1-سینماتیک جسم صلب در فضا (حرکت نسبی – مختصات واسط)

زوایای اویلر

2 سینتیک جسم صلب در فضا

اندازه حرکت زاویه ای جسم صلب در سه بعد

تنسور محان اینرسی

معادلات حرکت جسم صلب برای حرکت سه بعدی

معادلات حرکت اویلر

اصل ضربه و مقدار حرکت

انرژی جنبشی جسم صلب در حرکت سه بعدی

اصل کار و انرژی

حرکت جسم صلب حول نقطه ثابت

حرکت ازاد از گشتاور یک جسم با تقارن محوری

حرکت آزاد از گشتاور یک جسم نامتقارن

حرکت فرفره

حرکت ژیروسکوپ

3-معادلات لاگرانژ (مقدمه ای بر دینامیک تحلیلی)

مروری بر دینامیک I

سینماتیک ذرات مادی

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

سرعت شتاب - مولفه‌های مستطیلی Rectangular

سرعت و شتاب - مولفه‌های متغیر مسیر Path variable

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}\hat{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{e}_t + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R}\hat{e}_n$$

مماس بر حرکت

در جهت مرکز انحنا مسیر

سرعت و شتاب در مختصات استوانه ای

$$\vec{r} = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z$$

$$\vec{V} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z$$

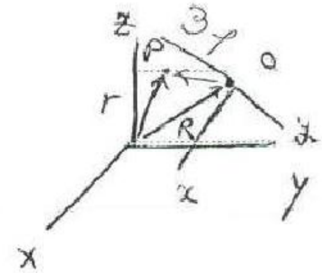
$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

سوال آخر امتحان دینامیک I

بعد از اینکه طناب پاره می شود چون r در حال تغییرات $\ddot{r}$ داریم و $r\dot{\theta}^2$ نیز داریم چون زاویه در حال تغییر است اما برایند این شتاب ها برابر صفر است.

سرعت و شتاب مختصات کروی :

اگر دستگاه کوچک نسبت به دستگاه بزرگ فقط انتقالی داشته باشد.



$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{xyz} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{xy\mathfrak{z}}$$

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

$$\vec{V}_{xyz} = \dot{\vec{R}} + \vec{V}_{xy\mathfrak{z}}$$

$$\vec{a}_{xyz} = \vec{a}_{xy\mathfrak{z}} + \ddot{\vec{R}}$$

سینماتیک جسم صلب – حرکت نسبی

حرکت انتقالی : 1 مستقیم الخط ، 2 منحنی الخط

حرکت دورانی (حول محور ، حول نقطه)

حرکت عمومی = حرکت انتقالی + حرکت دورانی

قضیه مشال

مشتق بردار ثابت A در دستگاه متحرک :

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

$$\left(\frac{d^2A}{dt^2}\right)_{XYZ} = \vec{\dot{\omega}} \times \vec{A} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{A}$$

$\vec{A}$ می تواند بردار جسم صلب و $\vec{\omega}$ می تواند سرعت زاویه ای جسم صلب باشد.

برای دو نقطه از یک جسم صلب :

$$\vec{V}_b = \vec{V}_a + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{ab}}_{V_{b/a}}$$

$$\vec{a}_b = \vec{a}_a + \underbrace{\vec{\dot{\omega}} \times \vec{\rho}_{ab} + \omega \times \omega \times \rho_{ab}}_{a_{b/a}}$$

مشتق بردار غیر ثابت در دستگاه متحرک xyz

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{dA}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

سرعت دورانی دستگاه xyz نسبت به XYZ

سرعت ذره و شتاب در دستگاه های مختلف

بردار سرعت مرکز دستگاه xyz نسبت به XYZ

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{xyz} + \vec{\dot{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

بردار سرعت ذره در xyz

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + \vec{\ddot{R}} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\dot{\omega}} \times \vec{\rho} + \omega \times \omega$$

دینامیک ذره :

قانون نیوتن - مختصات کارتزین

$$F_x = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_y = ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad F_z = ma_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

قانون نیوتن مختصات استفاده ای

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$
$$F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$
$$F_z = m\ddot{z}$$

قانون نیوتن متغیر های مسیر

$$F_t = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad , \quad F_n = m \frac{\left({ds}/{dt} \right)^2}{R}$$

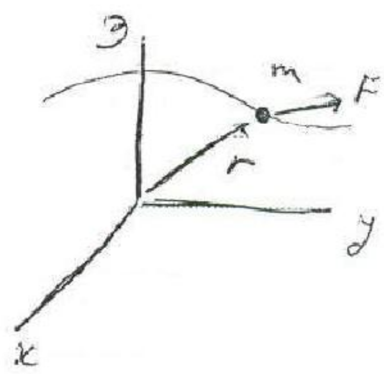
سیستم ذرات

$$\vec{F_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} f_{ij} = m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2}$$

f_{ij} نیروی ناشی از ذره ی j ام بر ذره i ام

$$\vec{F} = M \frac{d^2 r_c}{dt^2} \qquad M r_c = \sum m_i r_i$$

کار و انرژی ذرات



$$\underbrace{\int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr}}_{W_{1-2}} = \frac{1}{2} m \left(\vec{V_2}^2 - \vec{V_1}^2 \right)$$

