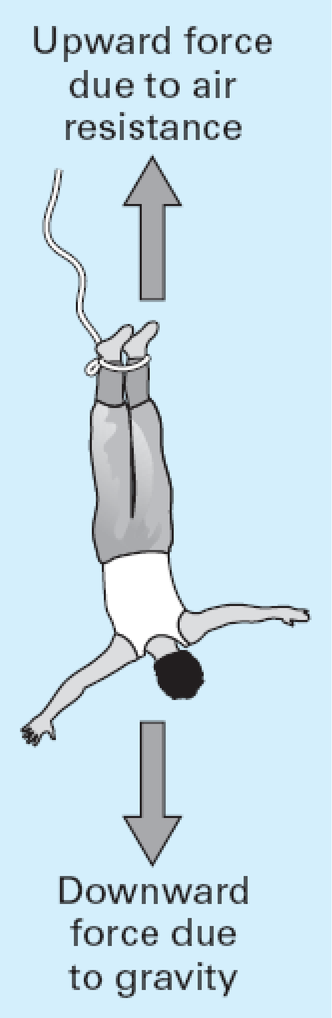
1

بخش اول

Mathematical Modeling, Numerical Methods, and Problem Solving

مدلسازی ریاضی سیستم ها
آشنایی با روشهای عددی
و حل مسئله

مثال: مدلسازی پرش با بانجی

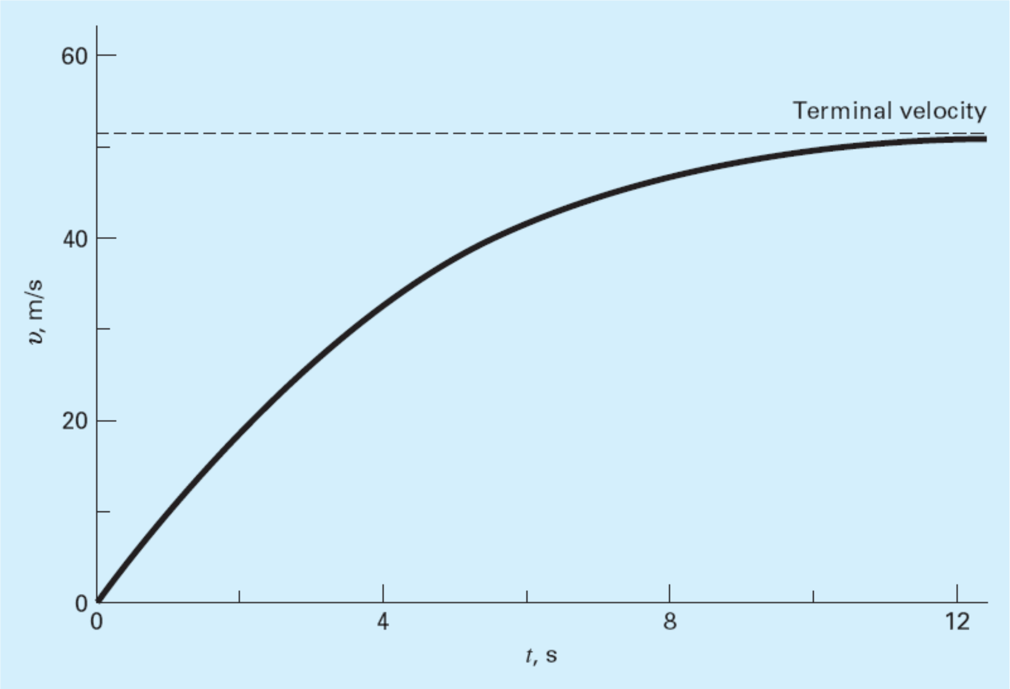


- معادله حاکم بر سیستم:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{9.81(68.1)}{0.25}} \tanh\left(\sqrt{\frac{9.81(0.25)}{68.1}}\, t\right) = 51.6938 \tanh(0.18977t)$$

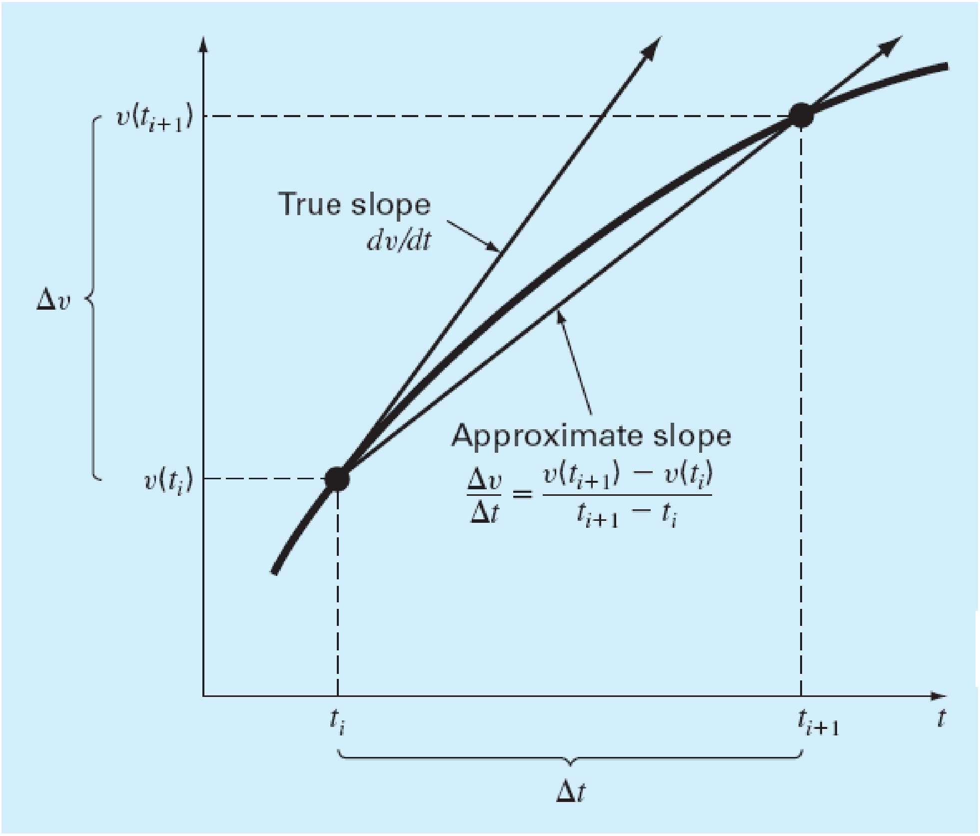
t, s	**v, m/s**
0	0
2	18.7292
4	33.1118
6	42.0762
8	46.9575
10	49.4214
12	50.6175
∞	51.6938



