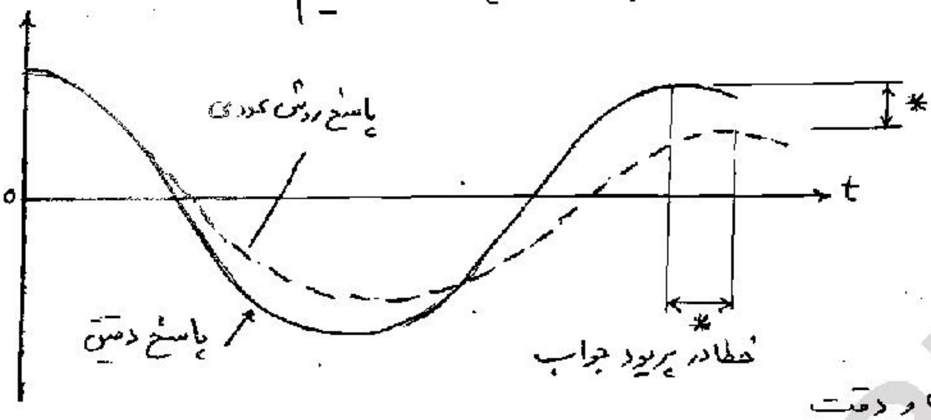
$$U_{i+1} = \sum_{l=i-k}^{i} A_l u_l + \sum_{l=i-k}^{i+1} B_l \dot{u}_l + \sum_{l=i-k}^{i+1} C_l \ddot{u}_l + R_{\text{خطا}}$$

A_l ، B_l و C_l ضرایب ثابت که برخی صفر می شوند. در روش های عددی با توجه به الگوریتم روش، فقط برخی عبارات از سری کلی بالا وجود دارد، پس خطا خواهیم داشت.



بطور کلی در مسائل متعارف رعایت $\Delta t \leqslant \frac{T}{10}$ پایداری و دقت قابل قبول را باعث می شود.

تحلیل دینامیکی سیستم های غیرخطی Analysis of Nonlinear Response

از دو طریق رفتار سیستم ها از حالت خطی به غیرخطی تبدیل می شود: هندسی و فیزیکی

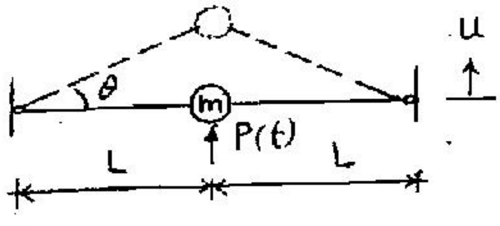
تغییر مکانهای بزرگ (غیرخطی هندسی) و عدم پیروی اجزاء و مصالح از قانون هوک

(غیرخطی فیزیکی).

اساس روش های تحلیل دینامیکی، صادق بودن قانون جمع آثار قوا بوده است که در رفتار خطی مصداق دارد و در حال حاضر تنها روش تحلیل دینامیکی برای سیستم های غیرخطی، روش های عددی می باشد.

دلایل دیگری برای بکارگیری روش های عددی وجود دارد: اندرکنش خاک - سازه - آب که تحلیل در میدان فرکانس را ضروری می سازند، ضربه های خیلی ناگهانی (انفجار) که باعث تحریک مود های بالای شود و روش مناسب، روش عددی است.

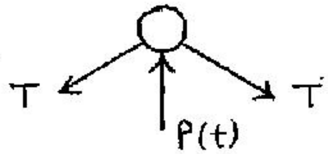
مثال - سیستم ساده جرم که توسط دو کابل کشیده نگهداشته شده است، معادله حرکت ؟



T_0 : کشش اولیه در حالت بدون تغییر مکان رسیده

اجزاء سازه از قانون هوک پیروی می کنند : $\sigma = \varepsilon E$

تغییر طول کابل $\quad \delta = \sqrt{L^2+u^2} - L$



$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \;,\; \sigma = \frac{T}{A} \Rightarrow T = \frac{EA}{L}\delta$$

