$$\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \quad \text{با} \quad \frac{\partial \vec{\dot{r}_i}}{\partial \dot{q}_k}$$ -2 تناسب داراست

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k} = \sum F_i \frac{\partial \vec{\dot{r}_i}}{\partial \dot{q}_k}$$

مثال قبل: حل با استفاده از روش 2 :

$$\frac{\partial r_{G_1}}{\partial \theta_1}, \quad \frac{\partial r_{G_1}}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial r_{G_2}}{\partial \theta_1}, \quad \frac{\partial r_{G_2}}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial r_P}{\partial \theta_1}, \quad \frac{\partial r_P}{\partial \theta_2}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \vec{F}_{G_1} \frac{\partial \vec{r}_{G_1}}{\partial \theta_1} + F_{G_2} \frac{\partial \vec{r}_{G_2}}{\partial \theta_1} + F \cdot \frac{\partial \vec{r}_P}{\partial \theta_1}$$

$$Q_2 = F_{G_1} \frac{\partial r_{G_1}}{\partial \theta_2} + F_{G_2} \frac{\partial r_{G_2}}{\partial \theta_2} + F \cdot \frac{\partial \vec{r}_P}{\partial \theta_2}$$

3 - فقط برای نیروهای کانزرواتیو

$$Q_{kc} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$V = -mg\,\frac{L_1}{2}\cos\theta_1 - m_2 g\, l_1 \cos\theta_1 - m_2 g\,\frac{L_2}{2}\cos\theta_2$$

$$Q_{1c} = -\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2} m_1 g L_1 \sin\theta_1 - m_2 g\, l_1 \sin\theta_2$$

که چون F غیر کانزرواتیو است مؤلفه‌های آن را از این روش نمی‌توان حساب کرد

اصل کار مجازی برای تعادل استاتیکی

$$\vec{R}_i = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

برآیند نیروها

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \vec{\delta r_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\underbrace{\vec{F}_i}_{\text{برآیند نیروهای خارجی}} + \underbrace{\vec{F}_i'}_{\text{برآیند نیروهای داخلی}} \right) \delta r_i$$

$$\longrightarrow \delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{\delta r_i} + 0 = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{\delta r_i} = 0$$

اصل کار مجازی برای تعادل استاتیکی

کار مجازی نیروهای خارجی وارد بر یک جسم در تعادل استاتیکی برابر صفر است.

$$\Rightarrow \quad \delta W = \sum_{k=0}^{n} Q_k \, \delta q_k = 0$$

اگر سیستم بر حسب مختصات تعمیم یافته مستقل نمایش داده شود

$$\Rightarrow \quad Q_k = 0$$

اگر مختصات تعمیم یافته مستقل نباشد Q_k چه می شود (Q_k با معادله قید ارتباط پیدا می کند)

Sq_k ها نیز از همدیگر مستقل هستند.

$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + \cdots + Q_n \delta q_n = 0$$

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = 0 \qquad \text{باید ضرایب } \delta q_k \text{ برابر صفر شود:} \longleftarrow$$

دو روش استفاده از اصل کار مجازی

1 از مختصات فیزیکی استفاده شود و رابطه $\delta W = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta r_i = 0$

استفاده گردد .

2 یک دسته مختصات تعمیم یافته مستقل اختیار گردد و از

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

D'Alembert's principle اصل دالامبر

$$\sum F = ma$$

$$\sum F - m\vec{a} = 0$$

$$\sum F + \underbrace{f}_{-ma} = 0$$ اصل دالامبر

نیروی فرضی

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F_i} - m_i \vec{a_i}\right) \cdot \delta \vec{r_i} = 0$$

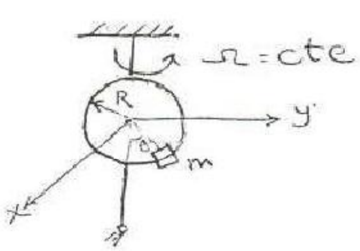
در کار مجازی نیازی به تعیین نیروهای داخلی سیستم نیست.

برای جسم صلب در حرکت صفحه‌ای:

$$\left(F - m a_G\right) \cdot \underbrace{\delta \vec{r}_G}_{} + \left(M_G - I_G \ddot{\theta}\right) \delta_\theta = 0$$

تغییر مختصات مرکز جرم

مثال : معادلات حرکت لغزنده در داخل رینگ را (با استفاده از اصل دالامبر و کار مجازی) بیابید.



دستگاه مختصات xyz متصل به حلقه

$$(F - ma)\, \delta \vec{r} = 0$$

$$\vec{r} = R\sin\theta\, j - R\cos\theta\, k$$

نسبت به قاب $\delta r = R\cos\theta\, \delta\theta\, j + R\sin\theta\, \delta\theta\, k$

$$\vec{V} = V_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$= R\dot{\theta}\cos\theta\, j + R\dot{\theta}\sin\theta\, k - R\Omega\sin\theta\, i$$

$$\vec{a} = a_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} + 2\omega\times r_{rel}$$

$$(F - ma)\,\delta r = 0$$

$$(-mg k - m\vec{a})\cdot(R\cos\theta\,\delta\theta\, j + R\sin\theta\,\delta\theta\,\hat{k}) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \sin\theta\left(g/R - \Omega^2(\theta)\right) = 0$$

Homiltons principle اصل هامیلتون

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \underbrace{\vec{F}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i}_{\downarrow} = 0 \quad *$$

کار مجازی نیروهای خارجی $\delta W = \sum F_i\,\delta\vec{r}_i$

$$T_i = \frac{1}{2}m_i\,\dot{\vec{r}}_i\,\dot{\vec{r}}_i \longrightarrow \delta T_i = m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i$$

از طرفی

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i\,\delta\vec{r}_i\right) = \ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i + \underbrace{\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i}_{\frac{1}{2}\delta(\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i)}$$

$$m_i \frac{d}{dt}\left(\vec{\dot{r}_i}\cdot\delta\vec{r_i}\right)=m_i\vec{\ddot{r}_i}\cdot\delta\vec{r_i}+m_i\vec{\dot{r}_i}\,\delta\vec{\dot{r}_i}$$

$$= m_i\ddot{r}_i\,\delta r_i+\delta T_i \quad **$$

$$\delta T-\sum_{K=1}^{N}\delta T_i=\sum \tfrac{1}{2}m_i\,\delta\left(\vec{\dot{r}_i}\cdot\vec{\dot{r}_i}\right)$$

$$\begin{matrix}*\\ **\end{matrix}\Rightarrow -\delta T-\delta W+\sum_{i=1}^{N}m_i\, d/dt\left(\vec{\dot{r}_i}\cdot\delta\vec{r_i}\right)=0$$

$$\Rightarrow \delta T+\delta W=\sum_{i=1}^{N}m_i\, d/dt\left(\vec{\dot{r}_i}\cdot\delta\vec{r_i}\right)$$

از رابطه فوق بین دو زمان t_1 و t_2 انتگرال می گیریم.

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T+\delta W)\,dt=\int\sum\ldots\ldots dt$$

$$=\int\sum m_i\, d\left(\vec{\dot{r}_i}\cdot\delta\vec{r_i}\right)=\sum_{i=1}^{N}\underbrace{m_i\dot{r}_i}_{\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i}}\cdot\delta r_i\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}(\delta T+\delta W)\,dt-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T_i}{\partial\vec{\dot{r}_i}}\,\delta\vec{r_i}\Big|_{t_1}^{t_2}=0$$

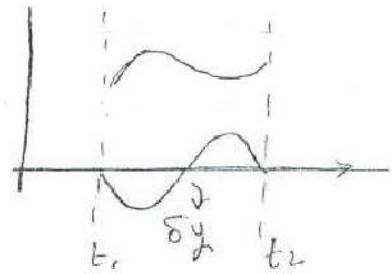
$\llcorner$ Hamilton's Principle of varying action

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\, \delta \vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\, \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\, \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W)\, dt = \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\, \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}}$$

فرض می‌شود که تغییرات δq_k در زمان t_1 و t_2 صفر است



$$\int_{t_1}^{t_2} (\underbrace{\delta T}_{\text{انرژی جنبشی}} + \underbrace{\delta W}_{\text{کار نیروهای خارجی}})\, dt = 0$$

Extended hemiltons Principle

$$\delta W = \delta W_{nc} - \delta V$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\underbrace{\delta T}_{\text{انرژی جنبشی}} - \delta V + \delta W_{nc})\, dt = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc})\, dt = 0$$

$$L = T - V$$

Lagrangian

اگر سیستم کالزداتیو باشد

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = 0$$

اگر قیود سیستم هولونومیک باشد.

در حالت کلی نمی توان جای انتگرال و s را عوض کرد.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0$$

تغییرات یک تابع صفر شده این نشان می دهد که این تابع max یا min شده است.

معادلات لاگرانژ

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T - \delta V + \delta W_{nc} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} = 0$$

$$L = L(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

$$\delta L = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right)$$

چون مجازی است st معنی ندارد چون t تغییر نمی کند.

$$\delta W_{nc} = \sum_{k=1}^{n} Q_{knc}\, \delta q_k$$

به روش جزء به جزء

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\, \delta \dot{q}_k\, dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\, \delta q_k \Big|_{\delta q_k(t_1)}^{\delta q_k(t_2)}$$

$\delta q_k = 0 \leftarrow$ فرض

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T - \delta V + \delta W_{nc} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{-d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_{knc} \right] \delta q_k\, dt$$

این انتگرال برای هر بازه‌ای برقرار است پس تابع درونی صفر شد

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{knC} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

معادلات لاگرانژ

یا
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{knc}$$

اگر یک مکانیزم داشته باشیم

در نیوتن

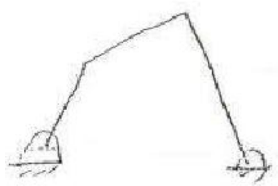
1-اجزاء را از هم جدا می کنیم و نیروهای قیدی وارد می شوند .

2-پیکر آزاد هر جسم را می کشیم.

3 معادلات را برای هر جسم بنویسیم.

4 سیتیک هر جسم را پیدا میکنیم.

5-معادلات را حل می کنیم.



در مکانیک تحلیلی

1 q_i ها را مشخص می کنیم.

2 محاسبه سرعت ها برای محاسبه انرژی جنبشی

3 تشخیص نیروهای کانیزواتیو و نافکاسزواتیو

4-محاسبه انرژی جنبشی ، پتانسل

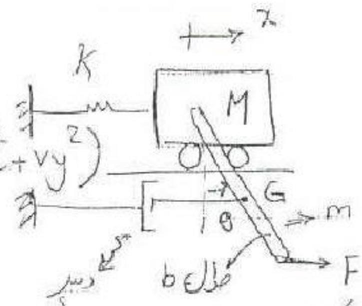
5-استفاده از معادلات لاگرانژ

مثال :

$$q_1 = x \qquad q_2 = \theta$$

$$T = \tfrac{1}{2} M \dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} M \left(v_x^2 + v_y^2 \right)$$

حول مرکز جرم



$$v_x = \frac{dx_G}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x + \frac{b}{2} \sin\theta \right) = \dot{x} + \frac{b}{2} \dot{\theta} \cos\theta$$

کشش فنر ضعیفی با برگرداندن سیستم به حالت تعادل

دمپر خاصیت بازگرداندن را ندارد

$$v_y = \frac{dy_G}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{b}{2}\cos\theta\right) = \frac{b}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m b \dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{6} m b^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mg\frac{b}{2}\cos\theta$$

نیروی کاردیر

$$\delta W_{nc} = F\delta r - \underbrace{C v_x}\delta x_G$$

$$= F\delta(x + b\sin\theta) - c\left[\dot{x} + \frac{b}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right]\left[\delta x + \frac{b}{2}\cos\theta\,\delta\theta\right]$$

$$= (\underbrace{\qquad\qquad}_{Q_x})\delta x + (\underbrace{\qquad\qquad}_{Q_\theta})\delta\theta$$

Q_x ← از نوع نیرو Q_θ ← از نوع گشتاور

$$Q_x = F - c\dot{x} - \frac{1}{2}cb\cos\theta$$

$$Q_\theta = Fb\cos\theta - \frac{1}{4}Cb^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta - \frac{1}{2}cb\dot{x}\cos\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial \theta},\ \frac{\partial T}{\partial x},\ \frac{\partial T}{\partial \theta},\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}},\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}$$

$mg\frac{b}{2}\sin\theta \longrightarrow$ ضریب $\dot{\theta}$ نداریم

حواست باشه!

$$(M+m)\ddot{x} + \frac{1}{2}mb\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{2}mb\dot{\theta}^2\sin\theta + c\dot{x} +$$

$$\frac{1}{2}cb\dot{\theta}\cos\theta + kx = F$$

$$\frac{1}{2}mb^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mb\ddot{x}\cos\theta + \frac{1}{2}Cbx\cos\theta + \cdots = Fb\cos\theta$$

سینماتیک جسم صلب در فضا (حرکت نسبی)

A-1 و B دو نقطه از جسم صلب در فضا

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB})$$

2-استفاده از سیستم مختصات واسط (xyz)

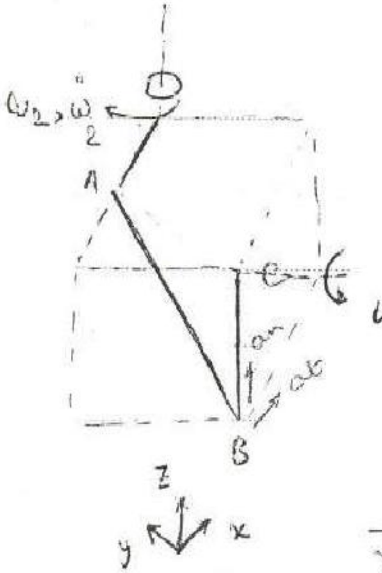
$$\vec{v}_A\Big|_{XYZ} = \vec{v}_A\Big|_{xyz} + \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_A$$

xyz سیستم مختصات متحرک

XYZ سیستم مختصات اصلی

بردار موقعیت A نسبت xyz

$$a_A\Big|_{XYZ} = \vec{a}_A\Big|_{xyz} + \ddot{\vec{R}} + 2\omega \times \vec{v}_A\Big|_{xyz} + \dot{\omega} \times \vec{\rho}_A + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho}_A$$



$\omega_1 = 6 \ rad/s$ ثابت

$\omega_2 = ?$ $\quad \omega_{AB} = ?$

$\dot{\omega}_2 = ?$ $\quad \dot{\omega}_{AB} = ?$

$AD = 50mm$

$BC = 100mm$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{\rho}_{AB}$$

$$50\omega_2 \hat{j} = 100(6)\hat{i} + (\omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k})_A (50\hat{i} + 100\hat{j} + 100\hat{k})$$

$$50\omega_z = 50\omega_y - 100\omega_x \quad (1)$$

$$0 = 600 + 100\omega_y - 100\omega_z \quad (2)$$

$$0 = 100\omega_x - 50\omega_y \quad (3)$$

رابطه اضافی $\vec{\omega}_{AB} \cdot \vec{\rho}_{AB} = 0$

$$(2) \longrightarrow \omega_z = 6 + \omega_y \quad (4)$$

$$(3) \longrightarrow \omega_x = 0.5\omega_y \quad (5)$$

$$4,5 \text{ into } 1 \quad \omega_2 = 6 \ rad/s$$

$$\omega_x = -4/3$$
$$\omega_y = -8/3$$
$$\omega_z = 10/3$$

WAB در راستای AB عمود بر AB تجزیه می کنیم مولفه ای از WAB که در راستای میله AB است تاثیری بر حرکت و سینماتیک کل مسئله نمی گذارد پس می توانیم فرض کنیم که این مولفه صفر است و WAB فقط در راستای عمود بر AB است.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{BA} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{BA} \qquad **$$

