۸۴٫۶٫۲۶ به نام خدا مقاومت مصالح ۲ ـ ج ۱

حل تمرین ۲ نمره

میان ترم شنبه ۱۰ دی ماه ۸ نمره

پایان ترم شنبه ۱۷ دی ماه ۱۰ نمره

مباحث مقاومت ۲ 8

۱ـ تیر با مقطع متغیر

۲ـ تیر از دو یا چند جنس مثل تیر بتن آرمه

M_z , M_y

۳ـ خمش و پیچش ، خمش مرکب (نیروی محوری و لنگر خمشی N و M) ، خمش دو جانبه (نسبت به ۲ محور y و z)

تیر خمیده

۴ـ کمانش نیروی محوری تحت فشار

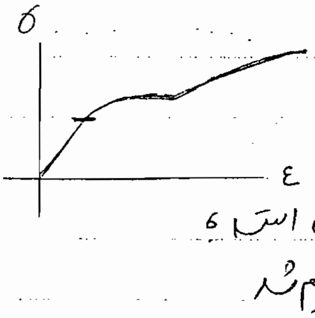
میله باید مستقیم بماند اما تجربه نشان می دهد اگر میله نازک باشد خم خواهد شد

از نظر ریاضی هم قابل اثبات است

کمانش یک خاصیت الاستیک است چون بعد از حذف نیرو دوباره به حالت اول برخواهد گشت.

۵ـ مخازن جدار نازک

۶ـ تئوری های مقاومت مثل تسلیم شدن مواد را بررسی خواهیم کرد



۷ـ بارهایی ـ طراحی پلاستیک سازه ها

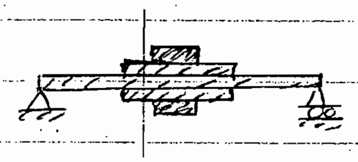
همه بحث ها در قسمت خطی منحنی σ - ε است ،
اما در بارهایی وارد قسمت های دیگر خواهیم شد

* تیر با مقطع متغیر :

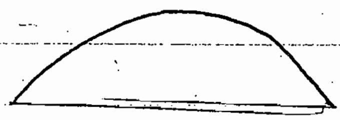
چون لنگر خمشی در تیر ثابت نیست ممکن است مقطع تیر را تغییر بدهند یعنی جایی که لنگر خمشی کوچک‌تر است

مقطع کمتر و جایی که لنگر بیشتر است مقطع بزرگتری داشته باشیم تا مصالح کمتر مصرف شود .

مثلاً در یک تیر فولادی



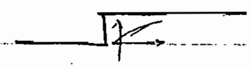
لنگر خمشی



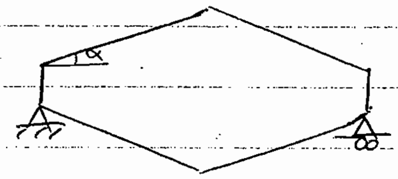
در قسمت وسط مقطع را بزرگتر می‌کنند

طبق فرمول تنش در مقطع پله‌ای باید تنش‌ها جهش تغییر زیادی کند اما عملاً این طور نیست

$$* \quad \sigma = \frac{-My}{I}$$



یعنی باید یک مقدار از محل تغییر مقطع دور شویم تا جهش به یک مقدار ثابتی برسد .



* در این جا مقطع پیوسته تغییر می‌کند I و M هر دو دارند تغییر می‌کنند .

در هر مقطع $\sigma_{max} = \pm \frac{MC}{I}$ ؛ M، C، I هر ۳ متغیرند باید مشتق بگیری کرد

ولی در مقطع ثابت C و I ثابت بودند فقط M تغییر می‌کرد .

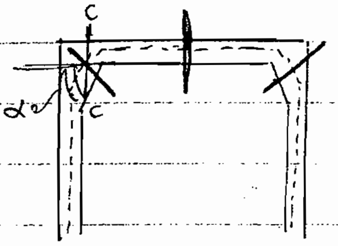
$$* \quad EI\frac{d^2v}{dx^2} = M$$

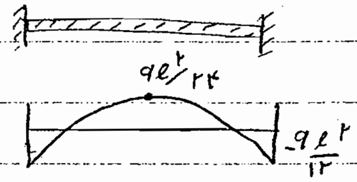
در تغییر شکل این تیر I دیگر ثابت نیست

$$\Rightarrow \quad E\frac{d^2v}{dx^2} = \underset{\sim}{M/I}$$

POOMAR

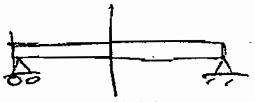
در اینجا فقط از روش انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم؛ بقیه روشها در تحلیل سازه مطرح می‌شوند.





محور تیر مطابق خط چین است و مقطع باید عمود بر آن باشد ولی معمولاً به صورت c-c می‌گیرند و Icc را محاسبه می‌کنند و c را نصف این ارتفاع می‌گیرند و یک مقدار خطا ایجاد می‌شود ولی دیگر متقارن چون متقارن است خطایی ایجاد نمی‌شود مقطع عمود بر محور خواهد بود.

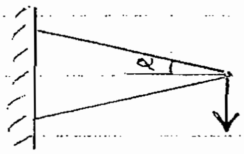
در اینجا در یک تیر بتن آرمه در گوشه‌ها تنش خیلی زیاد است برای همین ارتفاع را زیاد می‌کنند از زیر آن نه از بالا.



$\frac{VQ}{Ib} \longrightarrow +$ حرارتی

این فرمول به کلی تغییر می‌کند

* در تئوری ارتجاعی شکل زیر مورد مطالعه قرار گرفته است 8



به هر چه کوچکتر باشد خطای روابط $\sigma_{max} = \pm\frac{MC}{I}$ کمتر خواهد بود

تا ۵° درجه خطا حدود ~~[illegible]~~ ۰/۹۹۴

۱۰° 〃 〃 〃 دو در هزار ۱-۲‰ ۰/۹۷۶

۲۰° 〃 〃 〃 ۱۰% ۰/۹۰۶

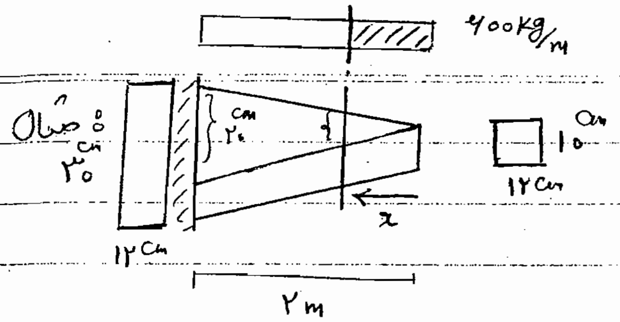
۱۵° 〃 〃 〃 ۰/۹۴۶

تغییرات بیشتر از ۲۰° را نمی‌پذیرند که از این فرمولها استفاده کنیم

در بتن آرمه بالا چون ۵ از یک طرف ~~[illegible]~~ اضافه می‌شود تا حدود ۳۵° می‌شود از روابط استفاده کرد

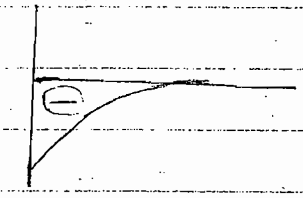
* تنشی که از فرمولها بدست می‌آوریم زیادتر از مقدار واقعی است پس در جهت اطمینان کار کرده‌ایم پس به نفع ضریب اطمینان

تنش max در تیر را بیابید ؟



حل

لنگر خمشی



$$* \quad M = -(600x)(x/2) = -300x^2$$

لنگر منفی max $* \quad M_{max} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow M = -1200\ kg.m$

در مقطع $\sigma_{max} = \pm \frac{Mc}{I} = \pm \frac{M}{W} \rightarrow$ مدول مقطع

در مقطع مستطیل $W = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$

$$* \quad \overset{(cm)}{h} = 10 + \left(\frac{x}{200}\right)(20) = 10 + \frac{x}{10}$$

$$W = \frac{(12)(10+0.1x)^2}{6} = 2(10+0.1x)^2$$

$$* \quad \sigma_{max} = \pm \frac{(-300x^2 \times 100)\ kgcm}{2(10+0.1x)^2}$$

لنگر منفی بالا را کشش می‌کند

$$* \quad \sigma_{max} = \mp \frac{15000x^2}{(10+0.1x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\sigma_{max})}{dx} = 0 \Rightarrow (10+0.1x)(20x+0.2x^2-0.2x^2) = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس نمودار صعودی

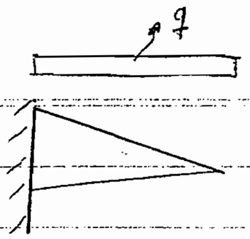
max یا min در انتهای x

اتفاق می‌افتد

* اگر کمیت داری مثل ۱- یا ۲ درآید max جبری در این نقاط وجود دارد (وحتماً)

باید دو انتها چک شود

۳/



در اینجا تنش همواره ثابت است

$$M = -\frac{qx^2}{2}$$

$$W = \frac{bh^2}{6} \quad , \quad h = (h_0)\frac{x}{l}$$

$$\Rightarrow w = \frac{b\left(\frac{h_0^2 x^2}{l^2}\right)}{6} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{M}{W}$$ یک مقدار ثابت

ولی در مثال قبل چون h یک مقدار اولیه داشت σ_{max} ثابت نبود

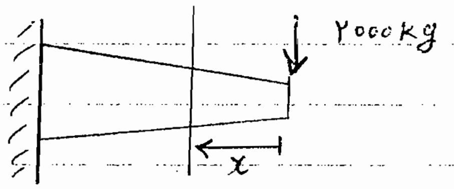
حل قبلی

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \sigma_{max} = 0$$

$x = 2^m$ یا $x = 200\ cm \Rightarrow \sigma_{max} = \pm \frac{-3x^2}{2(10+0.1x)^2}$ یا $\pm \frac{-300x^2 \times 100}{2(10+0.1x)^2}$ بر حسب cm

$$* \quad x = 200^{cm} \Rightarrow \pm \frac{(-3)(4)(10^4)}{2(10+20)^2} = -66.667$$

مثال:



$$* \quad M = 2000x \qquad \Rightarrow \sigma_{max} = \pm \frac{2000x}{2(10+0.1x)^2}$$
$$w = 2(10+0.1x)^2$$

$$\Rightarrow * \quad \frac{\partial \sigma_{max}}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = 100^{cm}$$

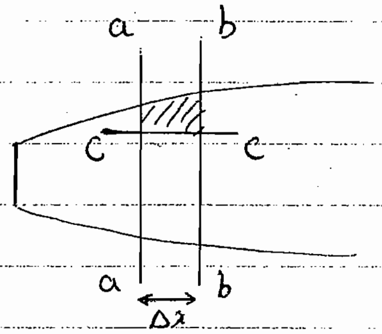
* در اینجا دقیقاً در وسط max σ_{max} بدست آمد البته باید دو انتها را کنترل کرد

اما چون می دانیم در $x = 0$ تنش صفر است پس این مقدار max خواهد بود.

۸۴/۷/۲ بنام خدا ج ۲

تیر با مقطع متغیر :

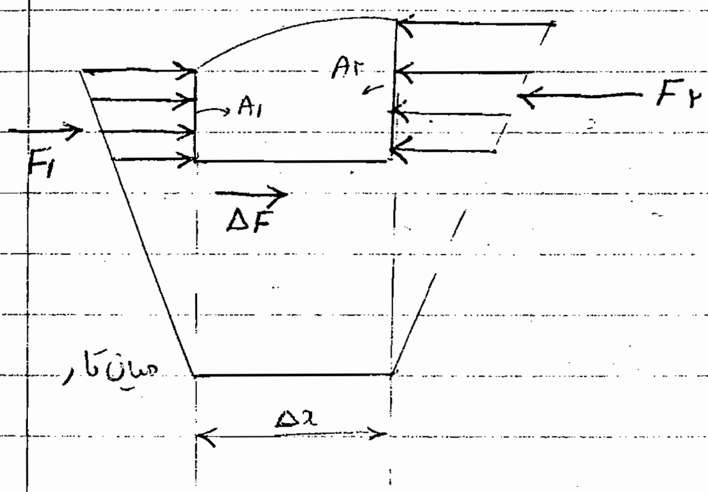
تنش برشی :



* موقعی که مقطع ثابت بود :

دو مقطع موازی به فاصله Δx از هم در نظر گرفتیم به علاوه یک مقطع افقی C-C و تعادل آن قسمت را نشان

داریم .



$$F_1 = \int_{A_1} \sigma_1 dA$$

$$F_2 = \int_{A_2} \sigma_2 dA$$

وقتی مقطع ثابت بود A_1 و A_2 یکی بودند :

* $\Delta F = F_2 - F_1$

با مقطع ثابت

$$\Delta F = \int_{A_1} \frac{\overset{M_1+\Delta M}{M_2}\, y}{I} dA - \int_{A_1} \frac{M_1 y}{I} dA = \frac{1}{I}\int \Delta M y dA$$

$$= \frac{\Delta M}{I} \cdot \int_{A_1} y dA = \frac{\Delta M \cdot Q_{1z}}{I}$$

در مقاومت ① داشتیم

$$q = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\Delta M}{\Delta x} \cdot \frac{Q_{1z}}{I} = \frac{V Q_{1z}}{I}$$

$$* \; q = \frac{\Delta F}{\Delta x \to 0} = \frac{d}{dx} \int_{A_1} \frac{M y}{I} \, dA = \frac{d}{dx} \left(\frac{M Q_{1z}}{I} \right)$$

اگر مقطع ثابت باشد $= \dfrac{V Q_{1z}}{I}$

در مقطع متغیر :

$$q = \frac{d}{dx} \left(\frac{M Q_{1z}}{I} \right)$$

$$= \frac{V Q_{1z}}{I} + \frac{M}{I} \frac{dQ_{1z}}{dx} - \frac{M Q_{1z}}{I^2} \cdot \frac{dI}{dx}$$

$$* \quad q = \frac{V Q_{1z}}{I} + \frac{M}{I} \left(\frac{dQ_{1z}}{dx} - \frac{Q_{1z}}{I} \cdot \frac{dI}{dx} \right)$$

یعنی دیگر با مقطع متغیر از همان روش استفاده‌ای M , I , Q تغییر می‌کنند که توانستیم شار برشی را تعیین کنیم ؛

تنش برشی $\tau = \dfrac{q}{b}$ شار برشی / ضخامت

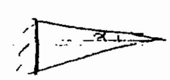
* تنش برشی در مقطع متغیر هم به نیروی برشی هم به لنگر خمشی بستگی دارد ؛

این رابطه یک رابطه کلی است چه جدار نازک باشد یا توپر و ... کلی است ؛

* خطای محاسبه σ :

$$\sigma = \beta \left(\frac{-M y}{I} \right)$$

با زاویه α

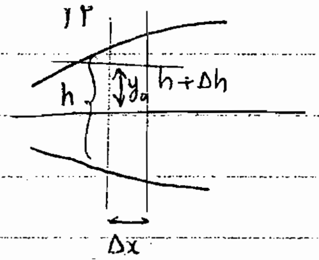


* خطاها مثل همین خطاهای قبلی اند یعنی روش، خطای جدیدی ایجاد می کند .

* مقطع مستطیل :

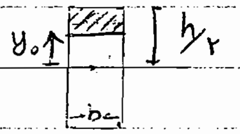
$$I = \frac{bh^3}{12}$$

دو حالت داریم وقتی الف - میان تار افقی باشد :



نسبت به b جداگانه مشتق‌گیری نمی‌شود
ولی در I تأثیر دارد

$$dI = \frac{h^3}{12}db + \frac{3bh^2}{12}dh$$



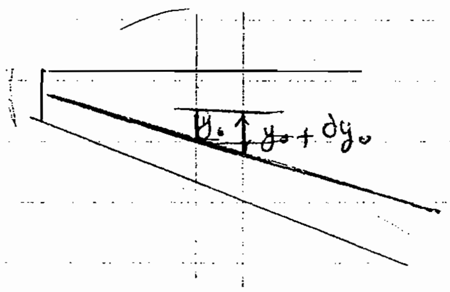
$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y_0\right)\frac{\frac{h}{2}+y_0}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)$$

$$* \quad dQ = \frac{db}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{h\,dh}{2} - y_0^2\right)$$

db ساده می‌شود .

$$\boxed{\tau = \frac{VQz}{Ib} + \frac{Mh}{4I}\left(1 - \frac{Qh}{I}\right)\frac{dh}{dx}}$$

ب - میان تار افقی نباشد : لبه بالا افقی است

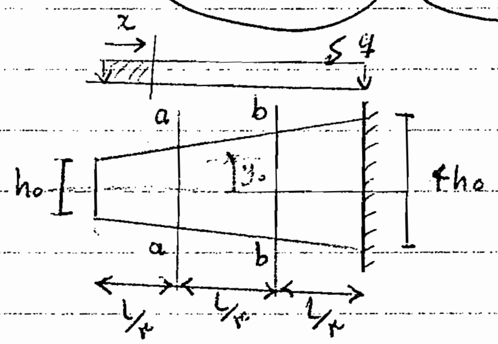


در اینجا y_0 هم تغییر می‌کند .

۵/

$$\tau = \frac{VQ_{1z}}{Ib} + \frac{Mh}{4I}\left(1 - \frac{Qh}{I} - \frac{2y_0}{h}\right)\frac{dh}{dx}$$

مثال:



حل-

$$V = -qx$$

$$M = -\frac{qx^2}{2} = V\left(\frac{x}{2}\right)$$

* $h = h_0 + \frac{x}{L}(3h_0)$ خطی اضافه می‌شود :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{3h_0}{L}$$

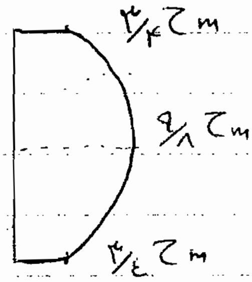
* $Q = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right)$

در مقطع a-a : $x = L/3 \Rightarrow h = 2h_0 \; , \; h_0 = h/2$

$\Rightarrow \tau_{aa} = \frac{V}{8I}\left(\frac{3h^2}{4} - y_0^2\right)$ که سهمی است :

- اگر مقطع ثابت بود τ_{aa} در بالا و پایین صفر می‌شد ولی در اینجا اگر مقادیر مربوطه را بگذاریم :

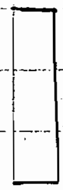
$$\begin{cases} \tau_{y_0=0} = \dfrac{9V}{8bh} \\ \tau_{y_0=\pm h/2} = \dfrac{3V}{4bh} \end{cases}$$



POOMAR

مقطع bb : $x = \frac{2L}{3}$, $h = 3h_0$, $h_0 = \frac{h}{3}$

$$\tau_{bb} = \frac{V}{bh}$$ ستون در این مقطع از بالا تا پایین τ ثابت است



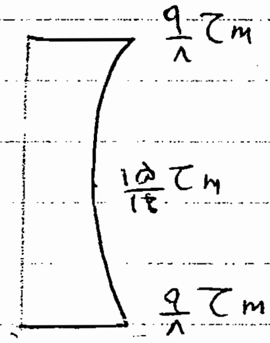
$$\frac{V}{bh} \times \left(\frac{\ldots}{\ldots} \times \frac{\ldots}{8}\right)$$

تکیه‌گاه: $$\tau = \frac{V}{8I}\left(\frac{5h^2}{8} + \frac{y_0^2}{2}\right)$$ $$\frac{V}{8\frac{bh^3}{12}} \times \left(\frac{5h^2}{8}\right)$$

* در اینجا علامت − به + تبدیل شده یعنی روی میان تار تنش کمترین مقدار را دارد.

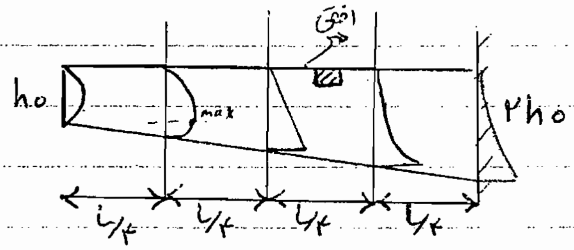
$$\tau_{y_0=0} = \frac{15V}{16bh}$$

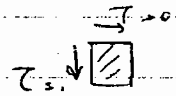
$$\tau_{y_0=\pm h/2} = \frac{9V}{8bh}$$



در مقطع ثابت همیشه τ_m روی میان تار قرار دارد.

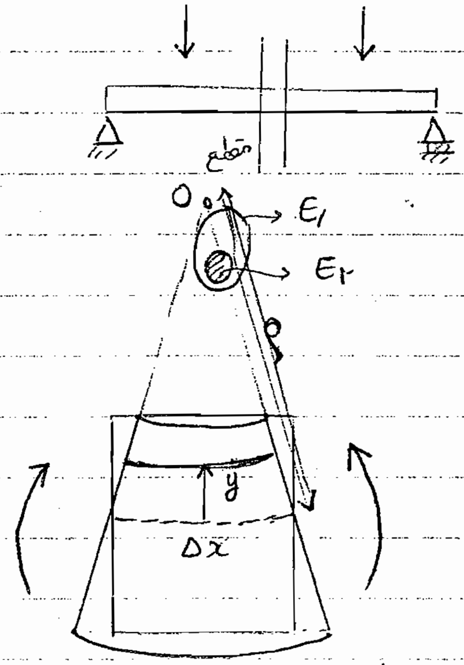
مثال:





* در سطح خارجی τ صفر است؛ چون که بالا افقی است. پس در همه مقاطع تنش در بالا صفر است.
* در پایین $y_0 = h/2$ است
* روی میان تار $y_0 = 0$

بنابراین معادله میان تار نیست



* تیر با دو جنس 8

با خمش خالص است با
طول را کوچک می گیریم.

$\rho\, d\theta$ طول اولیه
$(y-\rho)\, d\theta$ طول ثانویه

کرنش $\varepsilon = -\dfrac{y}{\rho}$

$$\sigma = \frac{-Ey}{\rho}$$

در اینجا چون دو ماده داریم در هر نقطه داریم

حالتی که جنس اول است $\sigma_1 = -\dfrac{E_1 y}{\rho}$

$$\sigma_2 = -\frac{E_2 y}{\rho}$$

در یک جنسی $\int \sigma\, dA = 0$ بود و نتیجه گرفتیم
میان تار از وسط مقطع می گذرد.

در اینجا چون دو جنس داریم با دو انتگرال بگیریم

$$* \quad \int_{A_1} \frac{-E_1 y}{\rho}\, dA + \int_{A_2} -\frac{E_2 y}{\rho}\, dA = 0$$

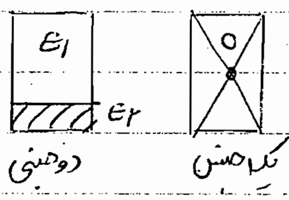
$$\Rightarrow \int_{A_1} y\, dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y\, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A_1} y\left(\frac{E_1}{E_1} dA\right) + \int y\left(\frac{E_2}{E_1} dA\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A} \left(\frac{E_i}{E_1}\right) y\, dA = 0$$

شکل مقاومت ①

* این رابطه نشان می دهد که باز هم همان تار از مرکز جسم می گذرد اما نه وسط بلکه مرکز وزن دار جسم ؟

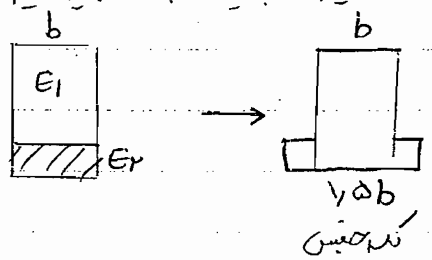


O مرکز جسم می شود
همان وسط

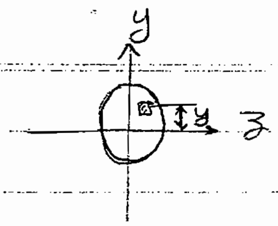
در اینجا دیگر وسط مرکز جسم نمی شود باید از روابط مرکز جسم را بدست آورد.

اگر یک ماده دو جنسی داشتیم می توان پهنا را اضافه کنیم و به یک جنس تبدیل کنیم

اگر $E_2 = \overset{1.5}{\cancel{4}} E_1$



$$\sigma = -\frac{My}{I}$$



$$\int (\sigma\, dA)\cdot y = -M$$

گ نسبت به محور z

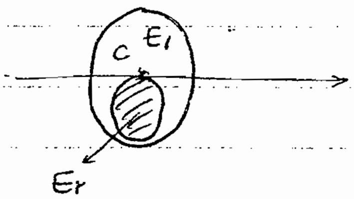
$$\Rightarrow \int_A -\frac{Ey}{\rho}\, dA \cdot y = -M$$

$$-\frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A y^2 dA}_{I} = -M \longrightarrow \text{تعادلها} \quad \sigma = -\frac{Ey}{\rho}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{-My}{I}$$

مقاومت I

در اینجا 8



$$* \quad \int \sigma_1 dA\, y + \int \sigma_2 dA\, y = -M$$

$$\Rightarrow \int \left(-\frac{E_1 y}{\rho}\right) y\, dA + \int \left(-\frac{E_2 y}{\rho}\right) y\, dA = -M$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_1}{\rho}\right)\int y^2 dA + \left(\frac{E_2}{\rho}\right)\int y^2 dA = M$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{\rho}\left[\int_{A_1} y^2 dA + \left(\frac{E_2}{E_1}\right)\int_{A_2} y^2 dA\right] = M$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{\rho}\left[\int \frac{E_1}{E_1} y^2 dA + \int \frac{E_2}{E_1} y^2 dA\right] = M$$

$$\frac{E_1}{\rho}\left[\int \frac{E_i}{E_1}\cdot y^2 dA\right] = M$$

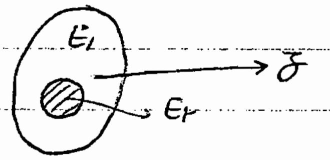
* $\sigma = -\dfrac{E_i y}{\rho}$
* $\dfrac{E_1 I}{\rho} = M$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{-E_i M y}{E_1 I}$$

$$I = \int \frac{E_i}{E_1} y^2 dA$$

می توان اینجا هم y را تغییر نداد در عوض پهنا را تغییر دهیم و به یک جنس تبدیل کنیم

تیر از دو یا چند جنس 8

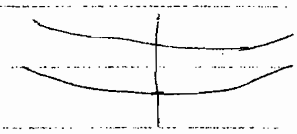


$$\bar{y}_c = \frac{\int_A y\, E_i\, dA}{\int_A E_i\, dA}$$

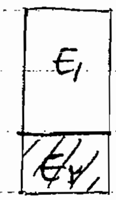
$$I_z = \int \frac{E_i}{E_1}\, y^2 dA$$

$$\sigma = -\frac{E_i}{E_1}\cdot\frac{My}{I}$$

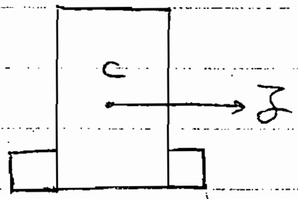
$$\text{کرنش}\quad \varepsilon = \frac{-y}{\rho}$$



خم شدن تیر طوری است که کرنش در ارتفاع تیر خطی تغییر می‌کند و به جنس کار ندارد
وقتی تبدیل به تنش می‌شود چون در E ضرب می‌شود به E_i بستگی پیدا می‌کند



اگر مقطعی به این صورت باشد می‌توان به نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ پهنای جنس دوم را زیاد کرد و یک جنس گرفت



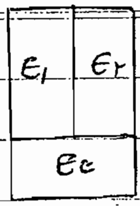
$$\bar{y}_c = \frac{\int_A y\, dA}{\int_A dA}$$

از این روش در جاهایی که متقارن است می‌شود استفاده کرد.

$$I = \int y^2 dA$$

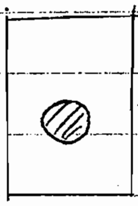
$$\sigma_1 = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_2 = -\frac{E_2}{E_1}\cdot\frac{My}{I}$$



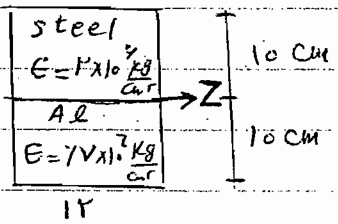
$$\bar{x}_c = \frac{\int_A x E_i \, dA}{\int_A E_i \, dA}$$

معمولاً در این مسائل محورهای اصلی خواسته نخواهد شد.



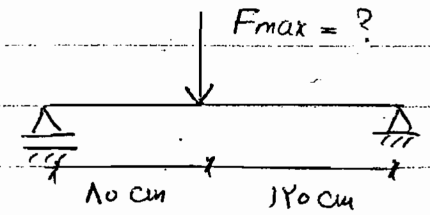
در این حالت دایره به صورت
بیضی در می‌آید.
بهتر است از همان روش قبلی
استفاده شود.
بیضی ای که نقطه پهنای آن
تغییر می‌کند ارتفاع آن ثابت است

مثال:



$$\sigma_{sw} = 1500 \ kg/cm^2$$

$$\sigma_{aw} = 800 \ \frac{kg}{cm^2}$$



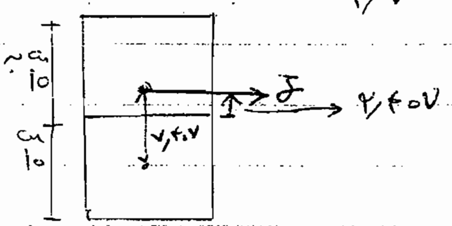
حل — اول مرکز مقطع ⇒ اول نسبت به z مرکز را تعیین می‌کنیم

چون زیر محور z بود ⊖ شد

$$\bar{Y}_c = \frac{+(2\times10^6)(12\times10)(5) - (0.7\times10^6)(12\times10)(5)}{120\times2\times10^6 + 120\times0.7\times10^6}$$

$$= \frac{6.5}{2.7} = 2.407 \ cm$$

پس به این شکل در می‌آید



$$* \quad I_T = \frac{12(10^3)}{12} + 120(7{,}407)^2 + \frac{2\times10^6}{0{/}7\times10^6}\left[\frac{12\times10^3}{12} + \overbrace{al \rightarrow E_1}\right.$$
$$\left. + (120)(5 - 2{,}407)^2\right]$$

$$I_T = 12746 \ cm^4$$

دراینجا هردوجنس همزمان نمی توانند به تنش مجاز برسند.

دراینجا $\sigma \simeq \frac{E_i}{E_1}$ همبستگی دارد.

فرض می کنیم $\Rightarrow \sigma_{st} = 1500 \frac{kg}{cm^2}$

$$-1500 = -\frac{2\times10^6}{0{/}7\times10^6}\times\frac{M}{I}\times\overbrace{7{,}593}^{y=10-2{,}407} \Rightarrow \frac{M}{I} = 69{,}14$$

تنش فشاری است با بالا قرار دارد.

$$\sigma_{Al} \Rightarrow \frac{M}{I}\times 12{,}407 = 857{,}85 > 800 \quad \text{غ ق ق}$$

چون از مقدار مجاز بیشتر شد.