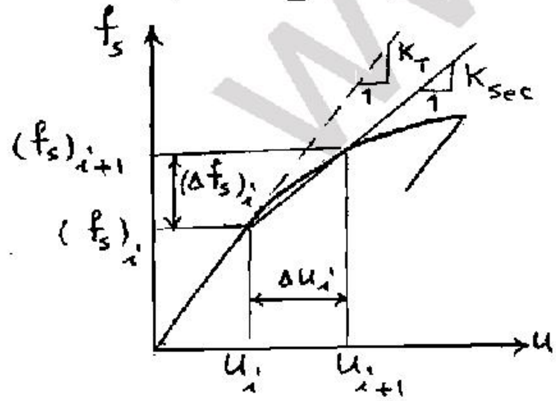
$$\Sigma F = m\ddot{u} \rightarrow P(t) - 2T\sin\theta = m\ddot{u}$$

$$\sin\theta = \frac{u}{\sqrt{L^2+u^2}} \quad \Rightarrow m\ddot{u} + 2\left\{T_0 + \frac{EA}{L}\left[(L^2+u^2)^{1/2} - L\right]\right\}\frac{u}{\sqrt{L^2+u^2}} = P(t)$$

رابطه غیرخطی هندسی رفتار جرم m

$u \ll L$ اگر $\rightarrow m\ddot{u} + 2T_0\dfrac{u}{L} = P(t) \leftarrow$ رابطه خطی

رفتار غیرخطی می‌تواند از متغیر بودن جرم، میرایی و سختی وارد مساله می شود. معمولاً جرم با زمان تغییر نمی کند و با توجه به عدم قطعیت در نحوه تعیین میرایی، خطی در نظر داشتن آنه دور از واقعیت نخواهد بود. بنابراین منشاء اصلی رفتار غیرخطی در سیستم های متعارف همانا عدم پیروی از قانون هوک در اجزاء و مصالح سازه خواهد بود. این رفتار توسط مبانی علم تئوری پلاستیسیته تعیین می شود :



(منحنی رفتاری سازه)

در فاصله زمانی i و $i+1$ معادله جزئی حاکم :

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + (\Delta f_s)_i = \Delta P_i \quad (1)$$

$$(\Delta f_s)_i = (K_i)_{sec}\,\Delta u_i \quad (2)$$

سختی سکانت Secant stiffness در فاصله گام زمانی به دلیل آنکه u_{i+1} مشخص نمی باشد نمی تواند بکار رود چون معلوم نیست. اگر فاصله زمانی Δt کوچک باشد، می توان از سختی مماسی K_T استفاده کرد :

$$(\Delta f_s)_i \simeq (K_i)_T\,\Delta u_i \quad (3)$$

بنابراین در الگوریتم روش‌های عددی قبلی تغییر کلی رخ نمی دهد بلکه فقط مقدار K در هر گام ثابت نبوده و مقدار آن برابر K_T (سختی مماسی ابتدای گام) خواهد بود.

برای نمونه کلیات روش نیومارک (شتاب خطی) در این حالت بیان می شود:

از قبل داشتیم: $\Delta u = \Delta t\,\dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{6}\Delta\ddot{u}$ ④

$u_{i+1} = u_i + \Delta u$, $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}$

از رابطه ④ $\rightarrow$ $\Delta\ddot{u} = \frac{6}{(\Delta t)^2}\left(\Delta u - \Delta t\,\dot{u}_i - \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_i\right)$ ⑤

در روش نیومارک $\rightarrow$ $\Delta\dot{u} = \Delta t\,\ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\Delta\ddot{u}$ ⑥

که $\Delta\dot{u} = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i$ با بکارگیری ⑤ در ⑥:

$$\Delta\dot{u} = \frac{3}{\Delta t}\Delta u - 3\dot{u}_i - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i \quad ⑦$$

حال اگر ③ ، ⑤ و ⑦ را در ① قرار دهیم:

$$\left(\frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + K_T\right)\Delta u = \Delta P + m\left(\frac{6\dot{u}_i}{\Delta t} + 3\ddot{u}_i\right) + c\left(3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right)$$

یا $K_T^*\Delta u = \Delta P^*$ ⑧

که

$$\begin{cases} K_T^* = \frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + K_T \\ \Delta P^* = \Delta P + m\left(\frac{6\dot{u}_i}{\Delta t} + 3\ddot{u}_i\right) + c\left(3\dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i\right) \end{cases}$$

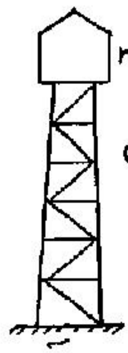
پس از تعیین Δu از رابطه ⑧ ، مقدار آن را در ⑥ قرار داده و $\Delta\dot{u}$ محاسبه می شود.