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{\rho}_{CB} + \vec{\omega}_1 \times \omega_1 \times \rho_{CB} = 0 + (-6\hat{j}) \wedge (-6\hat{j} \times (-100\hat{k}))$$
$$= 3600\hat{k}$$

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{\omega}}_2 \times \vec{\rho}_{DA} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{DA})$$
$$= -6k \times (-6k \times (-50i)) = +50\dot{\omega}_2\hat{j} + 1800\hat{i}$$

جایگذاری در ** $\Rightarrow$

$$50\dot{\omega}_2\hat{j} + 1800\hat{i} = 3600\hat{k} + (\dot{\omega}_x\hat{i} + \dot{\omega}_y\hat{j} + \dot{\omega}_z k)$$
$$\times (50\hat{i} + 100\hat{j} + 100\hat{k}) + (-4/3\hat{i} - 8/3\hat{j} + \frac{10}{3}\hat{k}) \times$$
$$[(-4/3\hat{i} - 8/3\hat{j} + 10/3\hat{k}) \times (50\hat{i} + 100\hat{j} + 100\hat{k})]$$

$$28 = \dot{\omega}_y - \dot{\omega}_z$$

$$\dot{\omega}_2 + 40 = -2\dot{\omega}_x + \dot{\omega}_z$$

$$-32 = 2\dot{\omega}_x - \dot{\omega}_y$$

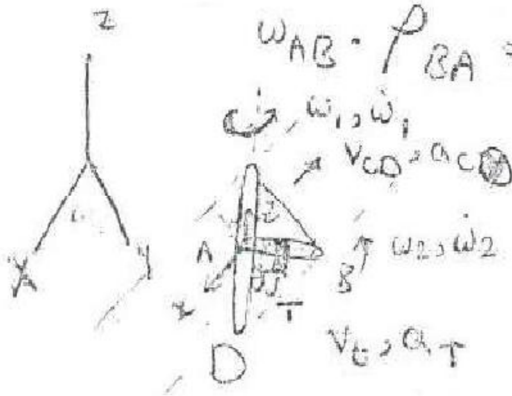
$$\dot{\omega}_x = -8$$

$$\dot{\omega}_y = 16$$

$$\dot{\omega}_z = -12$$

$$\dot{\omega}_2 = -36$$

$$\omega_{AB} \cdot \vec{\rho}_{BA} = 0$$



CD حول AB

$\dot{\omega}_1 = 0.8$ $\quad \omega_2 = 0.4$

$\omega_1 = 0.5$ $\quad \dot{\omega}_2 = 0.6$ $\rightarrow$ نسبت به جسم CD

$V_T = 3 \ m/s$

$a_T = 5 \ m/s^2$ $\rightarrow$ نسبت به جسم AB

$V_{CD} = 8 \ m/s$ $\quad a_{CD} = 9 \ m/s$

$AT = 3 \ m$

حل: a_T و $v_t = ?$

xyz متصل به AB مبدأ A

XYZ متصل به زمین

$$v_T\Big|_{XYZ} = v_t\Big|_{xyz} + \vec{\dot R} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_T$$

$$= 3j - 8i + (0.5\hat{k} + 0.4i)\times 3j$$

$$= -9.5i + 3j + 1.2\hat{k}\ (m/s)$$

$$a_T\Big|_{XYZ} = \vec{a}_T\Big|_{xyz} + \vec{\ddot R} + 2\omega\times v_{T\,xyz} + \dot\omega\times\rho_T + \omega\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_T)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

$$\vec{\dot\omega} = \underbrace{\vec{\dot\omega}_1 + \vec{\dot\omega}_2 = 0.8\hat{k}}_{} + 0.6\hat{i} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\times\vec{\omega}_2$$

$$= 0.6\hat{i} + 0.8\hat{k} + 0.2\hat{j}$$

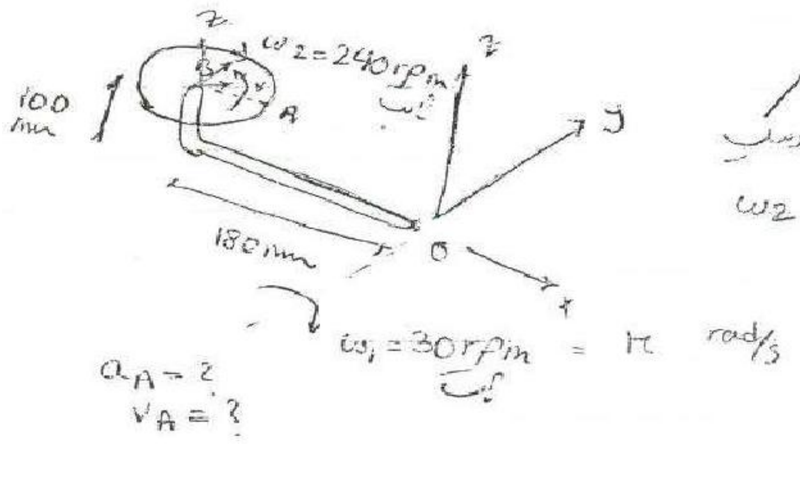
$$\frac{dA}{dt}\Big|_{XYZ} = \frac{dA}{dt}\Big|_{xyz} + \vec{\omega}\times\vec{A}$$

سرعت دورانی مختصات متحرک xyz نسبت به XYZ

$$a_T\Big|_{XYZ} = 5\hat{j} - 6\hat{i} + 2(0.5\hat{k} + 0.4i)\times 3\hat{j}$$

$$+ (0.6\hat{i} + 0.2\hat{j} + 0.8\hat{k})\times(3\hat{j}) + (0.5\hat{k} + 0.4\hat{i})$$

$$\times\left[(0.5\hat{k} + 0.4\hat{i})\times 3\hat{j}\right] = -14.4i + 3.77j + 4.2\hat{k}\ (m/s^2)$$



شعاع دیسک = 100 mm

$\omega_2 = 8\pi\ rad/s$

$a_A = ?$

$v_A = ?$

روش اول : A و B دو نقطه جسم صلب

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{BA}$$

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_{OB} = \pi \hat{j} \times (-180\,\hat{I} + 100\,\hat{k})$$

$$= 180\pi\,\hat{k} + 100\pi\,\hat{I}$$

$$\vec{V}_A = 180\pi\,\hat{k} + 100\pi\,\hat{j} + (\pi\hat{j} + 8\pi\hat{k}) \times (100\,\hat{I})$$

$$= \pi\,(100\,\hat{I} + 800\,\hat{j} + 80\,\hat{k}) \quad mm/s$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{BA})$$

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{\rho}_{OB} + \vec{\omega}_1 \times (\omega_1 \times \rho_{OB})$$

$$= 0 + \pi\hat{j} \times (\pi\hat{j} \times (-180\,\hat{I} + 100\,\hat{k}))$$

$$= 180\pi^2\,\hat{I} - 100\,\pi^2\,\hat{k}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 = 0 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$$

$$= (\pi\hat{j}) \times (8\pi\hat{k}) = 8\pi^2\,I$$

$$\vec{a}_A = 180\pi^2\,\hat{J} - 100\pi^2\,\hat{k} + 8\pi^2 I \times (100\,\hat{I})$$

$$+ (\pi\hat{j} + 8\pi\hat{k}) \times [(\pi\hat{j} + 8\pi\hat{k}) \times (100\,\hat{I})]$$

$$= -\pi^2\,(6320\,\hat{I} + 100\,\hat{k}) \quad mm/s^2$$

روش دوم : استفاده از سیستم مختصات واسط

xyz : سیستم مختصات واسط متصل به OB و مبدأ در B

XYZ : **سیستم مختصات اصلی (متصل به زمین)**

$$\vec{V}_A\Big|_{XYZ} = \vec{V}_A\Big|_{xyz} + \dot{\vec{R}} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_A$$

$$= 100\times 8\pi\, j + (180\pi\hat{k} + 100\pi\, i) + \pi j \times 100\hat{i}$$

$$= \pi(100\hat{i} + 800\hat{j} + 80\hat{k}) \quad m/s$$

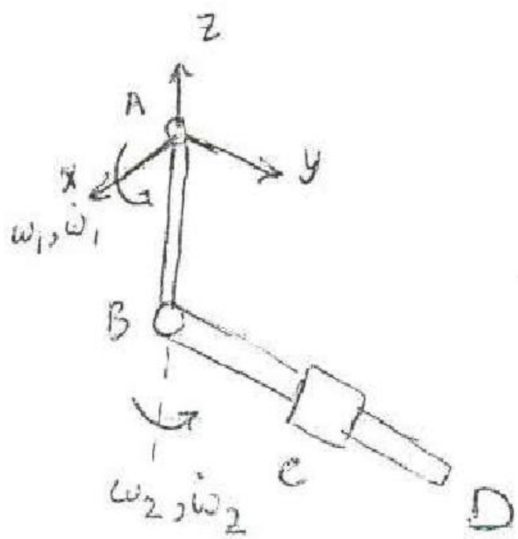
$$a_A\Big|_{XYZ} = a_A\Big|_{xyz} + \ddot{\vec{R}} + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_A\Big|_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\rho_A + \omega\times(\omega\times\rho_A)$$

$$a_A\Big|_{XYZ} = -(100)(8\pi)^2\, i + 180\pi^2\,\hat{i} - 100\pi^2\,\hat{k}$$

$$+\ 2(\pi\hat{j})\times(100)\,8\pi\hat{j} + \pi\hat{j}\times(\pi j\times 100\, i)$$

$$= -\pi^2(6320\,\hat{i} + 100\,\hat{k})$$

شکل زیر را در نظر بگیرید عضو AB تنها در صفحه YZ می تواند حرکت دوران محض داشته باشد با سرعت دورانی W_1 و W_2 . عضو BD در لحظه نشان داده شده دارای چرخش حول عضو AB می باشد که سرعت زاویه و شتاب زاویه آن نسبت به عضو AB ، W_1 و W_2 می باشد لغزنده C روی عضو BD دارای سرعت و شتاب نسبت به عضو BD برابر با V_c و a_c می باشد شتاب و سرعت لغزنده را تعیین کنید.



$AB = 0.5\,m$

$BC = 0.2\,m$

$\omega_1 = 4\ rad/s$

$\dot{\omega}_1 = 1.5\ rad/s^2$

$\omega_2 = 5\ rad/s$

$\dot{\omega}_2 = -6\ rad/s^2$

$v_C = 3\ m/s$

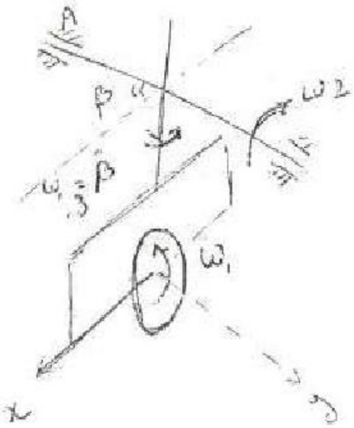
$a_C = 2\ m/s^2$

ans: $\vec{v}_C = -i + 5j + 0.8k$

$a_C = -28.8i - 5.48j$

$32.3K + 5.4 \ldots$

با توجه به شکل روبرو چرخ با سرعت زاویه ثابت W_1 حول محور خود می گردد کل مکانیزم با سرعت زاویه متغیر W_2 حول محور نشان داده شده در شکل (محور AB) در حال چرخش است. محور تاب چرخ با محور AB زاویه B می سازد که تابع دلخواهی از زمان است شتاب زاویه ای چرخ را بدست آورید.



$$\omega_{wheel} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

$$\alpha_{wheel} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 + \dot{\vec{\omega}}_3$$

سیستم ثابت
وابسته به زمین

$$\dot{\omega}_1 = 0 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \omega_1$$

$$= (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \wedge \vec{\omega}_1$$

$$= (\omega_2 \cos\beta\, i - \omega_2 \sin\beta\, \hat{j} + \dot{\beta} k) \times (\omega_1 \hat{i})$$

$$= \omega_1 \omega_2 \sin\beta\, k + \omega_1 \dot{\beta}\, \hat{J}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2 \cos\beta\, i - \dot{\omega}_2 \sin\beta\, \hat{J}$$

(وابسته متصل به زمین)

سیستم دوار متصل به قاب

$$\dot{\vec{\omega}}_3 = \ddot{\beta} k + (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \wedge \vec{\omega}_3$$

که جهت دستگاه ثابت است
جهت بردار ثابت است

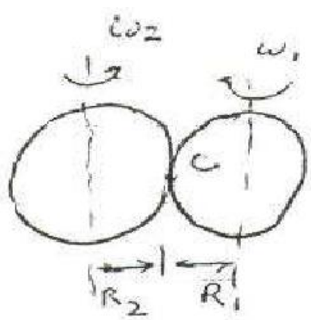
$$= \ddot{\beta} k + (\omega_2 \cos\beta\, i - \dot{\omega}_2 \sin\beta\, j) \wedge \dot{\beta} \hat{k}$$

$$= \ddot{\beta} k - \omega_2 \dot{\beta} \cos\beta\, \hat{j} - \dot{\beta} \omega_2 \sin\beta\, i$$

$$\alpha = (\dot{\omega}_2 \sin\beta - \omega_2 \dot{\beta} \sin\beta)\hat{i} + (\omega_1 \dot{\beta} - \dot{\omega}_2 \sin\beta - \omega_2 \dot{\beta} \cos\beta)\hat{j}$$

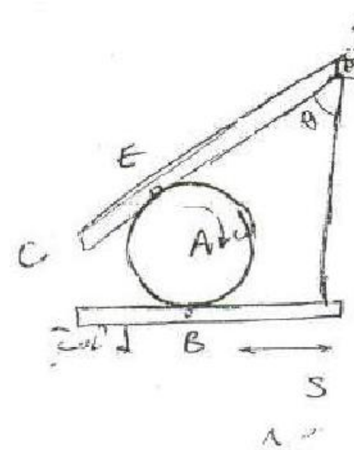
$$+ (\omega_1 \omega_2 \sin\beta + \ddot{\beta})\hat{k}$$

غلتش محض ⟵ قید سرعت ⟵ سرعت نقطه تماس روی دو جسم غلتان با هم برابر است



$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2$$

با توجه به شکل زیر چرخ دنده A با چرخ دنده شانه ای CD در گیر است. چرخ دنده شانه ای CD در یک انتها به کمک لغزنده D با سرعت ثابت V به سمت بالا حرکت می کند چرخ دنده A از طرف دیگر با چرخ دنده شانه ای B درگیر است و روی ان می غلتد سرعت و شتاب چرخ دنده A بر حسب مقادیر θ و S بیابید.