پس برعکس عمل می کنیم با

$$\begin{cases} \sigma_a = 800 \frac{kg}{cm^2} \\ \sigma_{st} = 1500 \times \frac{800}{857{,}85} = 1398{,}8 < 1500 \frac{kg}{cm^2} \quad \text{قابل قبول} \end{cases}$$

یا

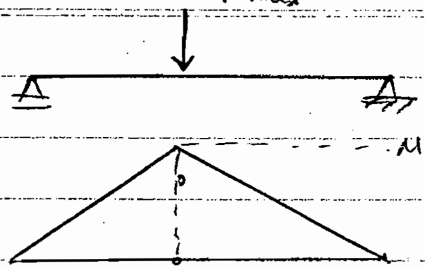
$$\begin{cases} |\sigma_{st}| = \frac{2\times10^6}{0{/}7\times10^6}\,\frac{M}{I}\times 7{,}593 \leq 1500 \Rightarrow \frac{M}{I} \leq 69{,}14 \\ |\sigma_{al}| = \frac{M}{I}\times 12{,}407 \leq 800 \Rightarrow \frac{M}{I} \leq 64{,}47 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{I} = 64{,}47$$

با داشتن I و M را حساب می کنیم:

$$\Rightarrow M = 64{,}47 \times 12746 = 821730 \ kg\,cm$$

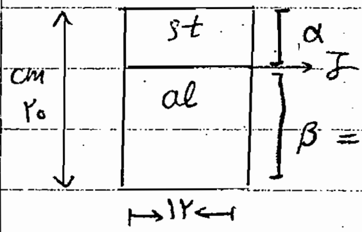
POOMAR



$$M_{max} = F_{max}\frac{ab}{L}$$

$$\frac{F_{max} \times ۸۰ \times ۱۲۰}{۲۰۰} = ۸۲۱۷۲۰ \Rightarrow \boxed{F_{max} = ۱۷۱۱۹\ kg}$$

مثال: در مسئله قبل ارتفاع مقطع فولادی و آلومینیومی را طوری تعیین کنید که تار خنثی درست در خط جدایی این دو جنس باشد سپس F_{max} را بیابید؟



$Q_{st} > 0$

$Q_{Al} < 0$

بالا ① $(۱۲\alpha)(۲\times۱۰^{۶})(\alpha/۲)$

پایین ① $-(۱۲)(۲۰-\alpha)(۰/۷\times۱۰^{۶})(\frac{۲۰-\alpha}{۲})$

$\Rightarrow Q_{\text{بالا}} + Q_{\text{پایین}} = Q_{Z\ \text{کل}} = 0$

$\Rightarrow ۲\alpha^{۲} - ۰/۷(۲۰-\alpha)^{۲} = ۰$

یا $\alpha^{۲} = ۰/۳۵(۲۰-\alpha)^{۲}$

یا $\pm\alpha = \sqrt{۰/۳۵}\,(۲۰-\alpha)$

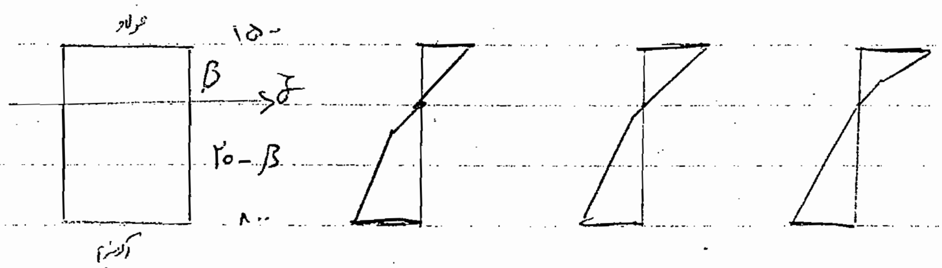
α مثبت قابل قبول است

$$\begin{cases} \alpha = ۱۱/۸ - ۰/۵۹\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = ۷/۴۲} \\ -\alpha = ۱۱/۸ - ۰/۵۹\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha < ۰$ غ ق ق

بقیه را حل کنید ؟

مثال: در مسئله قبل ضخامت فولاد و آلومینیوم را طوری تعیین کنید که تنش ها هر دو با هم به مقدار مجاز برسند



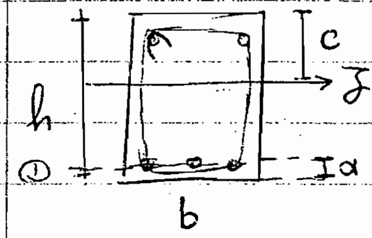
$$\left\{\begin{array}{l} |\sigma_{st}| = 1500 = \dfrac{M}{I}\beta \times \dfrac{2\times10^6}{0.7\times10^6} \\ |\sigma_{al}| = 800 = \dfrac{M}{I}(20-\beta) \end{array}\right.$$

هر دو به مقدار مجاز برسند

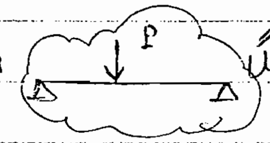
$$\frac{15}{8} = \frac{\beta \times 2}{(20-\beta)(67)}$$

ازانجا β بدست می آید یعنی محل تار خنثی معلوم می شود.

پس حل مسئله قبل یک Q می گیریم برای ضخامت فولاد و ① کل را نسبت به تار خنثی ای که بدست آوردیم صفر قرار می دهیم یعنی اول محل تار خنثی را حس کردیم بعد ممان ها را چون تار خنثی از اول معلوم نبود کجا بود.



* بتن آرمه



بتن فشار را می تواند تحمل کند اما کشش را نمی تواند تحمل
در این تیر بالا فشاری است پس
بتن فشار را تحمل می کند اصلاً می شود میله گرد نگذاشت

A_s مساحت فولاد پایینی

- در سیستم های فشاری معمولاً فولادها را در نظر نمی گیرند یعنی در بالا

- در سیستم های کششی یعنی پایین فقط فولاد را در محاسبه در نظر می گیرند

ممان بالا فشاری — ممان فولاد — ممان پایین کششی = فولاد

مدول ارتجاعی بتن را مبنا قرار دهیم

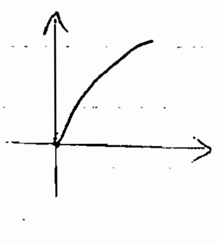
$$Q_z = bc \times E_c \cdot \frac{c}{2} - A_s E_s (h-c-\alpha) = 0$$

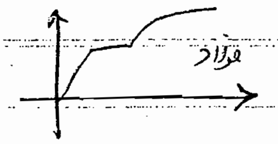
α یک مقدار بتن روی میله گردها می ریزند برای جلوگیری از آتش سوزی

$$I_z = \frac{bc^3}{3} + A_s \frac{E_s}{E_c}(h-c-\alpha)^2$$

از اثر I محور ① برای فولاد صرف نظر کردیم.

معمولاً بهتر است فولاد به تنش مجاز برسد چون اگر بتن به تنش مجاز برسد ناگهان ممکن است ترک بردارد و خراب شود





در مقطع تیتی نرباید خطی فولاد قرار داد.

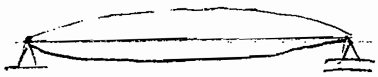
درتیر دیگر این فرمولها صادق نیستند چون الان آیین نامه برای طراحی از بار نهایی استفاده می کند تا تیر خراب شود.

وقتی از بارنهایی استفاده می کنیم معلوم نیست که آیا تنش وارد قسمت غیر خطی شده باشد.

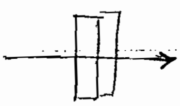
حل این قسمت حل الاستیک تیرهای بتن - آرمه است. در تیرتوها مقطع متقارن است یعنی فولاد در بالا و پایین باهم برابر است. در تیر این طوری است.

* تغییر درجه حرارت در دو جنس ها :

بر اثر تغییر حرارت چون جنس ها متفاوت است ضریب انبساط حرارتی متفاوت است

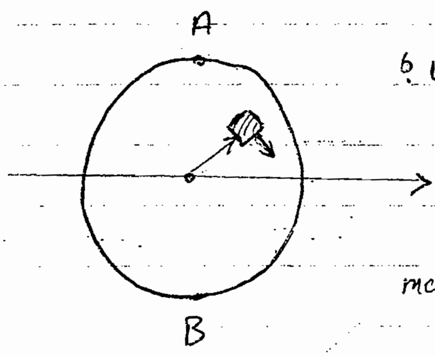


در حالت کلی خم می شوند حتی اگر باری روی آن نباشد



* می توان از دو فلز مختلف ساخته شده که به هم وصل می شوند طوری طراحی می شود که در درجه حرارت زیاد با خم شدن اتصال برقی از بین برود.

* پیچش + خمش :



ساده ترین مقطعی که هر دو را خوب تحمل می کند مقطع دایره است :

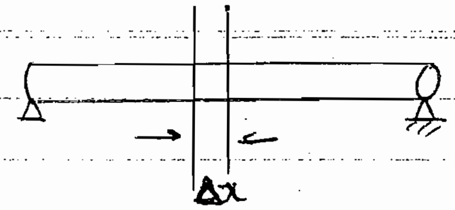
$$\tau = \frac{T\rho}{J_o}$$ پیچش

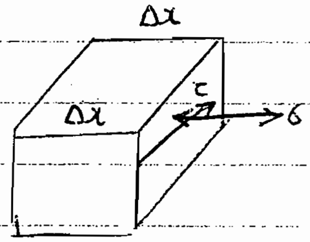
o آن نقطه ای است نسبت به مرکز دایره

* گشتاور پیچشی در تمام دور دایره تنش برشی max ایجاد می کند

* گشتاور خمشی در بالا و پایین تنش محوری max ایجاد می کند.

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$



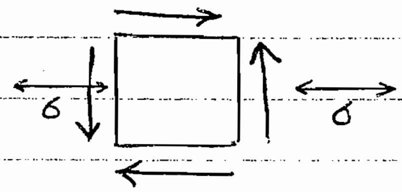


المان

تنش برشی عمود بر شعاع

نقاط A و B بیشترین σ و τ را دارند

از بالا به المان نگاه کنیم



* با استفاده از آنالیز تنش تنش عمودی max و تنش برشی max را می یابیم :

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

در اینجا می شود

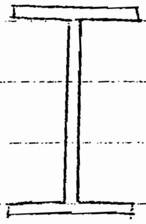
$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \sigma/2 \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

تنش برشی در کل المان بیشینه شده در عین حال تنش عمودی هم بیشینه شده است ؟

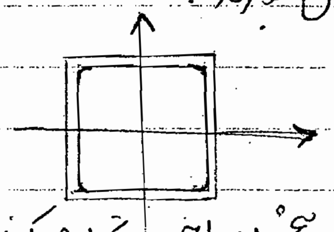
باید المانها را از A و B بگیریم که هم σ و τ بیشینه باشند .

ما پیچش را در همه‌ی مقاطع می‌توانیم حساب کنیم 8



مقطع I در مقابل پیچش ضعیف است

مقاطع بسته در مقابل پیچش بهترند !



این مقطع «قوطی» هم پیچش را خوب تحمل می‌کند هم خمش را .

پیچش $\tau = \frac{T}{2tA_m}$

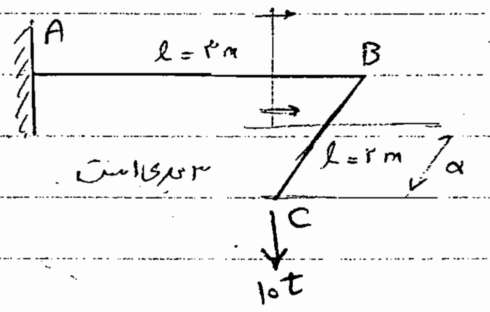
تمام المان‌هایی که در بالا هستند ؛
τ همین مقدار را دارد

خمش $\sigma = \frac{M}{W}$

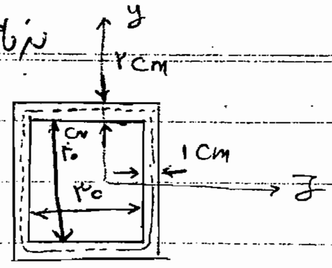
کنترل گوشه‌های داخلی الزامی است از طرفی بالا و پایین را هم باید چک کرد چون σ_{max} است در گوشه‌های داخلی هم تنش برشی زیاد می‌شود .

۸۴/۷/۱۲ بنام خدا ۴ج

مثال 8



۳ بعدی است



تنش max عمودی و برشی در تمام سازه کجاست ؟

$0 \leq \alpha \leq 2$ $\qquad$ $0 \leq x \leq 3$

حل ـ $BC: \begin{cases} V_y = 10t \\ M = 10\alpha \\ T = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $AB: \begin{cases} V_y = 10t \\ M = -10x \\ T = 10 \times 2 = 20 \end{cases}$

در تمام نقاط فاصله AB یکسان است.

نقطه B : $\begin{cases} V_y = 10 \\ M = 20\ tm \\ T = 0 \end{cases}$ $\qquad$ نقطه B $\begin{cases} V_y = 10 \\ M = 0 \\ T = 20 \end{cases}$

شکل ۳ بعدی است بار 10t در BC نقطه B را خم می‌کند در حالیکه در مقطع AB بار 10t باعث پیچش نقطه B می‌شود.

$A \begin{cases} V = 10 \\ M = 30 \\ T = 20 \end{cases}$

مقطعی که در آن اثر نیروهای بیشتر است مقطع A است که از همه خطرناکتر است

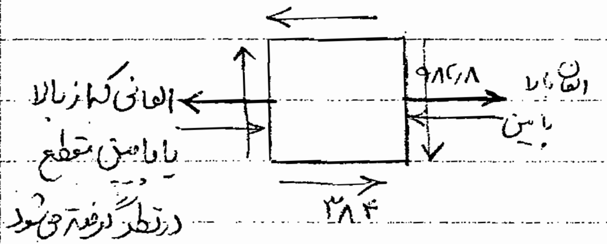
$$* \underset{\text{در نوارهای بالا و پایین مقطع}}{\tau} = \frac{T}{2tA_m} = \frac{20 \times 10^5}{2(2)(31 \times 42)} = 384.\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\underset{\text{نوار قائم}}{\tau} = \frac{20 \times 10^5}{2(1)(31 \times 42)} = 768.\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$* I_z = \frac{32(44)^3}{12} - \frac{30(40)^3}{12} = 67150\ cm^4$$

$$* \underset{\text{در بالا و پایین مقطع}}{\sigma_1} = \pm \frac{30 \times 10^5 \times 22}{67150} = \pm 982.87\ \frac{kg}{cm^2}$$

در تراز اتصال نوارهای افقی و قائم $\sigma_2 = \pm \dfrac{40 \times 10^5 \times 20}{67150} = \pm 894.5 \ \dfrac{kg}{cm^2}$

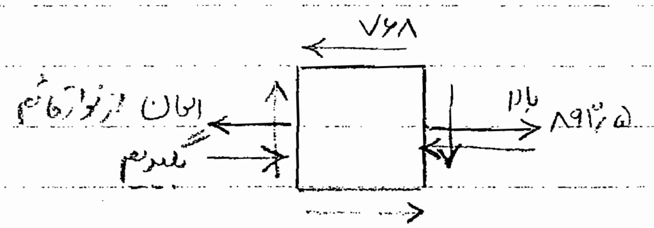


تنش برشی max $\tau_{max} = \sqrt{\left(\dfrac{982.8}{2}\right)^2 + (384)^2} = 623.6 \ kg/cm^2$

تنش‌های اصلی:

المان بالا بگیریم $\sigma_{1,2} = \dfrac{982.8}{2} \pm 623.6 \ \begin{cases} 1115 \\ -132 \end{cases}$

پایین ← فشاری $\sigma_{1,2} = -\dfrac{982.8}{2} \pm 623.6 \ \begin{cases} 132 \\ -1115 \end{cases}$



$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\dfrac{894.5}{2}\right)^2 + (768)^2} = 888.5 \ kg/cm^2$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \dfrac{894.5}{2} \pm 888.5 \ \begin{cases} 1335.2 \\ -441.7 \end{cases}$$

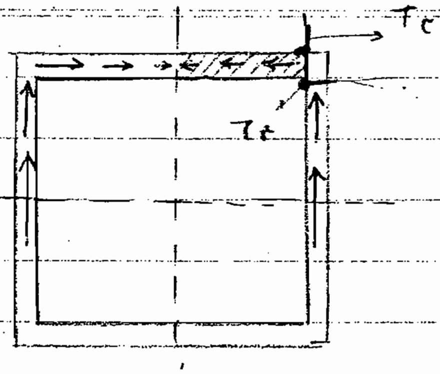
$$\sigma_1, \sigma_2 = -\dfrac{894.5}{2} \pm 888.5 \ \begin{cases} -1335.2 \\ 441.7 \end{cases}$$

بیشترین برش در نوار قائم

بزرگترین کشش را در بالا داریم ۱۱۱۵

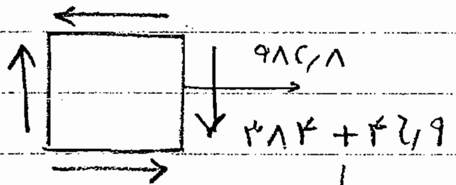
بزرگترین فشار را در پایین داریم ۱۱۱۵

تنش برشی ناشی از پیچش



$$\tau_2 = \frac{VQ}{It} = \frac{10000\,(2\times15)(21)}{67150\times 2} = 46.9\ \frac{kg}{cm^2}$$

تنش برشی لازم ناشی از پیچش در نوار بالا



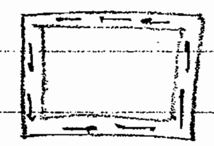
در این المان اعمال قبلی را دوباره تکرار می‌کنیم

نیز τ_{max} را دوباره می‌یابیم

چرا جمع نزدیم ؟

چون به هر حال در ۲ تا از گوشه‌ها τ ناشی از پیچش و برش با هم هم جهت می‌شوند !

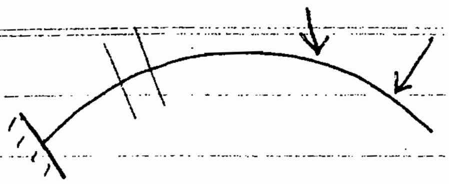
پیچش



چون تنش های برشی ناشی از پیچش همه در یک جهت اند

$$\tau_4 = \frac{10000\times(2\times16)(21)}{67150\times 1} = 100.1\ \frac{kg}{cm^2}$$

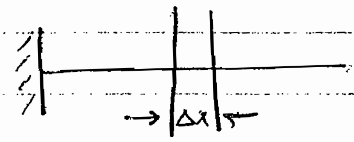
τ_4 را در المان قائم می‌گذاریم



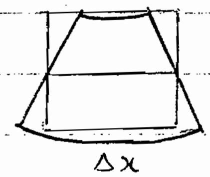
در هر مقطع اگر بخواهیم تنش های عمودی

را حساب کنیم با فرمول $\sigma = -\frac{My}{I}$

اختلاف داریم ؟

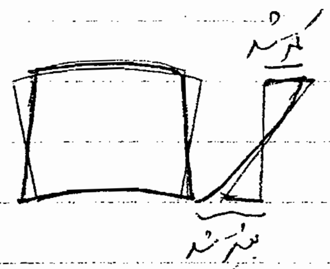


در تیر مستقیم دو مقطع به فاصله Δx می گرفتیم



ε خطی تغییر می کند $\varepsilon = -\frac{y}{\rho}$

اما در مقطع قوسی داریم که از ابتدا خود المان به حالت خمیده هست



$\varepsilon = \frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}}$

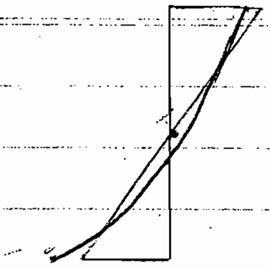
در اینجا ε دیگر خطی نخواهد بود
چون طول اولیه خودش تغییر
می کند

* خارج قوس طول‌های اولیه بزرگتر است پس تنش ها **کمترند** و درون قوس هم چون طول اولیه کمتر است پس تنش بیشتر از حالت خطی است

* تنش هم به همین صورت است

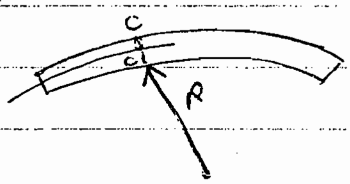
وقتی تنش خطی بود داشتیم $\int \sigma dA = 0$

و از آن نتیجه گرفتیم که تار خنثی در مرکز است اما در اینجا دیگر تار خنثی بر مرکز منطبق نیست



تار خنثی پایین تر آمده است چون باید
جمع دو نیروی بالا و پایین باید صفر شود،
پس اندکی پایین می آید.

تار خنثی همیشه پایین تر می آید.



R : شعاع قوس

c : y_{max} است

$\frac{R}{c}$ ۱٫۲ قوسی که خیلی خمیده شده است

$$\sigma = -K\frac{My}{I}$$

K inside ، K outsid

داده شده است

* هر چه $\frac{R}{c}$ بزرگتر باشد K خارج و داخل به هم نزدیکتر می شوند

برای قوسهای سنگی معمولاً $\frac{R}{c} \simeq$ ۵ تا ۶ است که قابل ملاحظه است

در قوس بتن آرمه و فولادی $\frac{R}{c}$ تا ۳۰، ۴۰ هم می رسد که خطا آنقدر کم می شود که اصلاً دخالت داده نمی شود.

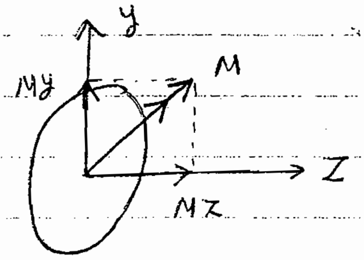
خمش دوجانبه :

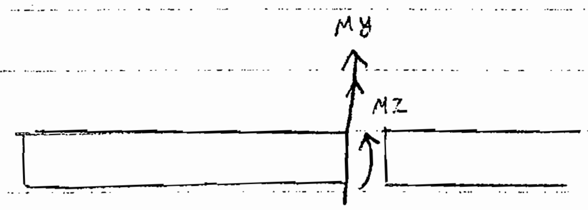
خمش خالص : فقط حول یک محور M_z یا M_y داریم ؛

خمش ساده : M_z , V_y یا M_y , V_z داریم ؛

اما در خمش دوجانبه هم M_z داریم هم M_y که می‌تواند خالص هم باشد ؛ یعنی V ندارد!

خمش مرکب : که هم M دارد و هم N > N , M_z / N , M_y , M_z





هر کدام یک تنشی دارند که

$$\sigma_1 = \frac{-M_z y}{I_z}$$

چون محورهای z, y را هم داریم

$$\sigma_2 = \frac{+M_y z}{I_y}$$

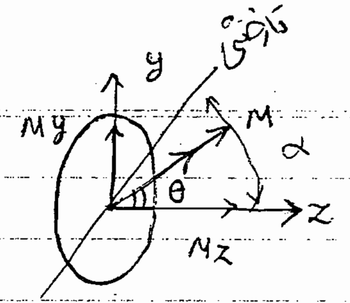
ناشی از هر دو

$$\sigma = \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

* تار خنثی وقتی است که تنش‌ها صفر باشند :

$$0 = \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

اگر فقط یکی از M ها باشد تار خنثی منطبق بر محور دیگر است در غیر این صورت تار خنثی محور دیگر نمی‌شود.



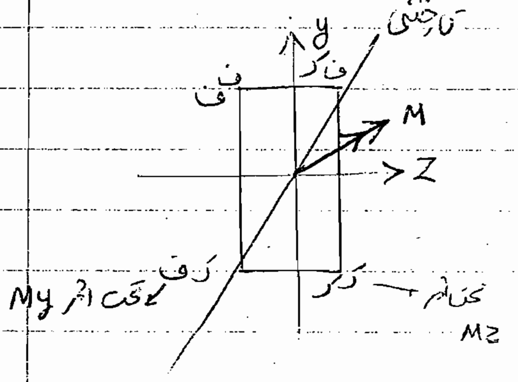
$$\begin{cases} M_z = M\cos\theta \\ M_y = M\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{-M\cos\theta\, y}{I_z} + \frac{M\sin\theta\, z}{I_y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{I_z}{I_y} \times \tan\theta$$

α وقتی با θ برابر است که $I_z = I_y$ باشد



$I_y < I_z$ است

اگر یک M داشته باشیم

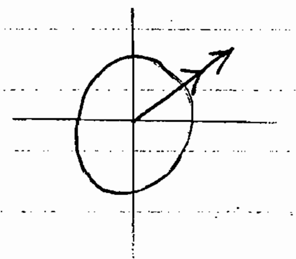
تار خنثی به سمت y متمایل

می شود

* در اینجا هم تنش با فاصله از محور متناسب است هرچه از تار خنثی دور شویم σ ها زیاد می شوند

مثلاً در مقطع مستطیلی یکی از گوشه‌ها بزرگترین تنش را خواهد داشت ؛

دایره

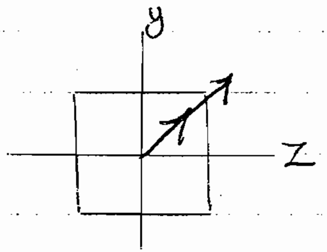


برای مقطع 8

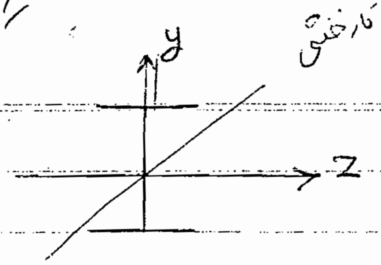
$I_z = I_y$

خمش ؛ خمش ساده می شود

. تار خنثی منطبق بر محور خود M است

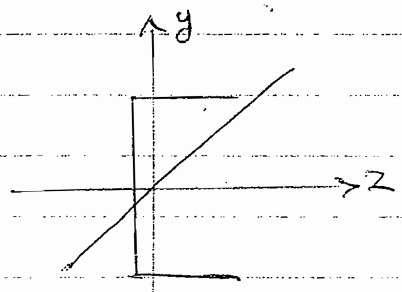


تار خنثی بر M منطبق است $I_z = I_y$



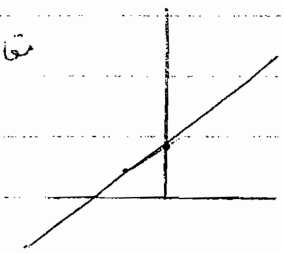
$$\boxed{|\sigma_{max}| = \left|\frac{M_z}{W_z}\right| + \left|\frac{M_y}{W_y}\right|}$$

در یک مقطع مستطیلی 8
یا I شکل یا II
می‌توان تنش‌های max
را با هم جمع کرد

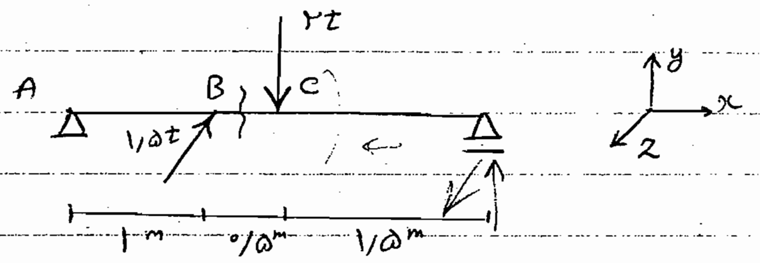


در این جا باید دورترین
نقاط را معین کنیم و تنش‌ها
را در آن جا بیابیم و کششی و فشاری
را مشخص کنیم

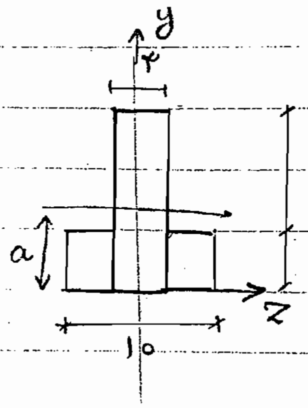
مقاطع شکسته



در این مقطع می‌توان تنش‌ها را در
تمام گوشه‌ها یافت بالاخره به مقدار
max تنش فشاری و کششی می‌رسیم



مثال ٤



تنش خمشی max را بیابید ؟

اول تار خنثی $\Rightarrow$ $$a = \frac{(10\times3)(1.5)+(20\times3)(13)}{10\times3+20\times3} = \frac{27.5}{3} = 9.167\ cm$$

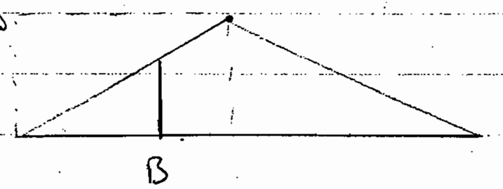
تطیل پایین $$I_z = \frac{10(3)^3}{12} + (10\times3)(9.167-1.5)^2$$

بالا $$I_z = \frac{3(20)^3}{12} + (3\times20)(13-9.167)^2$$

$$\Rightarrow I_{tz} = 4667\ cm^4$$

$$I_y = \frac{3(10)^3}{12} + \frac{20(3)^3}{12} = 295\ cm^4$$

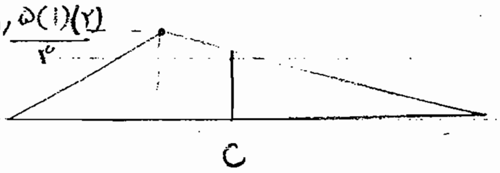
$\frac{2(3)}{4} = 1.5\ t.m$



: M_z

بار ۱/۵t را در نظر نمی‌گیریم .

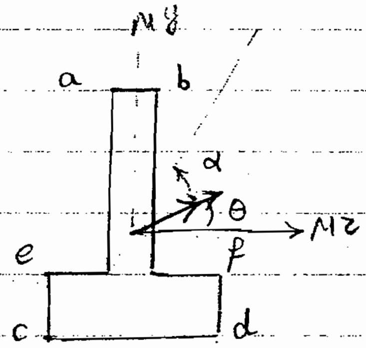
$\frac{Pab}{l} = \frac{1.5(1)(2)}{3} = 1\ t.m$



: M_y

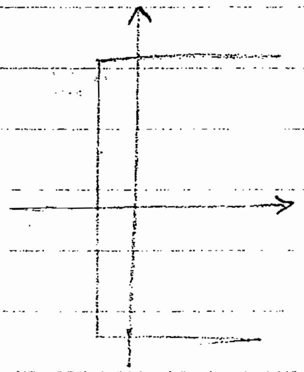
در مقطع B $$M_z = \frac{1}{1.5}\times1.5 = 1\ t.m$$

در مقطع C : M_y : $= \frac{۱/۵}{۲} \times ۱ = ۰/۷۵ \; t.m$



تار خنثی می‌تواند در مقاطع مختلف شکل‌های مختلفی بگیرد.

نقاط a و b و c و d می‌توانند بیشترین تنش را داشته باشند
باید بررسی کنیم که چون نقاط ممکن است دورترین نقاط قرار بگیرند
اگر تعداد نقاط زیاد باشد بهتر است تار خنثی را بیابیم.



در بالا داریم
باید نقاط گوشه را
با تنش max
حساب کنیم تا max
ها باهم جمع شوند.