و بنابراین با داشتن Δu ، $\Delta\dot{u}$ می توان u_{i+1} و $\dot{u}_{i+1}$ را تعیین نمود.

مقدار شتاب می تواند از رابطه ⑤ یا برای سرشکن کردن خطای سختی مماسی از رابطه تعادل کلی در زمان $i+1$ تعیین شود:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m}\left\{P_{i+1} - f_s(t+\Delta t) - c\dot{u}_{i+1}\right\} \quad ⑨$$

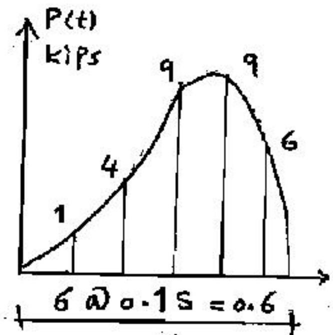
مثال ـ برج آب با جرم m و میرایی c تحت انفجار قرار می‌گیرد، منحنی رفتاری $u-f_s$ داده شده است، مطلوبست واکنش برج در لحظه $0.8\ sec$ با روش عددی شتاب متوسط؟



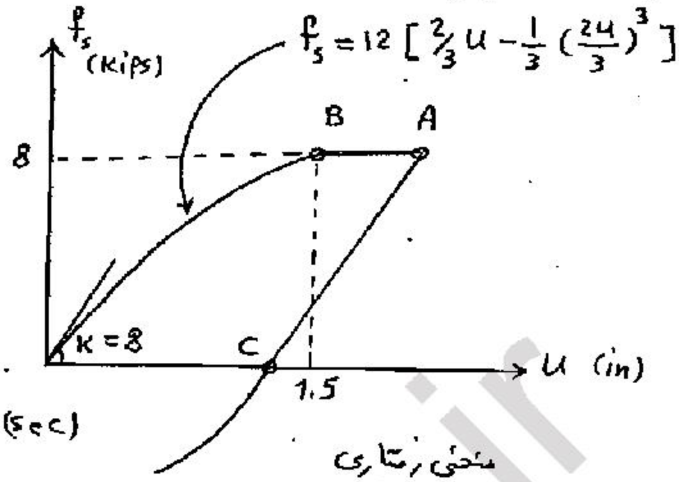
$m = 0.1\ \frac{kip-s^2}{in}$

$c = 0.2\ \frac{kip-s}{in}$

برج آب



منحنی بارگذاری



منحنی رفتاری

حل:

از الگوریتم روش شتاب متوسط:

$$\Delta\ddot{u} = \frac{4}{\Delta t^2}\left(\Delta u - \Delta t\,\dot{u}_i - \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_i\right)$$

$$\Delta\dot{u} = \frac{2}{\Delta t}\Delta u - 2\dot{u}_i = 20\,\Delta u - 2\dot{u}_i \quad \text{و} \quad K^*\Delta u = \Delta P^*$$

$$K^* = \left(\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + K_T\right) = 44 + K_T$$

$$\Delta P^* = \Delta P + m\left(\frac{4\dot{u}_i}{\Delta t} + 2\ddot{u}_i\right) + 2c\,\dot{u}_i = \Delta P + 4.4\,\dot{u}_i + 0.2\,\ddot{u}_i$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\underset{\text{اولیه}}{k}}} = 0.702\ sec \quad , \quad \Delta t = 0.1 \simeq \frac{1}{7}T$$

جدول مربوط تکمیل می‌شود، به نکات زیر توجه شود:

* برای $u > 1.5^{in}$، نیروی f_s برابر $8\ kips$ می‌باشد.

* در فاصله زمانی 0.4 به 0.5 تغییر مکان از 1.1128 به 1.7093 می‌رسد (بزرگتر از 1.5) و f_s از رابطه خود به مقدار ثابت 8 تغییر کند ولی چون Δt بزرگ است، محل و زمان دقیق این تغییر نامشخص.