B نقطه تماس $\vec{V}_B = 0$

E نقطه تماس $\vec{V}_E \big|_{gearA} = \vec{V}_E \big|_{gear\,CD}$

$$\vec{V}_A + \vec{\omega}_{gA} \times \vec{\rho}_{AE} = \vec{V}_D + \vec{\omega}_{gCD} \times \vec{\rho}_{DE}$$

$$-R\omega_{gA}\hat{i} + \omega_{gA}\hat{k} \times (R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{j}) = v\hat{j} + \dot{\theta}\hat{k} \times (DE\sin\theta\,\hat{i} - DE\cos\theta\,\hat{j})$$

$$-R\omega_{gA} - R\omega_{gA}\sin\theta = DE\,\dot{\theta}\cos\theta$$

$$R\omega_{gA}\cos\theta = v + DE\,\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \omega_{gA} = \frac{v\cos\theta}{R(1+\sin\theta)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{-v}{DE}$$

$$DE\sin\theta - R\cos\theta = S \Rightarrow DE = \frac{S + R\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{v\sin\theta}{S + R\cos\theta}$$

$$\vec{V}_A = -R\omega_{gA}\,\hat{i} = \underbrace{\frac{-v\cos\theta}{1+\sin\theta}}_{V_A}$$

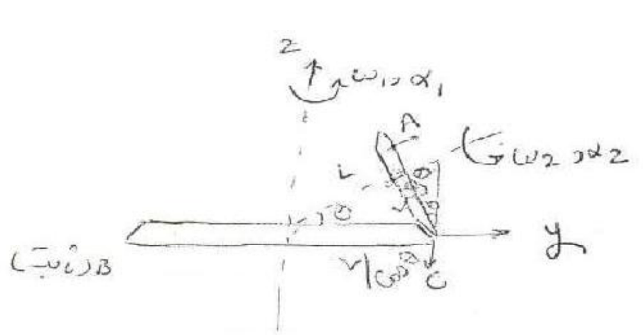
a شتاب نرمال ناشی از تغییر جهت سرعت است چون سرعت A تغییر جهت نمی‌دهد شتاب نرمال آن صفر است.

$$\vec{a}_A = a_{An}\hat{j} + a_{At}\hat{i} = 0 + \dot{v}_A\hat{i}$$

$$\dot{v}_A = -v\dot{\theta}\left(\frac{-\sin\theta(1+\sin\theta)-\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}\right) = \frac{v\dot{\theta}}{1+\sin\theta}$$

$$\xrightarrow{\theta\ \text{جایگذاری}} \quad \frac{-v^2\sin\theta}{(1+\sin\theta)(S+R\sin\theta)}\hat{i}$$

مطابق شکل چرخ دنده A روی چرخ دنده ثابت B می غلتد در صورتی که در لحظه نشان داده شده محور چرخ دنده A دارای سرعت W_1 و شتاب زاویه ای a_1 باشدسرعت زاویه و شتاب زاویه ای چرخ دنده A را تعیین کنید.



$\omega_1 = 2\ rad/s \qquad \theta = 30°$

$\dot{\omega}_1 = 4\ rad/s^2 \qquad L = 1\ m$

تماس نقطه C $\quad \vec{v}_C = 0$

$$\vec{v}_o + \vec{\omega}_{gA} \times \vec{r}_{OC} = 0$$

$$\rightarrow \quad -L\sin\theta\,\omega_1\hat{i} + (\omega_2\cos\theta\hat{j} + \omega_2\sin\theta\hat{k} + \omega_1\hat{k}) \times (-L\tan\theta\cos\theta\hat{k} + L\tan\theta\sin\theta\hat{j}) = 0$$

$$\omega_2 = \frac{-1}{\sin\theta} \times \omega_1 = \frac{-1}{\sin(30)}(2) = -4\ rad/s$$

$$\omega_{gA} = (\omega_1\hat{k} + \omega_2\cos\theta\hat{j} + \omega_2\sin\theta\hat{k})$$
$$= -3.46\hat{j}\ (rad/s)$$

$$\alpha_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{-1}{\sin\theta}\dot{\omega}_1 = \frac{-1}{\sin 30} \times 4 = -8\ rad/s$$

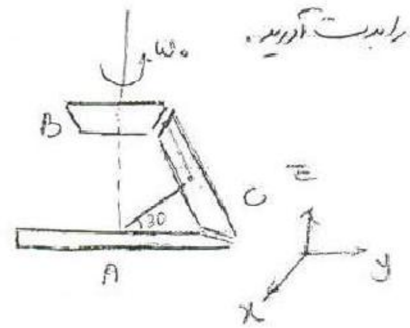
$$\vec{\alpha}_{gA} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 = \alpha_1\hat{k} + (\alpha_2\cos\theta\hat{j} + \alpha_2\sin\theta\hat{k}) + (\omega_1 \times \omega_2)$$

$$= 4\hat{h} + (-8\cos 30\,\hat{j} - 8\sin 30\,\hat{k}) + 2\hat{k} \times (-4\cos 30\,\hat{j} - 4\sin 30\,\hat{k})$$

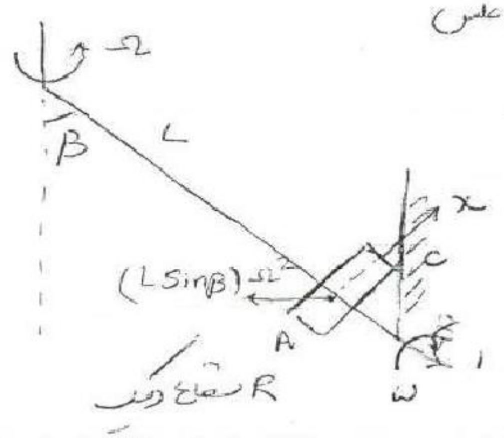
$$-6.93\hat{i} - 6.93\hat{j}$$

ثابت

مطابق شکل چرخنده C با چرخنده A و B درگیر است. چرخنده A ثابت بوده و چرخنده B با سرعت ۲ حول محور خود می چرخد. شتاب و سرعت زاویه چرخنده C را بدست آورید.



محور دیسک A حول محور قائم با سرعت زاویه ثابت Ω می چرخد دیسک روی سطح داخلی یک استوانه می غلتد سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای دیسک و همچنین شتاب نقطه تماس دیسک و استوانه را بیابید. کمین های L و B و R در شکل مشخص شده اند و مفروض فرض شوند.



شرط غلتش $\quad v_C = 0 \rightarrow v_A + \omega_{disc} \times \rho_{AC} = 0$

$$-\Omega L \sin\beta\,\hat{j} + (-\omega k - \Omega\cos\beta\,\hat{k} + -\Omega\sin\beta\,\hat{i}) \times R\hat{i} = 0$$

$$\omega = -\Omega\left(\frac{L}{R}\sin\beta + \cos\beta\right)$$

$$\dot{\omega} = -$$

$$\vec{\omega}_{disc} = \Omega\left(\frac{L}{R}\sin\beta + \cos\beta\right)\hat{k} - \Omega\cos\beta\,\hat{k} + \Omega\sin\beta\,\hat{i}$$

$$\vec{\omega}_{disc} = \Omega\sin\beta\left(\frac{L}{R}\hat{k} + \hat{i}\right)$$

محاسبه α_{disc} $\qquad \vec{\omega}_{dis} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}$

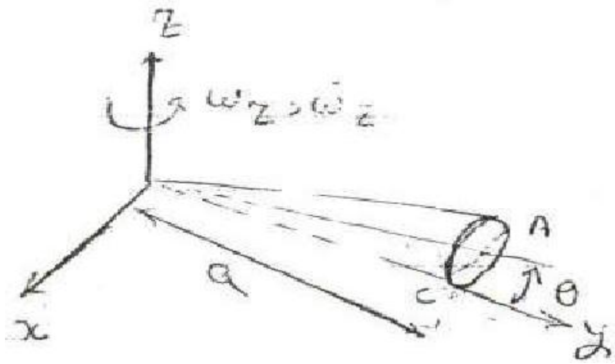
$$\alpha_{disc} = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \times \vec{\omega}$$

$$(-\Omega \cos\beta\, \hat{k} + \Omega \sin\beta\, \hat{i}) \times (-\Omega(L/R \sin\beta + \cos\beta)\hat{k})$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_{disc} \times \vec{\rho}_{AC} + \vec{\omega}_{disc} \times (\omega_{disc} \times \rho_{disc})$$

$$= (L\sin\beta\, \Omega^2)(-\cos\beta\, \hat{i} - \sin\beta\, \hat{k})$$
$$+ (-\Omega^2 \sin\beta(L/R \sin\beta + \cos\beta)\hat{j}) \times R\hat{i}$$
$$+ \Omega \sin\beta(L/R\, \hat{k} + \hat{i}) \wedge [\vec{\omega}_{disc} \times R\hat{i})$$
$$= -\Omega^2 (L/R \sin^2\beta + \sin\beta\cos\beta)(L\hat{i} - R\hat{k})$$

مخروط نشان داده شده در شکل مقابل حول محور Z بر روی صفحه xy می غلتد در لحظه نشان داده شده نقطه A را بدست آورید.



$\omega_z = 4$ rad/s
$\dot{\omega}_z = 3$ rad/s
$\theta = 20°$ $a = 2$ ft

سرعت زاویه ای مخروط حول محور خود را W_c در نظر می گیریم.

$\vec{V}_C = 0$ ← سرعت نقاط روی OC صفر ← شرط غلتش

$$\vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{OC} = 0$$

$$+\left(\left(\omega_z \mp \omega_c \sin\theta\right)\hat{k} - \omega_c \sin\theta\,\hat{j}\right)\times a j = 0$$

$$\omega_c = \frac{\omega_z}{\sin\theta}$$

$$\dot{\omega}_c = \frac{\dot{\omega}_z}{\sin\theta}$$

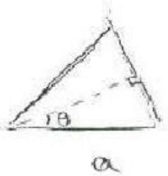
$$\vec{\omega} = \left(\omega_z - \omega_c \sin\theta\right)\hat{k} - \omega_c \sin\theta\,\hat{j}$$

محاسبه شتاب زاویه ای مخروط

$$\vec{\omega} = \vec{\omega_z} + \vec{\omega_c}$$

$$\vec{\alpha} = \dot{\omega}_z k + \left(\dot{\omega}_c \sin\theta\,\hat{k} - \dot{\omega}_c \cos\theta\,\hat{j}\right)$$

$$+ \omega_z k \times \left(-\omega_c \sin\theta\,\hat{k} - \omega_c \cos\theta\,\hat{j}\right)$$



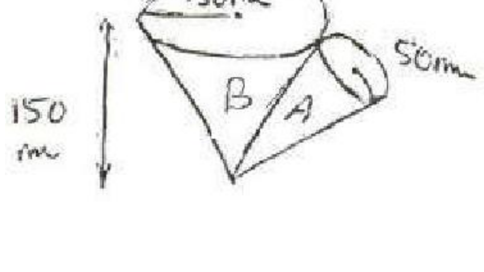
$$\vec{V_A} = \vec{\omega} \times \vec{\rho_{OA}}$$

$$= -\vec{\omega} \times \left(-a\sin\theta\,\hat{i} + a\sin^2\theta\,\hat{j} + a\sin\theta\cos\theta\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{a_A} = \vec{a_o} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho_{OA}} + \omega \times \left(\omega \times \rho_{OA}\right)$$

مخروط A با سرعت زاویه ای ثابت بر روی مخروط ثابت B می غلتد به گونه ای که هر 4 ثانیه یک چرخش کامل حول مخروط B انجام می دهد. اندازه شتاب زاویه ای مخروط A را بیابید.

$$\alpha = 6.32 \ \mathrm{rad/s^2}$$



حل سؤال ۱

$$\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_{AB,t} + \vec{\omega}_{AB,n}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \omega_{AB} \times \vec{\rho}_{BA}$$

$$= v_B + (\omega_{AB,t} + \omega_{AB,t}) \times \vec{\rho}_{BA}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB,n} \times \vec{\rho}_{BA}$$

$$a_A = \vec{a}_B + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_{AB} \times \vec{\rho}_{BA}}_{\text{ترم I}} + \omega_{AB}\left(\underbrace{\omega_{AB} \times \rho_{BA}}_{\text{ترم II}} \right)$$

$$\dot{\vec{\omega}}_{AB} = (\dot{\omega}_{AB})_t + \dot{\omega}_{ABn} = \dot{\omega}_{ABt}\,\hat{e}_t + (\omega_{ABt} + \omega_{ABn}) \times \omega_{ABt}$$

$$+ \dot{\omega}_{ABn}$$

ترم I)
$$\dot{\omega}_{AB} \times \rho_{BA} = 0 + (\omega_{AB,n} + \omega_{AB,t}) \times \rho_{BA} + \dot{\omega}_{AB,n} \times \rho_{BA}$$

$$\text{ترم II} = (\vec{\omega}_{AB,n} + \vec{\omega}_{AB,t}) \times \left[(\omega_{AB,t} + \omega_{AB,n}) \times \rho_{BA} \right]$$

سینتیک اجسام صلب در فضا

اندازه حرکت خطی $\quad \vec{G} = m\vec{v}_G$

اندازه حرکت زاویه‌ای $\quad H_A = [I]_A\,\vec{\omega}$

سرعت زاویه‌ای جسم صلب

ماتریس اینرسی (تنسور مرتبه دوم)
نسبت به محورهای سیستم مختصات واقع در A

A : مرکز جرم یا نقطه ثابت

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

مربع فاصله از محور x

$$I_{xx} = \int (y^2+z^2)\, dx$$

$$I_{xy} = \int xy\, dm = I_{yx}$$

P : نقطه دلخواه

$$\vec{r} = \vec{PG}$$

$$H_P = H_G + \vec{r} \times \vec{G}$$

ممان بردار اندازه حرکت خطی حول مرکز جرم

transfer principle for angular momentum

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \dot{\vec{G}} = m\dot{\vec{v}}_G = m a_G \\ \sum M_A = \dot{\vec{H}}_A = \dot{\vec{H}}_A \Big|_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{H}_A \end{cases}$$

سرعت زاویه سیستم مختصات واسط

حالت خاص :

1–نقطه ثابت یا مرکز جرم در نظر گرفته شود.

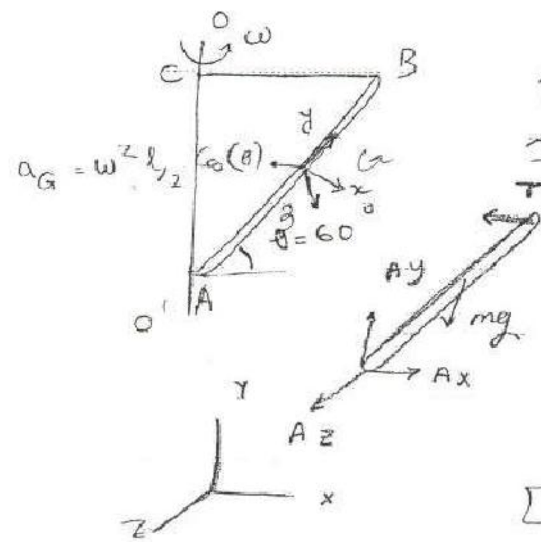
2–سیستم مختصات واسط متصل به جسم صلب ($\Omega = \vec{\omega}$)

3–محورهای سیستم مختصات واسط xyz منطبق بر محورهای اصلی اینرسی باشد .