حل مثال با روش عددی (تفاضل محدود)

- گسسته سازی مشتق

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$



$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2 \right] (t_{i+1} - t_i)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{dv_i}{dt} \Delta t$$

This approach is formally called *Euler's method*.

New value = old value + slope × step size

حل مثال با روش عددی

گام اول:

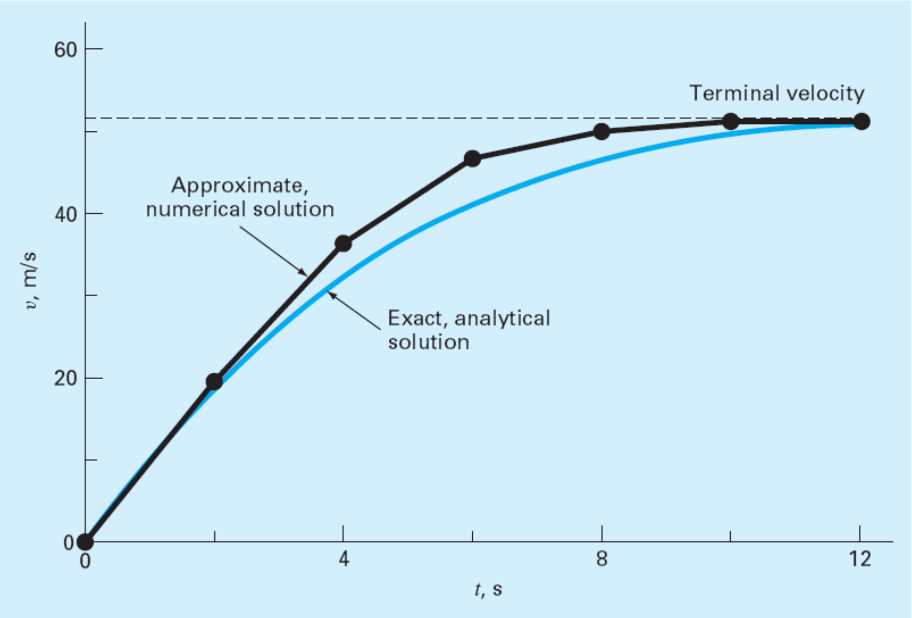
$$v = 0 + \left[9.81 - \frac{0.25}{68.1}(0)^2\right] \times 2 = 19.62 \text{ m/s}$$

گام دوم:

$$v = 19.62 + \left[9.81 - \frac{0.25}{68.1}(19.62)^2\right] \times 2 = 36.4137 \text{ m/s}$$

حل تقریبی

t, s	v, m/s
0	0
2	19.6200
4	36.4137
6	46.2983
8	50.1802
10	51.3123
12	51.6008
∞	51.6938



حل دقیق

t, s	v, m/s
0	0
2	18.7292
4	33.1118
6	42.0762
8	46.9575
10	49.4214
12	50.6175
∞	51.6938

2 بخش دوم: آشنایی با MATLAB

- تعریف متغیر در متلب

متلب به حروف کوچک و بزرگ حساس است.

برای عدم نمایش مقدار از ; استفاده می شود.

بعضی از متغیرها در متلب از پیش تعریف شده اند.

می توان فرمت نمایش اعداد را تغییر داد.

```
>> a = 4,A = 6;x = 1;

a =
     4

>> pi

ans =
    3.1416
```

type	**Result**	**Example**
short	Scaled fixed-point format with 5 digits	3.1416
long	Scaled fixed-point format with 15 digits for double and 7 digits for single	3.14159265358979
short e	Floating-point format with 5 digits	3.1416e+000
long e	Floating-point format with 15 digits for double and 7 digits for single	3.141592653589793e+000
short g	Best of fixed- or floating-point format with 5 digits	3.1416
long g	Best of fixed- or floating-point format with 15 digits for double and 7 digits for single	3.14159265358979
short eng	Engineering format with at least 5 digits and a power that is a multiple of 3	3.1416e+000
long eng	Engineering format with exactly 16 significant digits and a power that is a multiple of 3	3.14159265358979e+000
bank	Fixed dollars and cents	3.14

تعریف بردار و ماتریس

- تعریف بردار سطری

```
>> a = [1 2 3 4 5]

a =
     1     2     3     4     5
```