* در فاصله زمانی 0.5 به 0.6، سرعت تغییر علامت داده، یعنی صفر شده سپس تغییر علامت، بنابراین سختی از صفر باید به 8 تبدیل شود (پس از نقطه A منحنی رو به پایین است) ولی محل دقیق مشخص نیست.

* در گام های بعد از 0.6، K_T به 8 تغییر می‌کند و نیروی فنر در بخش کنترل منحنی رفتار قرار دارد، مثلاً در 0.7 ثانیه:

$$f_s = 8 + 8\Delta u = 8 - 8\times 0.3459 = 5.2328\ kips$$

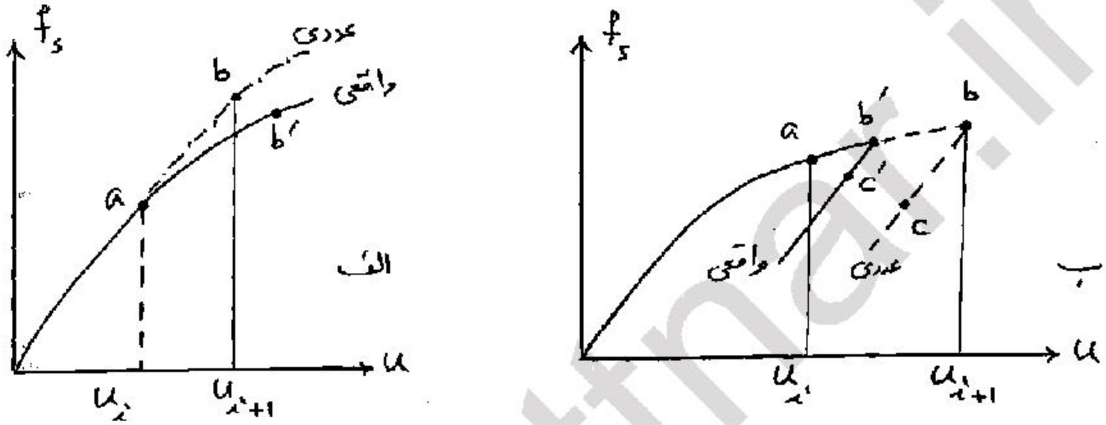
* جدول حل مثال در صفحه ۶۲ بالای صفحه جدول الف

خطا در تحلیل غیرخطی دینامیکی سیستم ها

علاوه بر خطاهای رایج روش های عددی ، خطاهای دیگری که مختص حالت غیرخطی است ، بوجود می آید (در بکارگیری سختی از رابطه ومنحنی نیرو - تغییرمکان) :

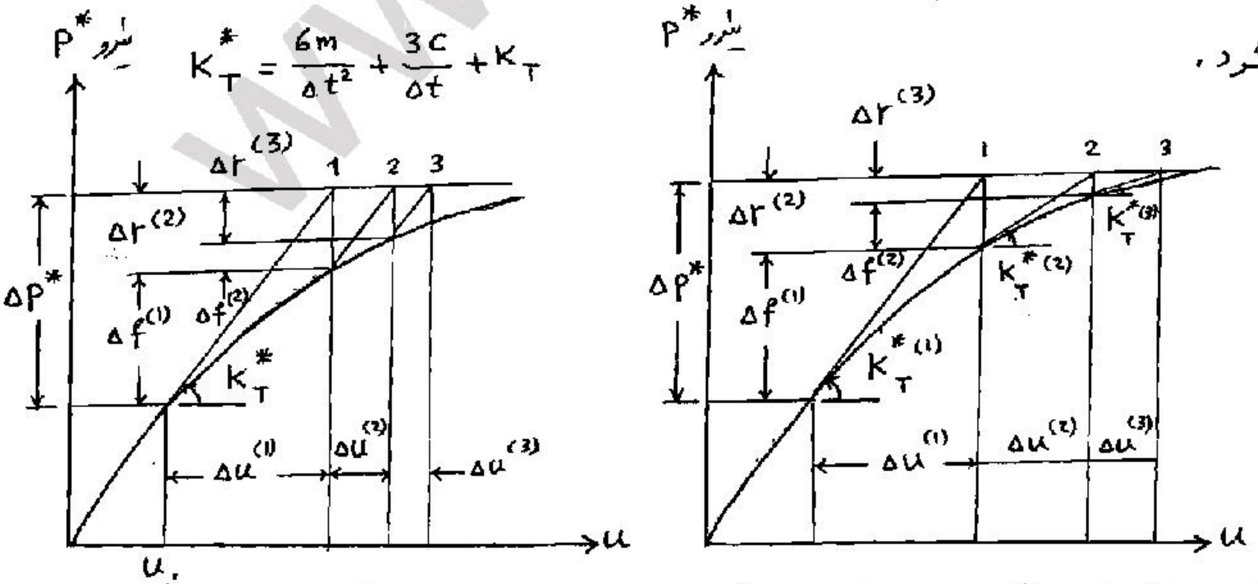
الف - خطای ناشی از استفاده سختی مماسی ابتدای گام بجای سختی واقعی