معادلات اویلر

$$\begin{cases} \sum M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\,\omega_y \omega_z \\ \sum M_y = I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\,\omega_z \omega_x \\ \sum M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\,\omega_x \omega_y \end{cases}$$

مثال : مطابق شکل میله AB در نقطه A به موتور OO' لولا شده و در نقطه B توسط کابل DC به موتور متصل است . موتور با $\omega = 15\ \frac{rad}{s}$ ثابت می چرخد . نیروی کشش کابل و نیروهای عکس العملی در A را تعیین کنید. میله AB نازک است.



جرم میله $m = 20\ kg$

طول میله $l = 2.4\ m$

$\sum F = m a_G$

$\sum M_G = \dot{\vec{H}}_G$

$XYZ : I, J, K$

$xyz = i, j, k$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G$$

$$A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} - T\hat{i} - mg\hat{j} = -m\frac{l}{2}\sin 60\,\omega^2 \hat{I}$$

$$A_x - T = -2700$$

$$A_y - 196.2 = 0 \longrightarrow A_y = 196.2$$

$$A_z = 0$$

$$\Sigma \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G = \dot{\vec{H}}_G\Big|_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{H}_G$$

$$H_G = [I]_G \vec{\omega} = I_{xx}\omega_x \hat{i} + I_{yy}\,\omega_y \hat{j} + I_{zz}\,\omega_z \hat{k}$$

$$\omega_x = -\omega \sin 60 \qquad I = \begin{bmatrix} I_{xx} & & 0 \\ 0 & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\omega_y = \omega \sin 60$$

$$\omega_z = 0$$

$$I_{xx} = \tfrac{1}{12} m l^2$$

$I_{yy} = 0$ (فرض میله نازک)

$$I_{zz} = \tfrac{1}{12} m l^2$$

$$\vec{H}_G = -\tfrac{1}{12} m l^2 \omega \sin 60 \; i$$

$$\dot{\vec{H}}_G\Big|_{xyz} = 0$$

$$\dot{\vec{H}}_G = (-\omega \cos 60 \,\hat{i} + \omega \sin 60 \,\hat{j}) \times (-\tfrac{1}{12} m l^2 \sin 60 \; i)$$

$$= \tfrac{1}{12} m l^2 \omega^2 \sin 60 \cos 60 \,\hat{k}$$

$$= 935.31 \,\hat{k}$$

$$\Sigma \vec{M}_G = \vec{GA} \times \vec{A} + \vec{GB} \times \vec{T}$$

$$= (A_x \, l/2 \sin\theta - A_y \, l/2 \cos 60 + T \, l/2 \sin 60)\hat{k}$$

$$- A_z \, l/2 \, \hat{i} = (1.04 A_x - 0.6 A_y + 1.04 T)\hat{k} - 1.2 A_z \hat{i}$$

$$1.04 A_x - 0.6 A_y + 1.04 T = 935.31$$

$$-1.2 A_z = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_x = -843.735$$

$$A_y = 196.2$$

$$A_z = 0$$

$$T = 1856.265$$

روش دوم : استفاده از معادلات اویلر

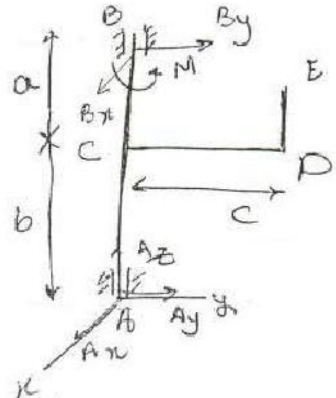
$$\Sigma M_x = -1.2 A_z = 0$$

$$\Sigma M_y : \quad 0 = 0$$

$$1.04 A_x - 0.6 A_y + 1.04 T = 1/12 \, m l^2 \omega^2 \sin 60 \cos 60$$

سازه نشان داده شده در شکل دارای وزن بر واحد طول γ می باشد این سازه در محل B دارای یاتاقانی است که نیروهای عکس العملی در جهات X و Y ایجاد می کند و همچنین در محل A یاتاقانی وجود دارد که نیروهای عکس العملی در جهات XYZ ایجاد می کند در صورتی که گشتاور e در راستای میله AB بر

سازه اعمال شود مولفه های نیروهای عکس العملی در یاتاقان ها و همچنین شتاب زاویه ای سازه را در لحظه نشان داده شده وقتی سرعت زاویه ای سازه برابر W است بدست اورید.



$\gamma = 5 \ lb/ft$ $\quad M = 20 \ lb.ft$

$a = 4 \ ft$ $\quad g = 32.2$

$b = 2 \ ft$ $\quad \omega = 10 \ rad/s$

$c = 2 \ ft$

$d = 2 \ ft$

سیستم مختصات xyz در نقطه A متصل به جسم صلب

$\rho = \gamma / g$ جرم واحد طول

$$I_{xx} = \underbrace{\rho(a+b)}_{\text{جرم میله } ab} \frac{(a+b)^2}{12} + \rho(a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$+ \rho c \frac{c^2}{12} + \rho c\left(b^2 + \left(c/2\right)^2\right)$$
$$+ \rho d \, d^2/12 + \rho d\left(c^2 + \left(b + d/2\right)^2\right)$$

$$I_{yy} = \rho(a+b)\frac{(a+b)^2}{12} + \rho(a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$+ \rho c b^2 + \rho d \frac{d^2}{12} + \rho d\left(b + d/2\right)^2$$

$$I_{zz} = 0 + \rho c \frac{c^2}{12} + \rho c (c/2)^2 + \rho d c^2$$

چون صفحه تقارن داریم

$I_{xy} = 0 \quad I_{xz} = 0$

$$I_{yz} = 0 + \int_0^c b y \, \overbrace{dm}^{\rho dy} + \int_b^{b+d} c z \, dm$$

$$= b\rho \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^c + c\rho \left. \frac{z^2}{2} \right|_b^{b+d}$$

$$= \rho b \, c^2/2 + \rho c \, \frac{d^2 + 2bd}{2}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 16.98 & 0 & 0 \\ 0 & 15.32 & -2.48 \\ 0 & -2.48 & 1.66 \end{bmatrix} \; lbm\text{-}ft^2$$

$$\sum M_A = \dot{H}_A$$

$$H_A = [I_A]\vec{\omega} \qquad \vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

$$H_A = -I_{yz}\,\omega \hat{j} + I_{zz}\,\omega \hat{k}$$

$$\dot{H}_A = \dot{H}_A \big|_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{H}_A$$

$$= -I_{yz}\,\dot{\omega}\,\hat{j} + I_{zz}\,\dot{\omega}\,\hat{k} + \omega k \times \left(-I_{yz}\omega \hat{j} + I_{zz}\omega \hat{k}\right)$$

$$= -I_{yz}\,\dot{\omega}\,\hat{j} + I_{zz}\,\dot{\omega}\,\hat{k} + I_{yz}\,\omega^2\,\hat{i}$$

$$= -2.48\,\dot{\omega}\,\hat{j} + 1.66\,\dot{\omega}\,\hat{k} + 2.48\,\hat{i}$$

$$\sum \vec{M}_A = B_x(a+b)\hat{j} - \left(B_y(a+b) + \gamma c\, c/2 + \gamma d c\right)\hat{i}$$

$$+ M\hat{k} = 6B_x\hat{j} - (6B_y + 30)\hat{i} + 50k$$

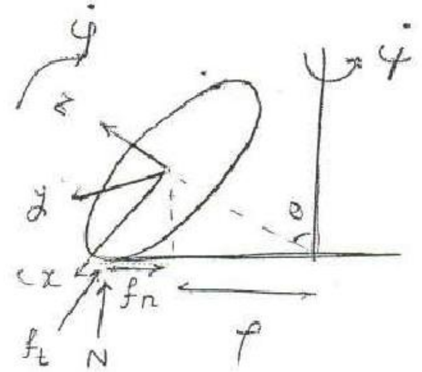
$$\begin{cases} -6B_y - 30 = 248 \\ 6B_x = -2.48\,\dot{\omega} \\ 50 = 1.66\,\dot{\omega} \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \dot{\omega} \\ B_x \\ B_y \end{matrix}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G$$

$$(A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + \left(A_z - \gamma(a+b+c+d)\right)k$$

$$= \rho(a+b+c+d)\, a_G$$

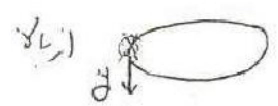
دیسک همگن نازکی به جرم m بدون لغزش بر روی یک صفحه افقی می غلتد به نحوی که مرکز دیسک سیر دایره ای به شعاع p طی می کند زاویه θ نشان داده شده در شکل ثابت می باشد. در صورتی که سرعت مرکز دیسک V ثابت باشد رابطه ای برای سرعت v بر حسب پارامترهای θ و R و P بیابید. R شعاع دیسک است.



زمین ، دیسک دارای سرعت زاویه ای

$$\vec{\omega} = \dot\varphi + \dot\psi$$

$$\vec{\omega} = (\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\hat{k} - \dot\psi\sin\theta\,\hat{i}$$



شرط $V_C = 0 \quad \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \rho_{AC} = 0$

$$\rho\dot\psi\hat{j} + \left((\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\hat{k} - \dot\psi\sin\theta\,\hat{i}\right)\wedge R\hat{i} = 0$$

$$\rightarrow \dot\varphi = -\left(\rho/R + \cos\theta\right)\dot\psi \qquad \dot\psi = v/\rho$$

$\dot\psi$ و $\dot\varphi$ ثابت

$$\vec{\omega} = -\dot\psi\left(\rho/R\,\hat{k} + \sin\theta\,\hat{i}\right)$$

$$\vec{\alpha} = \ddot{\psi} + \ddot{\varphi} = 0 + \dot{\vec{\psi}} \wedge \dot{\vec{\varphi}}$$

$$= (\dot{\psi}\cos\theta\, k - \dot{\psi}\sin\theta\, i) \times \dot{\phi}\, \hat{k}$$

$$= \dot{\psi}\dot{\phi}\sin\theta\, j = -\left(\frac{\rho}{R} + \cos\theta\right)\dot{\psi}^2 \sin\theta\, \hat{j}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = \dot{\vec{H}}_G\Big|_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{H}_G$$

سیستم مختصات xyz دارای سرعت زاویه‌ای $\dot{\psi}$

$$= 0 + (\dot{\psi}\cos\theta\, \hat{k} - \dot{\psi}\sin\theta\, \hat{i}) \wedge \Big(-\dot{\psi}\,\big(I_{zz}\, \frac{\rho}{R}\, \hat{k}$$

$$+ I_{xx}\sin\theta\, \hat{i}\big)\Big) \qquad I_{xx} = I_{yy} = \tfrac{1}{4} m R^2$$

$$I_{zz} = \tfrac{1}{2} m R^2$$

$$= -\dot{\psi}^2 m R^2 \sin\theta \left(\tfrac{1}{4}\sin\theta + \tfrac{1}{2}\frac{\rho}{R}\right)$$

$$\sum \vec{M}_C = f_n R \sin\theta\, \hat{i} - R f_t\, \hat{k} - N R \cos\theta\, \hat{j}$$

$$\sum \vec{M}_C = \dot{\vec{H}}_C \longrightarrow \begin{cases} -R f_t = 0 \longrightarrow f_t = 0 \\ \end{cases}$$

$$f_n R \sin\theta - N R \cos\theta = -\dot{\psi}^2 m R^2 \sin\theta \left(\tfrac{1}{4}\sin\theta + \tfrac{1}{2}\frac{\rho}{R}\right)$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G$$

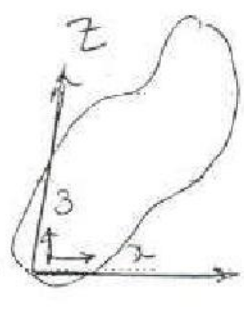
$$f_n \hat{i} - f_t \hat{k} + N\hat{j} - mg\hat{j} = \frac{mv^2}{\rho}\hat{I}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_n = \dfrac{mv^2}{\rho} \\ N = mg \end{cases}$$

$$\text{II into I} \longrightarrow v^2 = \frac{4g\rho^2 \cot\theta}{6\rho + R\cos\theta}$$

زوایای اویلر

حرکت حول یک نقطه ثابت ← زوایای اویلر



ψ = چرخش حول محور Z (precession angle)

θ = چرخش حول محور x (Nutation angle)

ϕ = چرخش حول محور z (spin angle)

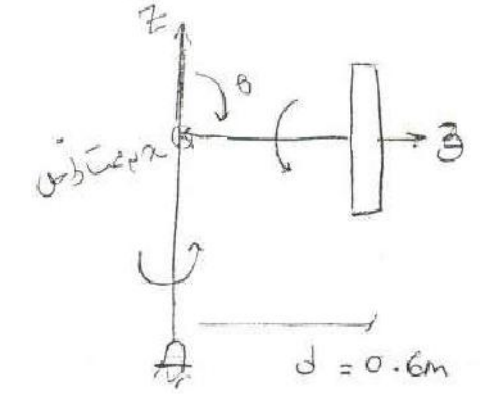
$I' = I_{xx} = I_{yy} \qquad I_{zz} = I$

$$\begin{cases} \sum M_x = I'\ddot{\theta} + (I - I')(\dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta) + I\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta \\ \sum M_y = I'\ddot{\psi}\sin\theta + 2I'\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta - I(\dot{\phi} + \dot{\psi}\sin\theta)\dot{\theta} \\ \sum M_z = I(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\sin\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta) \end{cases}$$

(ثابت θ) steady precession برای حرکت

$$\begin{cases} \sum M_x = \left[I(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta) - I'\dot{\psi}\cos\theta \right] \dot{\psi}\sin\theta \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

دیسک نشان داده شده در شکل مقابل با سرعت زاویه 0.3 rad/s حول محور قائم می چرخد در صورتی که وزن دیسک 90 N باشد و از جرم میله صرف نظر شود سرعت زاویه ای چرخش دیسک حول محور خود را با استفاده از زوایای اویلر بیابید.



که محور z باید ثابت باشد

$\dot{\psi} = 0.3 \text{ rad/s}$ — که θ زاویه بین z و ζ

$\theta = +\pi/2$ — که نقطه ثابت باید روی ζ باشد.

$\dot{\phi} = ?$

$$I' = \tfrac{1}{4} m R^2 + m d^2$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{90}{9.81}\right)(0.15)^2 + \left(\frac{90}{9.81}\right) \times 0.6^2$$

$$= 3.3543$$

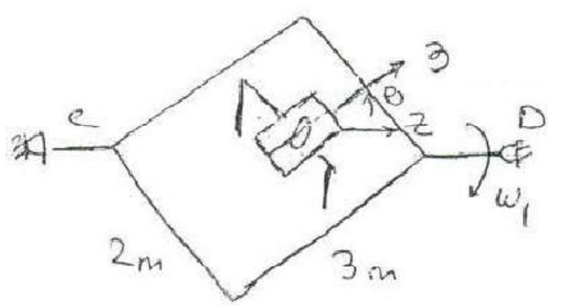
$$I = \tfrac{1}{2} m R^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{90}{9.81}\right)(0.15)^2 = 0.10321$$

$$\Sigma M_x = \left[I(\dot{\phi} + \dot{\psi}\sin\theta) - I'\dot{\psi}\cos\theta \right] \dot{\psi}\sin\theta$$

$$90(0.6) = \left[0.10321(\dot{\phi} + 0.3\cos \pi/2) - 3.3543(0.3)\cos\pi/2 \right] 0.3\sin\pi/2$$

$$\dot{\phi} = 1744.02 \quad rad/s$$

صفحه نشان داده شده در شکل با سرعت زاویه ای ثابت w = 2 rad/s حول محور CD می چرخد روی سطح صفحه ژیروسکوپ 1 درجه آزادی نصب شده که دارای دیسکی به وزن 3.4N و شعاع 50m می باشد. دیسک با سرعت زاویه W_2 = 10,000 rpm نسبت به قاب حول محور خود می چرخد. در صورتی که بخواهیم قاب را به وازات صفحه نگه داریم چه گشتاوری مورد نیاز است.