میدان نیروی کنسرواتیو (پایستار)

$$W_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr} = E_1(x, y, z) - E_2(x, y, z)$$

$$\Delta E = -\int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0 \quad , \quad \vec{F} = -\vec{\nabla E}$$

اصل بقای انرژی :

$$(PE)_1 + (KE)_1 = (PE)_2 + (KE)_2$$ سیستم کانسرواتیو

$$\int_1^2 \vec{F}_{nonCon} \cdot \vec{dr} = \Delta(KE)_{1,2} + \Delta(PE)_{1,2}$$ سیستم غیرکانسرواتیو

$$\Delta(KE + PE) = W^{nc}_{1-2}$$

برای سیستم ذرات :

$$\underbrace{\int_1^2 \vec{F}_i \cdot \vec{dr_i}}_{\text{کار نیروی خارجی}} + \overbrace{\int_1^2 \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} f_{ij} \cdot \vec{dr_i}}^{\text{کار نیروی داخلی}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}(m_i v_i^2)_2 - \frac{1}{2}(m_i v_i)_1}$$

کار نیروهای داخلی در سیستم ذرات صفر نیست .

انرژی جنبشی بر اساس مرکز جرم

$$KE = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\rho}_{ci}^{\,2}$$

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr_c} = \frac{1}{2} M \left[(v_c)_2^2 - (v_c)_1^2 \right]$$

اگر تمام نیروهای خارجی به مرکز جرم منتقل شود می توان از فرمول بالا استفاده کرد.

مونتوم ذرات

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\cdot dt = \underbrace{m\vec{V_f} - m\vec{V_i}}_{\text{تغییر اندازه حرکت}}$$

ایمپالس نیرو در زمان معین

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\cdot dt = M(\vec{V_C})_f - M(\vec{V_C})_i$$

نیروهای ایمپالسی Impulsive

در زمان کوچک با Impulse یا r وارد می شود مانند انفجار

برخورد Impact

اصل بقا مونتوم خطی برقرار است.

برخورد مرکزی ، مرکز جرم دو جسم بر روی خط برخورد : 1- مستقیم 2- مایل

ضریب جهش $\varepsilon = -\dfrac{\text{سرعت نسبی جدایش}}{\text{سرعت نسبی نزدیک شدن}}$

Coefficient of restitution

$\varepsilon = 0$ برخورد کاملا پلاستیک

$\varepsilon = 1 \longrightarrow$ برخورد الاستیک

$0 < \varepsilon < 1$

سینماتیک جسم صلب در فضا

انواع حرکتهای سینماتیکی جسم صلب

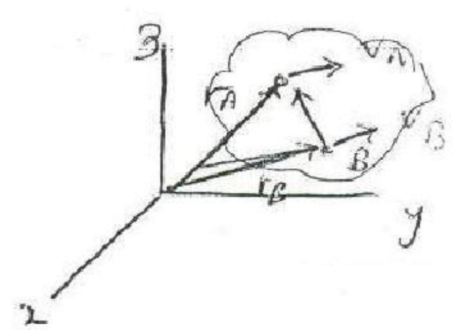
حرکت انتقالی(translation)

rect Translat

Curvilinear Translat

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B$$



Fixed Axis Rotation

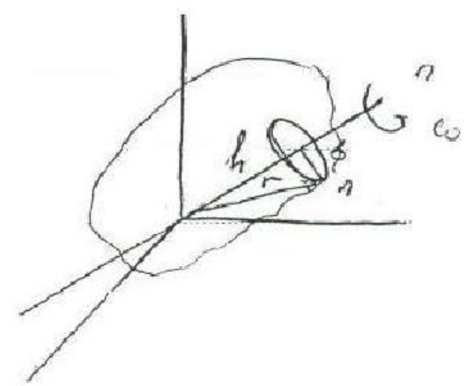
دوران حول محور ثابت

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{\omega}\times(\vec{h}+\vec{b})$$

$$= \omega\times h + \vec{\omega}\times b = \vec{\omega}\times\vec{b}$$

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\begin{cases} a_t = b\alpha = b\dot{\omega} \\ a_n = b\omega^2 \end{cases}$$

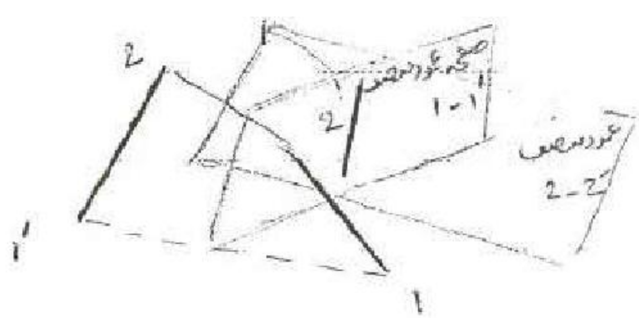


حرکت موازی صفحه Parallel – Plane motion

تمام نقاط بر روی جسم موازی صفحه مبنا باشند. به این صفحه مبنا plane of notion می گوییم.