ب - تأخیر در آشکار سازی گذرای رابطه نیرو - تغییرمکان



برای کاهش اثر خطاهای حالت ب می توان در محل های تغییر جهت منحنی ، از Δt کوچکتر استفاده شود که معمولاً از $\frac{\Delta t}{4}$ استفاده می شود (کنترل و اعمال توسط کامپیوتر) ،

خطای ناشی از بکارگیری سختی مماسی با بکارگیری روش تکراری در هرگام ، می تواند حداقل شود ،



(tangent stiffness) | (current tangent stiffness)

Modified NEWTON - RAPHSON ITERATION | Original N. - R. method

با توجه به شکل $u - f_s$ برای خطای مورد نظر و جهت دسترسی به نقطه 'a واقعی از طریق نقطه a ، روش تکراری Iteration در یک گام بکار می رود (به شرح زیر) :

رابطه ۸ روش نیومارک شتاب خطی ⑧ $K_T^* \, \Delta u^{(1)} = \Delta P^*$

در حالت غیرخطی که سختی فنر با افزایش تغییر مکان ، کاهش می یابد ، نیروی فنر معادل ناشی از تغییر مکان $\Delta u^{(1)}$ کمتر از مقداری است که رابطه ⑧ ارائه می دهد ، بعنوان نتیجه ، یک نیروی اضافی باقی می ماند که در شکل ملاحظه می شود و آنرا با $\Delta r^{(2)}$ نشان داده ایم ، تغییر مکان اضافی در اثر این نیروی باقی مانده بصورت زیر است :

$$K_T^* \, \Delta u^{(2)} = \Delta r^{(2)} = \Delta P^* - \Delta f^{(1)} \qquad ⑨$$

از این تغییر مکان اضافی ، نیروی باقی مانده جدید پیدا شده و مسأله به همین ترتیب ادامه می یابد تا همگرایی حاصل شود ، مراحل تکرار در یک گام زمانی به شرح زیر است :

$$K_T^* \, \Delta u^{(K)} = \Delta r^{(K)}$$

$$u_{i+1}^{K} = u_{i+1}^{K-1} + \Delta u^{(K)} \qquad ⑩$$

$$\Delta f^{(K)} = f_s^{(K)} - f_s^{K-1} + \frac{6m}{\Delta t^2} \, \Delta u^{(K)} + \frac{3c}{\Delta t} \, \Delta u^{(K)} \qquad K = 1, \hat{K}$$

$$\Delta r^{K+1} = \Delta r^{(K)} - \Delta f^{(K)}$$

از رابطه ⑧ مشخص است که مرحله تکرار با $\Delta r^{(1)} = \Delta P^*$ شروع می شود.

وقتی مراحل تکرار ، همگرا شد یعنی $\Delta u^{(K)}$ یا $\Delta r^{(K)}$ به اندازه کافی کوچک شود ، تغییر مکان کل نموی از رابطه $\Delta u = \sum_{K=1}^{\hat{K}} \Delta u^{(K)}$ حاصل می شود.

نرخ همگرایی می تواند بهتر شود چنانچه بجای سختی مماسی اولیه از جریان مماس سختی استفاده شود که البته برآورد سختی مماسی جدید مستلزم محاسبات بیشتر است .