مقطع B : $tg\alpha = \tan\theta \cdot \frac{I_z}{I_y}$ θ: زاویه تنش‌ها

$\tan\theta = 1 \Leftarrow M_z = M_y$ *

$\Rightarrow \tan\alpha = 1 \times \frac{۴۶۶۷}{۲۹۵} \Rightarrow tg\alpha = ۱۵/۸۲^{\circ}$

پس دورترین نقاط عبارتند از: d, e

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

* $$\sigma_d = \frac{-10^5 \times (-۹/۱۲۷)}{۴۶۶۷} + \frac{10^5 (۵)}{۲۹۵} = ۱۸۹۱/۳$$

فشاری

$$* \quad \sigma e = \frac{-10^5(-6,127)}{4667} + \frac{10^5(-5)}{295} = -1562,8 \ \frac{kg}{cm^2}$$

مقطع C :

$$Mz = 1,5$$
$$My = 0,75$$

$$\tan\alpha = \frac{0,75}{1,5} \times \frac{4667}{295} \Rightarrow tg\alpha = 781$$ شیب زیاد

دورترین نقاط e , d :

$$\sigma d = \frac{-1,5\times10^5(-9,127)}{4667} + \frac{0,75\times10^5(5)}{295}$$

$$\Rightarrow \sigma d = 1565,8 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma e = \frac{-1,5\times10^5(-6,127)}{4667} + \frac{0,75\times10^5(-5)}{295}$$

$$\Rightarrow \sigma e = -1073 \ \frac{kg}{cm^2}$$

از A تا B هر دو تنش زیاد می‌شوند بین C تا D هم مرتباً بیشتر می‌شوند و مقطع خطرناک همان B
است در ناحیه CD هم بدترین وضع مربوط به C است
بین C و B باید چک شود چون یکی زیاد می‌شود یکی کم.
تغییرات تنش خطی است پس داریم:

$\sigma e = f(x)$ تابعی از x می‌شود
که خطی است

چون خطی است یا به تدریج زیاد می‌شود یا به تدریج کم می‌شود

پس باید در مقطع B است یا در C ؛

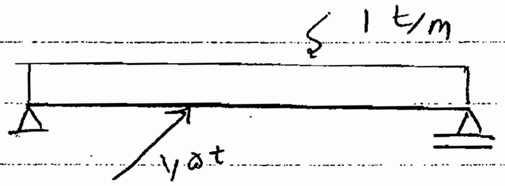
اگر تابع خطی نباشد باید تابع تنش را بنویسیم و مشتق گیری کنیم

مقطع B

$\sigma_d = ۱۸۹۱/۴$

$\sigma_e = -۱۵۲۳/۸$

مثال :

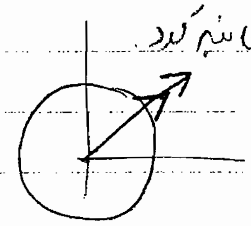


اگر مقطع دایره باشد

$$* \quad I = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi (10)^4}{4} = ۷۸۵۴ \ cm^4$$

مقطع B

در مقطع دایره همیشه خمش را می توان یکجا بررسی کرد



$$M_Z = M_y = 1$$

$$M = \sqrt{M_Z^2 + M_y^2} = \sqrt{2}$$

$$\sigma_{max} = \pm \frac{MR}{I} = \pm \frac{\sqrt{2} \times 10^5 \times 10}{۷۸۵۴} = \pm ۱۸۰/۶ \ \frac{kg}{cm^2}$$

مقطع C

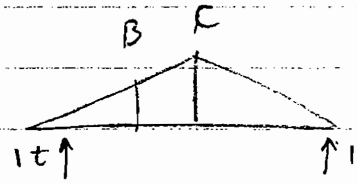
$$M_Z = ۱/۵ \ , \ M_y = ۰/۷۵$$

$$\Rightarrow M = \sqrt{۱/۵^2 + ۰/۷۵^2} = ۱/۶۸ \ t.m$$

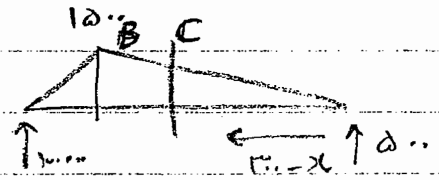
$$\Rightarrow \sigma_{max} = \pm \frac{MR}{I} = \pm \frac{۱/۶۸ \times 10^5 \times 10}{۷۸۵۴} = \pm ۲۱۳/۹ \ \frac{kg}{cm^2}$$

از نقطه B به C می رویم محل σ_{max} تغییر می کند ؛ باید مشتق بگیری کرد .

$$M_x = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$



$$M_z = (1000\,x)\ kg.cm$$



$$M_y = 500(300 - x)$$

$$\Rightarrow M_x = 500\sqrt{5x^2 - 600x + 90000}$$

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{500\,(10x - 600)}{\bigcirc} = 0$$

$$x = 60$$

* چون x در فاصله $100 < x < 150$ باید قرار بگیرد ؛ پس قابل قبول نیست ؛

اگر عدد در محدوده قرار بگیرد باید M را بررسی کنیم .

* خمش مرکب 8

نیز همراه لنگر نیروی محوری هم داریم ؛

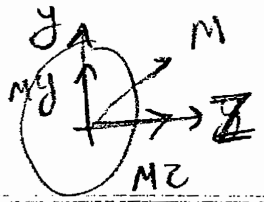
$$\begin{cases} M_z, N \\ M_y, M_z, N \end{cases}$$ یا

8 M_z, N

$$\sigma_1 = \frac{-M_z y}{I_z}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A}$$

$$+\frac{M_z y}{I_z} \quad -\frac{M_y z}{I_y}$$



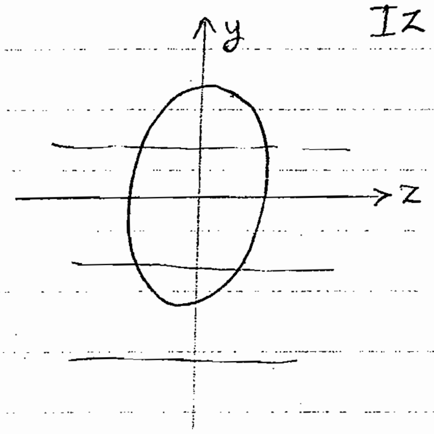
$$* \quad \sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{N}{A}$$

: N, M_z, M_y

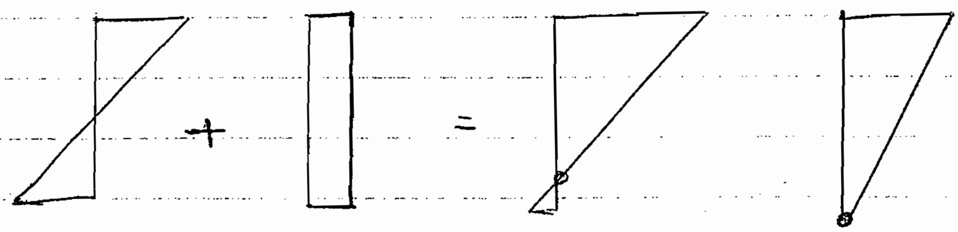
$$* \quad \sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{N}{A}$$

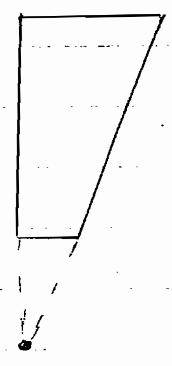
* حالت اول :

$$0 = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{N}{A}$$



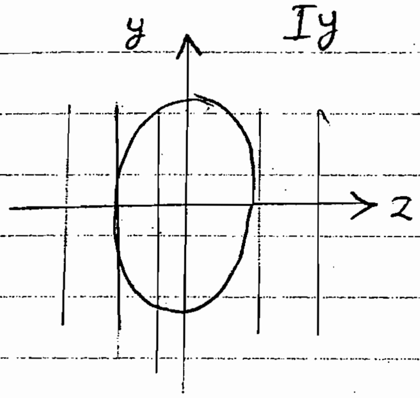
* « تار خنثی خطی است موازی محور z ها . »
ممکن است بالا یا پایین یا حتی مقطع را قطع نکند . یا مماس بر مقطع باشد .





$$\sigma = \frac{M_y Z}{I_y} + \frac{N}{A}$$

8 M_y, N



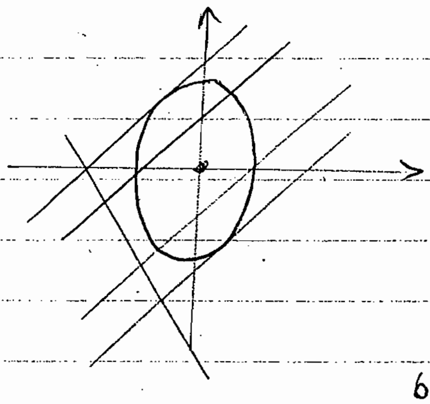
« تارخنثی خطی است موازی محور y »

N و M_z, M_y

$$0 = \frac{-M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{N}{A}$$

$$0 = ay + bz + c$$

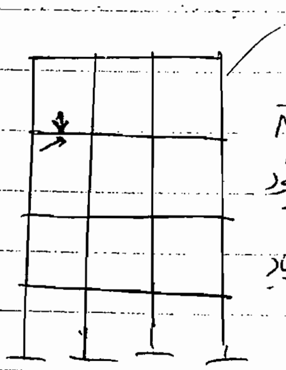
تارخنثی یک خط است



از مرکز نمی گذرد چون N داریم

* تنش باز هم با فاصله از تار خنثی متناسب است ؟

بزرگترین تنش ها مربوط هستند به دورترین نقاط از تار خنثی



اگر تغییر درجه حرارت داشته باشیم نیروی محوری ایجاد می شود

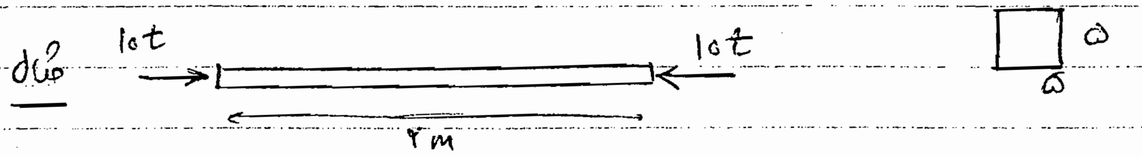
یا در اثر زلزله نیروی محوری ایجاد می شود.

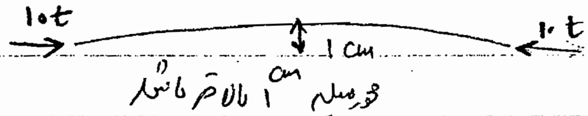
معمولا ستون ها زیر خمش مرکب اند

در حالت کلی اعضای سازه زیر خمش مرکب اند

خمش دوجانبه ، خمش مورب ، خمش مایل ، خمش اریب.

مثال





حل _ σ_1 فقط با اثر از نیروی محوری $= -\frac{10000}{25} = -400 \ \frac{kg}{cm^2}$

اما 1^{cm} تغییر مکان محور در وسط میله باعث می‌شود که نیروی محوری از وسط نگذرد

$$M = 10^{t} \times 1^{cm} = 10\,t\,cm$$

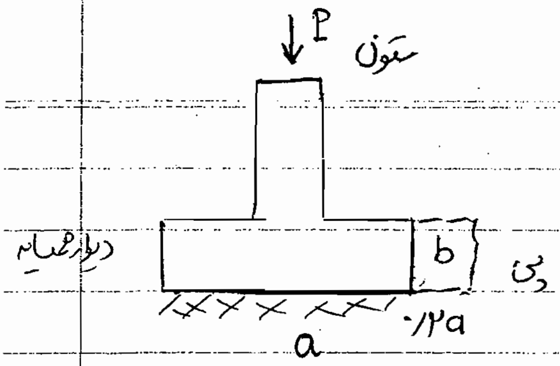
$$\sigma_{max} = -\left|\frac{M}{W}\right| + \frac{N}{A}$$

از نظر فشاری چون فشار بیشترین تنش را ایجاد می‌کند.

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{5\times 5^2}{6} = 20{,}83$$

$$\Rightarrow \sigma_{max_{\text{فشار}}} = -\frac{10000}{20{,}83} - 400 = -880{,}1 \ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{max_{\text{کشش}}} = 480{,}1 - 400 = 80{,}1 \ \frac{kg}{cm^2}$$



حالت اول $\frac{P}{ab}$

حالت دوم $\begin{cases} M = P(0.1a) = 0.1Pa \\ N = P \end{cases}$

محور با اندازه $0.1a$ جابجا شده است

$$\sigma = \frac{P}{(1.2a)b} + \frac{(0.1)Pa}{\frac{b(1.2a)^2}{6}}$$

$$= \frac{P}{1.2ab} + \frac{P}{2.4ab} = \frac{3P}{2.4ab}$$

$$= \frac{P}{0.8ab}$$

تنش اعمال شده به خاک اگر بیشتر از تنش خاک باشد می‌خواهیم طول خاک را زیادتر کنیم

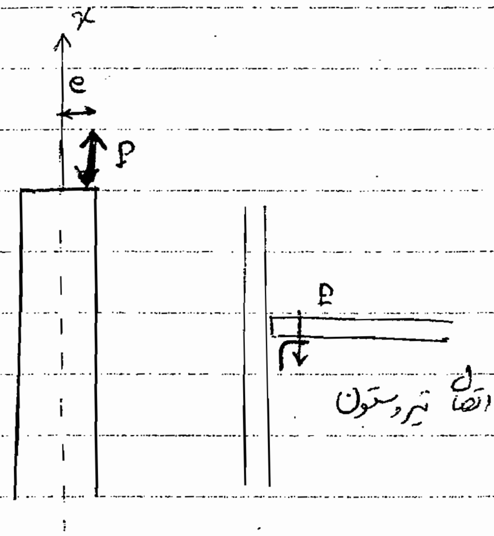
پی نباید با متقارن مقطع را زیاد کرد

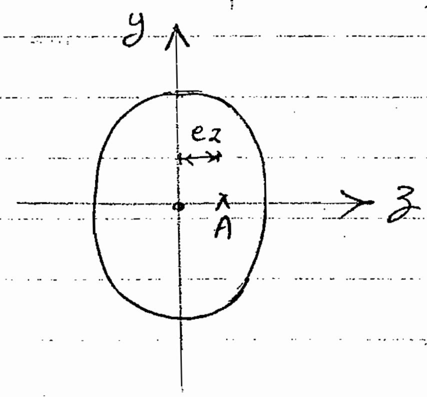
پی را اگر بزرگ کنیم به این معنا نیست که تنش را کم کردیم بلکه وضع را بدتر کردیم

خمش مرکب :

وقتی بار خارج از محور باشد :

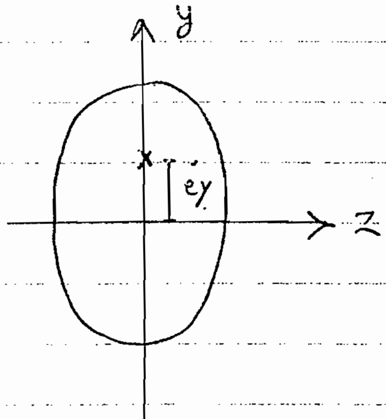
نیرو باعث ایجاد خمش مرکب می شود

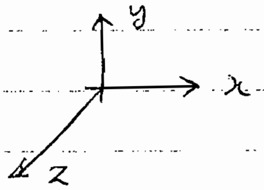




$$\begin{cases} N = P \\ M_y = P\,e_z \end{cases}$$

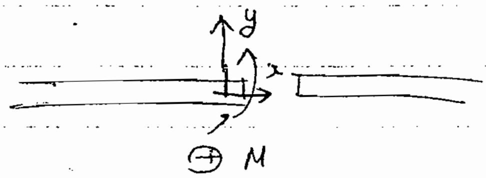
$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P e_z . Z}{I_y}$$ P کششی





$M_Z = -P e_y$

گشتاور خمشی ⊕ x را روی y می برد ؟



$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{(-Pe_y)(y)}{I_z} = \frac{P}{A} + \frac{(Pe_y)y}{I_z}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{(Pe_z)(Z)}{I_y}$$

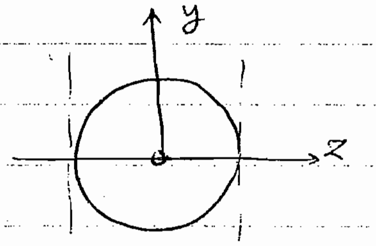
تار خنثی $\quad \frac{P}{A} + \frac{(Pe_z)Z}{\underbrace{I_y}_{(Ar_y^2)}} = 0 \Rightarrow \frac{P}{A}\left(1 + \frac{e_z Z}{r_y^2}\right) = 0$

$$Z = -\frac{r_y^2}{e_z}$$

* اگر e_z مثبت باشد تار خنثی در طرف مقابل قرار می‌گیرد

تار خنثی همیشه یک طرف آن کششی است یک طرف آن فشاری

اگر یک تکه فشاری ستون در دست داشتیم و فرض کنیم که اصلاً کشش تحمل نمی‌کند باید بار در جایی قرار بگیرد که تار خنثی مقطع را قطع نکند.



اگر بار در مرکز وارد شود تار خنثی در ∞ قرار می‌گیرد چون $e_z=0$ است

هرچه از مرکز دور شویم $|Z|$ کمتر می‌شود
تا جایی که مماس بر لبه مقطع شود از این بیشتر نباید بار را بیرون ببریم چون در این صورت تار خنثی مقطع را قطع می‌کند و مقطع ترک می‌خورد.

برای مختصات y تار خنثی داریم:

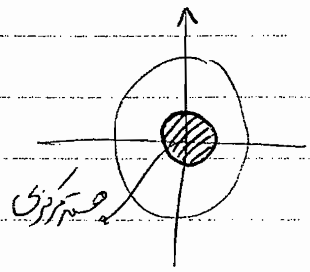
$$y = -\frac{r_z^2}{e_y}$$

POOMAR

در مورد ۲ هم شکل z جهت و کسیم می بار را طوری تغییر می دهیم که تار خنثی مماس بر مقطع شود .

اگر نسبت به هر دو محور خروج از مرکز داشته باشیم :

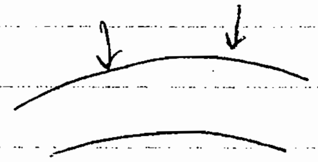
$$* \qquad \sigma = \frac{P}{A} + \frac{(Pe_z)Z}{I_y} + \frac{(Pe_y)Y}{I_z}$$



تار خنثی
$$\frac{P}{A}\left(1 + \frac{e_z Z}{r_y^2} + \frac{e_y Y}{r_z^2}\right) = 0$$

در این حالت تار خنثی یک خط است که امتداد آن را می توان تغییر داد بنابراین بار وارد نقطه اثر آن باید روی دایره کوچک یا روی محیط آن باشد و از آن بیرون نرود این سطح را هسته مرکزی مقطع kern of section می گویند

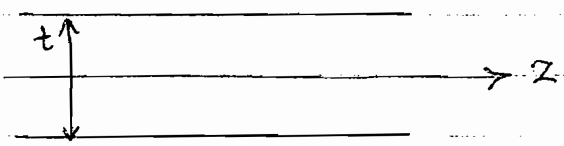
قسمتی از مقطع که نقطه اثر بار اگر در آن قسمت باشد تار خنثی مقطع را قطع نمی کند و روی محیط آن تار خنثی مماس می شود . بار باید فشاری باشد تا تنش فشاری ایجاد کند :



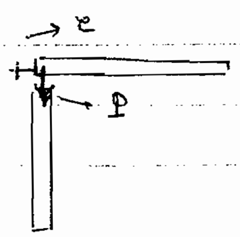
مثلاً در یک قوس ، همه مقاطع فشرده می شوند

بار باید طوری باشد که نقطه اثر نیرو از هسته مرکزی نگذرد

حالت اول :

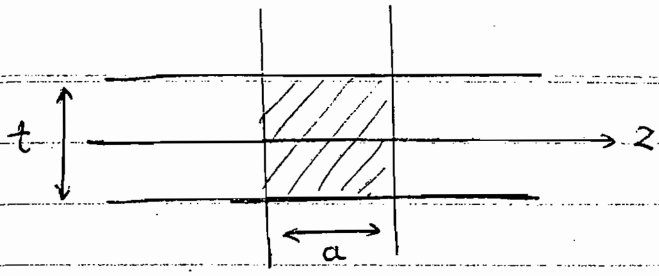


طول نه دارد
بار روی آن قرار دارد



مثلاً دیوار آجری
در نظر بگیرید که تیر آهن هایی روی
آن قرار گرفته است . ... روی ستون ... یک مقدار عکس العمل ایجاد می کند

$$\frac{p}{n} = \frac{2h}{c}$$



$$y = -\frac{r_z^2}{e_y}$$

تار خنثی موازی محور Z است

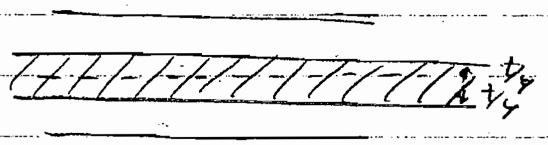
می‌خواهیم مماس بر دیوار شود

می‌خواهیم y برابر $\pm \frac{t}{2}$ شود

$$\begin{cases} r_z^2 = \dfrac{I_z}{A} = \dfrac{at^3/12}{at} = \dfrac{t^2}{12} \\ y = \pm \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

$$\pm t/2 = -\frac{t^2/12}{e_y} \Rightarrow e_y = \mp (t/6)$$

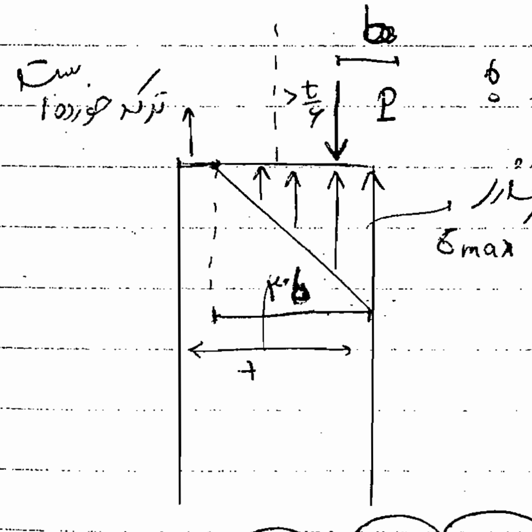
نیرو حداکثر تا $\frac{t}{6}$ می‌توانیم از محور دیوار فاصله بگیریم!



هسته مرکزی یک دیواری شود ۱/۳ وسط آن؟

نیرو باید آن قدر نیرو را حرکت داد تا در آید در یک ۱/۳ قرار بگیرد. نیرو را تا آنجا روی دیوار قرار می‌دهند (با لحاظ اقتصادی!)

اگر بار خارج از هسته مرکزی بود آیا دیوار خراب نمی‌شود؟



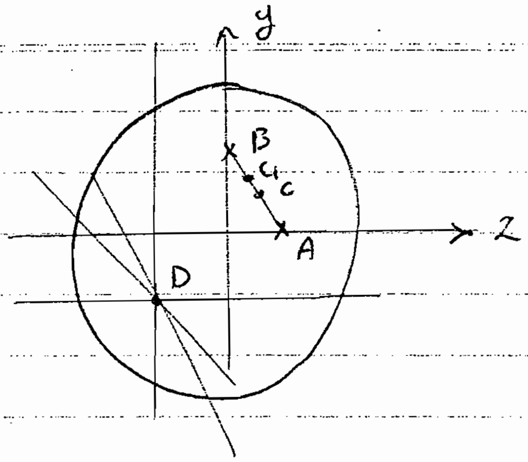
* یک طرف دیوار تحت کشش قرار می‌گیرد و ترک می‌خورد

« وزن را صرف‌نظر کردیم »

چون بار P باید مثلث را ارضا کند بار باید در ۱/۳ مثلث اعمال شود. پس طول مثلث 3a می‌شود.

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{a \cdot 3b} < \sigma_{cw}$$

مقدار max ۲ برابر متوسط است



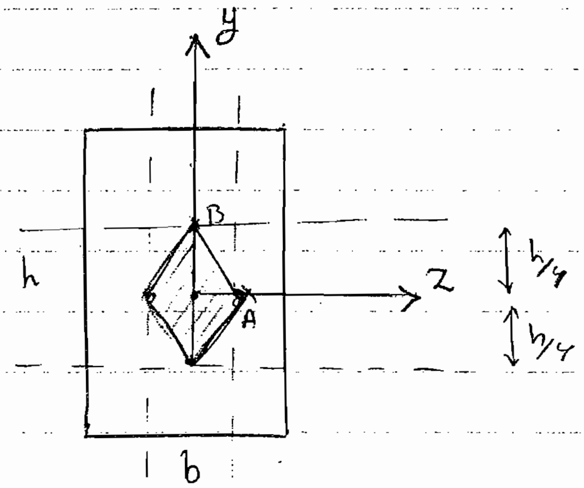
اگر بار در نقطه B باشد تار خنثی موازی z است
، در نقطه A موازی y است

اگر بار در نقطه C باشد حاصل تقسیم بر دو بار
در A و B است

در نقطه D اگر بار P را در C بگذاریم تنش صفر خواهد بود

اگر بار در C_1 هم بگذاریم باز هم D تنش صفر دارد و D یک نقطه از هسته مرکزی است و تار خنثی

همیشه از D می گذرد اما با زوایای مختلف



روی خط می توان حرکت کرد

اگر بار را در نقطه A بگذاریم شکل
حساسیت مربوط به دیوار حداکثر تغییر مکان
A در $\pm b/6$ خواهد بود.

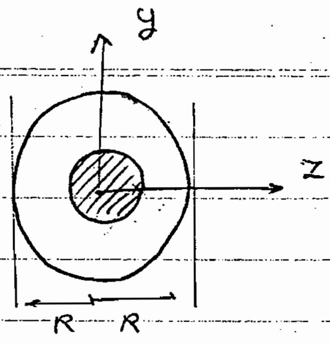
$$B\left\{\begin{array}{l} r_z^2 = \dfrac{h^2}{12} \\ y = -\dfrac{r_z^2}{e_y} \end{array}\right. \Rightarrow \pm h/2 = -\dfrac{h^2/12}{e_z} \Rightarrow \boxed{e_z = \mp h/6}$$

$$A : \left\{ e_z = \mp b/6 \right.$$

* یک لوزی درست می آید به قطرهای $h/3$ و $b/3$ *

روی اضلاع
لوزی حرکت کنیم تار خنثی حول رئوس می شود

هسته مرکزی دایره 8

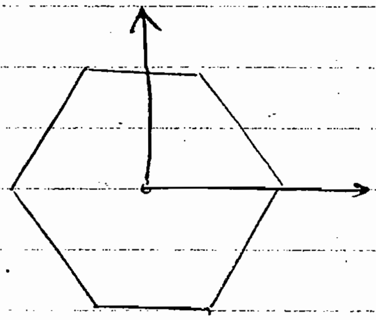


$$r_y^2 = \frac{R^2}{4}$$

$$z = -\frac{r_y^2}{e_z}$$

$$\pm R = -\frac{R^2/4}{e_z}$$

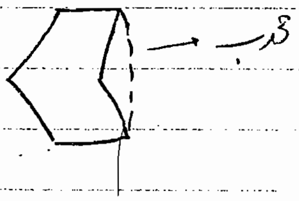
$$e_z = \mp R/4$$

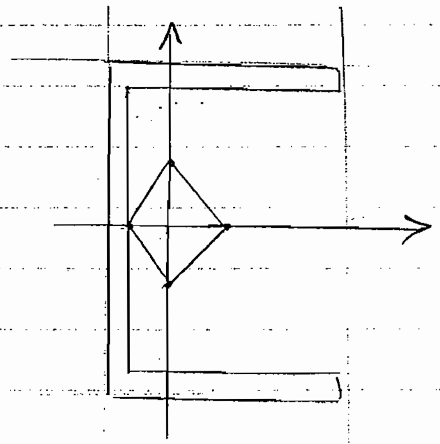


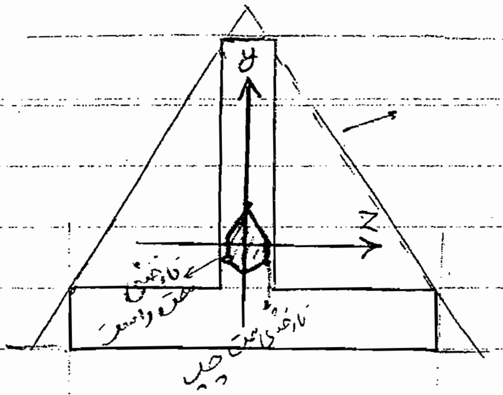
برای بدست آوردن تارخنثی باید ۶ بار تارخنثی را مماس فرض کنیم و یکسری نقاط بدست آوریم

اما اگر سطح مقعر باشد تار خنثی را مماس بر ضلع بدیم

در این صورت سطح را قطع می‌کند و باید طوری مماس کنیم که به سطح محدب رو جانشین آن کنیم







باید یک سطح محدب بگیریم مثل ۶ ضلع هسته ما خواهد شد ، باید طوری انتخاب شوند که در شکل ما محیط باشند

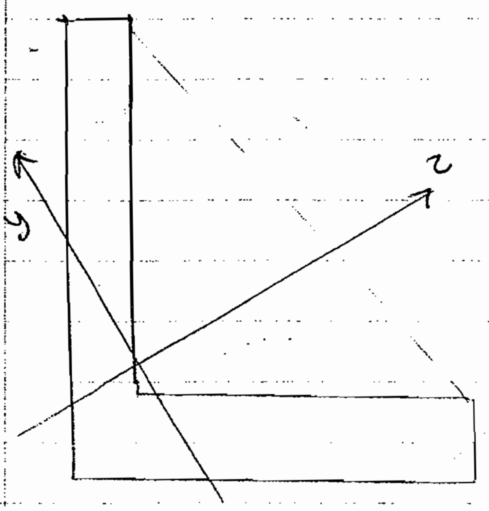
معادله خط مورب را هم با دانستن ابعاد مقطع می توان نوشت

$$* \begin{cases} 1 + \dfrac{e_y y}{r_z^2} + \dfrac{e_z z}{r_y^2} = 0 \\ ay + bz + c = 0 \end{cases} \quad *$$

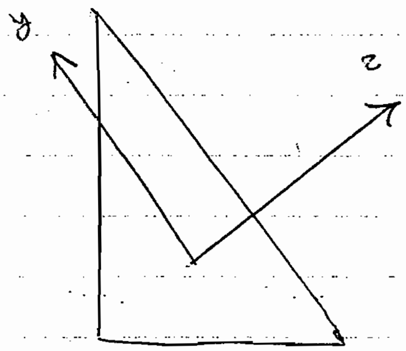
* وقتی هر دو لنگر باشند

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\frac{e_y}{r_z^2}}{a} = \dfrac{\frac{e_z}{r_y^2}}{b} = \dfrac{1}{c}}$$

همیشه باید سطح را محدب بگیرید و از طرفی هسته مرکزی که بدست می آورید محدب است .