به عبارتی [illegible] شتاب صفر است [illegible]
را در نقطه [illegible] قرار می دهیم.

$$\dot{\psi} = \omega_1 = 2\ rad/s$$

$$\dot{\phi} = 10000 = 1047.197 \ rad/s$$

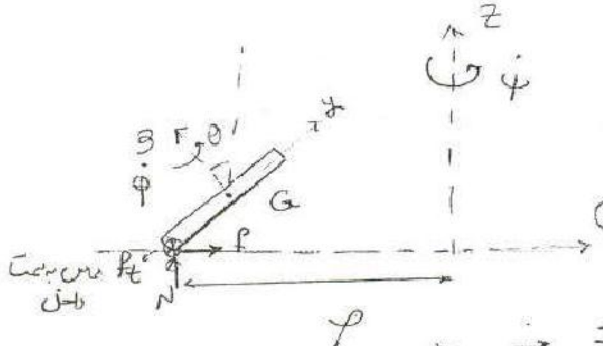
$$\theta = \tan^{-1}(2/3) = 33.69^\circ$$

$$I = \tfrac{1}{2} m R^2 = 4.332 \times 10^{-4}$$

$$I' = \tfrac{1}{4} m R^2 = 2.166 \times 10^{-4}$$

$$M_x = 0.5037 \ \text{N.m}$$

حل سوال صفحه 9 با استفاده از زوایای اویلر



$$\dot\psi = v/\rho \qquad 1/$$

شرط $\vec{V_C} = 0$

$$\vec{v}_G + \omega \times \rho_{GC} = 0$$

$$\vec{\omega} = \vec{\dot\phi} + \vec{\dot\psi} = (\dot\phi + \dot\psi \cos\theta)\,k + \dot\psi \sin\theta\, j$$

$$\rho\dot\psi\, i + \left[(\dot\phi + \dot\psi\cos\theta)\hat{k} + \dot\psi \sin\theta\, \hat{j}\right] \times (-R j) = 0$$

$$\dot\phi = -\frac{\rho + R\cos\theta}{R}\,\dot\psi \qquad 2/$$

v ثابت $\Rightarrow$ $\dot\psi$ و $\dot\phi$ ثابت

$$\Sigma F = m a_G \rightarrow (N - mg)\,K + f_n J - f_t I = \frac{m v^2}{\rho} J$$

$$f_n = +\frac{m v^2}{\rho}$$

$$f_t = 0$$

$$N = mg$$

$$\sum M_x = f_n R\sin\theta - NR\cos\theta = \frac{mv^2}{\rho} R\sin\theta - mgR\cos\theta \quad 3/$$

$$\sum M_x = (I - I')\,\dot\psi^2 \sin\theta\cos\theta + I\dot\phi\,\dot\psi\sin\theta \quad 4/$$

$$1, 2, 3 \text{ و } 4 \implies v^2 = \frac{4g\rho\cot\theta}{6R + R\cos\theta}$$

$$\sum \vec{M}_A = \dot{\vec{H}}_A \quad \left\{ \right.$$

مرکز جرم

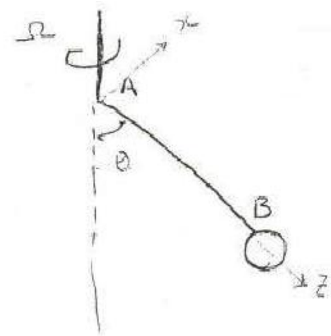
نقطه ثابت - یا نقطه با سرعت ثابت (شتاب صفر)

نسبت به مختصات اینرسی

نقطه ای که راستای شتابش از مرکز جرم

بگذرد

مطابق شکل کره ای به جرم m به انتهای میله AB متصل شده است به گونه ای که نسبت به آن حرکتی ندارد. کره و میله متصل شده به آن با سرعت زاویه Ω حول محور قائم می چرخد در صورتی که در لحظه نشان داده شده زاویه راستای میله با راستای قائم با آهنگ $\dot\theta$ در حال افزایش باشد و از جرم میله AB صرف نظر گردد ، انرژی جنبشی کره را بیابید. R شعاع کره و d فاصله مرکز کره تا نقطه A



$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{H}_A$ به شرط ثابت بودن نقطه A

$\vec{\omega} = -\Omega\sin\theta\,\hat{i} + \dot{\theta}\,\hat{j} + \Omega\cos\theta\,\hat{k}$

$$\vec{H}_A = [I_A]\vec{\omega}$$

$$= -I_{xx}\,\Omega\sin\theta\, i + I_{yy}\dot{\theta}\, j + I_{zz}\,\Omega\cos\theta\,\hat{k}$$

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{2}{5}mR^2 + md^2$

$I_{zz} = \frac{2}{5}mR^2$

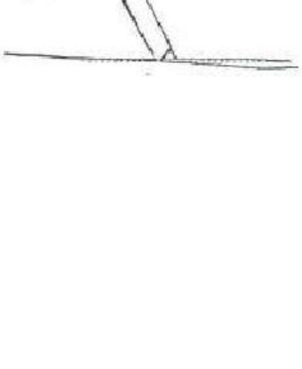
$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{H}_A = \frac{1}{2}\left(I_{xx}\Omega^2\sin^2\theta + I_{yy}\dot{\theta}^2 + I_{zz}\Omega^2\cos^2\theta\right)$$

دیسکی بدون لغزش در حال غلتش است به‌طوری‌که زاویه‌ی θ محور عمود بر سطح دیسک با راستای قائم ثابت می‌باشد. انرژی جنبشی دیسک را برحسب زوایای اویلر بیابید.
شعاع دیسک R

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot H_A \\ T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot H_G \end{cases}$$

$T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{H}_G$

$\vec{\omega} = \dot{\psi}\sin\theta\,\hat{j} + \dot{\theta}\,\hat{i} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\,\hat{k}$



$H_G = [I]_G\,\vec{\omega} = I_{xx}\dot{\theta}\,\hat{i} + I_{yy}\dot{\psi}\sin\theta\, j$

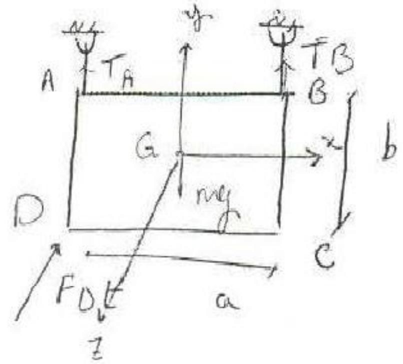
$$+ I_{zz}(\dot{\psi}\cos\theta - \dot{\phi})\,\hat{k}$$

$$V_G = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{CG} = R\dot{\theta} k - R(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\, i$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{8} m R^2 \left[5\dot{\theta}^2 + 6\ell(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + \dot{\psi}\sin^2\theta \right]$$

ورق مستطیل شکلی به جرم m از نقاط A و B توسط دو کابل آویزان شده است ضربه ای به اندازه $F\Delta t$ در نقطه D ورق و در جهت عمود بر ورق اعمال می گردد سرعت مرکز جرم و سرعت زاویه ای ورق را بلافاصله بعد از اعمال ضربه بیابید.

فرض می کنیم پس از اعمال ضربه طناب ها کشیده باقی می مانند.



$$V_{Gy} = 0$$

$$\omega_z = 0$$

$$V_G = U_x i + U_z k$$

$$\vec{\omega} = \omega_x i + \omega_y j$$

بعد از اعمال ضربه $\vec{H}_G = I_{xx}\omega_x i + I_{yy}\omega_y j = \frac{1}{12} m b^2 \omega_x i + \frac{1}{12} m a^2 \omega_y j$

اصل ضربه - مومنتوم خطی $-F\Delta t\, k + (T_A \Delta t + T_B \Delta t - mg\Delta t)\hat{j} = m(v_x i + v_z k)$

$$m v_x = 0 \rightarrow v_x = 0$$

$$-F\Delta t = m v_z \Rightarrow v_z = \frac{-F\Delta t}{m} \qquad (I)$$

$$T_A + T_B - mg = 0 \Rightarrow T_A + T_B = mg$$

بعد از اعمال ضربه $\vec{V}_G = \frac{-F\Delta t}{m}\hat{k}$

اصل ضربه - مومنتوم زاویه ای $\left(-T_A \Delta t \, a/2 + T_B \Delta t \, a/2\right) \hat{k} - F \Delta t (a/2) \hat{j}$

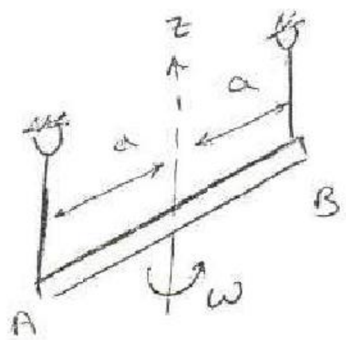
$$+ F \Delta t (b/2)\, i = \frac{1}{12} m b^2 \omega_x i + \frac{1}{12} m a^2 \omega_y j$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -F \Delta t (a/2) = \frac{1}{12} m a^2 \omega_y \\ F \Delta t (b/2) = \frac{1}{12} m b^2 \omega_x \qquad \mathrm{II} \\ -T_A + T_B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_y = \frac{-6F\Delta t}{ma}$$

$$\omega_x = \frac{6F\Delta t}{mb} \qquad \mathrm{I,II}) \; T_A = T_B = mg/2$$

مطابق شکل میله AB دارای چگالی وزنی (وزن بر واحد طول) γ می باشد و توسط دو طناب موازی از نقاط A و B آویزان شده است در لحظه نشان داده شده میله دارای سرعت زاویه ای W حول محور Z باشد.
اگر از چرخش میله جلوگیری به عمل اید در ان لحظه مرکز میله تا چه ارتفاعی بالا می آید.
با فرض اینکه انرژی تلف نمی شود و نیرویی به میله اعمال نمی شود.



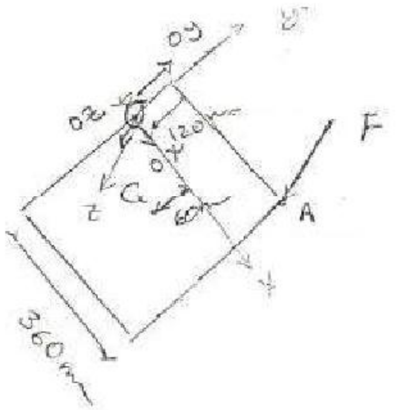
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\,\frac{\gamma(2a)}{g}(2a)^2\right]\omega^2 + 0$$

$$= 0 + \gamma(2a) h$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{6} a^2 (\omega^2/g)$$

ورق مربع شکل 10kg از طریق یک مفصل گلوله ای ، کاسه ای آویزان شده است ورق در ابتدا در حال سکون است سپس توسط چکش ضربه ای در نقطه A بر ان اعمال می گردد نیروی ضربه ای تولید شده به وسیله چکش عمود بر سطح ورق بوده و مقدار متوسط آن در بازه زمانی 4 میلی ثانیه (زمان اعمال نیرو) برابر با 5000 نیوتن می باشد و سرعت زاویه ای ورق را بلافاصله بعد از اعمال ضربه بدست آورید. همچنین نیروی عکس العملی متوسط در تکیه گاه را بیابید.



از نیروی وزن در مدت زمان اعمال نیروی ضربه صرف نظر می کنیم

$$I_{xx} = \frac{1}{2} \times 10 \times 0.36^2 + 10(0.06)^2 = 0.144$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2} \times 10 \times 0.36^2 + 10(0.18)^2 = 0.432$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} \times 10\left(0.36^2 + 0.36^2\right) + 10\left(0.18^2 + 0.06^2\right) = 0.576$$

$$I_{xy} = 10(-0.18)(0.06) = -0.108$$

$$\vec{\omega_2} = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

$$(V_G)_2 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AG} = 0.06\omega_z \hat{i} + 0.18\omega_z \hat{j} - (0.06\,\omega_x + 0.18\,\omega_y)\hat{k}$$

$$(\vec{H}_O)_2 = (0.144\omega_x + 0.108\omega_y)\, i + (0.432\omega_y + 0.108\omega_x)\, j + 0.576\omega_z k$$

اصل ضربه و مومنتم زاویه ای $\quad \sum M_O \Delta t = (H_O)_2 - \cancel{(H_O)_1}$

چون ورق ثابت است

$$\left[(0.36 i + 0.12 j) \times 5000 k\right](0.004) = (H_O)_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0.144\,\omega_x + 0.109\,\omega_y = 2.4 \\ 0.432\,\omega_y + 0.108\,\omega_x = -7.2 \\ 0.576\,\omega_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_2 = 35.90 i - 25.64 j$$

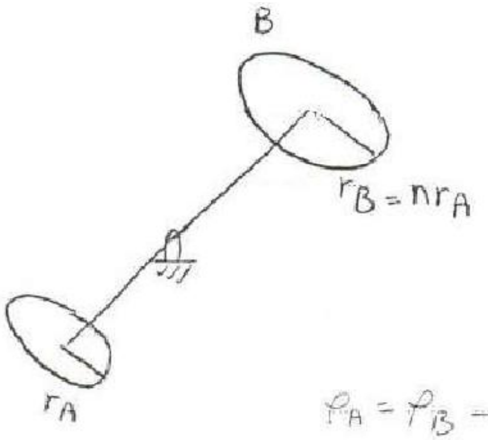
اصل ضربه - مومنتوم خطی

$$\Sigma \vec{F} \Delta t = m(v_G)_2 - m\cancel{(v_G)_1}$$

$$[O_x i + O_y j + (O_z + F) k] \Delta t = 10 [0.06 \omega_z i + 0.18 \omega_z j - (0.06 \omega_x + 0.18 \omega_y) k]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} O_x = O_y = 0 \\ O_z = 1153 \text{ N} \end{array}$$

دو دیسک یکنواخت با جنس یکسان مطابق شکل به یک محور متصلند. دیسک A دارای جرم 20kg شعاع $r_A = 150m$ است. .... دیسک B دو برابر A است در ابتدا مجموعه در حال سکون است و سپس همان 30Nm به محور اعمال می گردد. در صورتی که سرعت زاویه ای مجموعه بعد از 5 دوران به 480vpm برسد شعاع دیسک B را تعیین کنید.