- تعریف بردار ستونی

```
>> b = [2;4;6;8;10]
```

or

```
>> b = [2
4
6
8
10]
```

```
>> b(4)

ans =
     8
```

- ترانسپوز بردار (ماتریس)

```
>> b = [2 4 6 8 10]'
```

- تعریف ماتریس

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]

A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

```
>> A(2,3)

ans =
     6
```

```
>> A = [[1 4 7]' [2 5 8]' [3 6 9]']
```

ماتریس های خاص

```
>> E = zeros(2,3)

E =
     0     0     0
     0     0     0
```

```
>> u = ones(1,3)

u =
     1     1     1
```

استفاده از help متلب:

```
>> help log

 LOG    Natural logarithm.
    LOG(X) is the natural logarithm of the elements of X.
    Complex results are produced if X is not positive.

    See also LOG2, LOG10, EXP, LOGM.
```

توابع گردکردن اعداد:

```
>> E = [-1.6 -1.5 -1.4 1.4 1.5 1.6];
```

```
>> floor(E)
ans =
    -2    -2    -2     1     1     1

>> ceil(E)
ans =
    -1    -1    -1     2     2     2

>> round(E)
ans =
    -2    -2    -1     1     2     2
```

```
>> F = [3 5 4 6 1];
>> sum(F)
ans =
    19
```

```
>> min(F),max(F),mean(F),prod(F),sort(F)
ans =
    1
ans =
    6
ans =
    3.8000
ans =
    360
ans =
    1     3     4     5     6
```

کاربردهای عملگر کولون (:)

```
>> t = 1:5

t =
     1     2     3     4     5


>> t = 1:0.5:3

t =
    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000

>> t = 10:-1:5

t =
    10     9     8     7     6     5
```

```
>> t(2:4)

ans =
     9     8     7
```

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]

A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

```
>> A(2,:)

ans =
     4     5     6
```

تولید بردار با تقسیم بندی خطی و لگاریتمی

```
linspace(x1, x2, n)

>> linspace(0,1,6)

ans =
         0    0.2000    0.4000    0.6000    0.8000    1.0000
```

```
logspace(x1, x2, n)

>> logspace(-1,2,4)

ans =
    0.1000    1.0000   10.0000  100.0000
```

عملگرهای محاسباتی

^	Exponentiation
−	Negation
* /	Multiplication and division
\	Left division[2]
+ −	Addition and subtraction

```
>> a = [1 2 3 4 5]
>> b = [2;4;6;8;10]
```

- ضرب داخلی

```
>> a * b

ans =
   110
```

- ضرب خارجی

```
>> b * a

ans =
      2      4      6      8     10
      4      8     12     16     20
      6     12     18     24     30
      8     16     24     32     40
     10     20     30     40     50
```

- اعمال عملگر بر ماتریس

```
>> A^2

ans =
    30    36    42
    66    81    96
   102   126   150
```

- اعمال عملگر بر تک تک درایه ها

```
>> A.^2

ans =
     1     4     9
    16    25    36
    49    64    81
```

```
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

حل مسئله پرش با بانجی به کمک متلب

$$v = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$

```
>> g = 9.81; m = 68.1; cd = 0.25;
```

```
>> t = [0:2:20]'

t =
     0
     2
     4
     6
     8
    10
    12
    14
    16
    18
    20
```

```
>> v = sqrt(g*m/cd)*tanh(sqrt(g*cd/m)*t)

v =
         0
   18.7292
   33.1118
   42.0762
   46.9575
   49.4214
   50.6175
   51.1871
   51.4560
   51.5823
   51.6416
```

```
>> length(t)