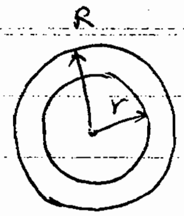


۶ ضلع



در این شکل اول محورهای اصلی باید محاسبه شوند

مثال:



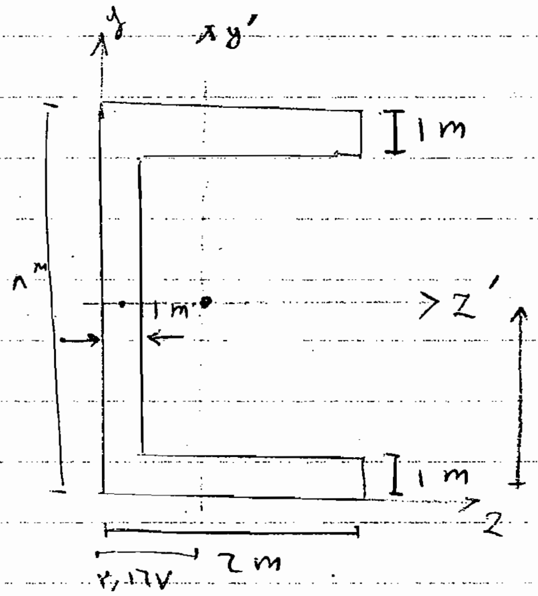
$$I=\frac{\pi}{4}(R^4-r^4)$$

$$r^2=\frac{\frac{\pi}{4}(R^4-r^4)}{\pi(R^2-r^2)}=\frac{1}{4}(R^2+r^2)$$

$$e=?\Rightarrow \pm R=\frac{\frac{1}{4}(R^2+r^2)}{e_y}$$

$$e_z=e_y\Rightarrow e_y=\pm\frac{R^2+r^2}{4R}$$

مثال:



$$\bar{y}=4\ cm$$

$$\bar{z}=\frac{(1\times6)(3)(2)+(1\times6)(\frac{1}{2})}{2(1\times6)+(1\times6)}=2,167\ cm$$

$$I_{z'}=2(1\times6)(3,5)^2+2(\tfrac{1}{12})(6)(1^3)+\frac{1}{12}(1)(6^3)=166\ cm^4$$

$$I_{y'}=2(\tfrac{1}{12})(1)(6^3)+(2)(1\times6)(0,833)^2+(\tfrac{1}{12})(6)(1^3)+(6\times1)(1,667)^2$$

$$\Rightarrow I_{y'}=61,5\ cm^4$$

$$r_z^2=\frac{I_{z'}}{A}=\frac{166}{18}=9,22\ cm^2$$

$$r_y^2=\frac{I_{y'}}{A}=\frac{61,5}{18}=3,42\ cm^2$$

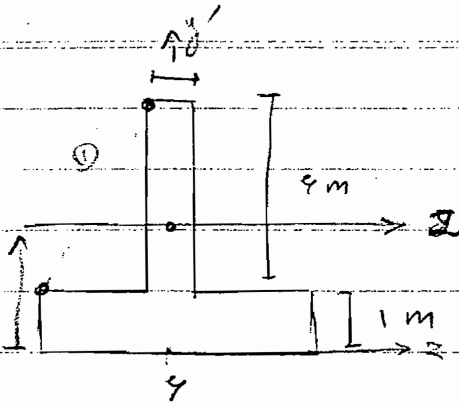
$$z=-2,167\Rightarrow -2,167=-\frac{3,42}{e_z}\Rightarrow e_z=1,58$$

$$z=4,833\Rightarrow 4,833=-\frac{3,42}{e_z}\Rightarrow e_z=0,709$$

$$y=4\Rightarrow 4=-\frac{9,22}{e_y}\Rightarrow e_y=-2,305$$

$$y=-4\Rightarrow -4=-\frac{9,22}{e_y}\Rightarrow e_y=2,305$$

۲۵/



$$\bar{y} = \frac{(6)(1)(4)+(6\times1)(\tfrac{1}{2})}{12} = 2,25$$

$$I_{z'} = (\tfrac{1}{12})(6)(1)+(6)(1,75)^2 + (\tfrac{1}{12})(1)(6^3)+(6)(1,75)^2 = 55,25\ cm^4$$

$$A = (1\times6)+(6\times1) = 12$$

$$I_{y'} = (\tfrac{1}{12})(6)(1)+(\tfrac{1}{12})(1)(6^3) = 18,5\ cm^4$$

$$\begin{cases} r_z^2 = \dfrac{55,25}{12} = 4,6 \\ r_y^2 = \dfrac{18,5}{12} = 1,54 \end{cases}$$

① خط ⇒ $\begin{array}{c|c|c} z & -\tfrac{1}{2} & -3 \\ y & 4,75 & -1,25 \end{array}$ ⇒ $y' = 2,4z' + 0,95$ ، $y' - 2,4z' - 0,95 = 0$

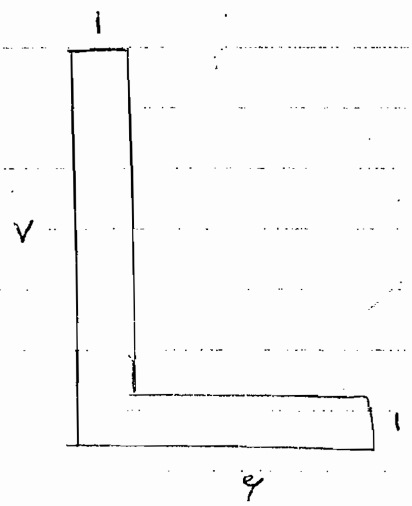
$$1 + \frac{e_y(y')}{4,6} + \frac{(e_z)(z')}{1,54} = 0$$

$$-0,95 + y' - 2,4z' = 0$$

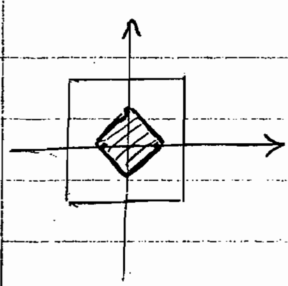
$$\Rightarrow \frac{1}{-0,95} = \frac{e_y}{4,6} = \frac{e_z}{1,54(-2,4)}$$

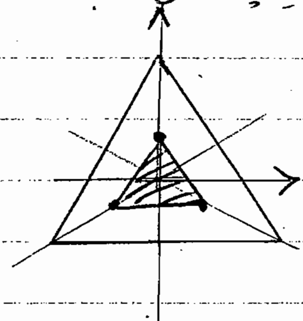
$$\Rightarrow e_y = -0/77$$

$$* \quad e_z = 0/62$$



هسته مرکزی یک چند ضلعی محدب همواره یک چند ضلعی محدب است؟

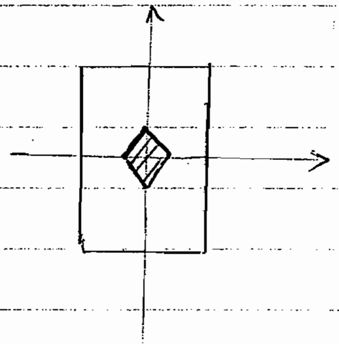




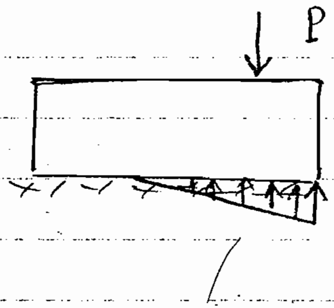
متساوی الاضلاع

* ۵ ضلعی منتظم هسته مرکزی آن یک ۵ ضلعی منتظم می شود که اضلاع آن موازی اضلاع شکل اولند

* ۶ « « اضلاع هسته مرکزی آن °۴۵ می چرخند.



بار روی هسته مرکزی نباشد
ممکن کششی ترک می خورد یا
ممکن فشاری ممکن است تنش
آن از مقدار مجاز کمتر باشد
در این موارد از آزمون و خطا استفاده می کنیم
در پی ها یا در دیوارها بیشتر این اتفاق می افتد.

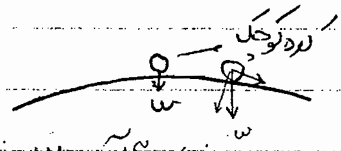


برای پی می توان راحت ترسیم کرد
مثل دیوار

۸۴/۸/۷ — به نام خدا — ج ۷

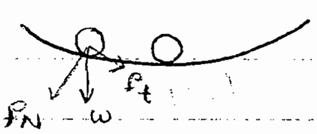
پایداری تعادل - کمانش 8 — buckling - stability

بالای یک سطح کروی یک کره کوچک قرار دادیم تعادل دارد اما پایدار نیست چون یک نیروی افقی می‌تواند آن را حرکت دهد

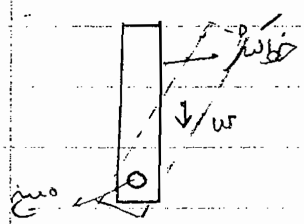


سطح کروی

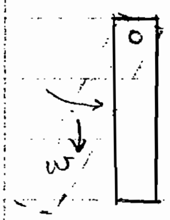
نیروی مماسی آن را از وضع تعادل دور می‌کند



اینجا تعادل پایدار است چون نیروی مماسی ناشی از وزن آن را به حالت اولیه برمی‌گرداند

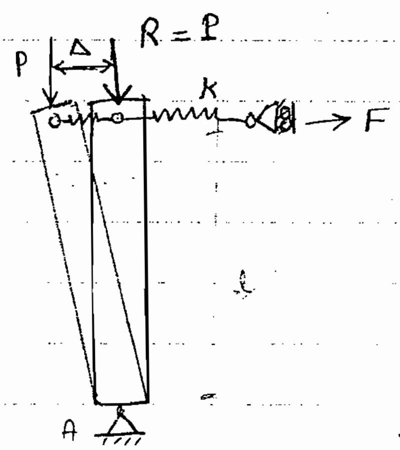


نیروی وزن یک گشتاوری ایجاد می‌کند حول میخ که باعث می‌شود از وضعیت تعادل دور شود



نیروی وزن جسم را به حالت اولیه میل می‌دهد. پس تعادل پایدار است.

مثال 8



باید آن را اندکی از وضع تعادل دور کنیم سپس آن را رها کنیم.

فنر یک افزایش طولی خواهد داشت پس یک F داریم

$$\Sigma M_A = P\Delta - Fl$$

$$= P\Delta - (K\Delta)l$$

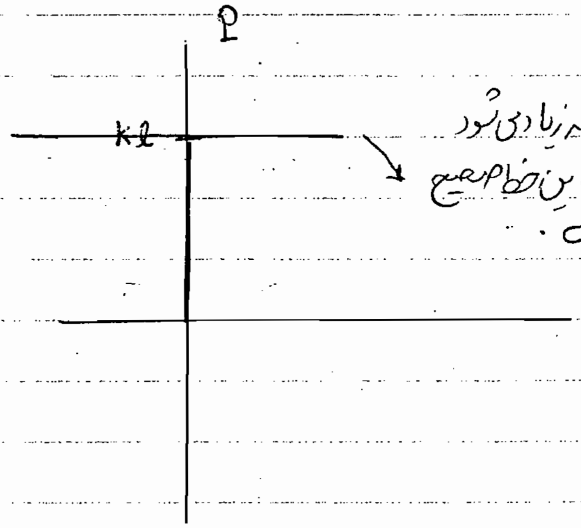
اگر لنگر مثبت باشد باعث می شود که از وضعیت اولیه دور شود اما اگر لنگر منفی باشد به حالت اولیه

میل می کند و تعادل پایدار است :

$*\quad P > Kl$ تعادل ناپایدار

$*\quad P < Kl$ $\Delta = 0$ می شود تعادل پایدار می گردد دوباره به حالت اولیه بر می گردد

$*\quad P = Kl$ تعادل خنثی است یعنی در همین شکل باقی می ماند

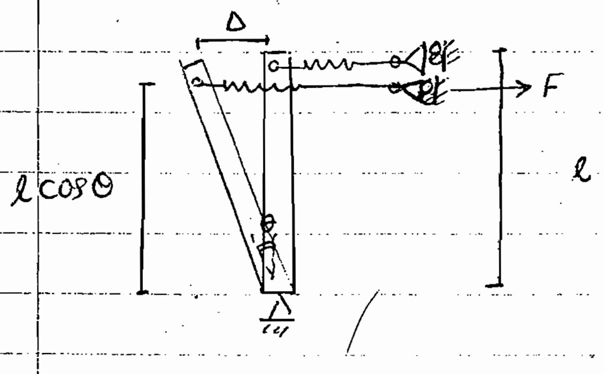


Δ که زیاد می شود دیگر این خط صحیح نیست .

$P = Kl$ با هر Δ ای می توان تعادل داشت

فرض کردیم که δ یا Δ کوچک باشد .

اگر تغییر مکان Δ کوچک نباشد :



$*\quad \Sigma M_A = P\Delta - (K\Delta)\, l\cos\theta$

$;\quad \sin\theta = \frac{\Delta}{l}$

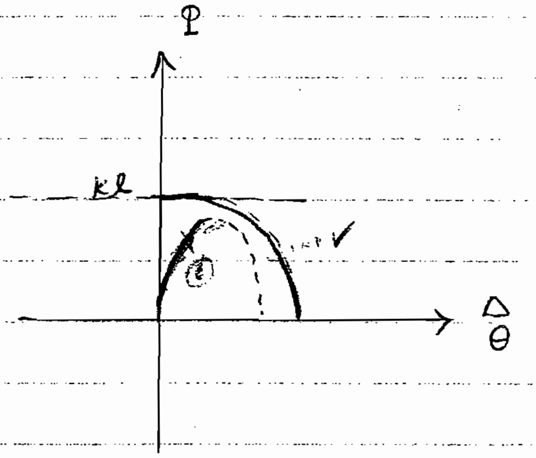
$P = Kl\cos\theta$ تعادل خنثی

$P > Kl\cos\theta$ ناپایدار

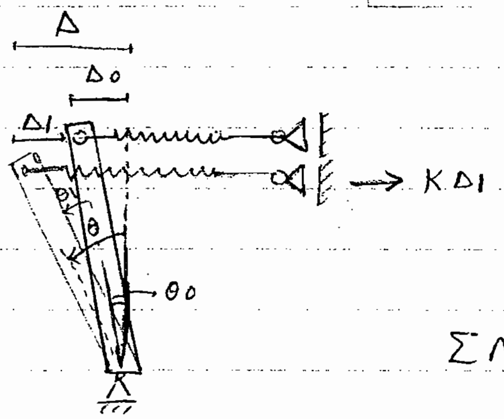
POOMAR

$P < K\ell\cos\theta$ پایدار

در اینجا تعادل به مقدار θ هم بستگی دارد



P در اینجا از kL کوچکتر است.

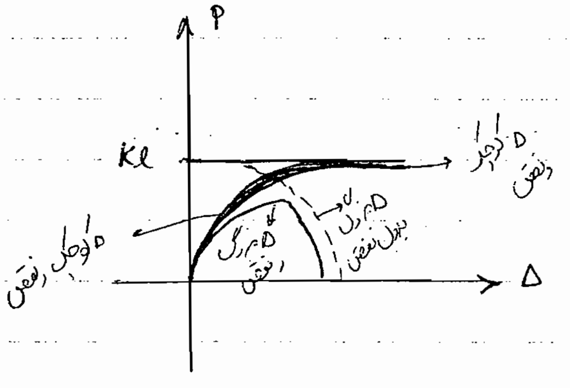


* ممکن است میله از اول با یک نقص ساخته شده باشد

ΣM_A

$$\Sigma M_A = P(\Delta_1+\Delta_0) - (K\Delta_1)\ell = 0$$

* $P = K\ell\left(\dfrac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_0}\right)$ در حد اول از δ کوچک می‌باشد



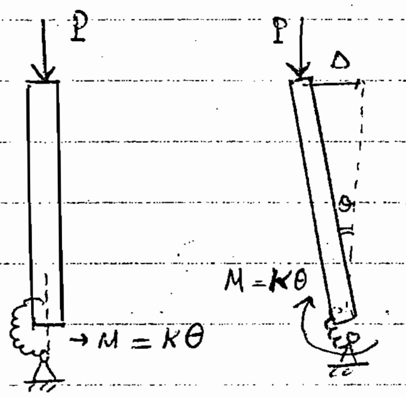
Δ بزرگ باشد

$$\Sigma M_A = P(\Delta_1+\Delta_0) - K\Delta_1\, \ell \cos\overline{\theta}^{\,\theta_0+\theta_1} = 0$$

کاملترین حالت

$$* \quad P = K\ell\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_0}\right)\cos\theta$$

P همیشه از خط چین کوچکتر است و همیشه زیر منحنی ما بندار قرار می‌گیرند



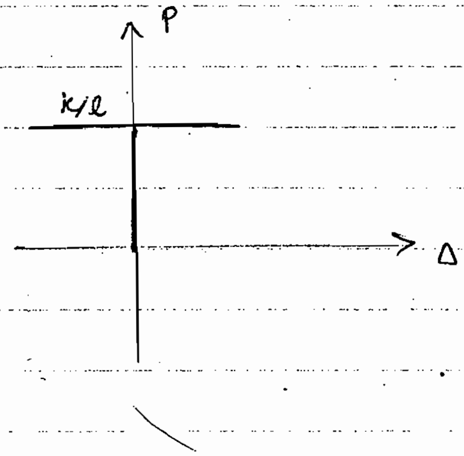
تغییر شکل کوچک :

$$\Sigma M_A = P\Delta - \underbrace{M}_{K\theta} = 0$$

$$; \quad \theta = \frac{\Delta}{\ell}$$

$$\Sigma M_A = P\Delta - K\frac{\Delta}{\ell} = 0$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{K}{\ell}$$

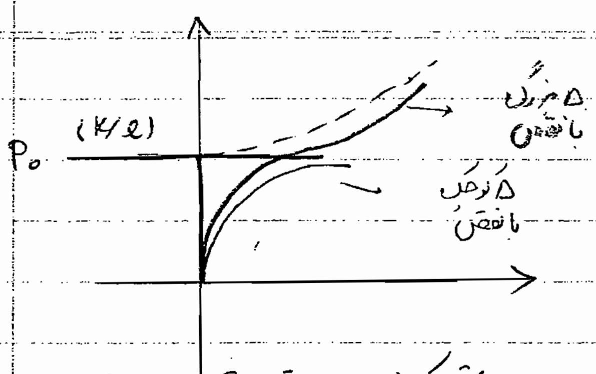


درجه دوم :

$$\Sigma M_A = P\Delta - K\theta = 0$$

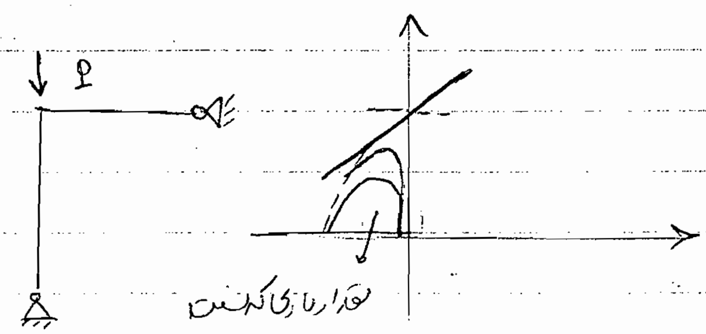
$$= P\Delta - K \operatorname{ArcSin}\frac{\Delta}{L} = 0$$

$$* \quad P = \frac{K}{\ell}\cdot \operatorname{ArcSin}\frac{\Delta}{\ell}\cdot\frac{\ell}{\Delta} = \frac{K}{\ell}\cdot\frac{\operatorname{ArcSin}\Delta/\ell}{\frac{\Delta}{\ell}}$$



خودتوان از P_{in} آن فراتر است

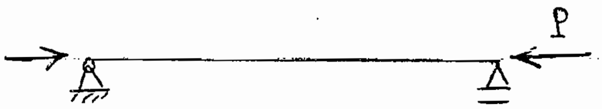
در اینجا سازه زیاد خطرناک نیست
چون می‌تواند بدون نقص بیشتر از P_0
را هم تحمل کند. اگر نقص هم داشته باشد می‌تواند بیشتر از P_0 را هم تحمل کند اما سازه‌ای که مقدار P از P_0
کمتر بود پس خطرناک بود.



به P_0 تحمل می‌کند خیلی کمتر است
و خطرناکتر است.

خیلی از سازه‌هایی که ناگهان خراب می‌شوند ممکن است بررسی‌های لازم صورت نگرفته باشد

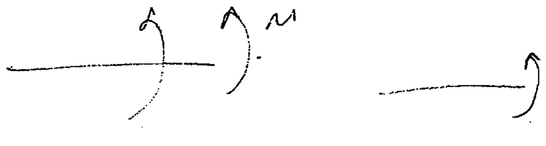
وقتی معادلات تغییر شکل کوچک را می‌نویسیم به مقدار P_0 به درستی می‌رسیم ولی به خط افقی نمی‌توان اعتماد کرد



* میله فشاری 8 کاملاً ایده آل

نقص‌های ممکن میله فشاری 8

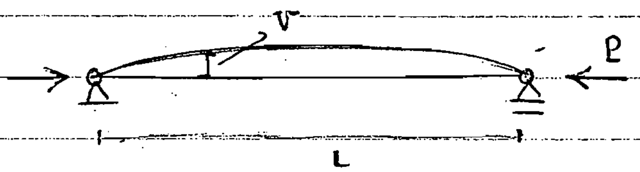
- بار P از محور میله نگذرد «محوری نباشد»
- ستون کاملاً مستقیم نباشد
- اثر تنش‌های پسماند یعنی بدون این که به میله نیرو وارد کنیم تنش داشته باشیم



ایده آل نیز نقص نداریم و تغییر شکلها کوچکند ؛

$* \quad EIv'' = M$ تغییر شکل کوچک

$* \quad \frac{EI}{\rho} = M$ تغییر شکل بزرگ



میله‌های قبلی صلب بودند
ولی اینجا این طور نیست

تغییر شکلی برای آن درنظر گرفتم

$* \quad M = -Pv$

$* \quad EIv'' = -Pv$

$* \quad EIv'' + Pv = 0$

$* \quad v'' + \mu^2 v = 0$

$$\mu^2 = \frac{P}{EI}$$

$* \quad v = c_1 \sin\mu x + c_2 \cos\mu x$

$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad c_2 = 0$

$\begin{cases} x = l \\ v = 0 \end{cases} \quad c_1 \sin\mu l = 0 \Rightarrow \sin\mu l \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad if$

* اگر $c_1 = 0$ باشد یعنی $v = 0$ است یعنی دیگر نیروهای داخلی آن را به وضع مستقیم برمی‌گردانند

$if, \quad \sin\mu l = 0 \Rightarrow c_1 =$ مجهول

* یعنی c_1 مجهول است پس v هر مقداری می‌تواند بگیرد و وضع خمیده را خواهیم داشت ؛

$\sin \mu l \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow P = 0$ جواب غیر قابل قبول است

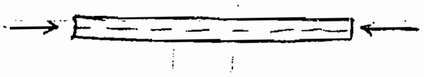
چون بار صفر میله را خم نمی کند

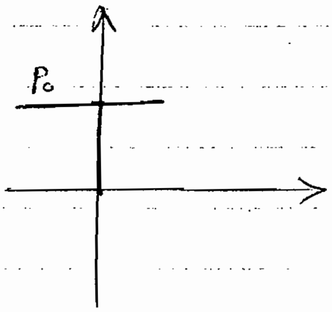
$\sin \mu L = 0 \Rightarrow \mu L = \pi \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = \pi$

$$\Rightarrow P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

اگر بار این مقدار باشد میله کمانه می کند و از وضع مستقیم خارج می شود

* اگر بار را ایده آل طوری بگذاریم و میله کاملاً مستقیم باشد بازای مقدار بالا میله کمانه می کند .





در P_0 کمانش اتفاق می افتد اما چنین اتفاق افتاد چه خواهد شد

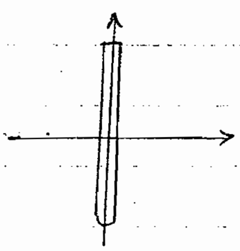
با معادلات تغییر شکل کوچک نمی توان انجام داد چون خطوط تغییر شکلهای بزرگ مهم می شود .

این محاسبات را اولین بار اویلر در سال ۱۷۸۳ انجام داد و این بار را بار اویلر می نامند ؟

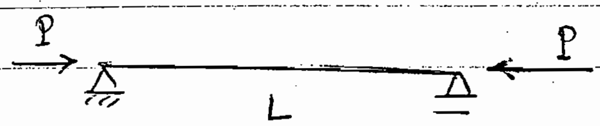
هرچه I کمتر باشد این اتفاق زودتر می افتد یعنی هرچه ستون نازکتر باشد این اتفاق زودتر می افتد

مثلاً یک خط کش نازک خیلی زود کمانه می کند نسبت به خط کش ضخیم

مقطع مستطیل



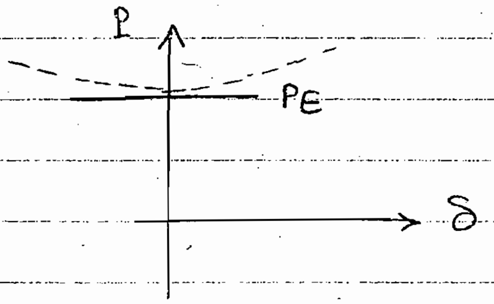
I را نسبت به محور y
باید قرار داد که کمتر است



$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$EIv'' = M$$

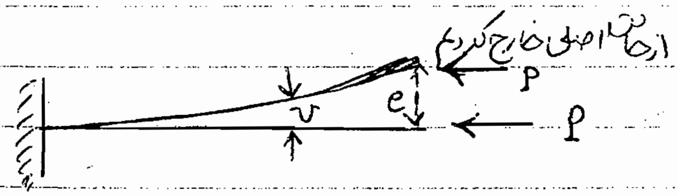
$$\frac{EI}{\rho} = M$$



اگر بار را در حالت
تغییر شکل کوچک
اعمال کنیم
از معادله اول
استفاده می کنیم
اگر تغییر شکل بزرگ را در نظر بگیریم
معادله دوم قابل استفاده خواهد بود

که در این صورت P_E به تدریج زیاد خواهد شد اما مقدار زیاد کردن نیرو ناچیز است

در معادلات معمولی سازه های پذیریم که P_E بزرگترین مقداری است که می تواند تحمل کند



$$M = P(e-v)$$

$$EIv'' = P(e-v) \Rightarrow EIv'' + Pv = Pe$$

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

* $v = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x$

$v = e$ جواب خصوصی

$$v = c_1 \sin\mu x + c_2 \cos\mu x + e$$

$$\begin{cases} x=0 \\ v=0 \end{cases} \Rightarrow 0 = c_1(0) + c_2 + e \Rightarrow c_2 = -e$$

$$\begin{cases} x=0 \\ v'=0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \mu c_1 - \mu c_2(0) \Rightarrow c_1 = 0$$

$$* \quad v' = \mu c_1 \cos\mu x - \mu c_2 \sin\mu x$$

* مقدار e باید در معادله خود تیر صدق کند :

$$\begin{cases} x = L \\ v = e \end{cases} \quad * \quad e = -e\cos\mu L + e$$

$$\Rightarrow -e\cos\mu L = 0$$

① $\cos\mu L \neq 0 \Rightarrow e = 0$ در این صورت تمام ضرایب صفر می شوند

و v صفر خواهد شد و تغییر شکل به صفر می خواهد گشت

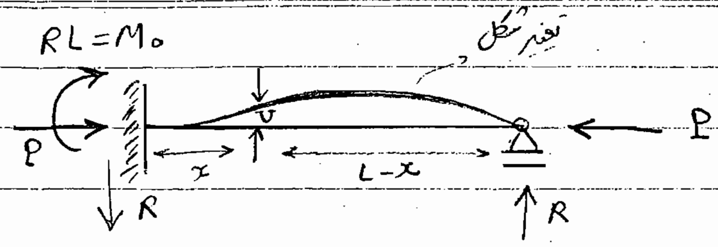
② $\cos\mu L = 0$

$e = ?$ هر مقداری می تواند بگیرد

$$\Rightarrow \mu L = \pi/2$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\, L = \pi/2 \Rightarrow P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$ بار اویلر

مقدار بار اویلر در این حالت $\frac{1}{4}$ تیر قبلی بود .



$* \quad M_0 = RL$

در اینجا مسئله هیپراستاتیک است
زیرا عکس العمل‌ها معلوم نیستند از طرفی
R و M_0 هست اما مقدار آنها معلوم نیست

«سمت چپ»

چون جهت v زدیم: $EIv'' = M_0 - Pv - Rx$

$$\quad = -Pv + R(L-x)$$

از سمت چپ و راست فرقی ندارد.

$$EIv'' = M_0 - Pv - Rx$$

$$EIv'' + Pv = M_0 - Rx$$

$$EIv'' + Pv = RL - Rx$$

$$\begin{cases} v = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x \\ v = \dfrac{RL}{P} - \dfrac{Rx}{P} \end{cases}$$ جواب خصوصی

$$v = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x + \frac{RL}{P} - \frac{Rx}{P}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = C_2 + \frac{RL}{P} \Rightarrow C_2 = -\frac{RL}{P} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v' = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = C_1 \mu - \frac{R}{P} \Rightarrow C_1 = \frac{R}{P\mu} \qquad (2)$$

$$* \quad v' = C_1 \mu \cos \mu x - C_2 \mu \sin \mu x - \frac{R}{P}$$

$$\begin{cases} x = L \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = C_1 \sin \mu L + C_2 \cos \mu L + \frac{RL}{P} - \frac{RL}{P} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R}{\mu P} \sin \mu L - \frac{RL}{P} \cos \mu L = 0$$

$$\frac{R}{P}\left(\frac{\sin \mu L}{\mu} - L\cos \mu L\right) = 0$$

$$* \quad \tan \mu L = \mu L$$

$\mu = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ چون $\mu L = 0 \Rightarrow P = 0$ * تجربه نشان می‌دهد که $P=0$ کمانش اتفاق نمی‌افتد.

$$\mu L \cong 4{,}49 \text{ rad}$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\, L = 4{,}49$$

$$P_E \simeq \frac{\pi^2 EI}{(0{,}7L)^2}$$

$$\begin{cases} ① & ------ = 0 \\ ② & ----- = 0 \\ ③ & ------- = 0 \end{cases}$$

* درصورتی جواب غیرصفر داریم که دترمینان ضرایب صفر باشد

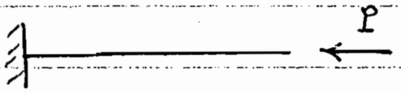
اگر درجایی نتوانستیم معادلات را ساده کنیم باید به صورت دستگاه معادلات بنویسیم 8

دترمینان

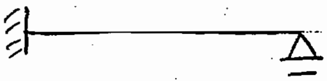
$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & R \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{L}{P} \\ \mu & 0 & -\frac{1}{P} \\ \sin \mu L & \cos \mu L & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\mu L}{P}\cos \mu L - \frac{1}{P}\sin \mu L = 0$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$ $K = 1$, $l_e = L$



$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$ $k = 2$, $l_e = 2L$



$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(0/7L)^2}$$ $k = 0/7$, $l_e = 0/7l$

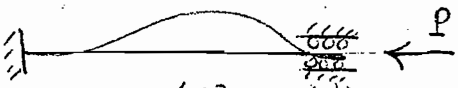
بار بحرانی $$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2}$$

$l_e = kl \longrightarrow$ طول مؤثر در کمانش

$k \longrightarrow$ ضریب کمانش

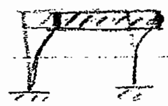
یعنی تیر اولی مثل یک پایه است بقیه از روی آن بدست می آید

باید امکان تغییر طول وجود داشته باشد تا کمانش بدهد

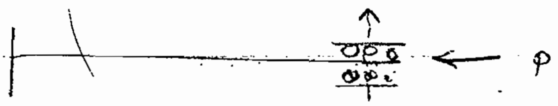


می تواند تغییر مکان افقی داشته ولی ناچیز است.