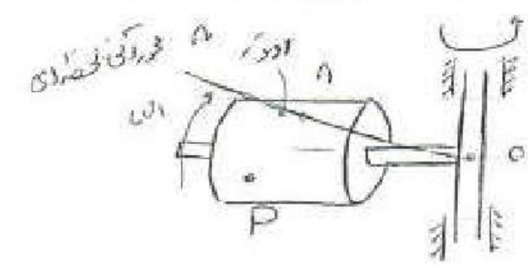
دوران حول نقطه ثابت Rotation about a fixed point

جهت بردار w در طول زمان در این نوع حرکت می تواند تغییر کند.



During a small motion of a rigid body about a fixed pivot
there is one line all points of which suffer zero net displacement.
In general the points on this line may have motion during the displacement but will return to their original position on the rotation axis O-n

Instantaneous Axis of Rotation محور دوران

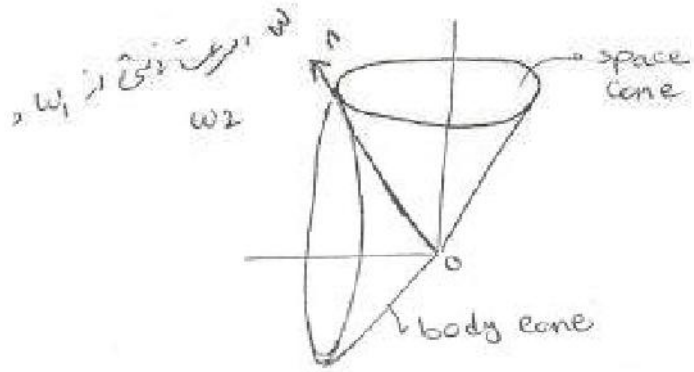


Rotors spining speed $= \omega_1$
محور چرخش

Rotation about fixed vertical axis $= \omega_2$

سرعت نقطه A ناشی از چرخش ω_2
سرعت نقطه A ناشی از چرخش ω_1

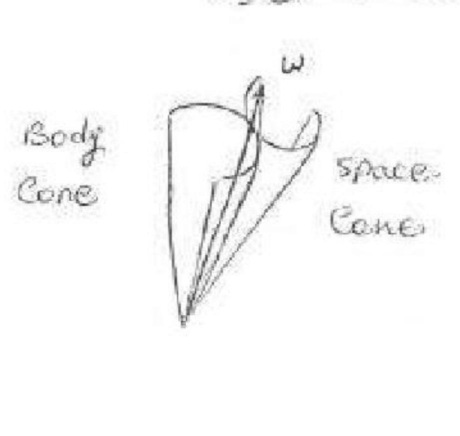
Body & space Cones



مکان هندسی نقاط On محور دوران است

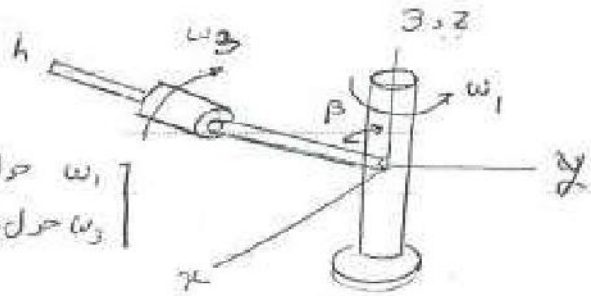
body Cone = ?

اگر مقدار ω_1 و ω_2 ثابت باشند
تا این دو مخروط را خواهیم داشت.
اما اگر مقدار این دو بردار ثابت نباشند مخروط‌ها به شکل زیر خواهد شد



ω_1 حول محور z

ω_3 حول محور h



$$\vec{\omega} = \vec{\omega_1} + \vec{\omega_2} + \vec{\omega_3}$$
$$= \omega_1 \hat{k} + \dot{\beta}\, \hat{i} + \omega_3 \hat{h}$$
$$= \underbrace{\omega_1 \hat{k}}_{\text{Precesion rate}} + \underbrace{\dot{\beta}\, \hat{i}}_{\text{nutation rate}} + \underbrace{\omega_3 (\cos\beta\, \hat{k} - \sin\beta\, \hat{j})}_{\text{spin rate}}$$

Precesion rate, nutation rate, spin rate

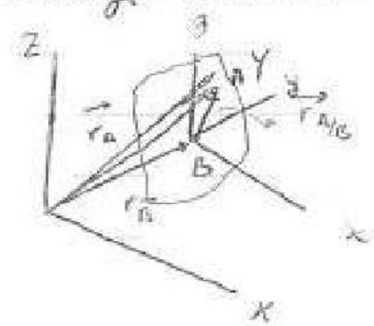
$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 + \dot{\vec{\omega}}_3 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\omega}_3$$
$$= \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 + \dot{\vec{\omega}}_3 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_3$$

اثرات ژیروسکوپ Gyroscopic effects

محور آنی دوران $\hat{n} = \dfrac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$

General Motion حرکت عمومی

Translating Refrence Axis محورهای مبنای انتقالی

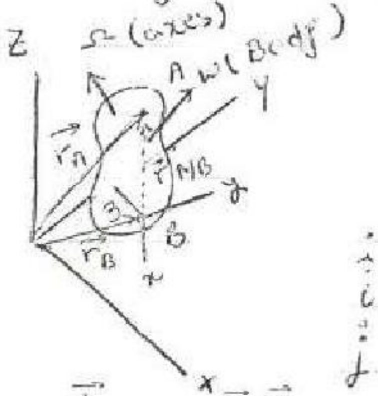


$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$
$$= \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overset{-\vec{r}_{A/B}}{\vec{r}_{B/A}}$$

Rotating Refrences

محورهای نسبی دورانی



دستگاه xyz حرکت انتقالی قبلی را دارد
ولی حرکت دورانی با سرعت زاویه‌ای $\vec{\Omega}$
را هم دارد که با سرعت دورانی جسم $\vec{\omega}$
متفاوت است.