ans =
    11
```

رسم نتایج در متلب

```
>> plot(t, v)
>> title('Plot of v versus t')
>> xlabel('Values of t')
>> ylabel('Values of v')
>> grid
```

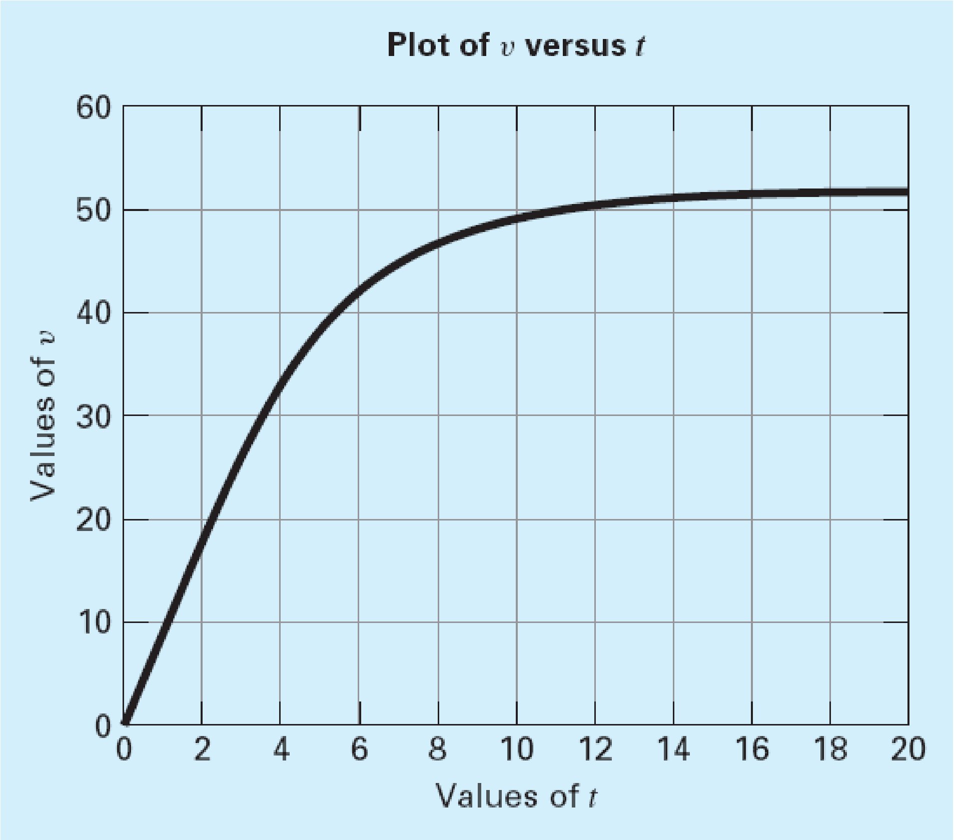


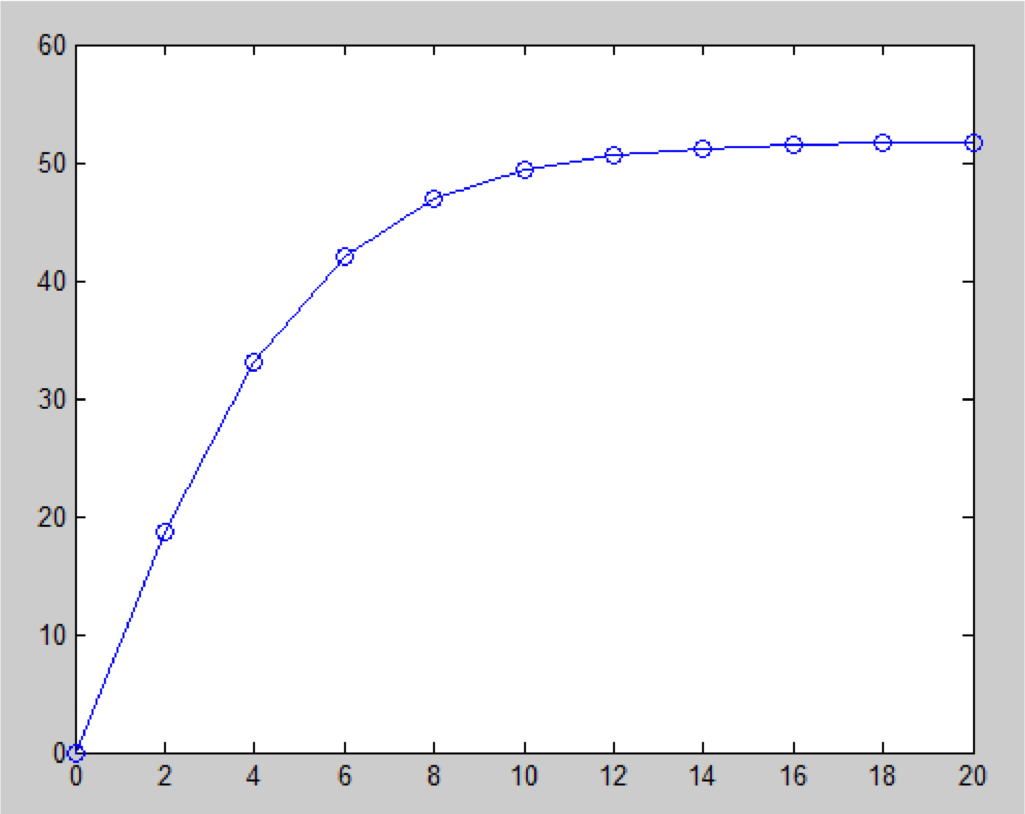
TABLE 2.2 Specifiers for colors, symbols, and line types.

Colors		Symbols		Line Types	
Blue	b	Point	.	Solid	-
Green	g	Circle	o	Dotted	:
Red	r	X-mark	x	Dashdot	-.
Cyan	c	Plus	+	Dashed	--
Magenta	m	Star	*		
Yellow	y	Square	s		
Black	k	Diamond	d		
White	w	Triangle(down)	v		
		Triangle(up)	^		
		Triangle(left)	<		
		Triangle(right)	>		
		Pentagram	p		
		Hexagram	h		

```
>> plot(x,y,'--dc','LineWidth',2,...
    'MarkerSize',10,...
    'MarkerEdgeColor','k',...
    'MarkerFaceColor','m')
```

ترسیم نتایج مختلف در یک گراف:

```
>> plot(t, v)
>> hold on
>> plot(t, v, 'o')
>> hold off
```



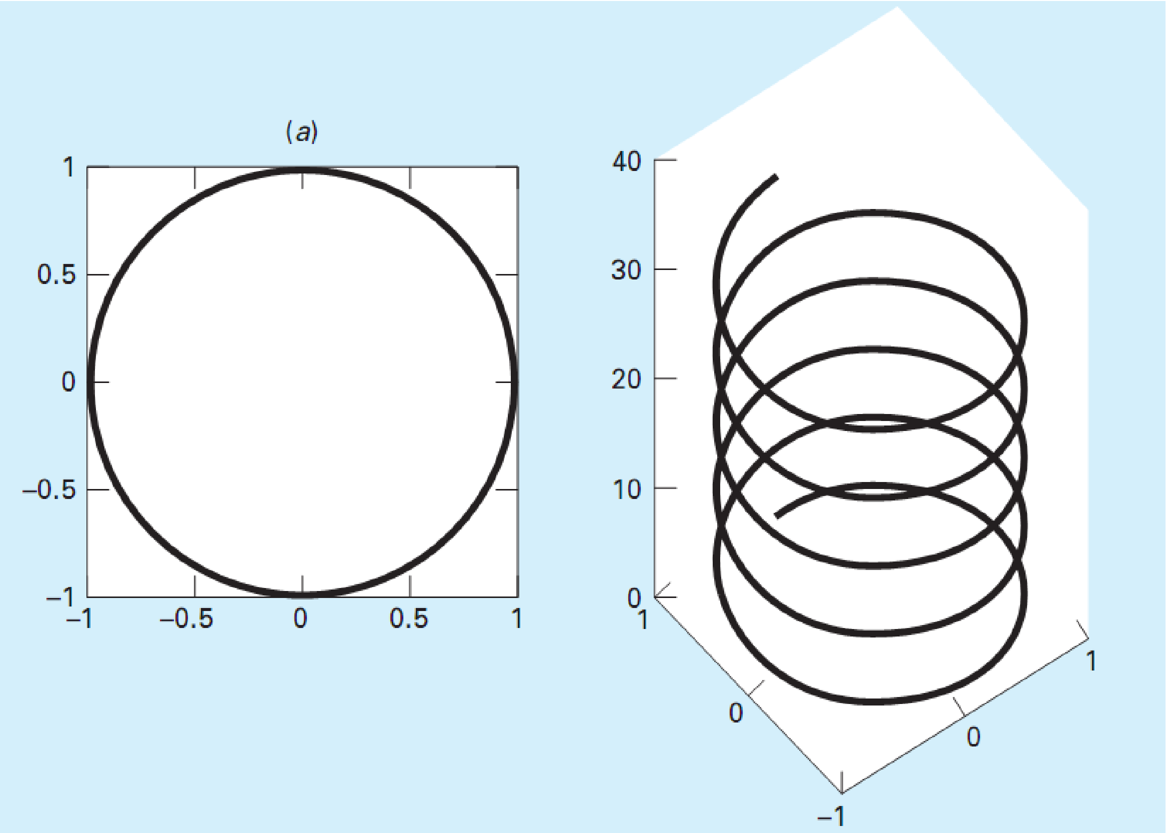
ترسیم گراف سه بعدی:

```
plot3(x, y, z)
```

ترسیم گرافها بصورت آرایه ای:

```
subplot(m, n, p)
```

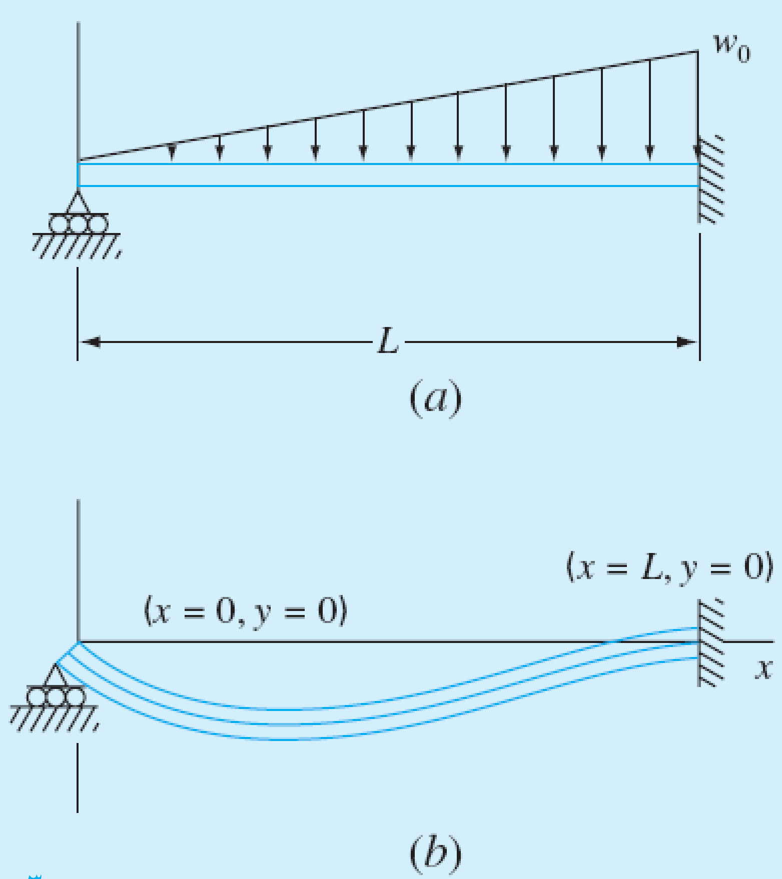
```
>> t = 0:pi/50:10*pi;
>> subplot(1,2,1);plot(sin(t),cos(t))
>> axis square
>> title('(a)')
>> subplot(1,2,2);plot3(sin(t),cos(t),t);
>> title('(b)')
```



تمرین ۱:

خیز یک تیر تحت بار گسترده نشان داده شده مطابق رابطه زیر می باشد. برای این تیر مطلوبست نمودارهای:

$$y = \frac{w_0}{120EIL}(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x)$$



- خیز تیر
- شیب تیر — $\theta(x) = dy/dx$
- گشتاور خمشی — $M(x) = EId^2y/dx^2$
- نیروی برشی — $V(x) = EId^3y/dx^3$
- بارگسترده — $w(x) = -EId^4y/dx^4$

از دستور subplot برای ترسیم کلیه نمودارها زیر یکدیگر استفاده نمائید.

$L = 600$ cm, $E = 50{,}000$ kN/cm^2, $I = 30{,}000$ cm^4,

$w_0 = 2.5$ kN/cm, and $\Delta x = 10$ cm.

تمرین۲:

- منحنی پروانه ای با روابط زیر بیان می شود. مقادیر x و y را برای زمان صفر تا ۱۰۰ ثانیه با فواصل زمانی $\Delta t = 1/16$ محاسبه کرده و
- منحنی های x و y را بر حسب زمان ترسیم کنید.
- منحنی y را بر حسب x ترسیم نمائید.

$$x = \sin(t)\left(e^{\cos t} - 2\cos 4t - \sin^5 \frac{t}{12}\right)$$

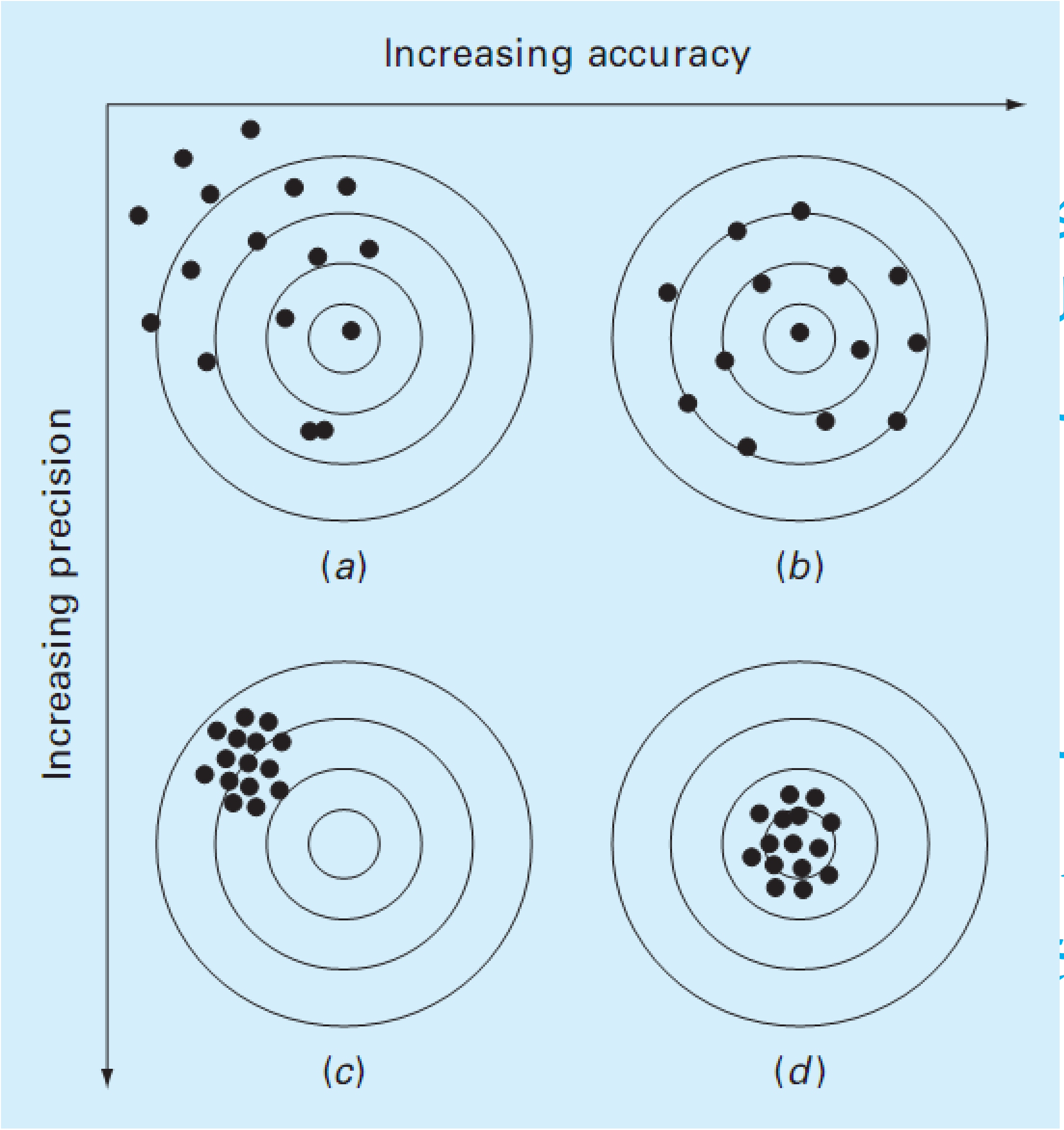
$$y = \cos(t)\left(e^{\cos t} - 2\cos 4t - \sin^5 \frac{t}{12}\right)$$

4 بخش چهارم:

Roundoff and Truncation Errors

خطای گردکردن و خطای قطع

دقت و صحت داده ها و نتایج:



دقت (Precision):

- به پراکندگی داده های
هرچه داده های مختل
گیری یا آزمایش بیش

صحت (Accuracy):

- به فاصله داده های مح
واقعی بستگی دارد. هر
کمتر باشد، صحت نتای

تعاریف خطا واقعی:

- مقدار دقیق:

$$\text{True value} = \text{approximation} + \text{error}$$

- خطای واقعی:

$$E_t = \text{true value} - \text{approximation}$$

- خطای نسبی واقعی:

$$\text{True fractional relative error} = \frac{\text{true value} - \text{approximation}}{\text{true value}}$$

- درصد خطای نسبی واقعی:

$$\varepsilon_t = \frac{\text{true value} - \text{approximation}}{\text{true value}} 100\%$$

تعاریف خطای تقریبی:

- درصد خطای نسبی تقریبی:

$$\varepsilon_a = \frac{\text{approximate error}}{\text{approximation}} 100\%$$

- درصد خطای نسبی تقریبی با استفاده از مقادیر مراحل متوالی:

$$\varepsilon_a = \frac{\text{present approximation} - \text{previous approximation}}{\text{present approximation}} 100\%$$

مثال:

- اغلب می توان توابع را بصورت سری های بینهایت بیان نمود. بطور مثال:

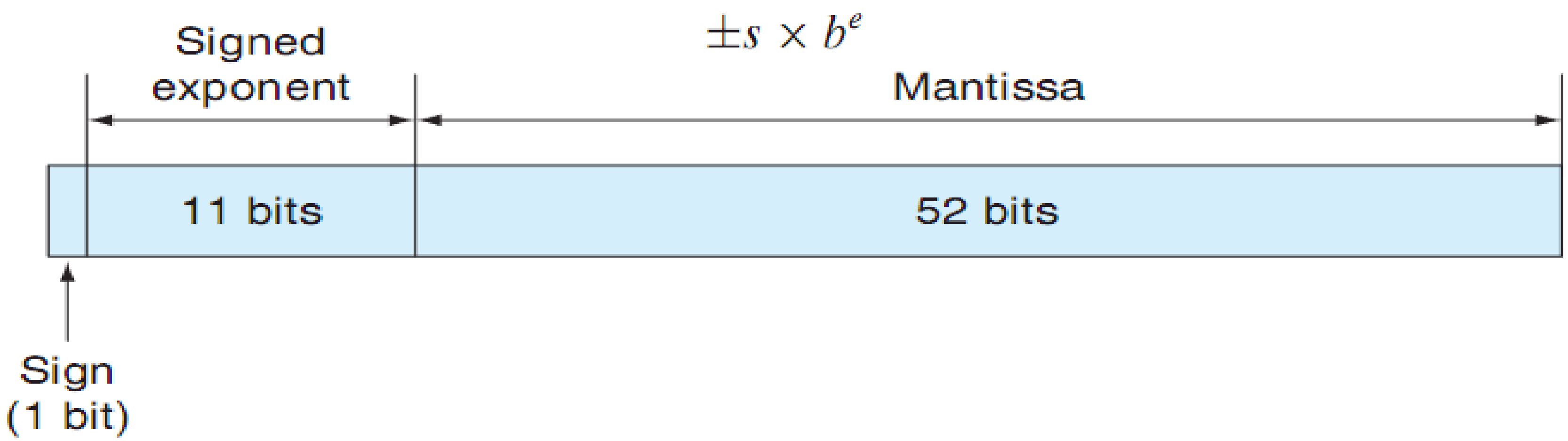
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

- با استفاده از بسط فوق می توان مقدار تابع $e^{۰.۵}$ را با خطاهای مختلف بدست آورد:

Terms	Result	ε_t, %	ε_a, %
1	1	39.3	
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.645833333	0.175	1.27
5	1.648437500	0.0172	0.158
6	1.648697917	0.00142	0.0158

4.2 ROUNDOFF ERRORS خطای گردکردن:

- خطای گردکردن بدلیل عدم بیان دقیق برخی کمیت ها توسط کامپیوترها ایجاد می شود.
- اعداد در کامپیوتر ها بصورت دامنه و نما (توان) ذخیره می شوند.



- مثال: عدد $2^{-5} = 0.03125$ در کامپیوتر به صورت 3.1×10^{-2} or 0.031 ذخیره می شود که دارای درصد خطای نسبی زیر می باشد و به دلیل گردکردن در زمان ذخیره سازی ایجاد شده است.

$$\frac{0.03125 - 0.031}{0.03125} = 0.008$$

4.3 TRUNCATION ERRORS

خطای قطع:

- خطای قطع در اثر استفاده از تقریب بجای روابط دقیق ریاضی حاصل می شود.