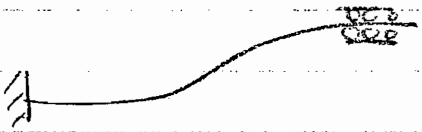
$K = 0/5$



نصف یک منحنی کامل است $\Rightarrow K = 1/2$

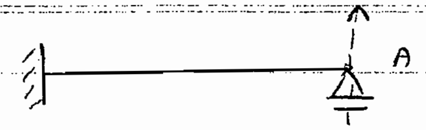


حرکت قائم رو به بالا

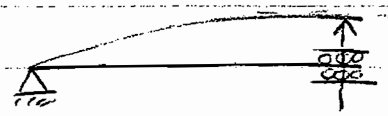


$K = 1$

POOMAR

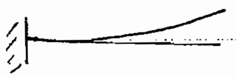


$K = ۲$ مثل یک سر آزاد است حتی در جهت قائم می‌تواند حرکت کند دیگر عکس العمل قائم را نمی‌گذاریم.



$K = ۲$ مثل بالایی است.

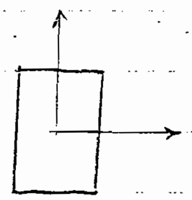
K برابر است با تعداد نیم منحنی sin یا cos که در تغییر شکل ایجاد وجود دارد



تنش بحرانی $\sigma_c = \frac{P_c}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(kl)^2 A} = \frac{\pi^2 E r^2}{(kl)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{kL}{r})^2}$

$* \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

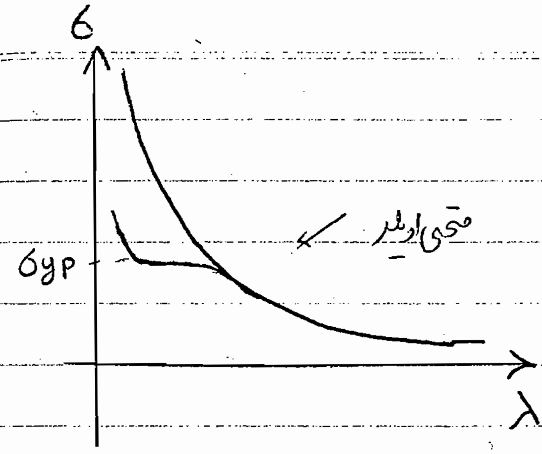
$\Rightarrow \sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ $\quad \lambda = \frac{kL}{r}$ ضریب لاغری



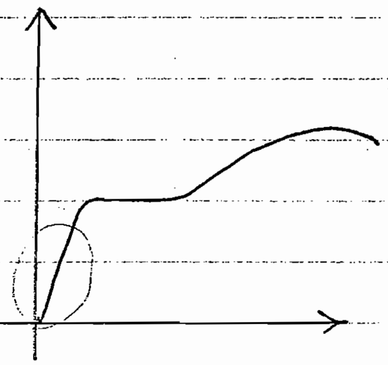
شکل مقطع اگر یک ستون از اطراف ممکن است K مختلفی داشته باشد یعنی نسبت به دو محور در مقطع دو K و r مختلف داریم.

هر طرف که $\frac{KL}{r}$ بیشتر بود آن طرف بحرانی‌تر است یعنی σ_c کمتر خواهد بود.

λ صفر شود σ بی نهایت می شود .



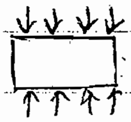
در مقادیر بزرگ λ ، σ خیلی کوچک خواهد بود



در منحنی $\varepsilon - \sigma$ در قسمت خطی
اگر باشیم σ را بی نهایت نمی تواند برود
یک مقدار حداکثری داریم ،

وقتی وارد قسمت تسلیم شد در برابر کمانش
نمی تواند مقاومت بکند

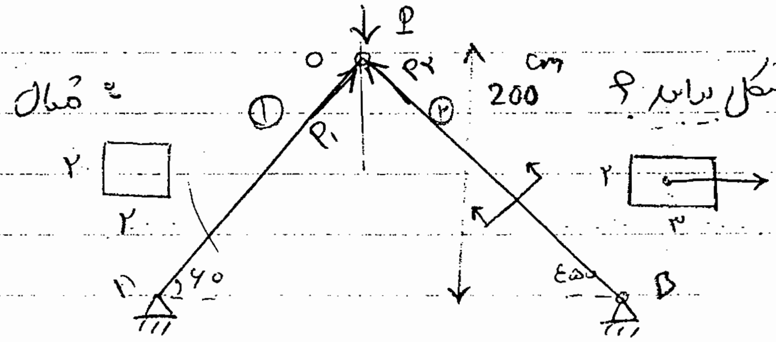
λ که کوچک شود تنش در مقادیر تنش تسلیم محاسبه می شود



طول باید خیلی کوتاه باشد تا بتوانیم از تنش تسلیم رد شویم

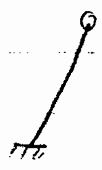
مثال :

بار بحرانی سازه روبرو را در داخل صفحه شکل بیابید ؟

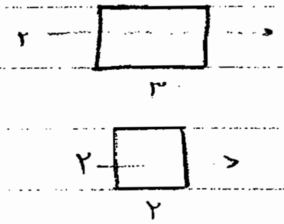


$E = 2 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$

در خرپا برای هر میله $K = 1$
می گیریم با این که تکیه گاه ها
واقعاً مفصل نیست .

اگر  بود $K = 0/7$ می گیریم

کمانش در راستای محور z و در صفحه صورت می‌گیرد در جهت عمود بر صفحه کمانش نمی‌کند



$$I = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad r^2 = \frac{h^2}{12}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} L_{AO} = \dfrac{200}{\cos 30} = 231 \text{ cm} \\[2ex] \lambda_1 = \dfrac{231}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 400 \text{ cm} \qquad K = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_{BO} = 200\sqrt{2} = 280 \text{ cm} \\[2ex] \lambda_2 = \dfrac{200\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 490 \end{cases}$$

$$\sigma_{1c} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^6}{(400)^2} = 123.4 \ \text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_{2c} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^6}{(490)^2} = 82.2 \ \text{kg/cm}^2$$

این نشان می‌دهد :

* هرچه طول را کمتر کنیم نیرویی که می‌گیرد بیشتر خواهد بود ؟

$$P_{1c} = 123.4 \times 4 = 493.6$$
$$P_{2c} = 82.2 \times 6 = 493.2$$

نیروی P را به دو نیرو تجزیه می کنیم .

$$\sum F_x = P_1 (1/2) - P_2 (\sqrt{2}/2) = 0$$

$$P_1 = P_2\sqrt{2}$$

$$\sum F_y = P_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + P_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + P = 0$$

$$P_2 = \frac{2P}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \qquad P_1 = \frac{2P}{\sqrt{3}+1}$$

با P_{1C} و P_{2C} مقایسه می کنیم

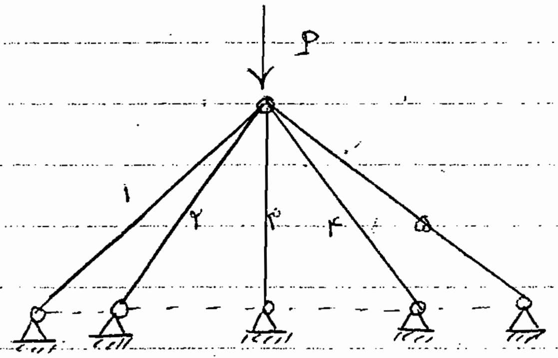
$$* \quad \frac{2P}{\sqrt{3}+1} \leqslant 493/6 \qquad P \leqslant 674/3 \ kg$$

$$* \quad \frac{2P}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \leqslant 693/2 \qquad P \leqslant 952/8 \ kg$$

پس P_C برابر $674/3\,kg$ است ؛

در جهت عمود بر صفحه اگر بخواهیم P_C را بیابیم فقط λ_2 عوض می شود ؛ $r = \frac{9}{12}$

POOMAR



* بار بحرانی سازه روبرو را بیابید ؟

اولاً باید نیروهای میله‌ها تعیین شود ؛ که در مقاومت ۱ بررسی کردیم ؛

پس ؛

۱ - بار بحرانی هر میله تعیین شود

۲ - نیروی P بین میله‌ها تقسیم شود

۳ - با زیاد کردن P کدام میله به مقدار بحرانی خودش می‌رسد که در آن مقدار برای P آن میله کمانش

می‌یابد ؛ یکی از میله‌ها کمانه کرد $P = \alpha$

از این به بعد که نیرو را اضافه می‌کنیم از α بیشتر شود میله‌ای که کمانه کرده بار نمی‌گیرد

۴ - پس وقتی بار از α زیادتر شود بار بین ۴ میله دیگر تقسیم می‌گردد تا میله دیگری کمانش کند ؛

در اینجا چون سازه هیپراستاتیک است سازه خراب نمی‌شود بلکه میله‌های دیگر بار تحمل می‌کنند

تا جایی که ؛

۵ - فقط یک میله باقی بماند که در این صورت سازه به مقدار بار بحرانی رسیده است ؛

اگر بخواهیم به این نحو مسئله را حل کنیم مسئله طولانی خواهد شد چون تقسیم بار به ۵ میله و ۴ میله و ...

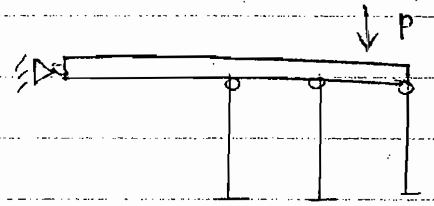
دشوار و طولانی است :

- در حل نهائی ما باید چه چیزهائی را داشته باشیم ؟

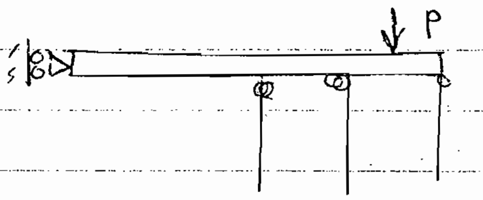
در حل نهائی باید ۲ میله کمانش کرده باشد و فقط یک میله الاستیک باقی بماند :

۱- شرط خرابی (کمانش سازه) :

* کافی نیست که فقط یک میله کمانش کند بلکه باید از ۳ تا میله چند کمانش کند به جز یک میله



در این سازه اگر بخواهیم خراب شود
هر ۳ تا میله باید کمانش کنند



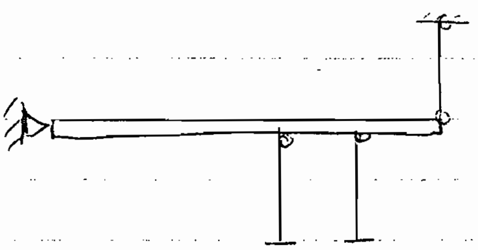
در اینجا ۲ میله کمانش کند یعنی تک
میله باقی بماند سازه خراب می شود .
چون با ۲ میله و مفصل سازه تعادل
دارد ۲ میله که کمانش کنند سازه دیگر تعادل نخواهد شد

یعنی در هر سازه باید شرط تعادل بررسی شود

۲- شرط تعادل :

در حالت خراب شدن : معادلات تعادل باید برقرار باشند در هر حالتی :

۳- شرط تغییر شکل :

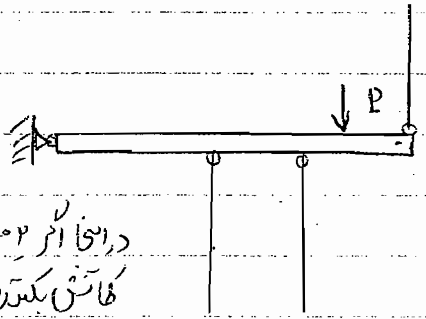


باید در هنگام خرابی به تغییر شکل توجه کرد

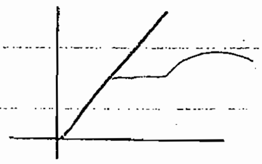
مثلاً اگر میله ⑤ بخواهد الاستیک باقی بماند باید نقطه P روی دایره ای به شعاع AP حرکت کند
۴ میله دیگر می تواند کاهش کند

اگر میله ③ بخواهد الاستیک بماند در این صورت ۲ میله سمت راست امتداد طول می دهند و می توانند
تحت کاهش قرار بگیرند چون طولشان می تواند کم شود.

— فقط میله اولی و آخری هستند که می توانند الاستیک باقی بمانند ؛ و کاهش نکنند ① و ⑤



میله الاستیک بماند یعنی ۴-۵ خطی تا آخر باشد.

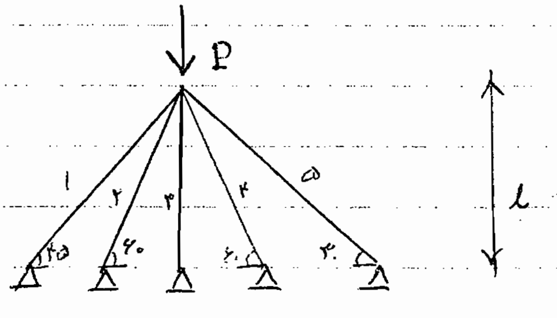


در اینجا اگر ۲ میله هم
کاهش بکنند چون
میله سوم بخواهد الاستیک بماند
خراب خواهد شد

۳- اضافه نشدن بار از مقدار بحرانی هر میله ؟

— هر میله زمانی کاهش نکرده که بارش از مقدار بار بحرانی تجاوز نکرده باشد ؟

مثال ؟



$P_3 = P_E$ بار بحرانی میله سوم

* $P_E = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$

بار بحرانی هر میله قابل
محاسبه است ؛ $\Longrightarrow$

$l_1 = l\sqrt{2}$

* $P_{1E} = \frac{\pi^2 EI}{2l^2} = \frac{P_E}{2}$

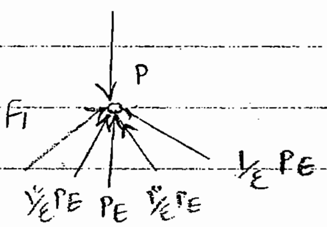
$\frac{\frac{\sqrt{4}}{4}}{\sqrt{3}}$ ✓

* $P_{2E}=P_{4E}=\frac{\pi^2EI}{\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{3}{4}P_E$

* $P_{5E}=\frac{\pi^2EI}{(2l)^2}=\frac{1}{4}P_E$

برای سادگی کار یکی را P_E گرفتیم بقیه را بر اساس آن محاسبه کردیم ؛

در این نوع میله‌ها یا باید میله ① باقی کانر یا میله ⑤ ؛



شرط تعیین شکل را در نظر گرفتیم ؛ شکل ①

تعادل : $\sum F_x = F_1\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{P_E}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow F_1=\frac{\sqrt{6}}{8}P_E < P_{1E}=\frac{P_E}{2}$ ققق است ؛

چون شرط ۲ برقرار شده است ؛

نیازی نیست که معادله دوم را در میله ۵ بررسی کنیم چون حتماً یکی برقرار می‌شود نه هر دو ؛

میله ۵ : $\frac{P_E}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-F_5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

$\Rightarrow F_5=\frac{P_E\sqrt{6}}{6} > \underbrace{\frac{P_E}{4}}_{P_{5E}}$ غقق

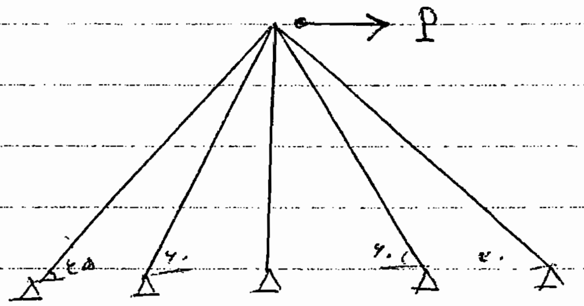
در میله ① تعادل ΣF_y را بررسی می‌کنیم ؛ شکل ①

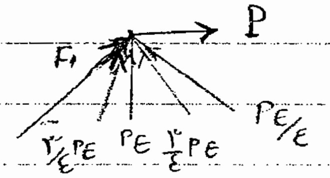
$\sum F_y = P_E\frac{\sqrt{6}}{8}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\times3\frac{P_E}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+P_E\times\frac{1}{2}-P=0$

مقدار بار بحرانی $\Rightarrow$ $\boxed{P=2.64\,P_E}$

در هر مسائل ما باید شرط تغییر شکل را در نظر بگیریم :

مثال :





F_1 باید حتماً کششی باشد تا P در تعادل $\sum F_x$ برقرار باشد :

میله ① را الاستیک فرض کردیم

در این قسمت حل مثل مسئله قبل است : $P_3 = P_E$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\times\frac{3}{4}P_E\frac{\sqrt{3}}{2} + P_E + \frac{P_E}{4}\times\frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = -3.43\,P_E$$

یعنی F_1 کششی است درست است.

$$\sum F_x = -3.43\,P_E\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P_E}{2} = 0$$

$$P = 2.64\,P_E$$

برای میله ۵ حل کنیم ؛ در این حالت F_5 حتماً کششی خواهد بود در صورتیکه امکان ندارد ؛ چون تحت فشار است.

$\Rightarrow$ شرط تغییر شکل برقرار نخواهد بود چون نیرو P به سمت راست است و تغییر مکان باید به آن سمت باشد در حالیکه چون F_5 کششی است تغییر مکان به چپ خواهد بود

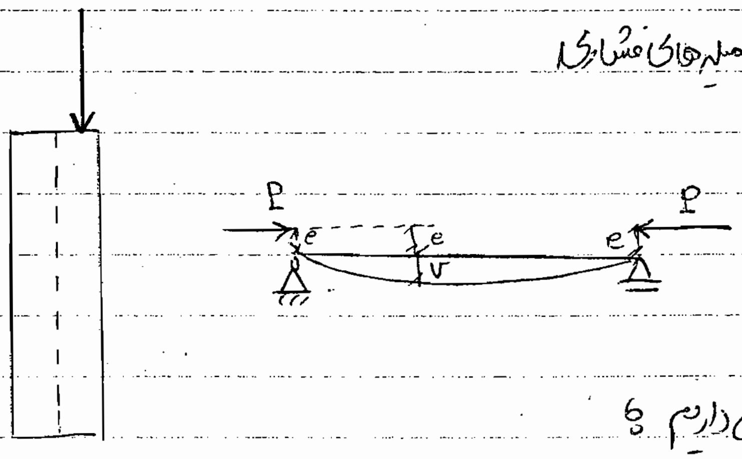
- شرط خرابی (کاهش سازه)

- شرط تعادل

- شرط تغییر شکل

- شرط اضافه نشدن بار از مقدار بحرانی

* نقص های ستون ها : میله های فشاری



بار از محور میله نگذرد

وقتی نقص داریم از همان اول تغییر شکل داریم :

میله مستقیم باقی نماند بلکه از همان ابتدا خم می شود

$$EIv'' = M = P(e-v)$$ v منفی است

$$* \quad EIv'' + Pv = Pe \qquad ; \quad \mu = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$* \quad v = \underbrace{c_1 \sin \mu x + c_2 \cos \mu x}_{\text{عمومی}} + e$$

$x=0$, $v=0$: $$0 = c_1(0) + c_2(1) + e \Rightarrow c_2 = -e$$

$x=l$, $v=0$: $$0 = c_1 \sin \mu l - e \cos \mu l + e$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{-e(1-\cos \mu l)}{\sin \mu l} = \frac{-e\left(2\sin^2 \frac{\mu l}{2}\right)}{2\sin\frac{\mu l}{2}\cos\frac{\mu l}{2}}$$

$$\Rightarrow c_1 = -e \tan \frac{\mu l}{2}$$

اگر $\sin \mu l = 0$ باشد دوباره به بار بحرانی می‌رسیم در حالیکه اینجا نقص را می‌خواهیم ؛

$$\Rightarrow v = -e\tan\frac{\mu l}{2}\sin\mu x - e\cos\mu x + e$$

$$\begin{cases} x = \frac{l}{2} \\ \delta = v_{max} = -e\tan\frac{\mu l}{2}\sin\frac{\mu l}{2} - e\cos\frac{\mu l}{2} + e \end{cases}$$

$$= \frac{-e}{\cos\frac{\mu l}{2}}\left(\sin^2\frac{\mu l}{2} + \cos^2\frac{\mu l}{2}\right) + e$$

$$\boxed{v_{max} = \frac{-e\left(1-\cos\frac{\mu l}{2}\right)}{\cos\frac{\mu l}{2}}}$$

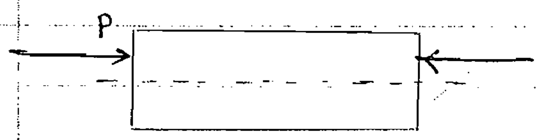
$$M_{max} = P\,(e - v_{max}) = P\left(\frac{e + e\left(1-\cos\frac{\mu l}{2}\right)}{\cos\frac{\mu l}{2}}\right)$$

$$\boxed{M_{max} = P\,\frac{e}{\cos\frac{\mu l}{2}}}$$

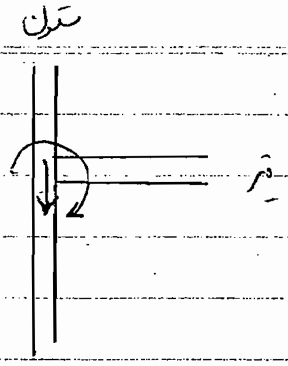
* اگر تیر حتی با ابعاد بزرگ داشته باشیم با فشاری که بر آن وارد کنیم $\cos\frac{\mu l}{2}$ با تقریب خوبی یک است

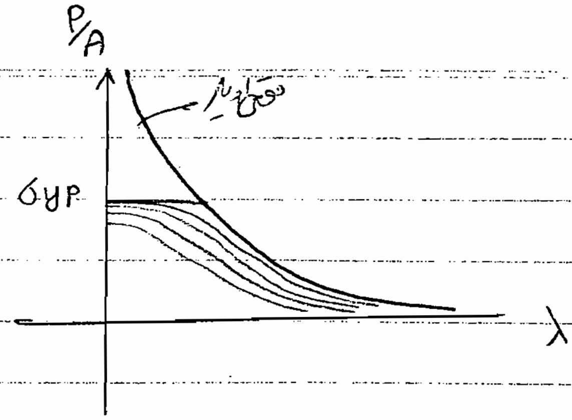
یعنی $M_{max} = Pe$

هرچه این تیر لاغرتر باشد همیشه بیشتر خم می‌شود و لنگر زیادتری می‌شود



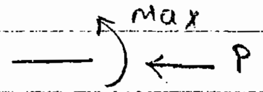
به هر حال در ستونها یک مقدار نقص داریم





اگر نقص صفر باشد دقیقاً روی منحنی هستیم؛ اما اگر نقص داشته باشیم هرچه e زیادتر باشد

خراب شدن ستون پایین تر از σ_{yp} است



$$* \quad \sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{(M_{max})\,C}{I}$$

فشار ⊕ گرفتیم

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe \cdot C}{I \cos \frac{\mu l}{2}}$$

$$\Rightarrow \; = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e \cdot c}{r^2 \cos\left[\sqrt{\frac{P}{EA}} \cdot \frac{l}{2r}\right]}\right]$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{e \cdot c}{r^2 \cos\left[\sqrt{\frac{P}{EA}} \cdot \frac{l}{2r}\right]}\right]$$

فرمول سکانت

* خطی نشد

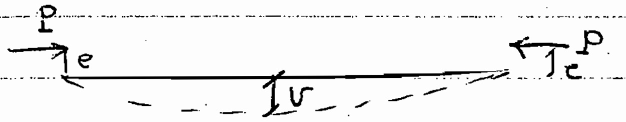
اگر P زیاد شود مگر a برابر شود تنش بیشتر از a افزایش می‌یابد چون تیر بیشتر خم می‌شود؛

با این فرمول می‌توان P را به ازای δ_{yp} یافت.

* A-Javadian

از جلسه آینده ۱۰ صبح

۸۴/۹/۵ — به نام خدا — ج ۱۰



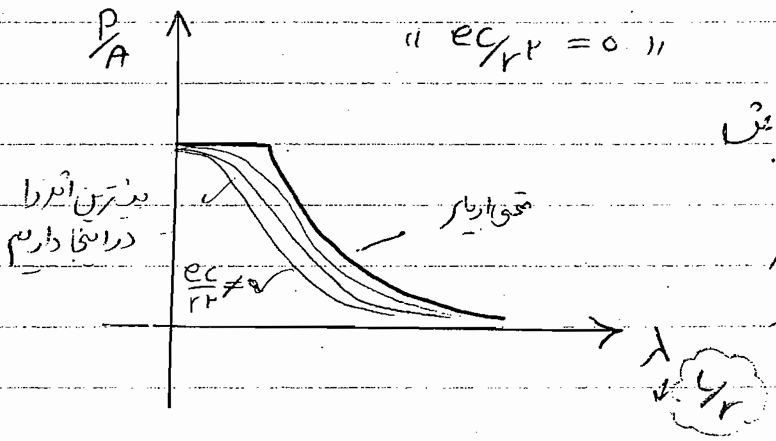
فرمول سکانت :

$$* \quad \sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EA}} \cdot \frac{L}{2r}\right)}\right]$$

از نظر هندسی

σ-ε غیر خطی است

* اگر بخواهیم با فرمول اویلر مقایسه کنیم به جای σ_{max} ، σ_{yp} می‌گذاریم :



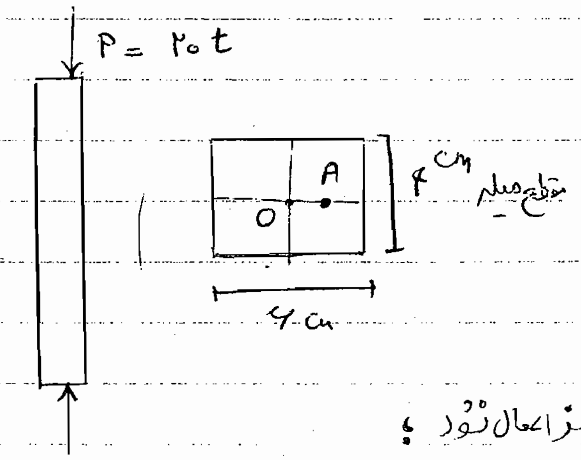
در مقادیر کم λ تنش تسلیم باعث خرابی خواهد شد

اما در مقادیر بزرگ λ خاصیت لاغری عمل می‌کند در نتیجه کمانش و بالطبع اویلر حاکم می‌شود.

$ec/r^2 = 0 \Rightarrow \sigma_{yp} = P/A$ کمانه نمی‌کند

مثال : بار در A وارد می‌شود ؛

$OA = 0.5\,cm$



$L = 1\ m$

$L = 2\ m$

$L = 5\ m$

طول در چه حالتی تنش بستگی دارد وقتی بار در مرکز اعمال شود ؛

$e = 0.5\ cm$

$P < P_E$ باید باشد ، اگر $P > P_E$ باشد تنش ∞ خواهد شد ؛

در هر حالت P_E را می یابیم: $P_E = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$ برای

$P_E = 20$ قرار می دهیم تا حداکثر L را بیابیم:

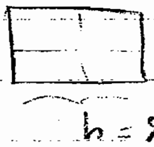
$$20000 = \frac{\pi(2\times10^6)(6\times\frac{4^3}{12})}{l} \Rightarrow l = 177.7\ cm$$

پس $L=2$, $L=5$ نمی تواند اتفاق بیفتد؛ چون در این دو حالت میله کمانش می کند و نمی تواند این بار را تحمل کند:

$$\Rightarrow L=1 \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{20000}{24}\times\Big[1 + (0.5)($$

* $r = \sqrt{h^2/12}$ r را باید نسبت به محوری بگیریم که خمش اتفاق می افتد:

$$\Rightarrow r = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$



رادیان

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{2\times10^4}{2\times10^6\times24}}\cdot\frac{100}{2\sqrt{3}}\right) = 0.83$$

پس اول میله به خمش می افتد سپس به ازای بار اولیه به کمانش می افتد (در جهت دیگری)؛ برای خمش

حول محور خمش

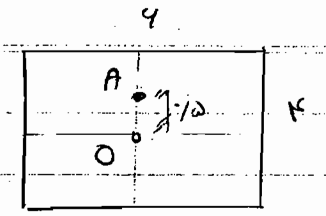
$$\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{2\times10^4}{24}\left[1 + \frac{(0.5)(3)}{3}\cdot\frac{1}{0.83}\right] = 1160\ \frac{Kg}{cm^2}$$

* اگر L کمتر باشد σ_{max} کمتر خواهد بود:

اگر به طول توجه نداشتیم: $L = 200$ می گذاشتیم:

$$\Rightarrow \cos\sqrt{\frac{2\times10^4}{2\times10^6\times24}}\cdot\frac{200}{2\sqrt{3}} = 0.7$$

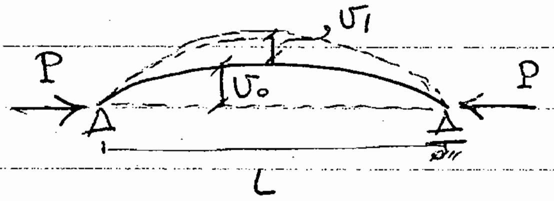
برای σ_{max} یک عدد کمتری از قبل بدست می آید در حالیکه کمانش اتفاق افتاده است:



اگر منفی باشد یعنی زاویه $\cos$
از $\frac{\pi}{2}$ بیشتر است یعنی کاهش اتفاق
افتاده که در واقع ما به دنبال آن هستیم!

* حالت دیگر نقص

خود میله مستقیم نباشد :



اگر بار به این میله وارد شود
باعث می شود که میله بیشتر خم شود
اما اگر نیرو کششی بود میله می کوشد
به حالت مستقیم درآید.

$$v_0 = a_0 \sin \frac{\pi x}{l}$$

بعد از وارد کردن بار v_0 بیشتر می شود

* $v = v_0 + v_1$

* $M = -Pv$ در هر مقطع

* تغییری که در اثر کاهش به وجود می آید ناشی از v_1 است :

* $EIv_1'' = M = -P(v_0 + v_1)$

* $EIv_1'' + Pv_1 = -Pv_0$

v_0 سینوسی $\Rightarrow$ $v_1 = a_1 \sin \frac{\pi x}{L}$

$$v_1'' = -a_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

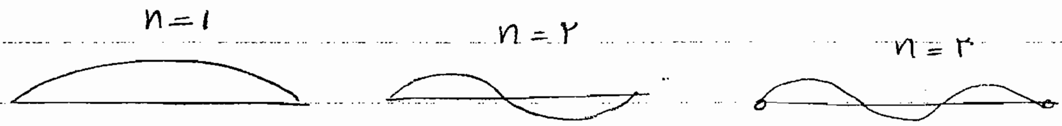
$$\Rightarrow \frac{-a_1\pi^2}{L^2} EI \sin\frac{\pi x}{L} + Pa_1 \sin\frac{\pi x}{L} = -Pa_0 \sin\frac{\pi x}{L}$$

$$* \quad a_1 = \frac{-Pa_0}{-\frac{\pi^2 EI}{L^2} + P} = \frac{Pa}{P_E - P}$$

اگر بخواهیم دقیق‌تر باشیم باید v_0 را به صورت بسط فوریه بنویسیم

$$* \quad v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} + \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{L}}$$

cos اول آنها صفر است.