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\Omega} \times \vec{i} \qquad \dot{\vec{k}} = \Omega \times \vec{k}$$

$$\dot{\vec{j}} = \Omega \times \vec{j}$$

$$\vec{V}_A = \overset{\dot{\vec{R}}}{\vec{V}_B} + \overset{\vec{\omega}\times\vec{\rho}}{\vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/B}} + \overset{V_{xyz}}{\vec{V}_{rel}} = \vec{V}_B + \underbrace{\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}}_{V_{rel}} + \underbrace{x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}}}_{\Omega \times r_{A/B}}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_{rel} &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \\ \vec{a}_{rel} &= \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

سرعت و شتاب A نسبت به xyz
از دید ناظر متصل به xyz

اگر xyz متصل به جسم باشد
آنگاه $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$ ، $a_{rel} = V_{rel} = 0$
پس حالت روابط قبلی حاصل می‌شود.

$$\left|\begin{aligned} \vec{V}_{XYZ} &= \vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \\ \vec{a}_{XYZ} &= \vec{a}_{xyz} + \ddot{\vec{R}} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \end{aligned}\right.$$

حرکت غلتشی Rolling

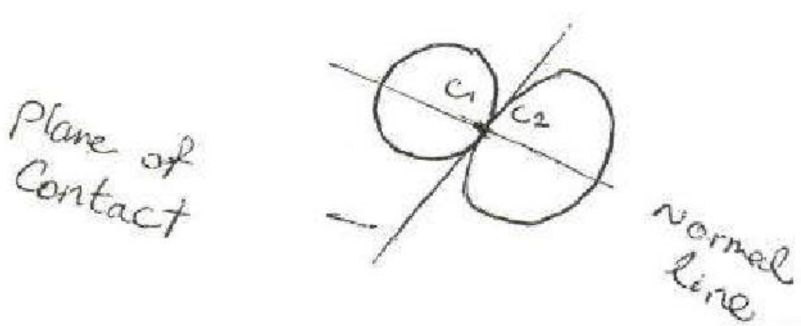
حرکت غلتشی یک حالت جالب از حرکت ممتد یک جسم صلب است.

حرکت غلتشی یک جسم بر روی زمین

حرکت غلتشی یک جسم بر روی جسم دیگر

قید غلتشی

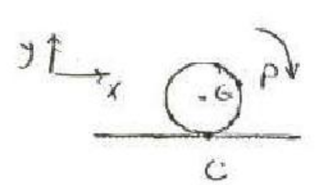
سرعت نسبی نقطه تماس در صفحه تماس صفر است. سرعت دو جسم در جهت نرمال نیز برابر است(مفهوم صلب بودن)

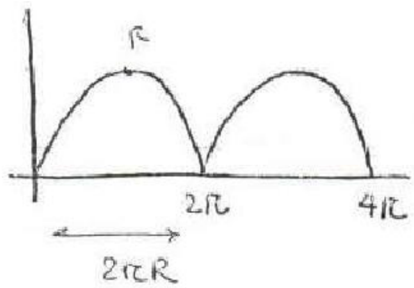


⟸ در غلتش ناب $\vec{V}_{C_1} = \vec{V}_{C_2}$

! $v_{A/B} = v_A - v_B$

شتاب نقطه تماس در دو جسم برابر نیست.





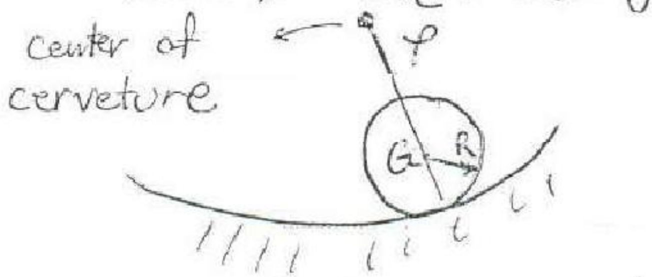
$$\vec{V}_P = \vec{V}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/G} = \dot{X}\,\hat{i} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/G}$$

$$\vec{V}_C = 0 \Rightarrow v_G = -\left(-\omega\hat{k} \times (-R\hat{j})\right) = R\omega\hat{I} = R\dot{\theta}\hat{I}$$

$$\dot{X} = R\dot{\theta}$$

$$\vec{a}_P = R\alpha\hat{I} + \left(-\alpha\hat{k} \times r_{P/G}\right) - \omega^2 r_{P/G}$$