- بطور مثال در تقریب مشتق سرعت پرشگر با بانجی توسط تفاضل محدود داریم:

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

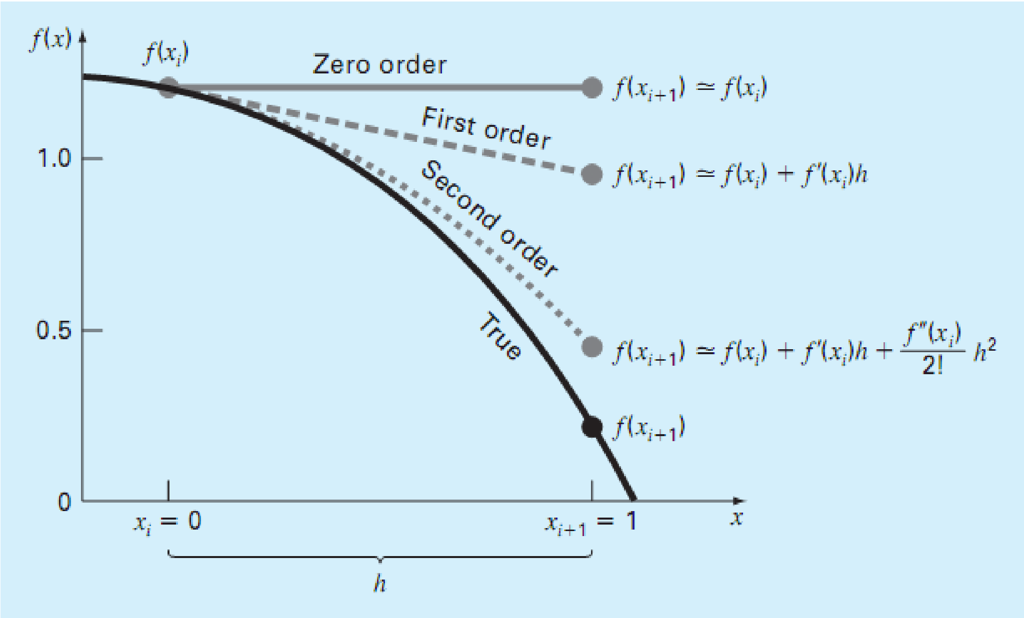
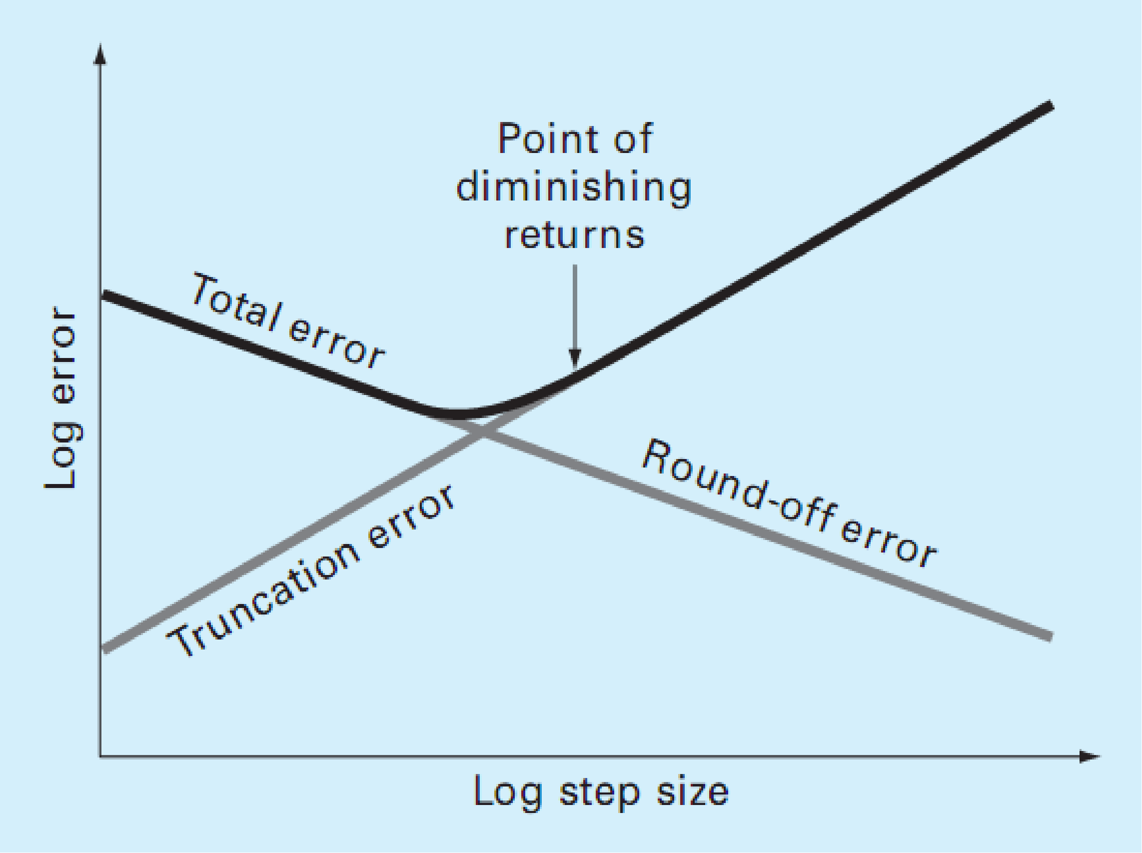


FIGURE 4.7
The approximation of $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ at $x = 1$ by zero-order, first-order, and second-order Taylor series expansions.

- تقریب مقدار یک تابع مرتبه چهار در نقطه x=۱ با استفاده از مراتب مختلف بسط تیلور

4.4 TOTAL NUMERICAL ERROR خطای عددی کل:

- خطای عددی کل برابر مجموع خطای قطع و خطای گردکردن می باشد.
- خطای گردکردن با افزایش طول گام ها که به کاهش تعداد مراحل حل می انجامد، کاهش می یابد.
- در مقابل افزایش طول گام باعث افزایش خطای قطع می شود.



تمرین ۳:

- با استفاده از بسط داده شده برای تابع cos(x)، مقدار تابع را در x=π/۴ برای تعداد جملات مختلف از ۱ تا ۶ جمله محاسبه نموده و مقدار درصد خطای نسبی واقعی و تقریبی را در هر مرحله بدست آورید.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

تمرین ۴:

- یکی از منابع ایجاد خطا در محاسبات، تفاضل جملات می باشد. به عنوان مثال در حل معادله مرتبه ۲، پاسخ ها به فرم زیر خواهند بود:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- در شرایطی که $b^2 >> 4ac,$ است، تفاضل جملات صورت کسر باعث ایجاد خطای گرد کردن می شود. لذا از فرم دیگری برای ریشه های معادله به صورت زیر می توان استفاده نمود:

$$x = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

- ریشه های معادله زیر را با استفاده از هر دو رابطه داده شده و تعداد ۵ رقم معنی دار بدست آورده و مقایسه نمائید.

$$x^2 - 5000.002x + 10$$