یعنی این خمیدگی می تواند مجموع بی نهایت sin ها باشد.

$$* \quad v = v_0 + v_1$$

$$M = -P(v_0 + v_1)$$

$$* \quad EIv_1'' = M = -P(v_0 + v_1)$$

$$EIv_1'' + Pv_1 = -Pv_0$$

خمیدگی که اضافه می شود

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$v_1'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n n^2\pi^2}{L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cdot \frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI \sin\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} P b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} P a_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

چون x متغیر است باید رابطه به ازای هر n برقرار باشد تا طرفین $\sin$ بتوانند ساده شوند ؛

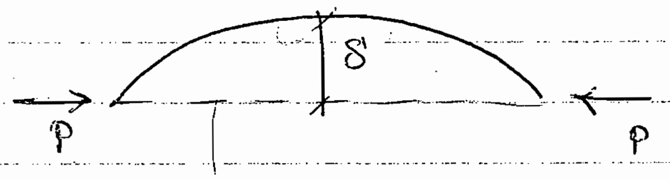
$$* \quad b_n = \frac{P a_n}{n^2 P_E - P} = \frac{P/P_E \cdot a_n}{n^2 - P/P_E}$$

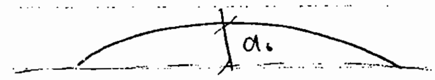
وقتی بار زیاد می‌شود جمله اول به ازای $n=1$ ، b_1 به سمت ∞ میل می‌کند و جمله ای است

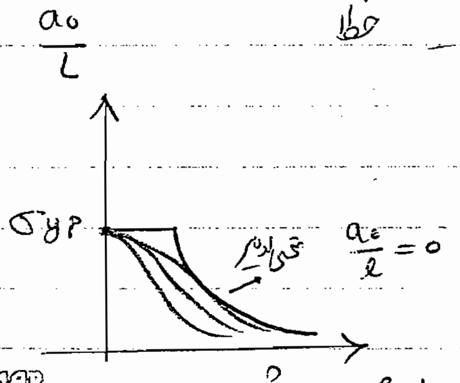
که برای ما مهم است

اگر میله ای خمیدگی داشته باشد وقتی بار را زیاد می‌کنیم و بار به سمت بار بحرانی میل می‌کند

تغییر شکل به سمت $\sin$ ای میل می‌کند





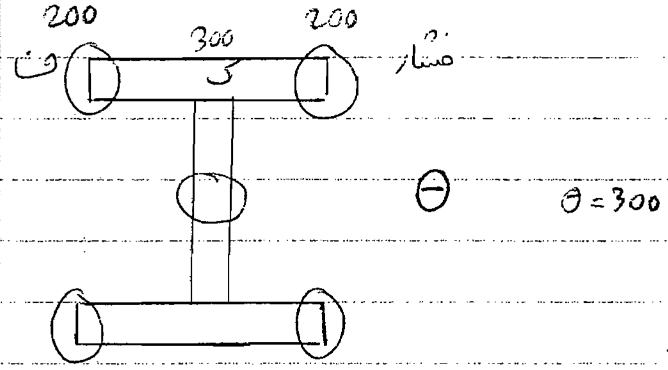


اگر $\frac{a_0}{l}$ را زیاد کنیم ،، خطای نقص ،،

منحنی های حاصل نشان می‌دهد که کی تنش به تنش تسلیم می‌رسد .

اگر $a_0 = 0$ باشد خمیدگی اولیه معنی ندارد پس همه از یک نقطه شروع می‌شوند .

یعنی ابتدا اگر $l = 0$ باشد $\frac{P}{A}$ باید به تنش تسلیم برسد؟



* تنش های پسماند :

وقتی فولاد سرد می شود اول گوشه ها سرد می شوند و وسط مقطع.

فولاد در یک درجه حرارتی مذاب است از آن به بعد با تغییر درجه حرارت اگر طول ثابت باشد تنش در آن ایجاد می شود.

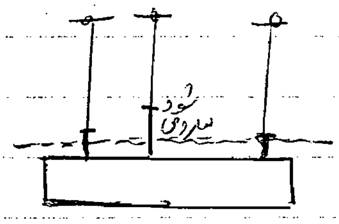
چون با ضربه می توان شکل فولاد را عوض کرد پس تنشی در آن ایجاد می شود یا در یک حالت نیمه جامد را داشته باشد یعنی به یک درجه حرارتی برسد که تغییر طول آن آزاد باشد اگر آزاد نباشد تنش ایجاد می شود.

بالاتر از θ مذاب است پایین تر از آن مذاب نیست

نقاط ضعیف شده زودتر از θ پایین می آیند

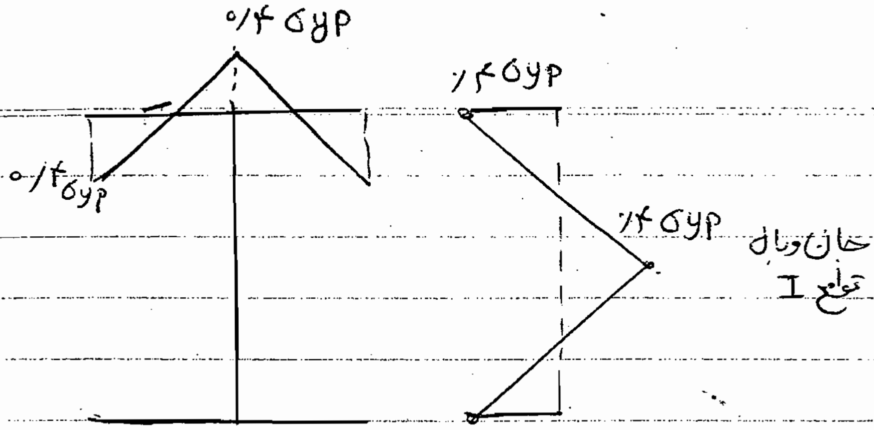
در یک حالتی که همه از θ کمتر شدند از این به بعد همه نقاط یا باید به یک اندازه درجه حرارتشان کم شود که

در این صورت تنش ایجاد می شود



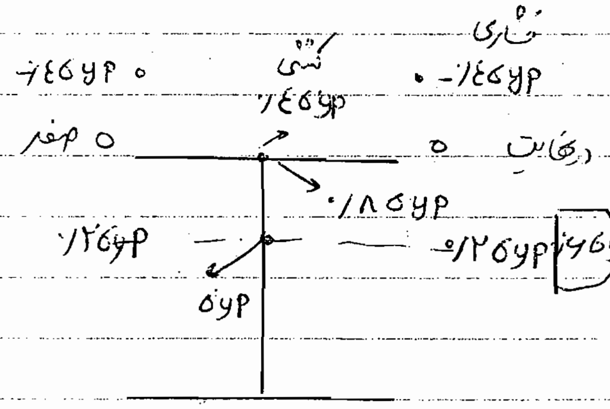
که تنش متعادل باید ایجاد شود چون تیر صلب است.

در حالتی که مقطع سرد شده و حالا به °۲۰ رسیده است گوشه تحت اثر فشار است و وسط تحت کشش؟



— این انتگرال صفر خواهد بود چون هیچ نیرویی نداریم؟

$$\int_A \sigma dA = 0$$



فرض کنیم 0/4 σyp داشته باشیم

اگر تنش را به اندازه σyp (کششی) از زیاد کنیم 0/6σyp

تا 0/4σyp تنش را اضافه کنیم

در گوشه تنش صفر می شود.

$F = 0/6\sigma yp$

در کتاب های مختلف ممکن است به جای 0/4 ، 0/3 باشد

یا شکل توزیع سهموی باشد.

وقتی به σyp برسیم بدون اعمال نیرویی توان تغییر طول ایجاد کرد یعنی اگر (0/6σypA) نیرو

اعمال کنیم وسط به تنش تسلیم رسیده است از این به بعد با افزایش نیرو دیگر گوشه ها تنش نمی گیرند

بلکه فقط وسط تنش آن تغییر می کند یعنی تنش ها به جاهایی می روند که تنش کمتر است

مثلاً $F = 0/7\sigma y A$ باعث می شود که فقط وسط تنش آن تغییر می کند؟

اگر تنش های فشاری اعمال کنیم ؟

	$-0/4\sigma_{yp}$
$0/3\sigma_{yp}$	$-0/5\sigma_{yp}$
0	$-0/8\sigma_{yp}$
$-0/2\sigma_{yp}$	$-\sigma_{yp}$

$F_1 = -0/1\,\sigma_{yp}\cdot A$ فشاری

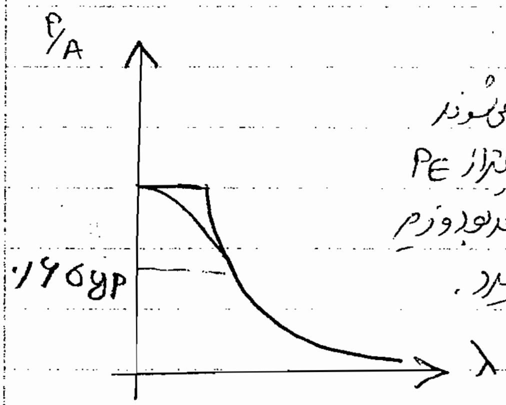
$F_2 = -0/4\,\sigma_{yp}\cdot A$

$F_3 = -0/6\,\sigma_{yp}\cdot A$

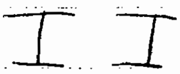
اما اگر طول زیاد باشد و کمانش مطرح باشد

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

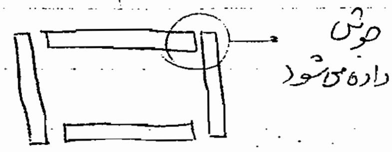
هرچه l کوچکتر باشد مقدار بار بحرانی افزایش می یابد.



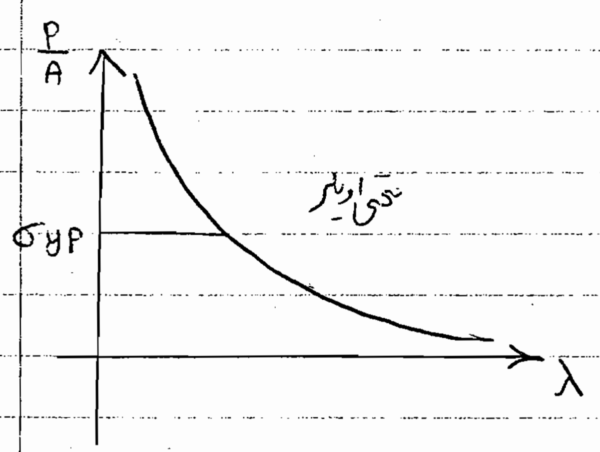
می توان با بیشتر اعمال کردن بار اعمالی به همان اضافه نمی شود به
دو که بیشتر اضافه می شود. بنابراین یک سمت هایی در محاسبه I خارج می شوند
پس P_E کوچکتر از P_E
حتی خواهد بود و لازم
P_E قرار می گیرد.

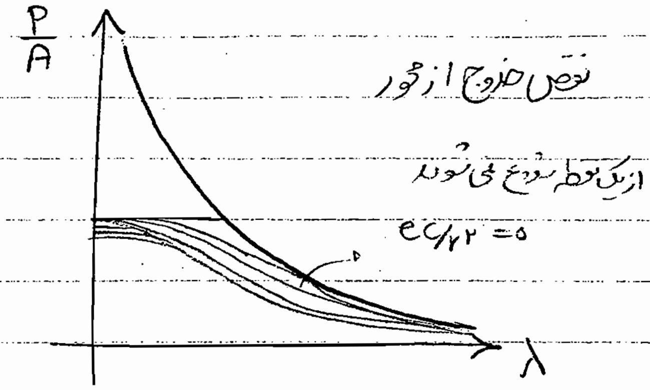


اگر دو I را به هم متصل
کنیم اندیس آن با I فرق دارد.



چون در این حالت جوش داده می شود
تنش پسماند حتی ممکن است به تنش σ_{yp}
برسد



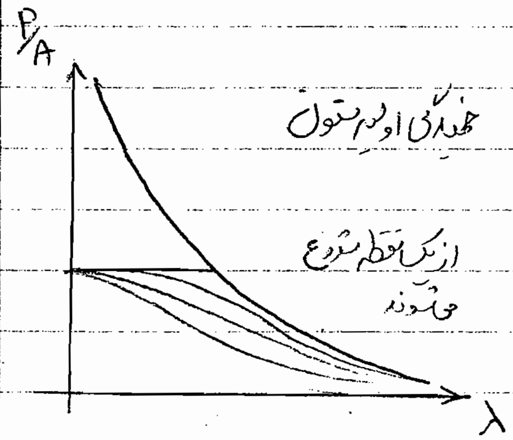


e مقدار واقعی خروج از مرکز

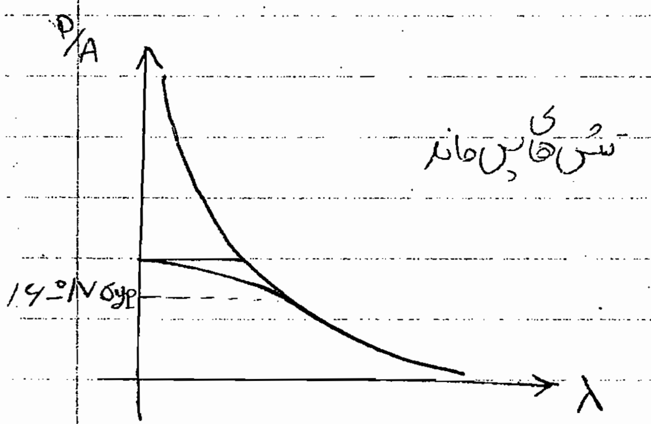
c فاصله از مرکز مقطع در خمش

r شعاع ژیراسیون

$\frac{ec}{r^2}$

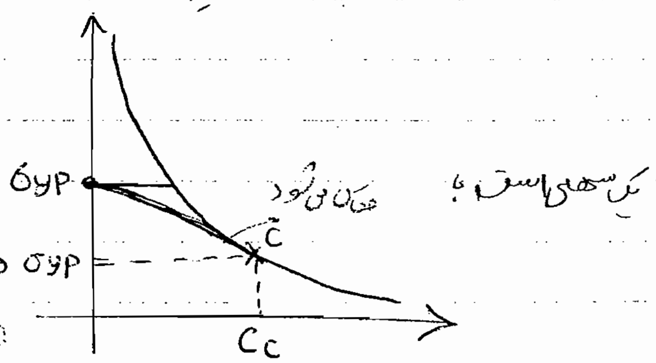


a مقدار δ در وسط تیر $\frac{a}{l}$



هر چه قدر خروج از محور را بخواهید صفر کنید صفر نمی شود باید یک مقداری در نظر بگیرید

آیین نامه آمریکا که آیین نامه ایران از روی آن است به صورت زیر است:



آیین نامه آمریکا اثرات مجموع نقص ها و تنش های پسماند را با هم بررسی کرده و مقدار $0/5\sigma_{yp}$ را در نظر گرفتند.

* فرمول منحنی اویلر $\sigma = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{P}{A}$

* معادله منحنی $\sigma = A - B\lambda^2$

$$\lambda = 0 \Rightarrow A = \sigma_{yp}$$

$$C \left| \begin{array}{l} C_c \\ 0/5\sigma_{yp} \end{array} \right.$$

C هم روی منحنی اویلر است هم روی سهمی آیین نامه.

$$0/5\sigma_{yp} = \frac{\pi^2 E}{C_c^2} \Rightarrow \boxed{C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{yp}}}}$$

این منحنی می تواند بکار رود اما یک ضریب اطمینان باید بکار برده شود :

در منحنی اویلر پس از نقطه c ضریب اطمینان $\frac{23}{12}$

در $\lambda = 0$ ضریب اطمینان $\frac{5}{3}$ مثل کشش است

از 0 تا نقطه c ضریب اطمینان از $\frac{5}{3}$ تا $\frac{23}{12}$ تغییر می کند به صورت زیر :

$$\boxed{S.F = \frac{5}{3} + \frac{3\lambda}{8C_c} - \frac{\lambda^3}{8C_c^3}}$$

به تدریج که λ زیاد می شود SF زیاد می شود :

$\lambda = C_c$ $\qquad \boxed{SF = \frac{24}{12}}$

« آیین نامه ایران ـ آمریکا »

میله کششی

برای مقادیر مختلف λ ، ضریب $SF = \frac{5}{3}$ بود

در میله فشاری هر چه λ بیشتر می شود احتمال نقص بیشتر است پس ضریب اطمینان زیادتر شده است.

از نقطه C به بعد خطاها به مقدار max خود رسیده و از این ضریب اطمینان ثابت می شود

در فشار خراب شدن در طول های کم با تسلیم است و در طول زیاد با کمانش هر چه طول زیادتر باشد

کمانش بیشتر است.

در همین مورد تنش های پسماند بیشترین اثر را دارند

برای هر λ می توان یک تنش مجاز بدست آورد اول σ_{cr} مربوط به آن λ را می یابیم بر ضریب

اطمینان تقسیم می کنیم تا σ_a بدست آید

این منحنی بر اساس مقطع I بدست آمده و آیین نامه آمریکا می گوید همه مقاطع دیگر را از روی این منحنی

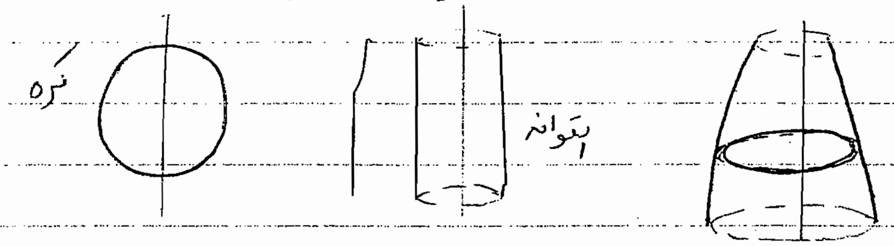
بیابید در حالیکه درست نیست

در آیین نامه آلمان $\omega \frac{P}{A} \leq \sigma_a$ باید این رابطه برقرار باشد در حالیکه $\omega \geq 1$ است یعنی

σ_a را زیاد می کند P را از روی آن می یابند

مخازن جدار نازک مدور :

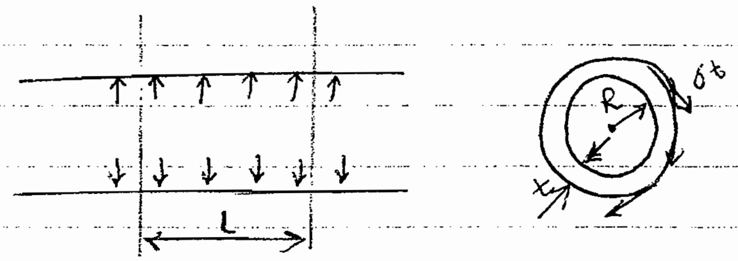
هم بارگذاری و هم شکل مخزن طوری باشد که نسبت به یک محور متقارن باشد



بارگذاری هم باید مدور باشد . تا تقارن از بین نرود

حالت های ساده تر استوانه و کره را ابتدا بررسی می کنیم :

یک استوانه طولانی داریم

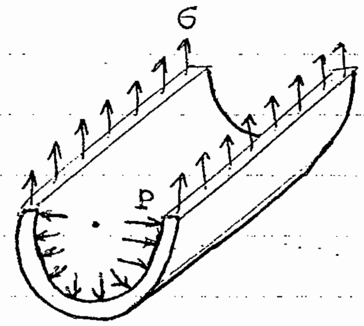


فرض کنیم فشار ثابت P در تمام نقاط داریم

مثلاً یک لوله گاز مستقیم

می توانیم فقط مقطعی از استوانه را به طول واحد یا طول l در نظر بگیریم ؟

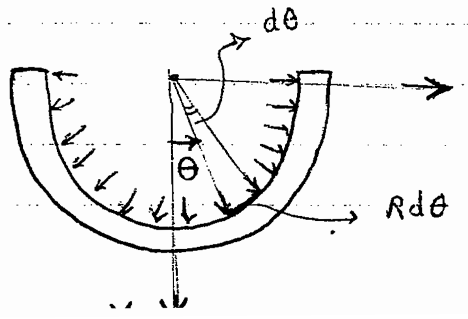
از طرفی می توان آن را به دو نیم استوانه تبدیل کرد ؟



فشار سیال عمود بر جدار است

اگر استوانه کامل بود تقارن برقرار بود اما

اینجا نیم استوانه است .



$$\Rightarrow \quad dF = P(Rd\theta)L$$

$$dF_y = P(Rd\theta)L \cdot \cos\theta$$

$$F_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} PRL\cos\theta \, d\theta$$

چون متقارن است

$\sum F_x = 0$ است

$$= PRL.\sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$\boxed{F_y = 2PRL}$$

می‌توانستیم با تصور

P عمود بر محور هم F_y را بیابیم که

می‌شود P ضربدر مساحت یک مستطیل به طول L و عرض 2R

برای حفظ تعادل σ در سطح جدار نازک داریم :

$$\sigma = \frac{2PRL}{\underbrace{2tL}_{\text{مساحت مستطیل‌ها}}}$$

$$\boxed{\sigma_t = \frac{PR}{t}}$$

در هر نقطه این تنش مماس بر محیط جدار نازک است

این تنش را تنش مماسی یا تنش محیطی یا تنش حلقوی می‌گویند

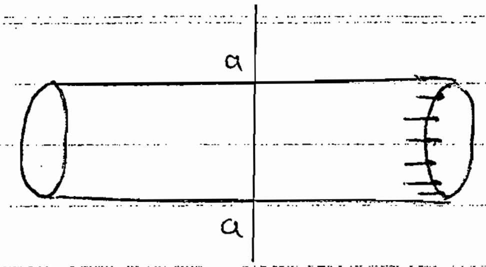
مماسی tangential stress

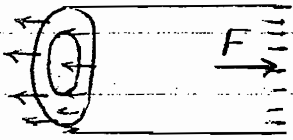
محیطی Circumferential "

حلقوی Hoop "

اگر طول استوانه را ∞ نگیریم سر استوانه از انتها بسته است به ته استوانه فشار وارد می‌شود

این فشارها در هر مقطعی که استوانه را قطع می‌کنیم باید در حال تعادل باشند :





$$F = P\cdot\pi R^2$$

جدار نازک $A = 2\pi R\cdot t$ R متوسط

$$\sigma = \frac{\pi R^2\cdot P}{2\pi R t}$$

تنش طولی چون در امتداد طول استوانه است

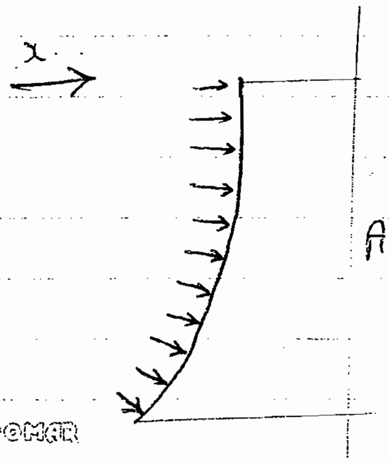
$$\sigma_l = \frac{PR}{2t}$$

× تنش طولی در استوانه‌ها نصف تنش محیطی است .

اگر یک لوله را زیر آب ببریم اگر فشار آب دور لوله تقریباً ثابت باشد از همین رابطه استفاده می‌شود ولی تنش‌ها فشاری خواهند بود .

همیشه از R متوسط استفاده کنید .

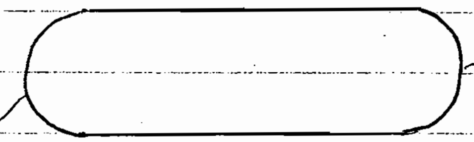
این که ته استوانه چطور بسته باشد فرقی ندارد .



مثلاً اگر بخواهیم نیروها را در جهت x بیابیم سطح را در جهت عمود بر x تصویر می‌کنیم

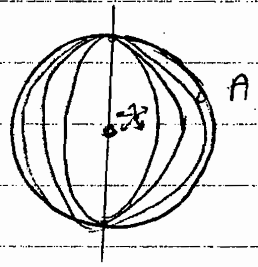
$$F_x = P.A$$

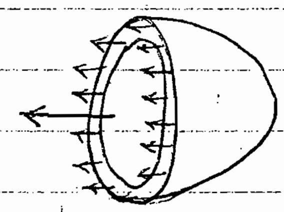
مثال :



هرچه طول استوانه را کم کنید باز هم تنش طولی را به همان مقدار خواهید داشت

تا جایی که به یک کره تبدیل کنید ؟





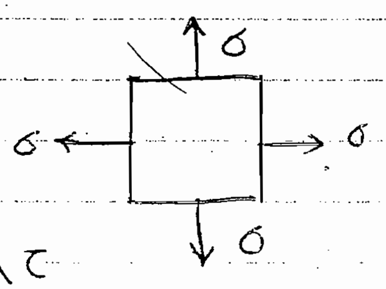
$$F = P \cdot \pi R^2$$

$$\sigma = \frac{P \cdot \pi R^2}{2\pi R t}$$

$$\sigma = \frac{PR}{2t}$$

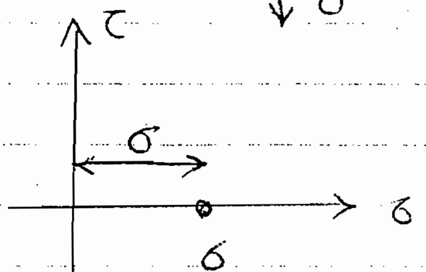
در کره تنشی که داریم با تنش طولی استوانه برابر است ؟

در نقطه ای مثل A تنش در همه جهات وجود دارد چون در نقطه روی کره می توان در هر جهتی یک مقطع زد و کره را به دو نیم کره تقسیم کرد .



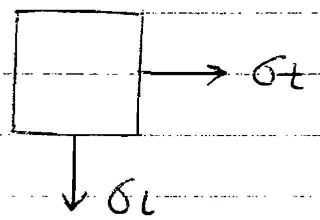
$A \mid \begin{matrix} \sigma \\ \sigma \end{matrix}$

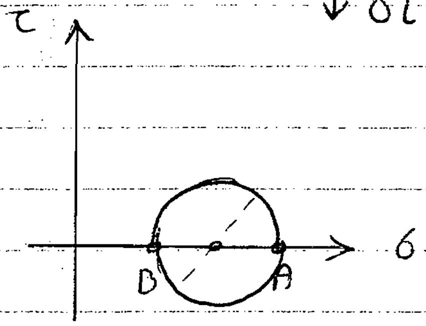
$B \mid \begin{matrix} \sigma \\ \sigma \end{matrix}$



دایره موهر یک نقطه می شود

در استوانه





در صفحات مایل هم تنش عمودی داریم هم تنش برشی.

در مخزن جدار نازک به هر حال تنه آن بسته است به هر نحوی پس هر دو تنش را داریم σ_t , σ_l

دیگر این دو تنش وجود دارند ولی مقدار آن با مقدار تنش طولی استوانه برابر است در کتاب جابه

نام تنش مماسی اسم گذاشته می‌شود ...

به خاطر وجود تنش‌ها ε داریم

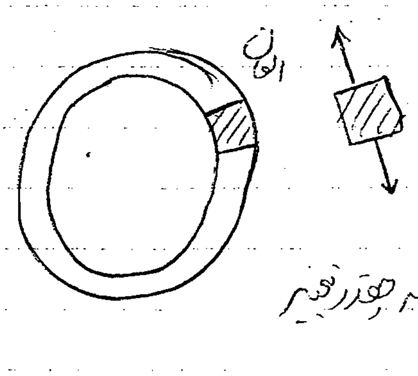
در استوانه داریم

$$* \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu \sigma_l)$$

تنش طولی

$$* \quad \varepsilon_l = \frac{1}{E}(\sigma_l - \nu \sigma_t)$$

$$; \quad \varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}$$



8 ε_t *

وقتی تغییر طول‌ها در این حالت جمع می‌شوند معلوم می‌شود که محیط استوانه چقدر تغییر کرده است

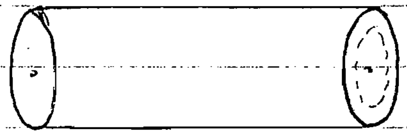
$$\ast \quad \varepsilon_t = \frac{\Delta(2\pi R)}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta D}{D}$$

درکره داریم :

$$\ast \quad \varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma - \nu\sigma) = \frac{\sigma}{E}(1-\nu)$$

$$\ast \quad \varepsilon = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta D}{D}$$

مثال :



$L = 10\,m$

$R = 2\,m$

$t = 3\,cm$

$E = 2\times10^{6}\ kg/cm^2$

$\nu = 0/3$

فشار گاز داخل برابر است با $15\ \frac{kg}{cm^2}$.

اولاً تنش های طولی و حلقوی ؟ ثانیاً تغییر ابعاد مخزن ؟

$$\ast \quad \sigma_t = \frac{PR}{t} = \frac{15\times200}{3} = 1000\ kg/cm^2$$

$$\sigma_l = \frac{PR}{2t} = 500$$

$$\ast \quad \varepsilon_t = \frac{1}{2\times10^{6}}\left(1000 - 0/3(500)\right) = 425\times10^{-6}\ cm$$

$$\ast \quad \Delta R = R(\varepsilon_t) = 200(425\times10^{-6}) = 0/085$$ تغییر شعاع

$$\ast \quad \varepsilon_l = \frac{1}{2\times10^{6}}\left(500 - 0/3(1000)\right) = 10^{-4}$$

$$\ast \quad \Delta l = \varepsilon_l \cdot l = 1000\times10^{-4} = 10^{-1}\ cm = 1\ mm$$ تغییر طول

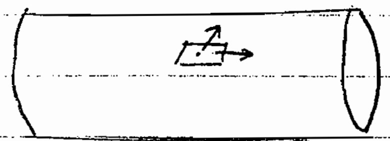
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta R}{2R} + \frac{\Delta l}{l}$$

تغییر حجم $\Rightarrow$ $V = \pi R^2 l$

$$\Delta V = 2\pi R(\Delta R)L + \pi R^2 \Delta l$$

تنش حجمی $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ *

$$\varepsilon_1 \downarrow \varepsilon_t \qquad \varepsilon_2 \downarrow \varepsilon_l$$



$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

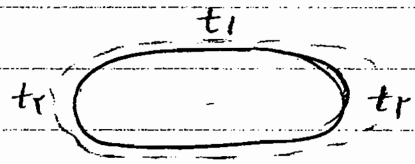
$$\varepsilon_3 = -\frac{0/3}{2\times 10^{6}}(\varepsilon_t + \varepsilon_l) = -225\times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_t + \varepsilon_l + \varepsilon_3$$

ε_v که بدست آوردیم تغییر حجم مصالح بکار رفته را به جای دهانه حجم فضای درونی را

درحالیکه ΔV که بدست آوردیم تغییر حجم خود گاز درون ظرف است.

مثال: در شکل نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ را چنان بیابید که در محل اتصال تنش اضافی ایجاد نشود؟



دو قسمت نیمکره و یک قسمت استوانه‌ای داریم.

استوانه $\varepsilon_t = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_l)$

کره $\varepsilon = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{E}(\sigma - \nu\sigma) = \frac{\sigma}{E}(1-\nu)$

$$\varepsilon_t = \varepsilon$$

$$\sigma_t - \nu\sigma_l = \sigma(1-\nu)$$

$$\frac{PR}{t_1} - \nu\frac{PR}{2t_1} = \frac{PR}{2t_2}(1-\nu)$$

$$\frac{2-\nu}{2t_1} = \frac{1-\nu}{2t_2} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{1-\nu}{2-\nu}$$

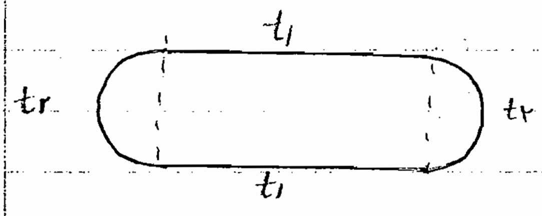
باید همزمان با هم تغییر حجم بدهند.