if $P=C$ $\longrightarrow$ $\vec{a}_C = R\omega^2\hat{J}$



Concave upward

Convex curve

$$\vec{v}_G = R\omega \hat{e}_t$$

$$\vec{a}_G = R\alpha \hat{e}_t + R^2 \omega^2/\rho \, \hat{e}_n$$

$$\vec{a}_C = R\omega^2 (1 + R/\rho) \hat{e}_n$$

Concave

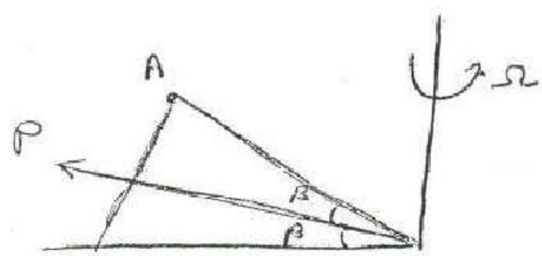
Convex curve

$$a_C = R\omega^2 (-1 + R/\rho) \hat{e}_n$$

$\rho \to \infty$ سطح صاف شود

در حالت convex ، en به سمت پایین است و در convex، en به سمت بالا است.

تمرین ویژه :



$v_A = ?$

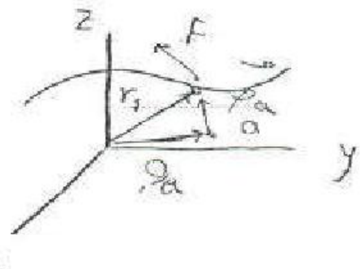
$a_A = ?$

$\omega_{\text{سیستم}} =$

$\alpha_{\text{سیستم}} =$

فصل دوم

گشتاور مومنتوم یک ذره Moment oh momentom



linear Momentum $\quad P = m\vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{dP}{dt} = \dot{P} = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$\vec{\rho_a} \times \vec{F} = \vec{\rho_a} \times \dot{\vec{P}}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\rho_a} \times \vec{P}) = \vec{\rho_a} \times \dot{P} + \dot{\vec{\rho_a}} \times \vec{P}$$

$$\vec{r} = \vec{oa} + \vec{\rho_a} \xrightarrow[\text{باشد}]{\text{اگر } a \text{ ثابت}} \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\rho_a}}$$

$$\dot{\rho_a} \times P = \dot{\rho_a} \times m\dot{\vec{r}} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{\rho_a} \times \vec{P}) = \rho_a \times \dot{P}$$

$$\Rightarrow \vec{\rho_a} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\underbrace{\vec{\rho_a} \times \vec{P}}_{H_a}) = \dot{H}_a$$

$$\vec{M_a} = \dot{\vec{H_a}} \qquad H: \text{Angular Momentum vector}$$

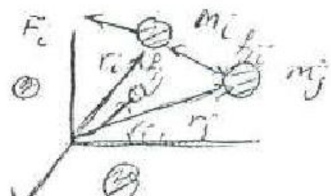
$(M_a)_x = (\dot{H}_a)_x$ ⟶ اول مشتق می‌گیریم بعد مولفه‌ی x را درنظر می‌گیریم

$(M_a)_y = (\dot{H}_a)_y$

$(M_a)_z = (\dot{H}_a)_z$

معادلات گشتاور مومنتوم برای سیستم ذرات

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} f_{ij} \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_i \times \vec{p}_i \right)$$



$$\sum_i r_i \times F_i + \sum_i \sum_j \cancel{r_i \times f_{ij}} = \frac{d}{dt} \sum_i (r_i \times p_i)$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum r_i \times p_i \right)$$

$$M_O = \dot{\vec{H}}_O$$

اثبات می‌شود :

$$\vec{H}_O = \vec{r}_c \times M \dot{\vec{r}}_c + \vec{H}_c$$

$$\hookrightarrow \sum \rho_{ci} \times m_i \dot{\rho}_{ci}$$

به صورت مشابه

$$\vec{H}_a = \vec{H}_c + \vec{r}_{ac} \times M \dot{\vec{r}}_{ac}$$

حول نقطه a — حول مرکز جرم — بردار موقعیت a به c — سرعت c نسبت به a

$$\dot{\vec{H}}_a = \dot{\vec{H}}_c + \vec{r}_{ac} \times M \dot{\vec{v}}_{ac}$$

v_c سرعت مرکز جرم نسبت به نقطه a است

اگر a نقطه‌ی ثابت باشد :

$$\vec{M}_a = \dot{\vec{H}}_c + \vec{r}_{ac} \times M \dot{\vec{v}}_c$$

حالت دوم : نقطه مبنا در مرکز جرم $\quad M_c = \dot{H}_c$

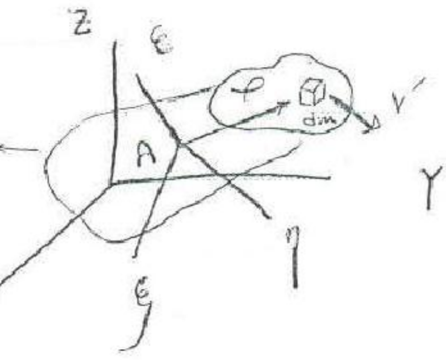
حالت سوم : نقطه ای که شتابش از مرکز جرم می گذرد $\quad \vec{M}_b = \dot{\vec{H}}_b$

اثبات شود

معادلات اویلر   Eolers eq

دستگاه $\varepsilon\eta\xi$ فقط حرکت انتقالی دارد و دوران نمی‌کند.
سرعت انتقال دستگاه همان سرعت انتقالی مرکز جرم

← امتداد فرضی جسم
Massless Rigid Body extension



V' سرعت جرم dm نسبت به A = سرعت جرم dm نسبت به $\varepsilon\eta\xi$ که با A نسبت به XYZ حرکت انتقالی دارد.