اصل کار و انرژی $\omega_{1 \to 2} = T_2 - T_1$

$$I_A = \frac{1}{2} m_A r_A^2 = \frac{1}{2} \times 20 (0.15)^2 = 0.225 \text{ kg.m}^2$$

$$\rho_A = \rho_B \Longrightarrow \frac{m_A}{\pi r_A^2 t_A} = \frac{m_B}{\pi r_B^2 t_B}$$

$$m_B = m_A \left(\frac{t_B}{t_A} \right) \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^2$$

$$= 20 \times 2 n^2 = 40 n^2 \text{ kg}$$

$$I_B = \frac{1}{2} m_B r_B^2 = \frac{1}{2} (40 n^2)(0.15 n)^2 = 0.45 n^4 \text{ kg.m}^2$$

$$I = I_A + I_B = (0.225 + 0.45n^4) \quad kg.m^2 \qquad \mathrm{I}$$

$$\omega_{1-2} = T_2 - T_1 \qquad \omega_{1-2} = M(\theta_2 - \theta_1) = 30 \times 5 \times 2\pi = 300\pi J$$

$$T_1 = 0 \qquad T_2 = \tfrac{1}{2} I (16\pi)^2$$

$$\omega_2 = 480 rpm = 16\pi$$

اصل کار و انرژی $\quad 300\pi = \tfrac{1}{2} I (16\pi)^2$

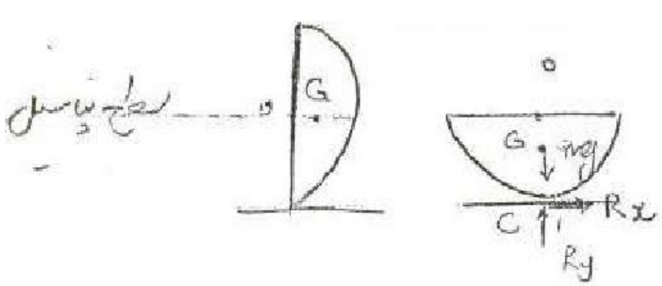
$$I = \frac{2(300\pi)}{(16\pi)^2} = 0.94604 \quad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I} \;\&\; \mathrm{II} \qquad 0.225 + 0.45n^4 = 0.74607$$

$$n = 1.03732$$

$$r_B = n r_A = 155.6$$

نیم استوانه ای به جرم M و شعاع R از موقعیت نشان داده شده در شکل از حال سکون رها می گردد با فرض غلتش محض برای نیم استوانه سرعت زاویه ای آن را بعد از غلتش به اندازه 90^0 بیابید همچنین در ان لحظه نیروهای عکس العملی وارد بر نیم استوانه از سطح افقی را بیابید.



$$I_O = \tfrac{1}{2} mR^2$$

$$OG = \tfrac{4}{3} R/\pi$$

چون کار اصطکاک برابر صفر است پس انرژی مکانیکی پایسته باقی می ماند.

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

$$U_1 = 0 \quad , \quad T_1 = 0$$

$$U_2 = mg(-OG) = -\frac{4}{3\pi} mgR$$

$$I_G = \frac{1}{2} mR^2 - m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = 0.319873 \; mR^2$$

$$(V_G)_2 = \left(R - \frac{4}{3\pi} R\right) \omega_2 R = 0.57553 \; \omega_2 R$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m (V_G)_2^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_2^2 = 0.32559 \; mR^2 \omega_2^2$$

پایستگی انرژی : $0 + 0 = 0.32559 \; mR^2 \omega_2^2 - \frac{4}{3\pi} mgR$

$$\omega_2 = 1.142 \sqrt{g/R}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{OG}) + \vec{\alpha}_2 \times \vec{\rho}_{OG}$$

که نقطه O فقط شتاب مماسی دارد زیرا نقطه حرکت خطی دارد .

$$R\alpha_2 \hat{i} + (-\omega_2 k) \wedge \left((-\omega_2 \hat{k}) \wedge (-OG \hat{j}) \right) + (-\alpha_2 K) \wedge (-OG \hat{j})$$
$$= (R - OG)\alpha_2 i + OG \, \omega_2^2 j$$

چون گشتاوری از نیرو حول C نداریم .

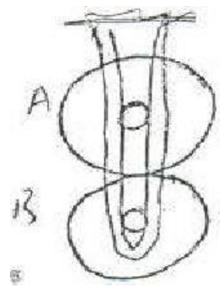
$$\Sigma M_C = I_C \alpha_2$$
$$0 = \left(I_G + m(R - OG)^2 \right) \alpha_2$$
$$\Rightarrow \alpha_2 = 0$$
$$\vec{a}_G = OG \, \omega_2^2 \, j$$

$$\sum f_x = m(a_G)_x \rightarrow R_x = 0$$

$$\sum f_y = m(a_G)_y \rightarrow R_y - mg = m(OG\omega_2^2) = m\frac{4R}{3\pi}\omega_2^2$$

ω_2 جاگذاری $\longrightarrow$ $R_y = 1.553\, mg$

دیسک همگن A دارای جرم m شعاع R و سرعت زاویه ای W_0 دیسک B مشابه دیسک A بوده و در ابتدا در حال سکون است .مطابق شکل دیسک A با دیسک B تماس داده می شود ضریب اصطکاک جنبشی در موقع تماس برابر M_K است.پس از مدتی لغزش دیسکها به سرعت زاویه ای ثابت با اندازه یکسان در جهت مخالف می رسند. در صورتی که انرژی جنبشی نهایی سیستم نصف انرژی جنبشی اولیه A باشد.تعداد دوران های هر دیسک را قبل از اینکه به سرعت زاویه ای ثابت برسند بیابید.



$$W_{1-2} = T_2 - T_1$$

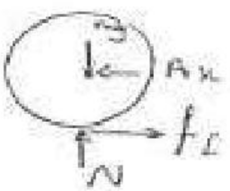
$(T_1)_A = \frac{1}{2} I\omega_0^2 \qquad (T_1)_B = 0$

$(T_2)_A = \frac{1}{2} I\omega_f^2 \qquad (T_2)_B = \frac{1}{2} I\omega_f^2$

$T_2 = \frac{1}{2} T_1 \qquad T_2 = I\omega_f^2 \qquad T_1 = \frac{1}{2} I\omega_0^2$

$$\omega_f = \frac{1}{2}\omega_0$$

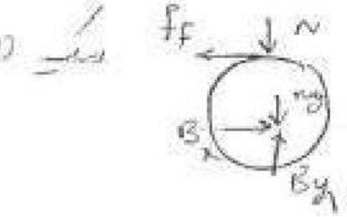
دیسک A



دیسک A: $\sum f_y = 0 \Rightarrow mg = N$

$$f_k = \mu_k N = mg\mu_k$$

1)



$$(\omega_{1-2})_A = (T_2)_A - (T_1)_A$$

$$(\omega_{1-2})_A = \sum M_A \theta_A = + f_f r\theta_A$$

$$= + \mu_k mg r\theta_A$$

$$(\omega_{1-2})_B = \sum M_B \theta_B = f_f r\theta_B = \mu_k rmg\,\theta_B$$

$$(\omega_{1-2})_A + (T_1)_A = (T_2)_A$$

$$\mu_k mg r\theta_A + \tfrac{1}{2} I\omega_0^2 = \tfrac{1}{2} I\omega_f^2 \rightarrow \theta_A = \frac{I(\omega_0^2 - \omega_f^2)}{2\mu_k mg r}$$

$$\theta_A = \frac{\frac{1}{2}mr^2(\omega_0^2 - \frac{1}{4}\omega_0^2)}{2\mu_k mg r} = \frac{3r\omega_0^2}{16\mu_k g}$$

$$n_A = \frac{\theta_A}{2\pi} = \frac{3r\omega_0^2}{32\pi\mu_k g}$$

$$(\omega_{1-2})_B + (T_1)_B = (T_2)_B$$

$$\mu_k mg r\theta_B + 0 = \tfrac{1}{2} I\omega_f^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2)(\tfrac{1}{4}\omega_0^2)$$

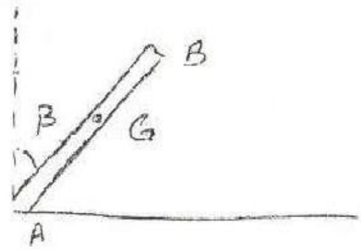
$$\theta_B = \frac{r\omega_0^2}{16\mu_k g}$$

$$n_B = \frac{\theta_B}{2\pi} = \frac{r\omega_0^2}{32\pi\mu_k g}$$

میله تاریک AB به طول L از ارتفاعی بر روی سطح بدون اصطکاکی رها می شود در صورتی که در لحظه برخورد با سطح راستای میله با راستای قائم زاویه B بسازد و دارای سرعت قائم V_1 و بدون سرعت زاویه ای باشد ، سرعت زاویه ای میله را بلافاصله بعد از برخورد در دو حالت زیر بدست اورید.

الف : کاملاً الاستیک

ب : کاملاً پلاستیک



$$e = 1 \longrightarrow \frac{0 - (V_{Ay})_2}{(V_{Ay})_1 - 0} = 1$$

$$(V_{Ay})_2 = -(V_{Ay})_1 = -(-V_1) = V_1$$

$$(V_A)_2 = (V_{Ax})\,\hat{i} + V_1\,\hat{j}$$

پایستگی مومنتوم خطی راستای x $\longrightarrow 0 = m(V_{Gx})_2 \longrightarrow (V_{Gx})_2 = 0$

$$(H_{A_1}) = (H_A)_2 \qquad (V_G)_2 = (V_A)_2 + \omega_2 \times \rho_{AG}$$

$$(V_{Gy})_2\,\hat{j} = (V_{Ax})_2\,\hat{i} + V_1\,\hat{j} + \omega_2\,\hat{k} \times \left(\tfrac{l}{2}\sin\beta\,\hat{i} + \tfrac{l}{2}\cos\beta\,\hat{j}\right)$$

$$\rightsquigarrow (V_{Gy})_2 = V_1 + \tfrac{l}{2}\,\omega_2 \sin\beta$$

$$(H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$m V_1 \tfrac{l}{2} \sin\beta\, k = I_G\, \omega_2\, \hat{k} + \omega\left(V_1 + \tfrac{l}{2}\,\omega_2 \sin\beta\right)\left(\tfrac{l}{2}\sin\beta\right) k$$

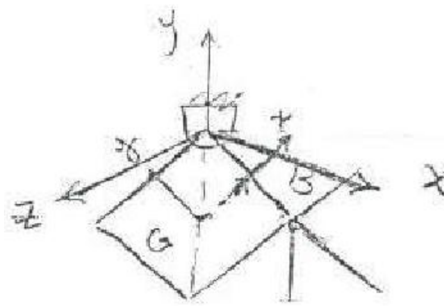
$$\omega_2 = -\frac{12 V_1 \sin\beta}{\ell(1+3\sin^2\beta)}$$

$$e = 0 \longrightarrow (V_{Ay})_2 = 0$$

$$\omega_2 = -\frac{6\sin\beta}{1+3\sin^2\beta}$$

برخورد الاستیک

ورق مربع شکلی به طول L و جرم m به یک مفصل گلوله ای کاسه ای متصل است در لحظه ای قبل از برخورد به مانع B ورق دارای سرعت زاویه ای ثابت W_0 حول محور Y می باشد (مانع B در صفحه XY قرار دارد) با فرض اینکه برخورد ورق با مانع کاملاً پلاستیک باشد ، سرعت زاویه ای ورق و سرعت مرکز جرم آن را بلافاصله پس از برخورد بیابید. همچنین ضربه اعمال شده بر ورق را در مدت زمان برخورد در نقاط A و B را بیابید.



اصل ضربه ممنتم

$$(-aj) \times (\underbrace{f\Delta t}_{\text{ضربه اعمال شود در } B})\hat{k} = (\vec{H_A})_2 - (\vec{H_A})_1$$

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \omega_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$

$$(H_G)_1 = \tfrac{1}{12} m a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_0 (i+j)$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \tfrac{1}{12} m a^2$$

$$(V_G)_1 = 0$$

$$(H_A)_1 = (H_G)_1 + \cancel{\rho_{AG} \times (m v_G)_1} = H_G$$

$$(v_B)_2 = \omega_2 \times \rho_{AB} = (\omega_{2x} i + \omega_{2y} j + \omega_{2z} k) \times (-a j)$$

$$= a(-\omega_{2x} k + \omega_{2z} i)$$

[illegible] $= 0 \longrightarrow (v_B)_{zz} = 0$

$$\Rightarrow \omega_{2x} = 0$$

$$\vec{\omega}_2 = \omega_{2y} j + \omega_{2z} k$$

$$(v_G)_2 = \omega_2 \times \rho_{AG} = (\omega_{2y} j + \omega_{2z} k) \times a/2\,(i - j)$$

$$= \tfrac{1}{2} a(\omega_{2z} i - \omega_{2z} j + \omega_{2y} k) \quad *$$

$$\rho_{AG} \times (m v_G)_2 = \tfrac{1}{4} m a^2(-\omega_{2y} i + \omega_{2y} j + 2\omega_{2z} \hat{k}) \quad \mathrm{I}$$

$$(H_G)_2 = \tfrac{1}{12} m a^2 \omega_{2y} j + \tfrac{1}{6} m a^2 \omega_{2z} k \qquad \mathrm{II}$$

$$(H_A)_2 = (H_G)_2 + (m v_G)_2 \times \rho_{AG} = \mathrm{I} + \mathrm{II} \quad (3)$$

(2) & 3 iot[illegible] 1

$$\frac{1}{24} \sqrt{2}\, m a^2 \omega_0 - a \int \Delta t = -\tfrac{1}{4} m a^2 \omega_{2y} \quad 4/$$

$$\frac{1}{24} \sqrt{2}\, m a^2 \omega_0 = \tfrac{1}{12} m a^2 \omega_{2y} + \tfrac{1}{4} m a^2 \omega_{2y}$$

$$0 = \frac{1}{6} ma^2 \omega_{2z} + \frac{1}{12} ma^2 \omega_{2z}$$

$$\omega_{2y} = \frac{\sqrt{2}}{8}\omega_0$$

$$\omega_{2z} = 0$$

4/ با جایگذاری ω_{2y} $\quad f\Delta t = \frac{7}{96}\sqrt{2}\, m a \omega_0$

$$\vec{\omega_2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\omega_0 \hat{j} = \frac{\sqrt{2}}{8}\omega_0 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(-I + J)$$

$$= \frac{\omega_0}{8}(J - I)$$

* از رابطه $\xrightarrow{}$ $(\vec{V_G})_2 = \frac{\sqrt{2}}{16} a\omega_0 \hat{k} = \frac{\sqrt{2}}{16} a\omega_0 K$

$$B_{\text{ضربه در}} = \frac{7\sqrt{2}}{96} m a \omega_0 \hat{k}$$

ضربه - مومنتوم خطی $\quad \vec{A}\Delta t + f\Delta t\hat{k} = (mV_G)_2 - (mV_G)_1$

بردار نیروهای ضربه‌ای اعمال شده

$$A\Delta t + \frac{7\sqrt{2}}{96} m a \omega_0 k = \frac{m\sqrt{2}}{16} a\omega_0 \hat{k} - 0$$