مثال – برج آب مثال قبل مورد نظر است تحت اثر همان بارگذاری ، منحنی این بار در منحنی رفتار غیرخطی از روش تکراری استفاده شود. تست انتقال A نیز با دقت بیشتری بررسی شود. روش عددی شتاب متوسط بکار می رود با $\Delta t = 0.1$ که در مرحله تغییرناز از Δt کوچکتر استفاده خواهد شد.

$$K_T^* \Delta u^{(k)} = \Delta r^{(k)} \quad , \quad u_{i+1}^{(k)} = u_{i+1}^{(k-1)} + \Delta u^{(k)}$$

$$\Delta f^{(k)} = f_s^{(k)} - f_s^{(k-1)} + \frac{4m}{\Delta t^2} \Delta u^{(k)} + \frac{2c}{\Delta t} \Delta u^{(k)}$$

$$K_T^* = \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + K_T = 44 + K_T \quad \text{که} \quad \Delta r^{(k+1)} = \Delta r^{(k)} - \Delta f^{(k)}$$

$$\Delta p^* = \Delta p + m\left(\frac{4}{\Delta t} \dot{u}_i + 2\ddot{u}_i\right) + 2c\dot{u}_i = \Delta p + 4.4\dot{u}_i + 0.2\ddot{u}_i \quad \text{و}$$

نتایج 0.8 ثانیه و مراحل تکرار در قسمت غیرخطی در جدول ارائه شده است.

برای نمونه مراحل مربوط به فاصله زمانی 0.3 تا 0.4 بشرح زیر خواهد بود:

$$\Delta u^{(1)} = \frac{1}{K_T^*} \Delta r^{(1)} = \frac{1}{K_T^*} \Delta p^* = \frac{31.3839}{51.0968} = 0.6142$$

پس:

$$u^{(1)}(0.4) = u^{(1)}(0.3) + 0.6142 = 1.1182$$

$$\Delta f^{(1)} = f_s(1.1182) - f_s(0.5040) + \frac{4m}{\Delta t^2} \Delta u^{(1)} + \frac{2c}{\Delta t} \Delta u^{(1)}$$

$$= 7.2885 - 3.8803 + 44 \times 0.6142 = 30.4330$$

$$\Delta r^{(2)} = 31.3839 - 30.4330 = 0.9509$$

$$\Delta u^{(2)} = \frac{0.9509}{51.0968} = 0.0186 \rightarrow u^{(2)}(0.4) = 1.1182 + 0.0186 = 1.1368$$

$$\Delta f^{(2)} = f_s(1.1368) - f_s(1.1182) + 44 \times 0.0186$$

$$= 7.3532 - 7.2885 + 44 \times 0.0186 = 0.8831$$

$$\Delta r^{(3)} = \Delta r^{(2)} - \Delta f^{(2)} = 0.9509 - 0.8831 = 0.0678$$

$$\Delta u^{(3)} = \frac{0.0678}{51.0968} = 0.0013 \longrightarrow$$ و ادامه ....

* بین 0.6 و 0.7 ثانیه ، سرعت از مثبت به منفی تبدیل می شود . بوسیله عملیات تکراری ، زمان $\dot{u}=0$ برابر 0.60339 ثانیه است . بعد از این لحظه ، منحنی به 8 $kips/in$ برمی گردد .

محاسبات بین 0.6 و 0.60339 با $\Delta t = 0.00339$ انجام شده است ،

بطور مشابه محاسبات بین 0.60339 و 0.7 ثانیه با $\Delta t = 0.09661$ انجام گردید .

بعد از لحظه $t = 0.60339$ ، نیروی فنر f_s در قسمت تنزلی به طرف پایین می افتد طوریکه نیروی فنر به $8\Delta u$ کاهش می یابد (در هر گام زمانی) .

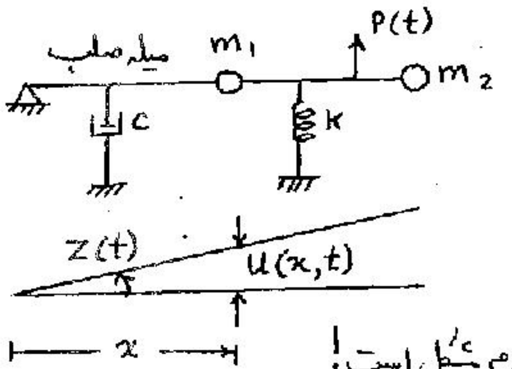
با مقایسه نتایج دو جدول در دو مثال اخیر ، ملاحظه می شود اگر در فاصله زمانی که تغییر مکان و نیرو در منحنی رفتار ، غیرخطی است ، از روش تکراری استفاده نشود ، در اصلاح نتایج و ملحوظ داشتن مساله غیرخطی در محاسبات ، اشتباه قابل توجهی خواهیم داشت .