$dm\,v' =$ مومنتوم خطی نسبت به نقطه A

$$dH_A = \rho \times dm\,\vec{v'} = \vec{\rho} \times \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\varepsilon\eta\xi} dm$$

$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\varepsilon\eta\xi} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ ← سرعت زاویه‌ای دورانی جسم صلب

$$dH_A = \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\, dm$$

دستگاه مختصات xyz را در نقطه A قرار می دهیم سرعت لحظه ای ان Ω است.

$$\vec{A} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$(dH_A)_x\,\hat{i} + (dH_A)_y\,\hat{j} + (dH_A)_z\,\hat{k} =$$

$$(x\hat{i} + y\hat{i} + z\hat{k}) \wedge \left[(\vec{\omega_x} i + \vec{\omega_y}\hat{j} + \omega_z\hat{k}) \times (xi + yj + zk) \right] dm$$

$$(dH_A)_x = (\underbrace{x^2 dm}_{y^2+z^2})\,\omega_x - (xy\,dm)\,\omega_y - (xz\,dm)\,\omega_z$$

$$(dH_A)_y = -(yx\,dm)\,\omega_x + (y^2 dm)\,\omega_y - (yz\,dm)\,\omega_z$$

$$(dH_A)_z = -(zx\,dm)\,\omega_x - (zy\,dm)\,\omega_y + (z^2 dm)\,\omega_z$$

$$* \begin{cases} (H_A)_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ (H_A)_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ (H_A)_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{cases}$$

$$\vec{H} = [I]\,\vec{\omega} \qquad [I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

سرعت زاویه $\vec{\Omega}$ مربوط به xyz در رابطه $\vec{H}_A$ ظاهر نمی گردد.(مولفه های H_A تابع Ω نیست)

تاکنون هیچ قیدی بر روی نقطه A نبوده است.

حال فرض می کنیم که نقطه A

1 مرکز جرم

2 نقطه ثابت (یا متحرک، سرعت ثابت)

3-نقطه ای که

$$\dot{\vec{H}}_A = \left(\frac{dH_A}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{dH_A}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{H}_A$$

اگر دستگاه xyz حرکت انتقالی داشته باشد $\Omega = 0$ است.

در این حالت مشتقات I وارد می شود ⟵ انتخاب خوبی برای xyz نمی باشد.

اگر دستگاه xyz با $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$ **بچرخد ⟵ I** ها ثابت می مانند.

$$M_A = \left(\frac{dH_A}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{H}_A$$

پس از محاسبات و ساده سازی

$$M_x = \dot{\omega}_x I_{xx} + \omega_y \omega_z \left(I_{zz} - I_{yy}\right) + I_{xy}\left(\omega_z \omega_x - \dot{\omega}_y\right) - I_{xz}\left(\dot{\omega}_z + \omega_y \omega_x\right) - I_{yz}\left(\omega_y^2 - \omega_z^2\right)$$

به طور مشابه M_y و M_z را بدست آوریم .

For Plane Motion

$\omega_z = \omega \longrightarrow xy$ plane

$$(M_A)_x = -I_{xz}\dot{\omega} + I_{yz}\omega^2$$

$$(M_A)_y = -I_{yz}\dot{\omega} - I_{xz}\omega^2$$

$$(M_A)_z = I_{zz}\dot{\omega}$$

اگر xyz متصل به جسم در نقطه A همان محورهای اصلی جسم باشند .

Principle Axes

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$$

معادلات اویلر

$$\begin{cases} (M_A)_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_{zz} - I_{yy}) \\ (M_A)_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(I_{xx} - I_{zz}) \\ (M_A)_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_{yy} - I_{xx}) \end{cases}$$

اگر در معادلات اویلر حرکت صفحه ای باشد

$$(M_A)_z = I_{zz}\dot{\omega} \quad \leftarrow$$

اگر سنیتیک مسئله مشخص باشد   معادلات جبری است

(W ، W)

اگر ممان معلوم باشد ⟵ معادلات دیفرانسیلی غیر خطی خواهیم داشت

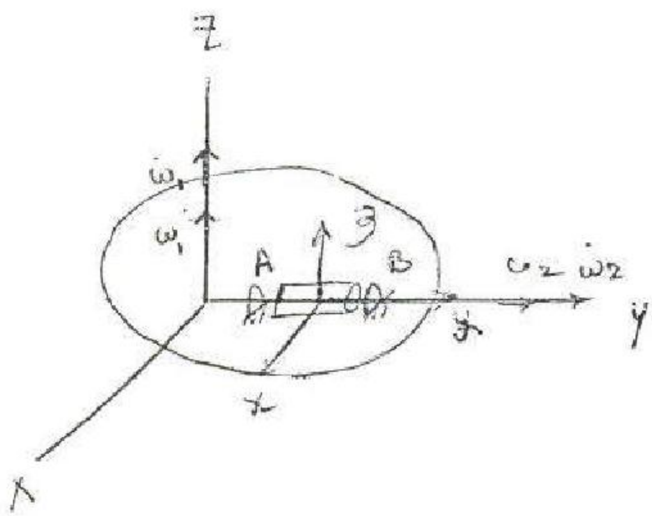
$\dot{\omega}_x$ یعنی مشتق w که بعد بر روی دستگاه x تصویر کرده ایم

عمل مشتق گیر

کاربرد معادلات اویلر

مثال : w_1 و w_2 نسبت به زمین و $\dot{\omega}_2 , \omega_2$ نسبت به plate

گشتاورهای نیروهای تکیه گاهی سیلندر AB حول مرکز جرم بیاید.