اگر ضخامت همه جا یکسان باشد حتماً در حوالی محل اتصال تنش‌ها از این فرمول‌ها تبعیت نمی‌کند

و تنش‌های خمشی یا کششی با فرمول‌ها جمع می‌شود.

مثال: مخزنی مطابق شکل با ورق‌هایی به ضخامت $t_1 = 17^{mm}$ ، $t_2 = 7mm$ ، طول

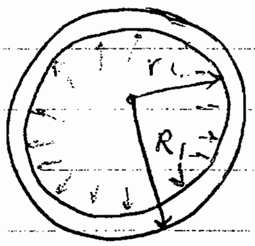
$D = 20\ m$ ، $L = 30\ m$



اگر داخل استوانه را پر از آب با فشار معمول کنیم و بعد از آن مقداری آب اضافی پمپ کنیم تا فشار $10\frac{kg}{cm^2}$ اضافه شود چقدر آب به داخل آن پمپ خواهد شد؟

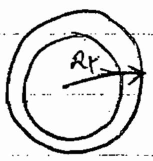
ضریب تراکم آب $= 10^{-4}$

به دو دلیل آب طب خواهد شد یکی به خاطر تغییر حجم استوانه و کره
دوم به خاطر این که آب تراکم پذیر است؛



مثال: حلقه فولادی ① که شعاع داخلی آن کوچکتر از شعاع خارجی حلقه ② است می خواهیم روی حلقه ② قرار دهیم و این کار را با حرارت انجام می دهیم

$$r_1 = 20^{cm}$$
$$R_2 = 20.01^{cm}$$



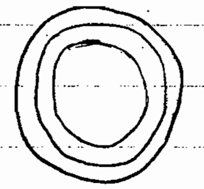
وقتی مجموعه سرد می شود چه تنش هایی در حلقه ها ایجاد می شود و چه فشاری بین آنها رد و بدل می شود.

$$t_1 = 1^{mm}$$
$$t_2 = 2^{mm} \qquad E = 2 \times 10^6\ kg/cm^2$$

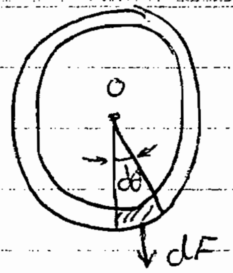
یعنی به حلقه ① فشارهایی ایجاد می شود تا شعاع آن بزرگتر شود؛
در نهایت شعاع ها باید برابر شوند؛ cm

$$|\Delta R_1| + |\Delta R_2| = 0.01$$
$$\Rightarrow \Delta R_1 - \Delta R_2 = 0.01\ cm \qquad R_1 \text{ زیاد می شود. } R_2 \text{ کم}$$

?



مثال ۴: دو حلقه از دو جنس متفاوت
روی هم قرار بگیرند
مثلاً Al, St چون Al ضریب انبساط
بزرگتری دارد وقتی گرم می‌شوند Al بیشتر تغییر قطر
می‌دهند؛ باید در این حالت ΔR ها مساوی
باشند که در این حالت ΔR ها یکی ناشی از فشار داخلی است یکی ناشی از حرارت



اگر یک حلقه ای داشته باشیم و حلقه حول محوری عمود بر
صفحه شکل دوران کند در اثر این دوران نیروی گریز از مرکز
به ذرات آن وارد می شود که می خواهد قطر آن را زیاد کند
مثل این است که یک فشاری از داخل به آن اثر می کند؟

ω سرعت زاویه ای

$$dF = dm\,(\omega^2 R)$$

$$* \quad dm = \rho\, d\upsilon \quad \text{حجم}$$

$$* \quad dF = \rho\, d\upsilon\,(\omega^2 R)$$

$$= \rho\,(L \cdot t \cdot R\,d\theta)\,\omega^2 R$$

$$dF = \rho L t R^2 \omega^2 d\theta$$

فشار ایجاد کننده

$$P = \frac{dF}{L \cdot R\,d\theta} = \rho t R \omega^2$$

dA

$$\sigma_t = \frac{PR}{t} = \rho R^2 \omega^2$$

تنش ماکزیمم

$$\sigma_t = \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2$$

$$R^2 \omega^2 = \upsilon^2 \quad *$$

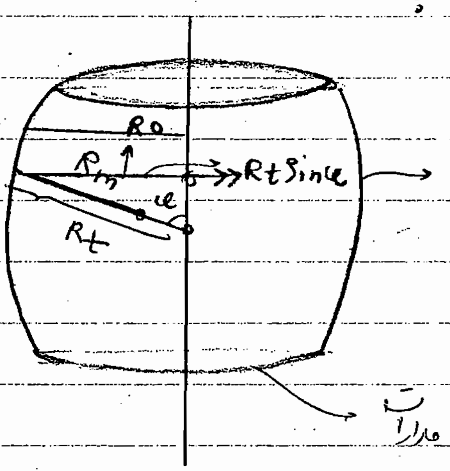
سرعت خطی

حجم

POOMAR

حالت کلی 8

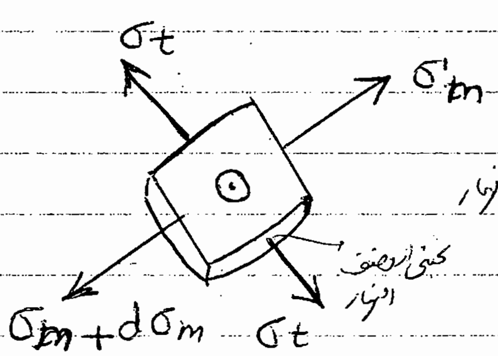
یک مخزن از دوران یک منحنی حول یک محور ایجاد شده است:



R_m شعاع انحنای صفحه انحنا

R_0 شعاع مدار

اگر تعادل یک المان از این مخزن را در نظر بگیریم



σ_m مماس بر صفحه انحنا (σ_l ۱

σ_t عمود بر صفحه انحنا

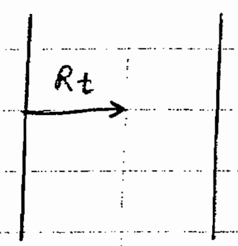
⊙ فشار عمود بر المان از داخل

$$\boxed{\frac{\sigma_t}{R_t} + \frac{\sigma_m}{R_m} = \frac{P}{t}}$$

σ_t ها در یک راستا نیستند
با هم زاویه خیلی کوچکی می سازند.
σ_m ها در بالا و پایین المان
متفاوت اند؛ ولی برآیند
آنها در جهت امتداد P می افتد.

* σ_m معمولاً از تعادل نیروها در امتداد محور دوران بدست می آید:

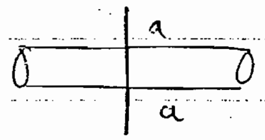
استوانه



$R_m = \infty$

$\sigma_m = \sigma_l$

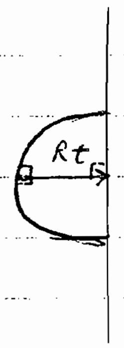
برای بدست آوردن σ_m باید استوانه را قطع کنیم



σ_m همان σ_l است.

$$\Rightarrow R_m = \infty \qquad \frac{\sigma_m}{R_m} = 0$$

$$* \quad \frac{\sigma_t}{R_t} = \frac{P}{t} \Rightarrow \sigma_t = \frac{PR_t}{t} = \frac{PR}{t}$$



* برای یک کره :

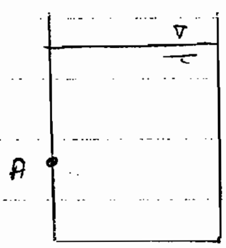
$R_t = R_m = R$

کره را از هر جهت قطع کنیم

یک شکل دارد به عبارتی شکل کره در همه جهات یک است

پس $\sigma_m = \sigma_t$ است

$$* \quad \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{P}{t} \Rightarrow \sigma = \frac{PR}{2t}$$



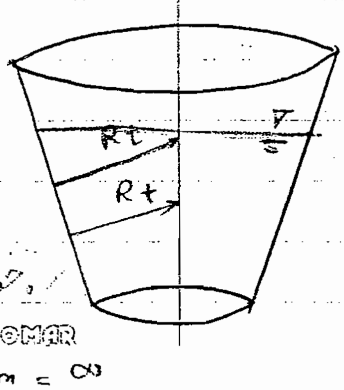
در نقطه A

با داشتن P

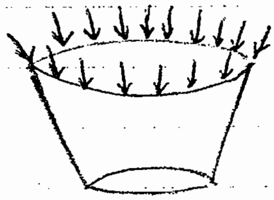
می توان σ را یافت

بارگذاری روی مخزن حتماً باید دوار باشد

اگر استوانه به طور افقی باشد نمی توان از این روش رفت

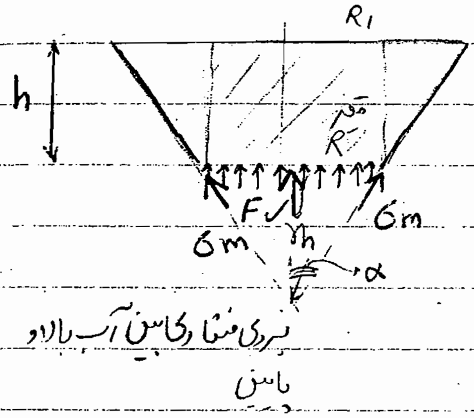


در خط



σ_m را از روی تعادل می یابیم؟

$R_m = \infty$



$$P = \gamma h$$

$$W_{\text{آب}} = V\gamma = (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})\frac{h}{3}$$

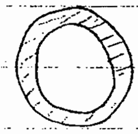
$$= (\pi R_1^2 + \pi R^2 + \pi R_1 R)\frac{h}{3}\gamma$$

$$F = \pi R^2 h \gamma$$ وزن آب بالای این مقطع

هم راستا جهت y

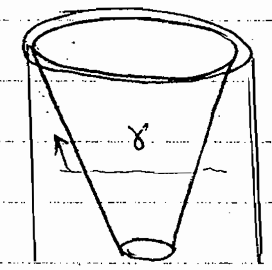
$$* \quad \int_0^{2\pi} \sigma_m \cdot tR\,d\theta \cos\alpha =$$ تصویر کردیم

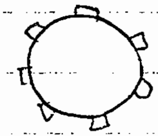
$$= \sigma_m t R(2\pi) \cos\alpha$$



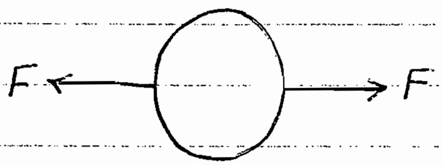
$$W - F = \sigma_m t (2\pi R) \cos\alpha$$

از بالا نگاه کنیم



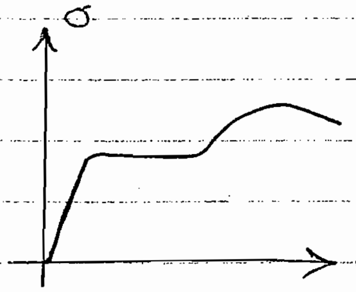


مثال :



?

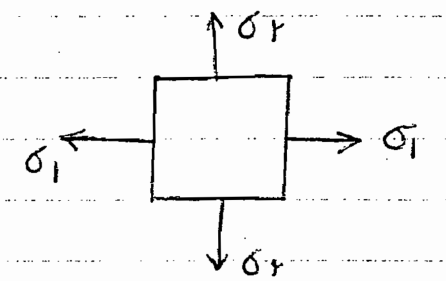
* تئوری های مقاومت 8

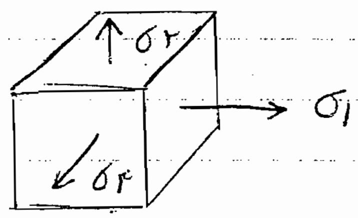


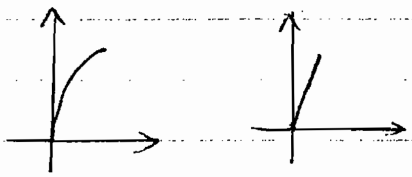
این نمودار را در مقاومت (۱) بررسی کردیم.

مقاومت در مقابل خرابی به چه چیزی بستگی دارد

می خواهیم ببینیم در حالت های دو بعدی و ۳ بعدی خرابی در کجاست؟







در جاهایی که مثل فولاد تسلیم دارند خرابی را با تسلیم یکی می گیرند

اما جاهایی مثل بتن و شیشه که تسلیم ندارند خرابی آنها را با پارگی یکی می گیرند؟

از این به بعد σ_0 را در نظر می گیریم اگر جسم تسلیم داشته باشد $\sigma_0 = \sigma_{yp}$ در غیر این صورت $\sigma_0 = \sigma_u$

* σ_0 را حد مقاومت می گویند؟

فرضیه های زیادی ارائه شده است بعضی از این فرضیه ها امروزه رد شده اند اما از نظر تاریخی مهمترین فرضیه ها را بحث می کنیم

* فرضیه اول :

در حالت های ۲ بعدی و ۳ بعدی هر وقت بزرگترین تنش بین σ_1 و σ_2 و σ_3 به تنش تسلیم رسید

تسلیم اتفاق می افتد و اگر به تاب رسید هم به تنش نهایی می رسد

این فرضیه ساده ترین فرضیه ای است که به ذهن می آید

این فرضیه را فرضیه تنش عمودی ماکزیمم یا فرضیه رانکین می گویند

در یک المان تنش های برشی هم داریم در این فرضیه تنش های اصلی را در نظر می گیرند

این فرضیه بعضی جاها جواب می دهد مثلاً در مورد شیشه و چدن نتایج نسبتاً قابل قبولی می دهد
آنجایی که σ_u دارند بهتر جواب می دهد

* فرضیه دوم : فرضیه پواسون

این فرضیه را فرضیه تنش [کرنش] خطی ماکزیمم می گویند :

حالت ۳ بعدی

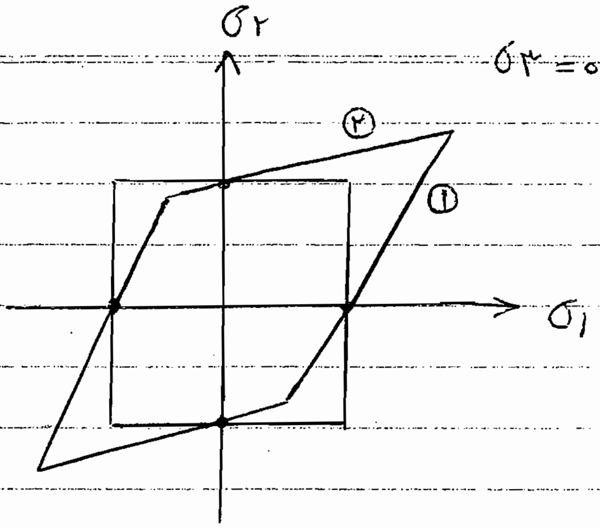
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\right]$$

بزرگترین تنش بین این ۳ را از روی بزرگترین کرنش در نظر می گیریم

ε معیار را از روی تنش معیار بدست می آورند یعنی $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$



$\sigma_3 = 0$

هرکدام از تنش ها که با σ_0 برابر شد در آن تنش خراب می شود ؛ یعنی σ ای را می تواند بپذیرد که داخل شکل باشد.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \qquad \text{if } \sigma_1 > \sigma_2 > 0$$

① $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ $\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \Rightarrow * \ \sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma_0$ خط ①

هرچه σ_1 بزرگتر باشد خط از σ_0 دورتر می شود ؛

② if $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ $\quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1$

$* \ \sigma_2 - \nu\sigma_1 = \cancel{\ } = \sigma_0$ خط ②

③ $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$ $\quad$ if $|\sigma_1| > \sigma_2$ $\quad \sigma_1 - \nu\sigma_2 = -\sigma_0$

در جاهایی که تنش ها هم علامت اند تنش های بیشتری را می توان اعمال کرد نسبت به فرضیه اول ؛

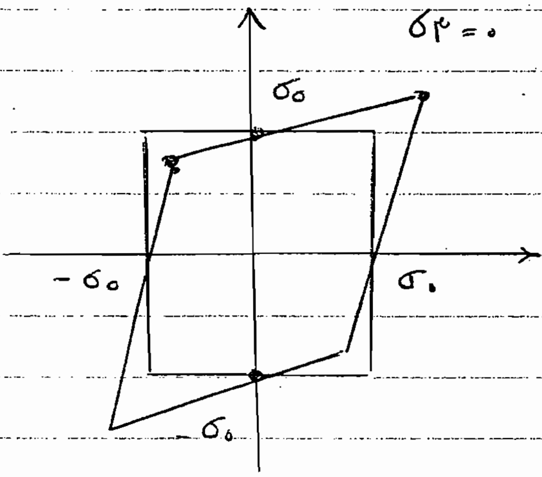
این فرضیه پواسن در خیلی جاها جواب درست نمی دهد ؛ نتیجه خوبی ندارد.

فرضیه های مقاومت :

۱- فرضیه تنش عمودی ماکزیمم (رانکین)

۲- " کرنش خطی ماکزیمم (پواسن)

۳- " برش ماکزیمم

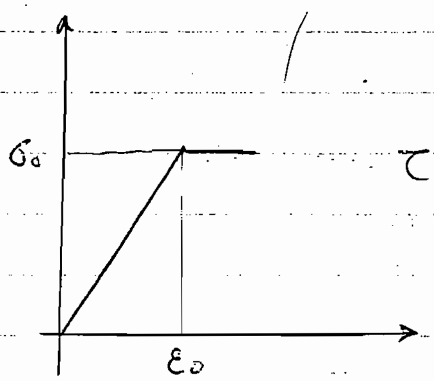


برش max : در این فرضیه برش را ملاک عمل قرار می دهد در رسیدن به حد مقاومت

یا فرضیه کوین ـ ترسکا

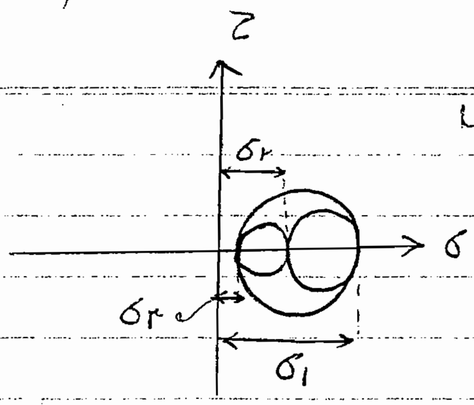
- در این فرضیه تنش و کرنش با هم متناسبند :

در برش τ_{xy} دارای γ_{xy} ، τ_{xz} دارای γ_{xz} است صفحات عمود بر آن روی γ این صفحه اثر ندارند



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2}$$

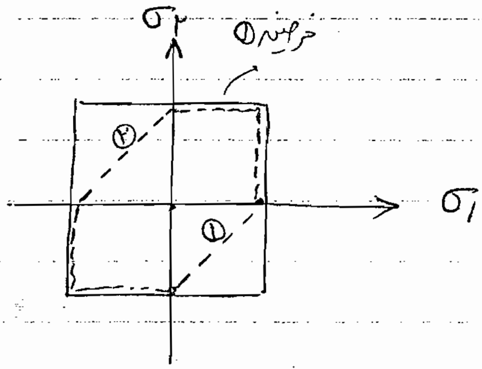
هرجا تنش برشی ماکزیمم به این مقدار برسد تسلیم داریم



در حالت ۳ بعدی

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

- اگر $\sigma_3 = 0$ باشد و $\sigma_1 > \sigma_2$ و هر دو مثبت باشند، بزرگترین تنش اصلی σ_1 و کوچکترین تنش اصلی σ_3 پس $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - 0}{2}$ و باید با $\frac{\sigma_0}{2}$ برابر باشد پس $\sigma_1 = \sigma_0$



- $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ پس $\tau_{max} = \frac{\sigma_2 - 0}{2}$ و $\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2}$ $\Leftarrow$ $\sigma_2 = \sigma_0$

- $\sigma_1 < \sigma_2 < 0$ $\Leftarrow$ $\tau_{max} = \frac{0 - \sigma_1}{2}$ و $\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2}$ $\Leftarrow$ $\sigma_1 = -\sigma_0$

پس در این ۴ منطقه فرضیه اول برقرار است؟

اگر $\sigma_1 > 0$ و $\sigma_2 < 0$ باشد

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_0}{2}$$

حالت ① $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0$ خط داریم به معادله

اگر $\sigma_1 < 0$، $\sigma_2 > 0$ باشد

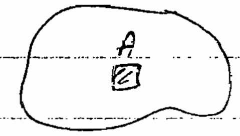
$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} = \frac{\sigma_0}{2} \quad ②$$

این فرضیه برای مصالحی که تسلیم دارند فرضیه خوبی است .

« به شکل ۶ صفحه است »

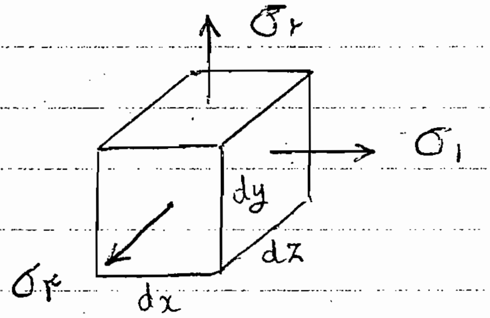
۴ـ فرضیه انرژی تنش واحد حجم : « بلترامی »

اگر یک نقطه بخواهد به تسلیم برسد انرژی در واحد حجم المان باید به معیار مورد نظر برسد ؟



$$u_{\text{معیار}} = \frac{\sigma_0^{2}}{2E}$$

در هر حالتی انرژی به این مقدار که برسد به تسلیم رسیده ایم



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

$$* \; \underbrace{U}_{\text{کل انرژی}} = (\overbrace{\sigma_1 dy dz}^{\text{نیرو}}) \cdot (\overbrace{\varepsilon_x dx}^{\text{تغییر مکان}})(1/2) + 1/2(\sigma_2 dx dz) \cdot (\varepsilon_y dy)$$

$$+ 1/2(\sigma_3 dx dy) \cdot (\varepsilon_z dz)$$

$\varepsilon_x = \varepsilon_1$ ، $\varepsilon_y = \varepsilon_2$ ، $\varepsilon_z = \varepsilon_3$

$$u_{\text{واحد حجم}} = \frac{U}{V} = 1/2(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)$$

$$\text{با جاگذاری داریم} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right]$$

$$u=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right]$$

که باید با $\frac{\sigma_0^2}{2E}$ برابر شود :

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)=\sigma_0^2$$

معادله یک بیضی گون است

در حالت ۲ بعدی معادله یک بیضی است : $\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\nu\sigma_1\sigma_2=\sigma_0^2$

روی یک خط با زاویه ۴۵° حرکت کردیم پس $\sigma_1=\sigma_2$ است.

در نقاط گوشه در ربع اول مختصات

$$* \quad \sigma'^2+\sigma'^2-2\nu\sigma'^2=\sigma_0^2$$

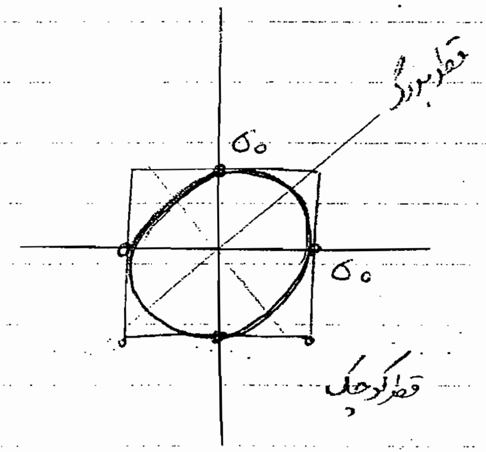
$$* \quad \sigma'^2=\frac{\sigma_0^2}{2(1-\nu)}$$

$$\Rightarrow \sigma'=\frac{\sigma_0}{\sqrt{2(1-\nu)}}$$

$$1-\nu>\tfrac{1}{2} \Rightarrow 2(1-\nu)>1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2(1-\nu)}>1$$

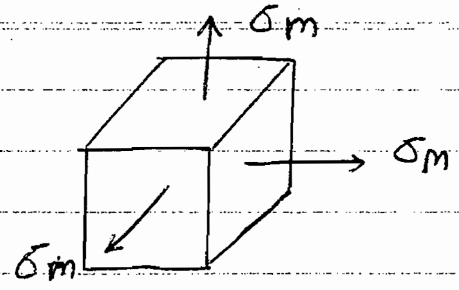
$$\Rightarrow \sigma'<\sigma_0$$



این فرضیه هم تقریباً با هیچ جسمی جور در نمی آید

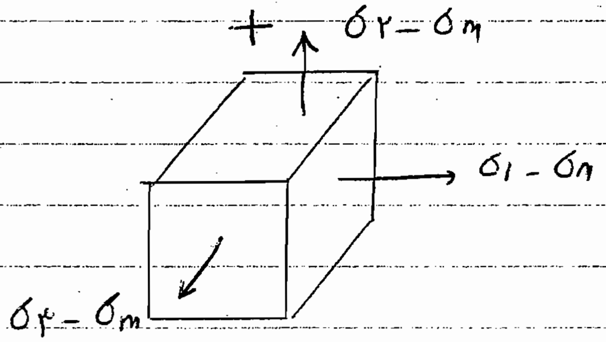
اما این فرضیه باعث شد تا فرضیه مهم و خوب دیگری با نام فرضیه انرژی بخش اعوجاج واحد حجم ارائه شد

۵ - انرژی کرنش اعوجاج واحد حجم 8



$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

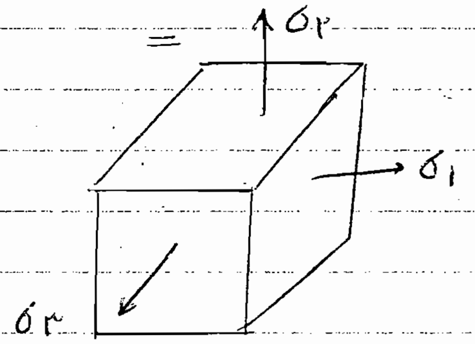
✓ این شکل اعوجاج ندارد چون برش نداریم
فقط تغییر حجم داریم



✓ این شکل تغییر حجم ندارد اگر ε_v
را حساب کنیم

$$\varepsilon_v = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \Rightarrow \varepsilon_v = 0$$

فقط اعوجاج دارد



فرضیه هوبر هنکی فون میسس

اگر یک تنش کروی داشته باشیم و از همه طرف حجم را تحت اثر تنش های مساوی قرار بدهیم اعوجاج نداریم پس انرژی کرنش اعوجاج ندارد پس طبق این فرضیه به تنش کروی هیچ وقت به تسلیم نمی رسد ؟

این فرضیه نسبت به فرضیه های دیگر قابل قبول تر است ؟

distortion اعوجاج

$$* \quad U_d = \frac{1}{2E}\Big[(\sigma_1-\sigma_m)^2 + (\sigma_2-\sigma_m)^2 + (\sigma_3-\sigma_m)^2 - 2\nu\big[(\sigma_1-\sigma_m)(\sigma_2-\sigma_m) + (\sigma_2-\sigma_m)(\sigma_3-\sigma_m) + (\sigma_3-\sigma_m)(\sigma_1-\sigma_m)\big]\Big]$$

$$u_d = \frac{1}{2E}\Big[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+3\sigma_m^2-2\sigma_m(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

$$+\ \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-3\sigma_m^2$$

$$\frac{2\sigma_1^2}{3}+\frac{2}{3}\sigma_2^2+\frac{2}{3}\sigma_3^2-\frac{2}{3}(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)$$

$$\underbrace{-2\nu\left[\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1+3\sigma_m^2-2\sigma_m(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\right]}$$

$$+2\nu\left[(-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1+3\sigma_m^2)\right]$$

$$+2\nu\left[\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{3}-\frac{\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1}{3}\right]$$

$$u_d=\frac{1}{3E}(1+\nu)\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3)\right]$$

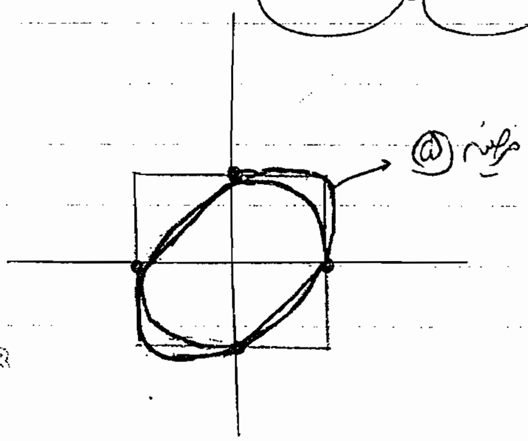
$$\sigma_2=\sigma_3=0 \Rightarrow u_d=\frac{\sigma_0^2(1+\nu)}{3E}$$

رابطه کلی

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\left[\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right]=\sigma_0^2$$

در فرضیه ④ ضریب 2ν داشتیم اما در اینجا نداریم.

دو بعدی :
$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2=\sigma_0^2$$



بیضی کشیده‌تر است
از داخل بیضی فرضیه ④ می‌گذرد

در واقع یک استوانه است که تا ∞ ادامه دارد

ولی فرضیه ④ یک منشور ۶ گون است

فرضیه ③ یک منشور است که محور آن همان محور استوانه است با هر ۳ محور زاویه های مساوی دارد

مقطع این فرضیه در حالت ۳ بعدی با صفحه یک شکل ۶ ضلعی است که تا ∞ ادامه دارد

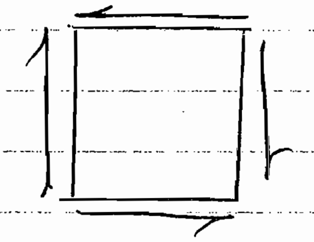
فرضیه یک مکعب است که محدود است تا ∞ نمی روند پس دارای اشکال است

مثلاً مواد در تنش کروی فشاری خراب نمی شود به تسلیم نمی رسد.

فرضیه دوم یک شکل متوازی السطوح است که حجم محدود دارد

۶ـ فرضیه مور بعداً توضیح داده می شود.