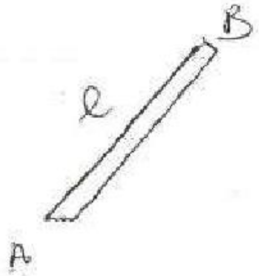
$$A\Delta t = -\frac{\sqrt{2}}{96} m a \omega_0 k$$

دینامیک تحلیلی

درجه آزادی $n = M - n$

M: تعداد مختصات تعمیم یافته

n: تعداد معادلات قید



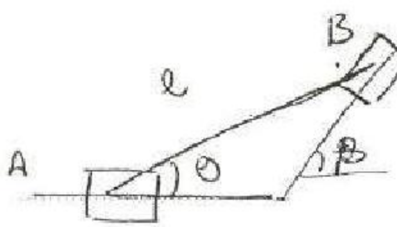
$$(x_A, y_A, x_B, y_B, \theta)$$

$$Dof = 3$$

$$x_B = x_A + l\cos\theta$$

$$y_B = y_A + l\sin\theta$$

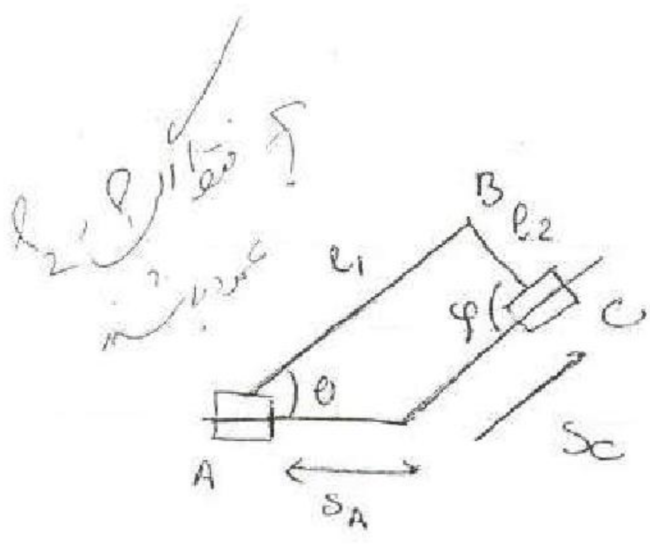
ثابت (x_A, y_A, θ)



$$Dof = 1$$

$$(x_A, y_A, \theta)$$

$$\begin{cases} x_A = -l\dfrac{\sin(\beta-\theta)}{\sin\beta} \\ y_A = 0 \end{cases}$$



اگر C ثابت باشد سیستم یک درجه آزادی خواهد داشت لغزنده C نیز یک درجه ازادی به سیستم می دهد پس سیستم کلاً 2درجه ازادی خواهد داشت.

$$Dof = 2$$

(θ, φ) → مناسب است و یک حالت بیشتر ندارد

(S_A , θ) ⟵ مناسب نیست زیرا دو حالت برای سیستم خواهد داشت زیرا از B به اندازه L_2 کمتن می زنیم که **دو** حالت به سیستم می دهد.

(S_A , S_C) ⟵ مناسب نیست برای B دو جواب می دهد.

قیود پیگیری

Configuration Constraints

velocity Constiaints (Motion Constraints)

$\to f(q_1 , q_2 , \dots , q_n , t) = 0$

$\to \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, n \qquad (I)$

$n \to$ تعداد قیود

قیود:

- holonomic
  - Rheonomic ← تابع صریح از زمان
  - sceleronomic
- non holonomic

به قیود سرعتی که holonomic هستند اما قیود سرعتی مشخص نیست.

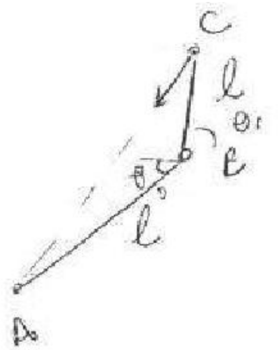
برای قید سرعت مجرم (I) اگر تابع g_j وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_k} = g_j \, a_{jk} \qquad \frac{\partial f_j}{\partial t} = g_j \, a_{j0}$$

قید سرعت قید holonomic است.

مثال : میله های AB و BC مطابق شکل به یکدیگر لولا شده اند و روی صفحه حرکت می کنند قید مسئله این است که سرعت در C باید همواره به سمت نقطه A باشد نوع قید را بررسی کنید.

اگر قید سرعت C نبود سیستم 4 درجه آزادی بود اما حالا که یک قید داریم سیستم 3درجه آزادی دارد.



$$(x_A, y_A, \theta_1, \theta_2)$$

قید: $\vec{V_C} \times \vec{r}_{CA} = 0$

$$\vec{V_C} = \vec{V_B} + \vec{\omega} \times r_{BC} = (\dot{x}_B i + \dot{y}_B j) + (\dot{\theta}_1 K) \wedge (\ell \cos\theta_1 i + \ell \sin\theta_1 j)$$

$$= (\dot{x}_B - \ell \dot{\theta}_1 \sin\theta_1) i + (\dot{y}_B + \ell \dot{\theta}_1 \sin\theta_1) j$$

$$\vec{r}_{CA} = -\ell (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) i - \ell (\sin\theta_1 + \sin\theta_2) j$$

قید ما $\vec{V_C} \times \vec{r}_{CA} = 0 \longrightarrow \dot{y}_B (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) - \dot{x}_B (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$

$$+ \ell \dot{\theta}_1 [\cos(\theta_2 - \theta_1) + 1] = 0$$

$$\sum_{K=1}^{n} a_{jK} \dot{q}_k + a_{j0} = 0 \xrightarrow[n=4]{j=1} a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + a_{13}\dot{q}_3 + a_{14}\dot{q}_4 + a_{10} = 0$$

$j = 1, \dots, m$

$a_{11} = -\sin\theta_1 - \sin\theta_2 \qquad a_{14} = 0$

$a_{12} = \cos\theta_1 + \cos\theta_2 \qquad a_{10} = 0$

$a_{13} = l\left[\cos(\theta_2 - \theta_1) + 1\right]$

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_k} = g_j\, a_{jk} \qquad \frac{\partial f_j}{\partial t} = g_j\, a_{j0}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_B} = g_1 a_{11} \rightarrow f_1 = \int g_1 a_{11}\, dx_B + h_1(y_B, \theta_1, \theta_2, t)$$

حال فرض کنیم g_1 جزو [illegible] را در [illegible]

تناقض می‌رسیم [illegible]

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_B} = g_1 a_{12} \qquad = -(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\int g_1\, dx_B + h_1(y_B, \theta_1, \theta_2, t)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} = g_1 a_{13}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} = g_1 a_{14} = 0 \qquad f_1 = h(x_B, y_B, \theta_1, t)$$

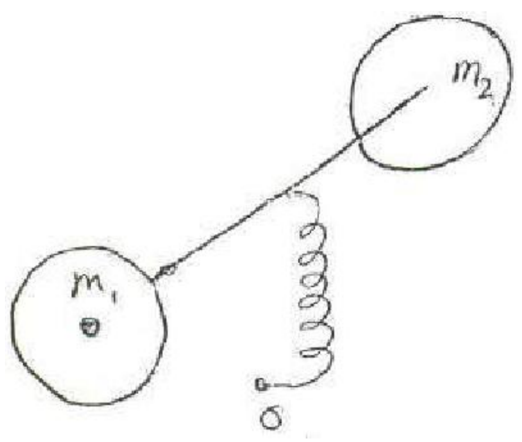
$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = g_1 a_{10} = 0$$

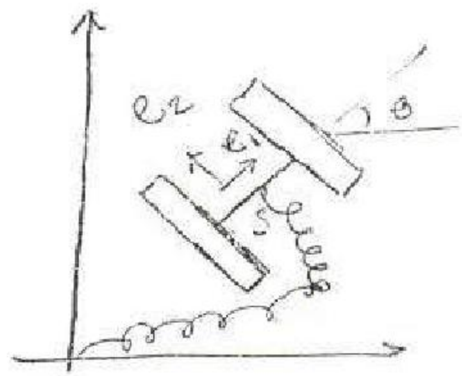
در نتیجه به این می‌رسیم که f_1 تابعی از θ_2 نیست در حالی که

[illegible] است که به θ_2 بستگی دارد پس این یک

تناقض است پس نمی‌توان تابع f را پیدا کرد

دو نقطه بالای M_1 و M_2 توسط میله صلب بدون جرمی به هم متصل شده اند و جرم های M_1 و M_2 به دسک هایی که جرم آن ها در برابر جرم های M_1و M_2 قابل صرف نظر است متصلند . مرکز میله هم به نقطه ثابتی توسط فنر متصل شده است قید مسئله این است که دیسک ها حرکت جانبی (لغزش جانبی) نمی توانند داشته باشند ، نوع قید مسئله را تعیین کنید.





(x, y, θ)

$$\vec{V}_S \cdot \hat{e}_1 = 0$$

$$(\dot{x} i + \dot{y} j) \cdot (\cos\theta i + \sin\theta j) = 0$$

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta = 0$$

$a_{11} = \cos\theta \qquad a_{12} = \sin\theta \qquad a_{13} = 0 \qquad a_{10} = 0$

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_k} = g_j a_{jk} \qquad \frac{\partial f_j}{\partial t} = g_j a_{j0} \qquad j = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = g_1 a_{11} \rightarrow f_1 = \cos\theta \int g_1 \, dx + c_1(y, \theta)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = g_1 a_{12} \qquad f_2 = \sin\theta \int g_1 \, dy + c_2(x, \theta)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = g_1 a_{13} = 0 \rightarrow f = c_3(x, y)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = g_1 a_{10} = 0$$

! باز هم متناقض است پس g وجود ندارد

قید nonholonomic است.

دو روش محاسبه Sr : روش تحلیلی : نوشتن r و بعد مشتق

روش سینماتیکی : نوشتن سرعت مد نظر بعد Sr

$$\delta r = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

کارمجازی $\delta w =$

$$\delta w = \cancel{\ } \sum_{i=1}^{N}$$

سه روش برای محاسبه نیروهای تعمیم یافته : 1-کار مجازی : کار مجازی را حساب می کنیم و بعد با رابطه زیر مقایسه می کنیم.

$$\delta w = \sum F_i \, dr_i = \sum Q_k \delta q_n$$

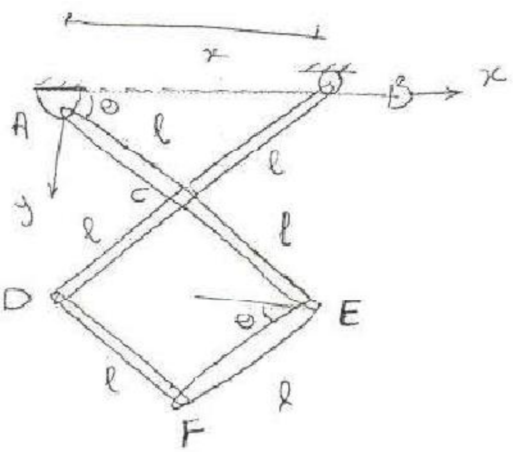
2 روش مستقیم :

$$Q_k = \sum F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_n} = \sum_{i=1}^{N} f_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_n}$$

3-نیروهای پتانسیل و تابع پتانسیل :

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

فاصله افقی متصل و غلتنده مکانیزم نشان داده شده برای مختصات تعمیم یافته در نظر گرفته می شود جا به جایی مجازی متصل F و چرخش مجازی میله EF را در اثر جا به جایی x بیابید.



سمت F ! دستگاری

$$\vec{r}_F = \vec{r}_{F/A} = \frac{x}{2} i + \frac{3}{2}(4l^2 - x^2)^{1/2} j$$

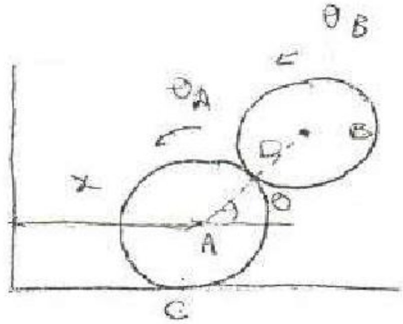
$$\delta r_F = \frac{d}{dx}(r_F)\,\delta x = \left[\frac{1}{2} i - \frac{3x}{2(4l^2 - x^2)^{1/2}}\right] \times \delta x$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{2L}\right)$$

$$\delta\theta = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos^{-1}\left(\frac{x}{2L}\right)\right)\delta x = \frac{-\delta x}{(4l^2 - x^2)^{1/2}}$$

مطابق شکل چرخ دنده B در حال غلتش بر روی چرخ دنده A می باشد چرخ دنده A نیز در حال غلتش روی چرخ دنده شانه ای C است مختصه های تعمیم یافته را فاصله افقی x تا چرخ دنده A و زاویه θ خط متصل کننده مراکز چرخ دنده ها در نظر بگیرید . جا به جایی مرکز هر چرخ دندهو همچنین چرخش مجازی هر چرخ دنده را در اثر تغییرات مجازی مختصات تعمیم یافته بیابید.

سیستم 2 درجه ازادی دارد.



$$V_A = \dot{x}\,\hat{i}$$
$$\delta r_A = \delta x\, i$$
$$\delta r = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k$$
$$\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}_{AC}$$
$$\dot{x}\, i = 0 + (\dot{\theta}_A k) \wedge (R\, j)$$

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}_A \longrightarrow \dot{\theta}_A = \frac{-\dot{x}}{R}$$

$$\delta\theta_A = \frac{-\delta x}{R}$$

با وجود اینکه A و B از یک جسم صلب نیستند اما تعداد AB را در نظر بگیریم. مانند این است که ادامه چرخ دنده A است.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{\rho}_{AB}$$
$$\vec{V}_B = \dot{x}\, i + (\dot{\theta} k)\,(2R\cos\theta\, i + 2R\sin\theta\, j)$$
$$V_B = (\dot{x} - 2R\dot{\theta}\sin\theta)\, i + 2R\dot{\theta}\cos\theta\, j$$

$$\delta r_B = (\delta x - 2R\,\delta\theta \sin\theta)\, i + 2R\,\delta\theta\cos\theta\, \hat{j}$$
$$\vec{V}_D = V_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}_{AD} = V_B + \vec{\omega}_B \times \vec{\rho}_{BD}$$

$$\dot{x}\, i + (\dot{\theta}_A \hat{k}) \times (R\cos\theta\, i + R\sin\theta\, j) = (\dot{x} - 2R\dot{\theta}\sin\theta)\, i + 2R\dot{\theta}\cos\theta\, j + (\dot{\theta}_B k) \wedge (-R\cos\theta\, i - R\sin\theta\, j)$$

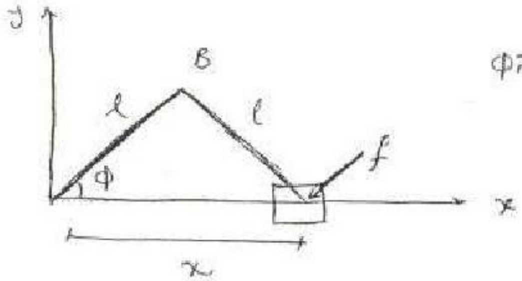
$$\rightarrow (\dot{x} - R\dot{\theta}_A \sin\theta)i + R\dot{\theta}_A \cos\theta j = (\dot{x} - 2R\dot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}_B \sin\theta)i + (2R\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}_B\cos\theta)j$$

$$-\dot{\theta}_A = -2\dot{\theta} + \dot{\theta}_B$$

$$\dot{\theta}_B = 2\dot{\theta} - \dot{\theta}_A \rightsquigarrow \delta\theta_B = 2\delta\theta - \delta\theta_A = 2\delta\theta + \frac{\delta x}{R}$$

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}_A \rightarrow \dot{\theta}_A = -\dot{x}/R \rightsquigarrow \delta\theta_A = -\delta x/R$$

مطابق شکل نیروی F با اندازه ثابت به نقطه C مکانیزم اعمال می گردد به نحوی که همیشه عمود بر میله BC باقی می ماند نیروی تعمیم یافته متناظر با مختصه تعمیم یافته را بیابید. مختصه تعمیم یافته را یکبار x و بار دیگر y در نظر بگیرید.