روش اول : xyz متصل به سیلندر در مرکز جرم

xyz موازی XYZ

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{K} + \omega_2 \hat{j} \qquad \omega_1 \hat{k}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_1 \hat{K} + \dot{\omega}_2 \hat{j} + \omega_2 \left((\omega_1 + \omega_2) \wedge \hat{j} \right)$$

که این رابطه برای هر لحظه صادق است اما

$$= \dot{\omega}_1 \underbrace{\hat{k}}_{k = K} + \dot{\omega}_2 \hat{j} - \omega_1 \omega_2 \hat{i}$$

فقط در این لحظه K با k برابر است

اما نمی‌توانیم از آن مشتق بگیریم

معادلات اویلر

$$M_x = I_{xx}(-\omega_1\omega_2) + \omega_1\omega_2 (I_{zz} - I_{yy})$$

$$M_y = I_{yy} \dot{\omega}_z \quad \longleftarrow \quad I_{xx} = I_{zz} \text{ چون}$$

$$M_z = I_{zz} \dot{\omega}_1$$

$$\vec{M} = -I_{yy}\, \omega_1 \omega_2 \hat{i} + I_{yy} \dot{\omega}_2 \hat{j} + I_{zz} \dot{\omega}_1 \hat{k}$$

اگر $\dot{\omega}_1$ و $\dot{\omega}_2$ برابر صفر شود

گشتاوری در راستای Z ، Y نخواهیم داشت اما در هر حال در راستای i گشتاور داریم

روش دوم : دستگاه xyz متصل به پلتفرم

$$M_A = \left(\frac{dH_A}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{H_A}$$

سیلندر AB یک Body of Revolution است پس کلیدی ممان های ضربی صفر هستند .

از طرفی I_{zz} ، I_{yy} ، I_{xx} **برای کلید زمان ها ثابت هستند لذا مشتق آنها در** $\left(\frac{dH_A}{dt} \right)$ **ظاهر نمی شود.**

$$\left(\frac{dH_C}{dt}\right)_{xyz} = \frac{d}{dt}\left[\left(H_x\hat{i} + H_y\hat{j} + H_z\hat{k}\right)\right]_{xyz}$$

نقطه A مرکز جرم C اختیار می‌شود

$$= \frac{d}{dt}\left[\left(I_{xx}\cancel{\omega_x}\,\hat{i} + I_{yy}\underset{\omega_2}{\underset{=}{\omega_y}}\hat{j} + I_{zz}\underset{\omega_1}{\underset{=}{\omega_z}}\hat{k}\right)\right]_{xyz}$$

که ω ها مربوط به جسم است.

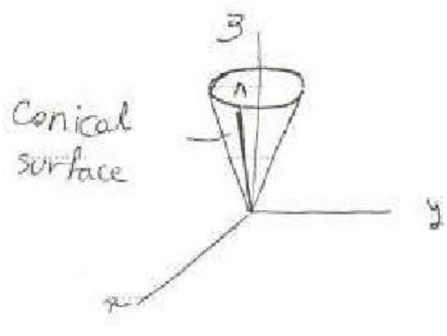
$$\left(\frac{dH_C}{dt}\right)_{xyz} = I_{yy}\dot{\omega}_2\hat{j} + I_{zz}\dot{\omega}_1\hat{k}$$

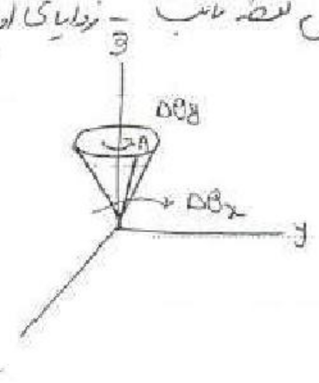
که چون نسبت به xyz مشتق می‌گیریم i، j، k مشتق ندارند.

$$M = I_{yy}\dot{\omega}_2\hat{j} + I_{zz}\dot{\omega}_1\hat{k} + \omega_1\hat{k}\times\left(H_x i + H_y j + H_z k\right)$$

$$= -I_{yy}\omega_1\omega_2 i + I_{yy}\dot{\omega}_z\hat{j} + I_{zz}\dot{\omega}_1\hat{k}$$

حرکت سه بعدی حول نقطه ثابت - زوایای اویلر





Euler's Angle
- ψ: Angle of precession
- θ: Angle of nutation
- ϕ: Angle of spin

جهت مثبت این سه زاویه دوران CCW هرگاه در راستای محور مورد نظر به نقطه O نگاه کنیم.

$d\psi$ ، $d\theta$ ، $d\varphi$ ← بردار هستند.