اگر حد مقاومت را بخواهیم بیابیم



$\sigma_1 = \tau$

$\sigma_2 = -\tau$

$\sigma_3 = 0$

خط با زاویه ۴۵° لازم

در برش خالص

فرضیه ① بیشترین مقاومت را دارد

فرضیه ③ از همه کمتر مقاومت دارد ۱۰ جلق خودار

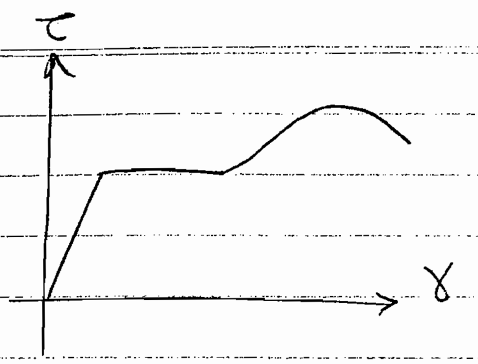
فرضیه ③ مقدارها کزیتیم را $\frac{\sigma_0}{2}$ می دهد

فرضیه فون - مسیس :

$$3\tau^2 = \sigma_0^2 \Rightarrow \tau = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

$$\tau = 0/577\,\sigma_0$$

POOMAR



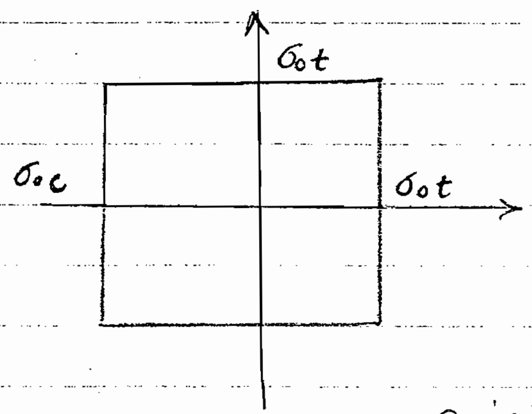
مقادیر مربوط به γ-τ تا حدود ۵۵-۶۰ درصد

مقادیر مربوط به ۴-۵ هستند

به عبارتی فرضیه فون میسس بهترین عددی است که با تجربه هم صادق است

* به عبارتی برای اجسامی که تسلیم دارند فرضیه ۵ بهترین فرضیه است؛

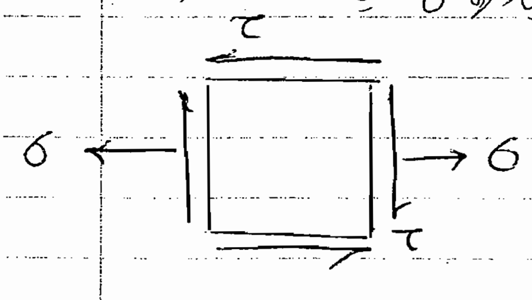
فرضیه ۳ و فرضیه ۵ این عیب را دارند که بین فشار و کشش تفاوتی نمی‌گذارند «تقارن دارند»

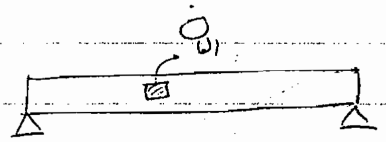


مثلاً فرضیه ۱ را می‌شود اصلاح کرد

در بعضی اجسام مثل مصالح بنایی که فشار را خوب تحمل می‌کند این فرضیه ① می‌شود مورد استفاده قرار بگیرد.

خیلی وقت‌ها تنش‌ها این حالت را دارند





دو فرضیه مهمی که باید بدانید ۳ و ۵ اند.

برای این الان این فرضیه‌ها را می‌نویسیم:

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_y = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}}$$

$$\sigma_{1,2} \quad \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \cdots$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \end{cases}$$ تنش های اصلی

* فرضیه ترسکا : تنش max

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\boxed{\sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_0^2}$$ برای یک تیر صادق است

* فرضیه فون میسس :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2$$

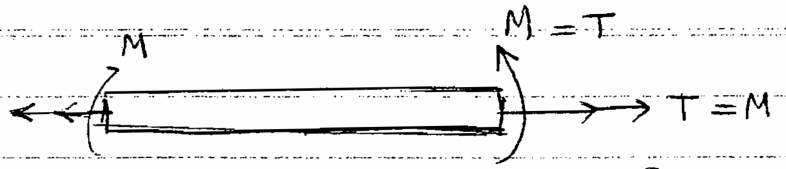
$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right)^2 + \left[\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right]^2 -$$

$$- \left(\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right)\left(\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}\right) = \sigma_0^2$$

$$\frac{\sigma^2}{4} + 3\left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2\right) = \sigma_0^2$$

$$\boxed{\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_0^2}$$

مثال ۴ میله‌ای داریم



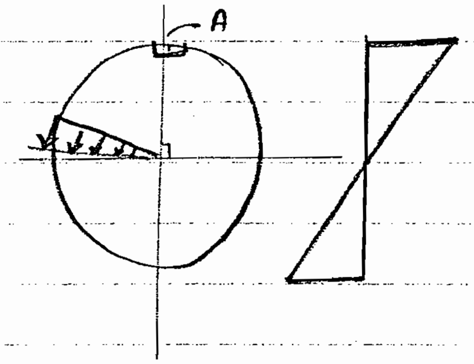
طبق فرضیه ۳ و ۵ چه مقدار M و T داریم؟
تا به مرحله تسلیم برسیم

$\sigma_{yp} = ۲۴۰۰ \ kg/cm^۲$

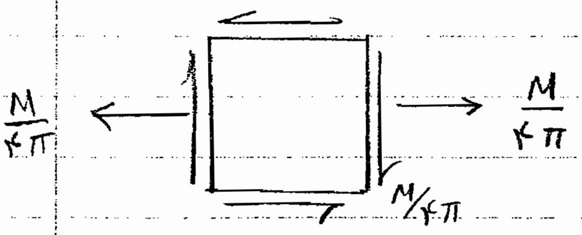
قطر میله $D = ۴ \ cm$

خمشی $\sigma_{max} = \frac{M}{W} = \frac{M}{\frac{\pi R^۳}{۴}} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{M}{۲\pi}$

پیچشی $\tau_{max} = \frac{۲T}{\pi R^۳} = \frac{۲T}{\pi (۲)^۳} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T}{۴\pi} = \frac{M}{۴\pi}$



یعنی اگر یک المان از A بیرون بیاوریم
هم σ max است هم τ



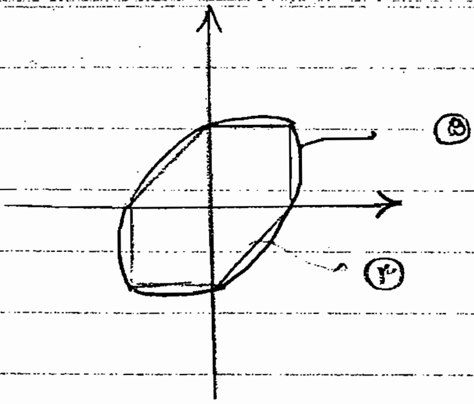
فرضیه ۳:
$$\left(\frac{M}{۴\pi}\right)^۲ + ۴\left(\frac{M}{۴\pi}\right)^۲ = (۲۴۰۰)^۲$$

$$\frac{M^۲}{۴\pi^۲} + \frac{M^۲}{۴\pi^۲} = (۲۴۰۰)^۲$$

$$M^۲ = (۲۴۰۰)^۲ \times ۲\pi^۲$$

$$M = ۲۴۰۰\pi\sqrt{۲} \ kg.cm$$

$$M = ۱۰۶۶۲$$



* هنکی فون میسس تنش‌های بیشتری را تحمل می‌کند

اگر کمتر بدست آوردید اشتباه کردید!

$$\left(\frac{M}{2\pi}\right)^2 + 3\left(\frac{M}{4\pi}\right)^2 = (2400)^2$$

$$\frac{M^2}{4\pi^2} + \frac{3M^2}{16\pi^2} = (2400)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 11399\ kg \cdot cm}$$

ممکن بود نیروها را بدهند و ضریب اطمینان را بخواهند در این صورت هر M و T را در یک K ضرب می‌کردیم و در رابطه بکار می‌بردیم

مثال: استوانه جدار نازکی (بسته) زیر اثر فشار داخلی $20\ kg/cm^2$ قرار دارد.

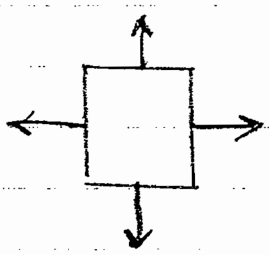
استوانه $D = 4\,(m)$

$t = 5\,(cm)$

$P = 20\ \frac{kg}{cm^2}$

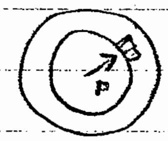
ضریب اطمینان را تا خرابی بیابید؟ $\sigma_0 = 2400\ kg/cm^2$

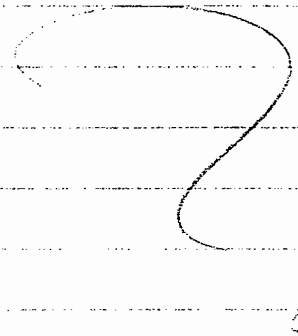
در استوانه جدار نازک دو تا تنش داریم طولی و محیطی

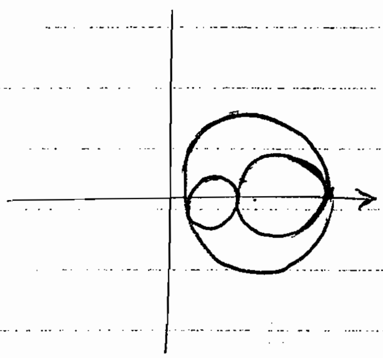


معمولاً کافی است همین دو تنش را بگذاریم ولی گاهی اوقات المان را ۳ بعدی می گیرند.

تنش P را هم در نظر می گیرند





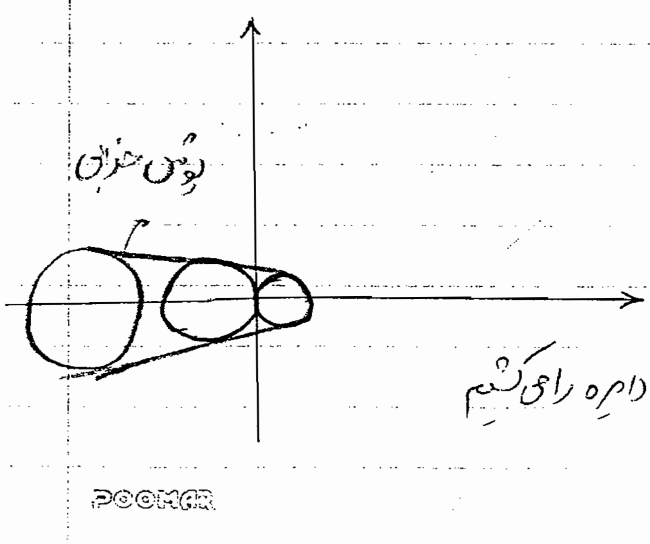


۶- فرضیه مور 8

فرضیه مور بیان می کند که دایره بزرگ عامل خرابی است

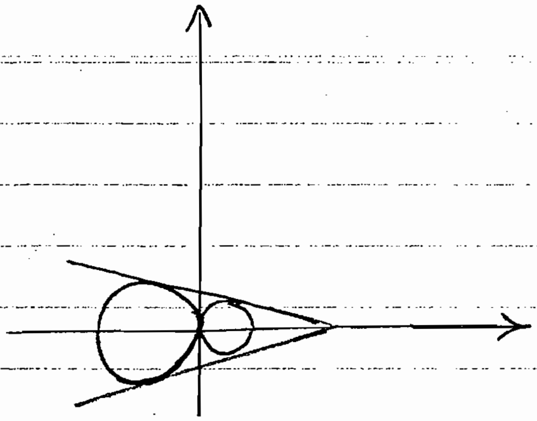
هر نقطه روی دایره بزرگ نظیر یک صفحه است
این فرضیه بیشتر در بتن و خاک استفاده می شود

خاک که خراب می شود صفحه آن معلوم است ؟



خرابی در جایی است که پوش مماس است

برای تعیین پوش باید یک منحنی را بر این دوایر مماس کرد در حالت های بعدی که تنش ها را اضافه می کنیم دایره را می کشیم اگر مماس شد خرابی اتفاق می افتد اگر مماس نشد خیر.



* حالت ساده این است که پوش را یک خط بگیریم

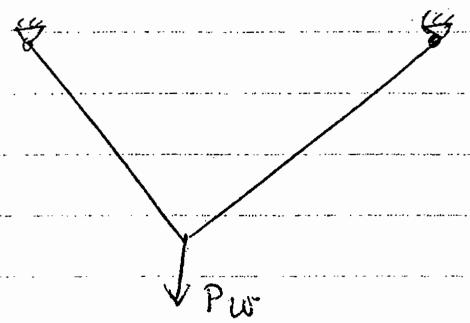
برای خاک رس فرضیه خیلی خوبی است
اما برای فولاد بکار نمی رود

اگر خاک را نگذاریم از یک طرف منبسط شود بیشتر تنش می توان به آن وارد کرد

بار نهائی 8

حداکثر باری که یک سازه می تواند تحمل کند

به نظر می آید که باید ضریب اطمینان باید عددی باشد که اگر در بار مجاز ضرب شود می شود بار نهائی اما خواهیم



دید که در تمام سازه ها این طور نیست

یکی از میله ها تنش آن با تنش مجاز مساوی می شود

$\sigma = \sigma_w$ در یکی از میله ها

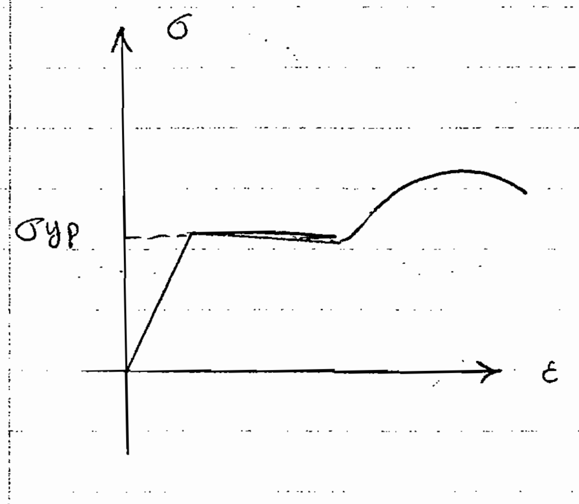
اگر بار P_w را در ضریب اطمینان ضرب کنیم تنش در همان میله ای که تنش آن با مقدار مجاز برابر بود

می شود $k\sigma_w$ از طرفی $k\sigma_w$ می شود $\underline{\sigma_{yp}}$ ؛

وقتی که یکی از میله ها به تنش تسلیم می رسد

$$P \xrightarrow{S.F} kP_w$$
$$\sigma \rightarrow k\sigma_w = \sigma_{yp}$$

اگر بار را بخواهیم اندکی بیشتر کنیم تنش نمی تواند

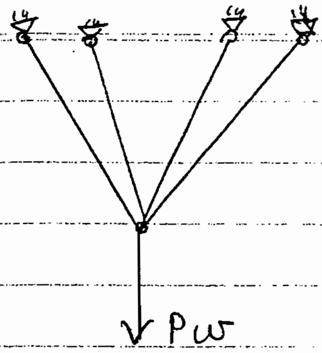


زیاد شود و ε بدون افزایش تنش زیاد می شود

و تغییر طول زیاد داریم به عبارتی خراب می شود

چون تغییر شکل هایی داریم که بدون افزایش

نیرو به وجود می آیند



این سازه هیپراستاتیک است

باز هم تنش یکی از میله‌ها با تنش مجاز برابر خواهد بود

و اگر بار را در k ضرب کنیم تنش همان میله k برابر

می‌شود که با تنش تسلیم برابر می‌شود؟

$P_w \longrightarrow P_w k$

$\sigma = \sigma_w$ یکی از میله‌ها

$\sigma = k\sigma_w = \sigma_{yp}$

میله‌ای که به تنش تسلیم رسید دیگر بار آن اضافه نمی‌شود

در سازه معین میله‌ای که به تنش تسلیم رسید باعث می‌شود که نتوان بار را اضافه کرد

اما در سازه نامعین میله‌ای که به تنش تسلیم رسید دیگر بار اضافی نمی‌گیرد اما بقیه میله‌ها بار می‌توانند بگیرند

تا موقعی که فقط یک میله باقی بماند که به تسلیم نرسیده است

پس بارهای ما باید بزرگتر از $P_w k$ باشد

$P_u \geq P_w k$

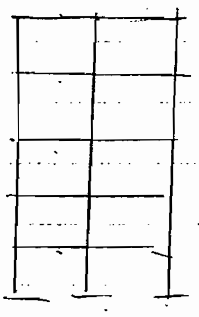
در حالت خاص مساوی است
ممکن است در حالت اول به جای این
که یک میله به تنش مجاز برسد ۳ میله
با هم به مجاز رسند پس ۳ میله با هم
به تسلیم می‌رسند و بارهای همان بار مجاز
می‌شود

ولی در سازه معین $P_u = P_w k$

در سازه نامعین در مورد ضریب اطمینان نمی‌توان نظر داد

پس در طراحی‌ها ما را دچار شک و تردید می‌کند که نتوانیم یک ساختمان

را با یک ساختمان دیگر مقایسه کنیم؟



حداقل یک نقطه هست
که در بارهای معمولی
به تنش مجاز رسیده است
وقتی در ضریب اطمینان
ضرب می‌شود به تسلیم می‌رسد
ولی اگر یک نقطه به تسلیم برسد دلیل بر خرابی نیست

یعنی شده که آیین نامه‌ها به طرف طراحی با بار نهایی می‌روند یعنی اول بینیم که چقدر بار می‌تواند تحمل کند

بعد ضریب اطمینان را تعیین کنیم یا اگر بار را داریم P آن را در ضریب اطمینان دلخواه ضرب می‌کنیم

در این صورت سازه را برای بار نهایی KP طراحی می‌کنیم ؛

به این روش طرح خمیری یا طرح پلاستیک می‌گویند که برعکس طرح تنش مجاز است ؛

آیین نامه‌های الان یعنی به چند سال پیش دیگر طرح با تنش مجاز را قبول ندارند از این روش استفاده می‌کنند

در بتن آرمه در مقاومت ۲ از روش تنش مجاز استفاده کردیم اما در درس بتن آرمه از طرح پلاستیک استفاده

می‌کنند روش طرح خمیری اولین بار در سال ۱۹۵۶ برای سازه فلزی مطرح شد ولی برای سازه‌های

بتن آرمه زودتر بکار رفت الان در طرح سازه‌های فولادی روش خمیری و تعدیل شده خمیری داریم که

به آن LRFD می‌گویند ؛

تا چند سال پیش بعضی سازه‌ها را اجازه می‌دادند با تنش مجاز حل کنیم اما امروزه از طرح خمیری استفاده

می‌کنیم ؛

برای حل برعکس عمل می‌کنیم می‌نویسیم که یک میله باید الاستیک بماند اگر هم کاهش مد نظر ما باشد و هم تسلیم باید

۳ میله حذف شوند ؛

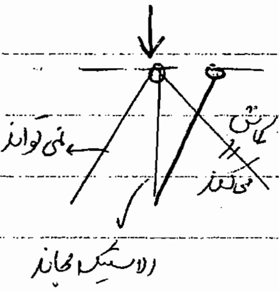
۱- شرط مکانیزم یعنی به تعداد کافی میله به تسلیم رسیده باشد و از پایداری خارج شود

* مکانیزم : به سیستمی که حرکت داشته باشد گویند ؛

۲ - شرط تعادل

۳ - شرط تسلیم ((یا کمانش)) یعنی تنش را بالاتر از تنش تسلیم بدست نیاوریم
یا بار بیشتری از کمانش بدست نیاوریم در هر میله.

۴ - شرط تغییر شکل ها   باید هم کشش را در نظر بگیریم هم فشار

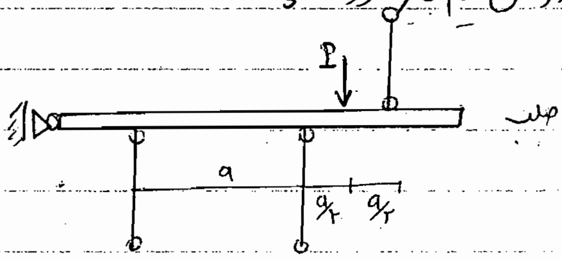


شرط کمانش در
این مثال مهم است
ولی شرط تسلیم می تواند
هم مهم باشد

برای فشار دو نکته است یکی رسیدن به کمانش یکی تسلیم
در کشش فقط تسلیم مطرح است

* میله ای که الاستیک در نظر گرفتیم تنش آن نباید از تنش تسلیم بیشتر شود؟

مثال:

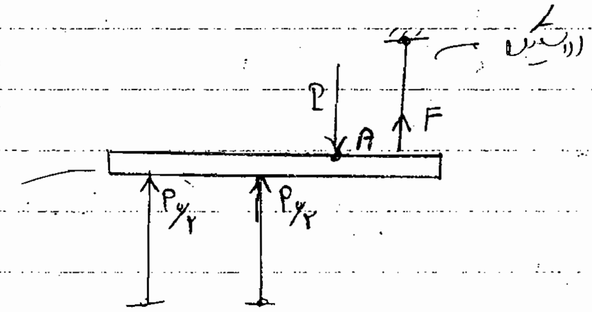


در کشش تسلیم تمام میله ها باید باشد P_0
در فشار

در کمانش «فشار» $P_E = P_0/2$

با این فرض در فشار همه میله ها کمانش می کنند چون بار کمانشی از بار تسلیم فشاری کمتر است؛
و تسلیم در کشش اتفاق می افتد و نه در فشار.

باید حداقل ۲ میله به تسلیم یا کمانش برسد؟

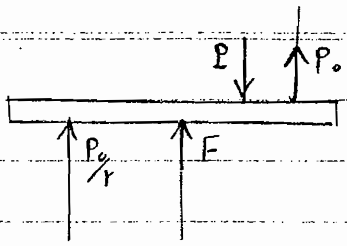


دو میله باقی را فرض کردیم کمانش کنند؛

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 0/5\, Fa = \frac{P_0}{2} a + \frac{3P_0}{2} a \Rightarrow \boxed{F = 2P_0}$$

در این میله نیرویی داریم که از P_0 بیشتر است پس مخالف شرط تسلیم است؛
شرط مکانیزم رعایت شده چون یک میله الاستیک داریم

②



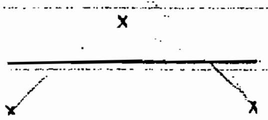
تسلیم

F را الاستیک گرفتیم !

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F\frac{a}{2} + \frac{3}{4}P_0 a = P_0\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow F = -\frac{P_0}{2}$$

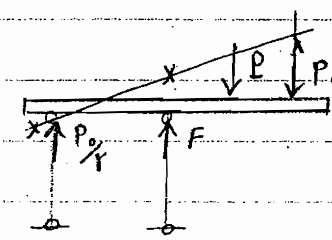
پس F کششی است !



صلب است
نمی تواند خم شود

اما از نظر تغییر شکل ناسازگار است !

③



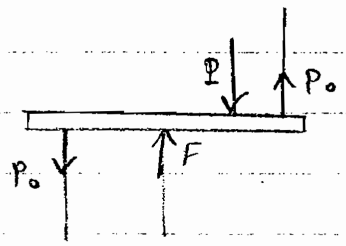
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F\frac{a}{2} + P_0\left(\frac{3}{4}\right)a + \frac{P_0}{2}\left(\frac{1}{2}a\right) = 0$$

$$\Rightarrow F = -2P_0$$

باز هم تسلیم برقرار نیست

اما شرط تغییر شکل برقرار است

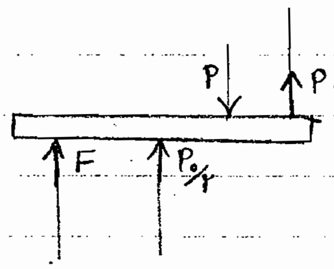
④



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F\frac{a}{2} - \frac{3}{2}P_0 a = P_0\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow F = 4P_0 > \frac{P_0}{2}$$

برقرار نیست



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \frac{P_0}{2}a - \frac{P_0}{2}\frac{a}{2} - F\left(\frac{3}{2}a\right) = 0$$

$$F = \frac{P_0}{6} < \frac{P_0}{2}$$

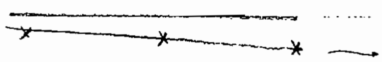
F هم فشاری است هم از بار کششی کمتر است شرط قابل قبول است

۱- مکانیزم ✓

۲- تعادل ✓

۳- شرط تسلیم $P_0/6$

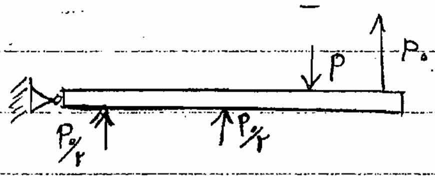
۴- « تغییر شکل



تغییر شکل

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{P_0}{6} + \frac{P_0}{2} - P + P_0 = 0 \Rightarrow \boxed{P_u = \frac{5P_0}{2}}$$

اگر بعد های شکل مفصل بود چون بزرگ را به سمت پایین داشتیم مسئله خیلی راحت تر حل می شود



چون در فشار کمانش زودتر اتفاق
می افتد مسئله های فشاری را فقط
برای کمانش محاسبه می کنیم :

در حالت کلی مسئله بیشتر از یک جواب ندارد

* اگر در یک مسئله شرط مکانیزم و تعادل را رعایت کردیم P ای که از این دو شرط بدست می آید ممکن است

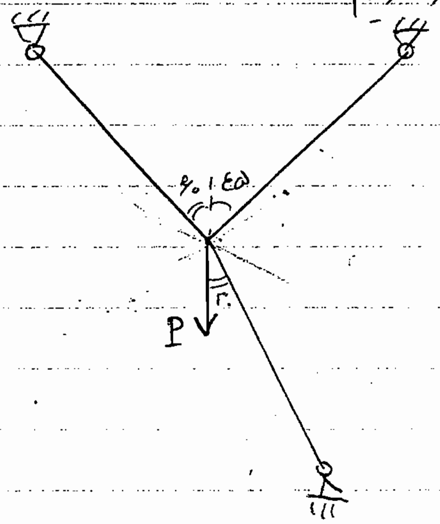
$P \geq P_u$ (نهایی) باشد شرط تغییر شکل را می توان رعایت کرد یا نه کرد علامت تساوی برای وقتی است که شاید دو شرط دیگر رعایت شده باشند

* اگر شرط تعادل و تسلیم را رعایت کردیم مکانیزم رعایت نشود P بدست آمده از P_u کوچکتر است

اگر ندانیم مکانیزم شده یا نشده $P = P_u$ است

ولی وقتی هر ۴ شرط را رعایت می کنیم یک جواب بیشتر نداریم

دنبال ؟



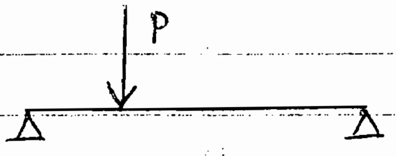
* تسلیم ← P_0
کمانش ← $\frac{P_0}{2}$

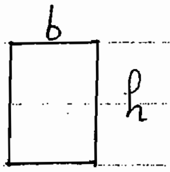
تسلیم ← P_0
کمانش ← ۱/۵P_0

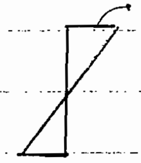
در حالت نهایی همه به تسلیم می رسند
- در واقع مثل این است که از کمانش صرف نظر می شود.

* خمش 8

خمش مهمترین عامل در طراحی سازه هاست



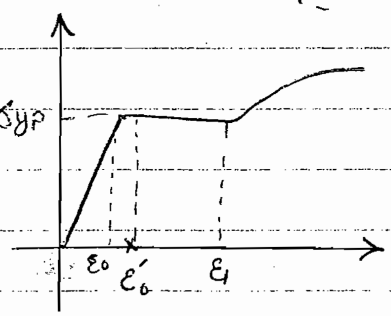


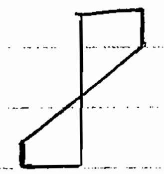


$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{w}$

$w = \frac{bh^2}{6}$

تا وقتی این رابطه خطی را می توان نوشت که حتی $\sigma - \varepsilon$ را خطی بگیریم و تنش max از تنش تسلیم بیشتر نشود

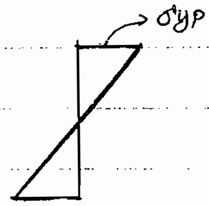




تنش همینطور از بالا به پایین یا پایین به بالا خطی است
مثلاً اگر به ε_0 رسیدیم تنش همان تسلیم است
تا جایی که به ε_1 برسیم

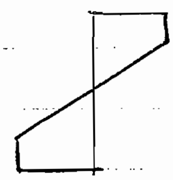
در سازه های خمشی تا وقتی بارها کمند تنش خطی است

اما اگر $\sigma_{yp} = \frac{M_{max}}{\frac{bh^2}{6}}$ برابر شود اگر $M_{max} = \sigma_{yp}\frac{1}{6}bh^2$ باشد تنش در بالا می شود تنش تسلیم یعنی بار را



این شکل در لبه مرز هستیم

اما اگر $M > \sigma_{yp}.\frac{bh^2}{6}$ باشد σ

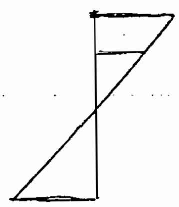


چون تیر که خم می شود در هر حال کرنش خطی است

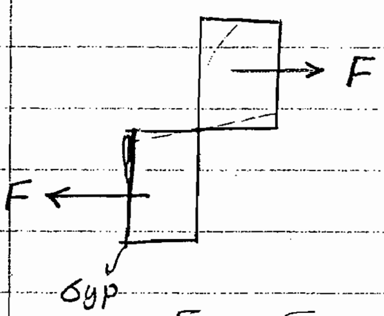
$* \quad \varepsilon = \frac{-y}{\rho}$

این رابطه به پلاستیک شدن مقطع کاری ندارد

ε



$$* \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{yp}}{E}$$



وقتی بار زیاد می‌شود در نهایتا
بیشترین تنشی که می‌گیرد این
حالت است

$$F = \sigma_{yp} \cdot \frac{bh}{2}$$

مساحت تنش ها

$$M_F = \sigma_{yp} \cdot \frac{bh^2}{4}$$

بیشترین لنگری است که می‌شود تصور کرد مقطع
می‌تواند داشته باشد؟

این لنگر را لنگر پلاستیک - خمیری کامل گویند

یعنی اگر خمیری شود <u>حداکثر لنگر</u> در این مقدار است؟

M_F ۱/۵ برابر M_{max} شده

یعنی از وقتی مقطع شروع به پلاستیک شدن کرده M_0 برابر $\sigma_{yp}\frac{bh^2}{6}$

بود وقتی پلاستیک کامل شد $M_P = \sigma_{yp}\frac{bh^2}{4}$

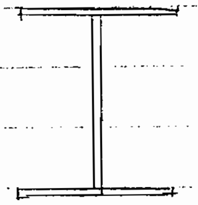
لنگر پلاستیک $M_p = \sigma_{yp}\frac{bh^2}{4}$

$\frac{bh^2}{4} = W_p$
مدول پلاستیک مقطع

ضریب شکل $\nu = \frac{M_p}{M_0}$

ν به شکل مقطع بستگی دارد

$\nu_{\text{مستطیل}} = ۱/۵$



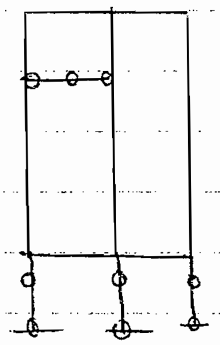
* ν = ۱/۱ حدود

یعنی خیلی سریع‌تر تمام مقطع پلاستیک می‌شود

در $\xrightarrow{\text{کشش}}$ تنش مجاز = $\frac{۳}{۵}$ تنش تسلیم

در جوش $\rightarrow$ σ_w = $\frac{۲}{۳}$ σ_{yp} تنش تسلیم

در آیین‌نامه‌ها معیار خیزی را هم در نظر می‌گیرند.



اگر در این مفصل‌ها
سازه به حالت پلاستیک
برسد این سقف خراب
می‌شود.
سعی می‌شود که یک‌سری تنش‌های
مجاز را تغییر می‌دهند در نتیجه
ضریب اطمینان در جوش با برش
یا پیچ فرق می‌کند.