φ مختصه تعمیم یافته : $\delta w = f \cdot \delta r_C$

$$\vec{r}_C = \vec{r}_{C/A} = 2l\cos\varphi\,\hat{i}$$

$$\delta r_C = \frac{\partial r_C}{\partial \varphi}\,\delta\varphi = -2l\sin\varphi\,\delta\varphi\,\hat{i}$$

$$f = -f\sin\varphi\,i - f\cos\varphi\,j$$

$$\delta w = \vec{F}\cdot\delta\vec{r}_C = \underbrace{2fl\sin^2\varphi}_{Q_\varphi}\,\delta\varphi$$

$$Q_\varphi = 2fl\sin^2\varphi \qquad \delta w^{\varphi} = Q_\varphi\,\delta\varphi$$

مختصات تعمیم یافته $\quad \vec{r}_C = \vec{r}_{C/A} = x\hat{i}$

$$\delta r_C = \delta x\,\hat{i}$$

$$f = -f\sin\varphi\,i - f\cos\varphi\,j$$

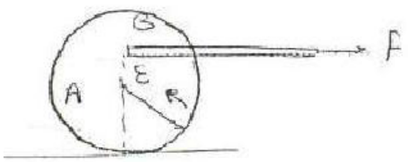
$$\cos\varphi = x/2l \qquad \sin\varphi = 1/l\,(l^2 - x^2/4)^{1/2} \Big\} \rightarrow f = \frac{-f}{l}\left[(l^2 - x^2/4)^{1/2}\,i + x/2\,j\right]$$

$$\delta w = f\cdot\delta r_C = -f/l\,(l^2 - x^2/4)^{1/2}\,\delta x$$

$$\delta w = Q_x\,\delta x$$

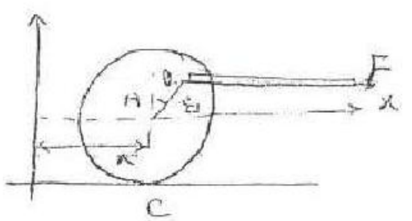
$$\Rightarrow Q_x = -f/l\,(l^2 - x^2/4)^{1/2}$$

مطابق شکل کابلی به مفصل B روی چرخ دنده A بسته شده است نیروی کششی f به انتهای ازاد کابل وارد می شود به نحوی که کابل افقی باقی می ماند چرخش چرخ دنده A را به عنوان مختصه تعمیم یافته در نظر گرفته و نیروی تعمیم یافته متناظر با آن را بیابید چرخ دنده بدون لغزش می غلتد.



$$\delta w = \vec{f} \cdot \delta \vec{r}_B$$

$$v_A = v_C + \omega \times \rho_{CA} = 0 + (-\dot{\theta}\hat{k}) \wedge (R\hat{j}) = R\dot{\theta}\,\hat{i}$$



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \omega \times \vec{\rho}_{AB} = R\dot{\theta}\,\hat{i} + (-\dot{\theta}\hat{k}) \wedge (\varepsilon \sin\theta\, \hat{i} + \varepsilon \cos\theta\, \hat{j})$$

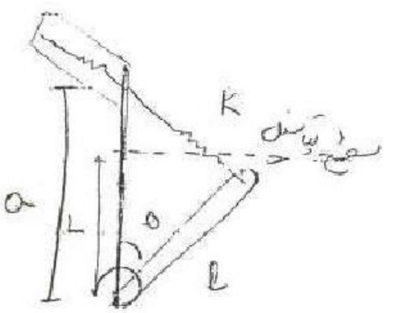
$$v_B = \left[(R + \varepsilon \cos\theta)\, \hat{i} - \varepsilon \sin\theta\, \hat{j} \right] \dot{\theta}$$

$$\delta r_B = \left[(R + \varepsilon \cos\theta)\, \hat{i} - \varepsilon \sin\theta\, \hat{j} \right] \delta\theta$$

$$\delta w = f \cdot \delta r_B = f\,\hat{i} \cdot \delta r_B = f(R + \varepsilon \cos\theta)\,\delta\theta \Rightarrow Q_\theta = f(R + \varepsilon \cos\theta)$$

$$\delta w = Q_\theta\, \delta\theta$$

میله ای یکنواخت به طول L و وزن W به کمک فنری با ثابت K در حال تعادل نگه داشته می شود وقتی $\theta = 0$ است فنر دارای طول عادی خود می باشد حالات تعادل سیستم را بیابید.



$a - l$

سیستم دارای یک درجه آزادی است.
چون سیستم در حال تعادل است
مشتق تابع پتانسیل نسبت به
θ مساوی صفر است

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$V = \frac{1}{2} k\left(a^2 + l^2 - 2al\cos\theta\right) - \frac{1}{2} wL(1 - \cos\theta)$$

$-(a - L)$

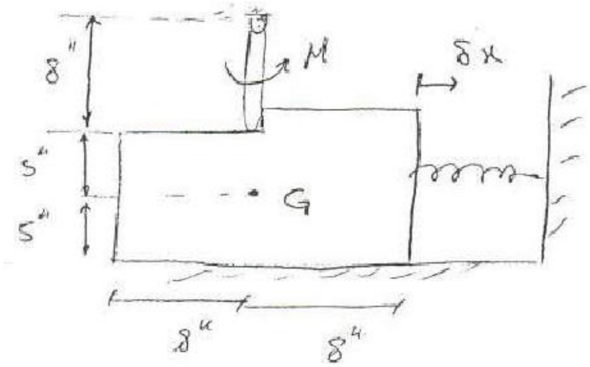
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow -\frac{1}{2} w l \sin\theta + kal\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta = 0 \longrightarrow \theta = 0$$

L

$$K = \frac{1}{2} \frac{w}{a}$$

فنر افقی نشان داده شده در شکل زیر به اندازه 5 اینچ متراکم شده است ضریب اصطکاک بین بلوک 100 پوندی و سطح افقی برابر با 0.3 می باشد. با استفاده از روش کار مجازی ممان N که باید به میله قائم اعمال شود تا بلوک به سمت راست حرکت کندرا بیابید.



جابجایی مجازی : x

$$\delta w = -(100)(0.3)\delta x - \tfrac{1}{2}\left[(5+\delta x)^2 - 5^2\right] + M\,\delta x/8 = 0$$

$$\Rightarrow\; -30\delta x - 10(25 + 10\delta x + \delta x^2 - 25) + M\frac{\delta x}{8} = 0$$

در مقابل $\delta x \rightarrow \delta x^2$ قابل صرف نظر

$$-30\delta x - 100\delta x + M\frac{\delta x}{8} = 0$$

$$M = 1040 \text{ lb-in}$$

اصل دالامبر

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{f} - m\vec{a_i})\,\delta\vec{r_i} = 0$$

برای سیستمی با N ذره

اصل همیلتون

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta w_{nc})\,dt = 0$$

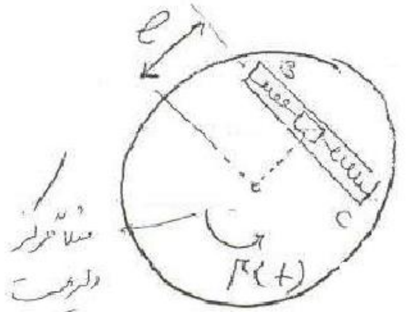
معادلات لاگرانژ

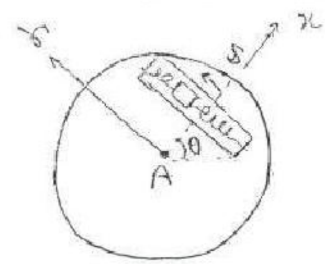
برای زمانی که مختصات تعمیم یافته مستقل از هم باشند

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{k,nc} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

مطابق شکل میز دایره ای شکل در صفحه افقی در اثر گشتاور $\Gamma(t)$ حول مفصل A می چرخد جرم میز برابر M و شعاع ژیراسیون حول مرکز آن برابر با K می باشد.

لغزنده ای به جرم M توسط یک جفت فنر مقید شده و در شیار BC حرکت می کند فنرها در موقعیت نشان داده شده در شکل بدون کشیدگی هستند . ثابت هر فنر برابر K می باشد. معادلات حرکت حاکم بر سیستم را بدست آورید.





اول درجه آزادی ← مختصات تعمیم یافته مستقل

سیستم مختصات را به میز متصل است.

$$T = \frac{1}{2} I_{zz,table}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v_s^2$$

$$I_{zz,table} = MK^2$$

$$\vec{V}_s = V_s\big|_{xyz} + \dot{R} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AS}$$

$$= \dot{s}\hat{j} + 0 + (\dot{\theta}k) \times (li + sj)$$

$$= -s\dot{\theta}\, i + (\dot{s} + l\dot{\theta})\, j$$

$$T = \frac{1}{2} MK^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\left[(s\dot{\theta})^2 + (\dot{s} + l\dot{\theta})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[MK^2 + ms^2 + ml^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{s}^2 + ml\dot{s}\dot{\theta}$$

$$V = 2\left(\tfrac{1}{2} k s^2\right) = k s^2$$

$$\delta W = Q_1 \delta\theta + Q_2 \delta s$$

$$\delta W = \Gamma \delta\theta \longrightarrow \begin{cases} Q_1' = \Gamma \\ Q_2' = 0 \end{cases}$$

نیروهای ناپایستار وارد بر سیستم $\Gamma(t)$ است.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \frac{d}{dt}\left[(Mk^2 + ms^2 + ml^2)\dot\theta + ml\dot s\right]$$

$$= (Mk^2 + ms^2 + ml^2)\ddot\theta + 2ms\dot s\dot\theta + ml\ddot s$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot s} = m\ddot s + ml\ddot\theta$$

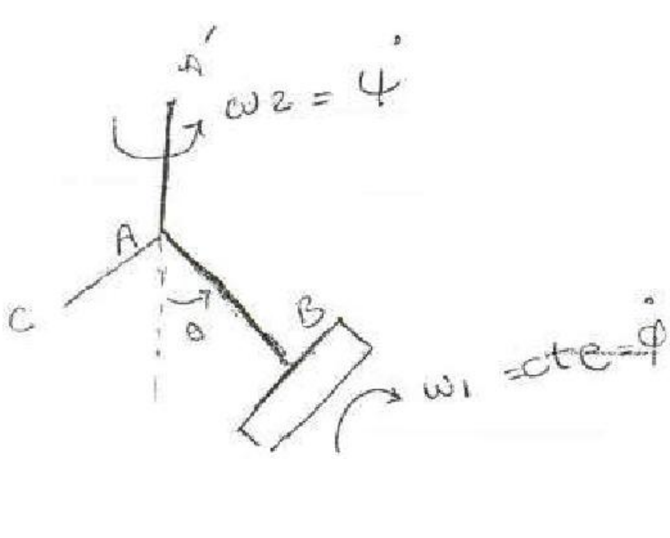
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = ms\dot\theta^2 \qquad \frac{\partial V}{\partial s} = 2ks$$

$$(Mk^2 + ms^2 + ml^2)\ddot\theta + 2ms\dot s\dot\theta + ml\ddot s = \Gamma$$

$$m\ddot s + ml\ddot\theta - ms\dot\theta^2 + 2ks = 0$$

مطابق شکل دیسک حول محور AB با سرعت ثابت W_1 می چرخد. دیسک و محور ان نیز ازادانه حول محور قائم می چرخد در صورتی که جرم دیسک m_1 و جرم محور AB ، m_2 باشد معادلات حرکت را بدست آورید.



سیستم دارای 3 درجه ازادی است البته به شرطی که دما ثابت نباشد. سه چرخش حول

AA' و AB و AC ولی چون W_1 ثابت است ما یک معادله قید داریم یعنی $\dot{\varphi}$ ثابت است پس φ قید است.

$$q_1 = \varphi$$
$$q_2 = \theta$$

$$T = \tfrac{1}{2}\left(\vec{H_A} \cdot \vec{\omega}\right)_{disk} + \tfrac{1}{2}\left(H_A \cdot \omega\right)_{shaft}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2\right)_{disk}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\cancel{I_{xx}}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2\right)_{shaft}$$

$$\vec{\omega}_{disk} = \left[(\dot{\varphi}\cos\theta + \omega_1)\,i - \dot{\theta}\,j + \dot{\varphi}\sin\theta\,k\right]$$

$$\vec{\omega}_{shaft} = -\dot{\varphi}\cos\theta\,i - \dot{\theta}\,j + \dot{\varphi}\sin\theta\,k$$

$$T = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}m_1R^2\right)\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \omega_1\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}m_1R^2 + m_2\ell\right)\left(\dot{\theta}^2 + (\dot{\varphi}\sin\theta)^2\right)$$

$$V = m_1 g(-\ell\cos\theta) + m_2 g\left(-\tfrac{\ell}{2}\cos\theta\right) = -\left(m_1 + \tfrac{1}{2}m_2\right) g\,\ell\cos\theta$$

$$\delta W_{nc} = 0 \rightarrow Q_1 = Q_2 = 0$$

$$\begin{cases} \left(I_1\cos^2\theta + I_2\sin^2\theta\right)\ddot{\varphi} - 2(I_1 - I_2)\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta - I_1\omega_1\dot{\theta}\sin\theta = \\ I_2\ddot{\theta} + (I_1 - I_2)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + I_1\omega_1\dot{\varphi}\sin\theta + \left(m_1 + \tfrac{1}{2}m_2\right)g\ell \\ \qquad \sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$I_1 = \tfrac{1}{2} m R^2$$

$$I_2 = \tfrac{1}{4}m_1R^2 + \left(m_1 + \tfrac{1}{3}m_2\right)\ell^2$$

در حل مسائل با استفاده از اصل همیلتون باید $\delta\ddot{q}_1 , \delta\dot{q}_1$ اگر داشتیم باید آن ها را حذف کنیم و بر حسب δq_1 بنویسیم.

مثلاً اگر داشتیم :

$$\int \dot{\theta}\,\delta\dot{\theta}\, dt = \dot{\theta}\,\delta\theta \Big|_{t_1}^{t_2} - \int \ddot{\theta}\,\delta\theta\, dt$$

ما در اصل همیلتون داریم که $0 = \delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2)$ است پس ترم اول برابر صفر می شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big[(\qquad\qquad) \delta q_1 + (\qquad\qquad) \delta q_2 + \cdots (\qquad\qquad) \delta q_k \Big] dt = 0$$

باید ضرایب δq_k را برابر صفر بگذاریم.