$\dot{\psi}$ ، $\dot{\theta}$ ، $\dot{\varphi}$ ← بردار هستند.

$$\begin{cases} \dot{\psi} & \text{حول } Z \\ \dot{\theta} & \text{حول Line of Nodes} \\ \dot{\varphi} & \text{حول محور } 3 \end{cases}$$

$$\vec{\dot{\theta}} \perp \text{plane I} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\dot{\theta}} \perp \vec{\dot{\varphi}} \\ \vec{\dot{\theta}} \perp \vec{\dot{\psi}} \end{cases}$$

لزوماً $\dot{\psi} \perp \dot{\varphi}$ نیستند.

سرعت زاویه‌ای جسم $\vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\psi}}$

سرعت زاویه‌ای xyz

الف - $\vec{\Omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}}$ ← سرعت زاویه‌ای نسبت به xyz $= \vec{\dot{\varphi}}$

ب - $\vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\varphi}}$

معادلات حرکت با استفاده از زوایای اویلر

مشکل δ :

حرکت جسم حول نقطه O برروی 3 بررسی می شود.

حالت الف در نظر گرفته می شود :

محور xyz $\left.\begin{matrix}\text{precession}\\ \text{rotation}\end{matrix}\right\}$ دارد ولی spin ندارد

$M_o = \vec{H}_o$ صحیح است

$\vec{M}_o = \left(\frac{d\vec{H}_o}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{H}_o$ معادلات اویلر صادق نیست

$$H_x = I'\omega_x \ , \ H_y = I'\omega_y \ , \ H_z = I\omega_z$$

$\omega_y = 166$

$\omega_z = 0$

$$H_o = H_x\hat{i} + H_y\hat{j} + H_z\hat{k}$$

سرعت زاویه‌ای جسم در دستگاه xyz

$$\begin{cases}\omega_x = \dot{\theta} \\ \omega_y = \dot{\psi}\sin\theta \\ \omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta\end{cases}$$

$$H_o = I'\dot{\theta}\, i + I'\dot{\psi}\sin\theta\, j + I(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)k$$

$$\left(\frac{d\vec{H}_o}{dt}\right)_{xyz} = I'\ddot{\theta}\, i + I'(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)j + I(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)k$$

سرعت زاویه‌ای دستگاه xyz

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\, i + \dot{\psi}\sin\theta\, j + \dot{\psi}\cos\theta\, k \longrightarrow \Omega \times H_o = \ldots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_x = I'\ddot{\theta} + (I - I')(\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta) + I\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta \\ M_y = I'\ddot{\psi}\sin\theta + 2I'\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta - I(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\dot{\theta} \\ M_z = +I(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\end{cases}$$

حالت خاص :

$$\left.\begin{aligned} &\theta = cte \quad (\dot\theta = \ddot\theta = 0) \\ &\dot\phi = cte \\ &\dot\psi = cte \end{aligned}\right\} \quad \text{steady precession}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_x = \left[I(\dot\phi + \dot\psi\cos\theta) - I'\dot\psi\cos\theta\right]\dot\psi\sin\theta \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

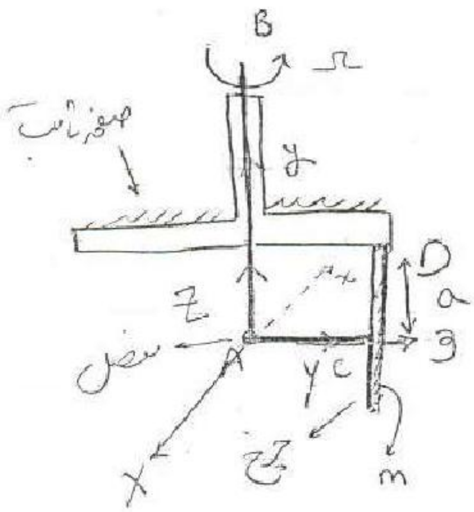
برای این حرکت لازم است که گشتاوری ثابت حول line of Nodes وارد کنیم.

راه دیگر

$$\omega_z = \dot\phi + \dot\psi\cos\theta$$

$$M_x = (I\omega_z - I'\dot\psi\cos\theta)\dot\psi\sin\theta$$

مثال : با دوران میله AB چرخ CD بر زیردیسک شروع به دوران می کند. معین کنید حداقل سرعت زاویه ای برای اینکه چرخ با صفحه ثابت در تماس باقی بماند.



$a = 3\ cm$

$AC = R = 15\ cm \quad mg = 15\ kgf$

$\dot{\phi}$ سرعت زاویه‌ای چرخ

$\dot{\psi} = \Omega$ سرعت حول Z

$\dot{\theta} = 0$ سرعت زاویه‌ای در امتداد خط گره (نوتیشن)

$\psi_0 =$ زاویه محور x با ثوابت با خط گره

$$\left\{\begin{array}{l}\ddot{\psi} = 0 \\ \ddot{\phi} = 0 \\ \dot{\theta} = 0\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}v_C = a\dot{\phi} \\ v_C = R\Omega\end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{R}{a}\Omega$$

با استفاده از معادلات حاصل از تعادل

$$M_x = \frac{RI}{a}\Omega^2$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = 0$$

$$M_x = (Mg + F)\,R$$

درحالت حدی $F = 0$

$$Mg\,R = \frac{RI}{a}\Omega^2$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{Mga}{I}}$$