تحلیل دینامیکی سیستم های معادل یک درجه آزادی تعمیم داده شده

Dynamic Analysis of Generalized SDF systems

سیستم های پیچیده تر از حالت های یک درجه آزادی که مشابه حالت SDF تحلیل می شوند ، اگر سیستم از اجزاء صلب سرهم بندی شده تشکیل شده باشد و فقط در یک حالت تغییر شکل بدهد بطور دقیق و اگر سیستم با جرم گسترده و انعطاف پذیر باشد ، بطور تقریبی تحلیل خواهد شد .

در حالت تقریبی (انعطاف پذیر) دقت فرکانس زاویه ای بستگی به شکل ارتعاشی مفروض خواهد داشت ،

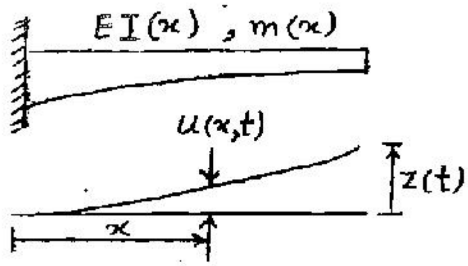


سیستم روبرو : صلب ← $u(x,t)=\psi(x)Z(t)$

مختصات شاخص SDF : می تواند چرخش $Z(t)$ باشد

تابع تغییرشکل ، چونکه میله صلب ← $\psi(x)=x$

چونکه دو جرم متمرکز وجود دارد ← سیستم معادل SDF یک جرم شکل است !



سیستم روبرو : جرم و سختی گسترده متغیر (انعطاف پذیر) دارای بینهایت درجه آزادی ـ فرکانس اصلی (اول) در ارتعاش بسیار مهم ـ بطور تقریبی می توان تابع تغییر شکل حالت ارتعاش اصلی (مود اول) را (فقط) درنظر گرفت $\psi(x)$ و در این حالت یک مختصات شاخص را انتخاب نمود $Z(t)$ ، مثلاً انتهای تیرطره .

هر دو سیستم حالت تعمیم داده شده دارند چون تغییر مکان هر نقطه با رابطه $u(x,t)=\psi(x)Z(t)$ مشخص می شوند .

$$m^*\ddot{Z}+c^*\dot{Z}+K^*Z=P^*(t)$$

جرم ، میرایی ، سختی و نیروی تعمیم داده شده (علامت ستاره) . حل معادله از روش ها متعارف امکان پذیر است . مرحله اصلی تحلیل سیستم جدید تعمیم داده شده ، همانا ارزیابی مشخصات تعمیم داده شده می باشد .

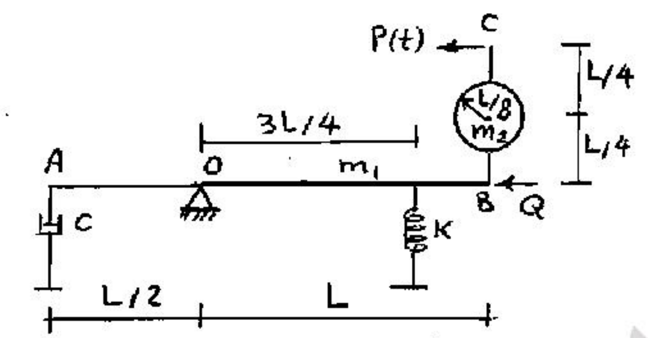
حالت الف ـ سیستم های صلب سرهم بندی شده

در این نوع سیستم ، اجزاء صلب همراه جرم گسترده و جرم متمرکز و سختی و میرایی متمرکز وجود دارند که تحت اثر نیروی دینامیکی قرار می گیرند . برای تشکیل معادله حرکت ، روش قانون دوم نیوتن مشکل بوده و بهتر است از روش دالامبر استفاده شود (نیروهای اینرسی در پیکره آزاد سیستم لحاظ شوند) .

نیروی اینرسی گسترده برای یک جسم صلب با جرم گسترده با دو مولفه جایگزین (بیان) می‌شود :

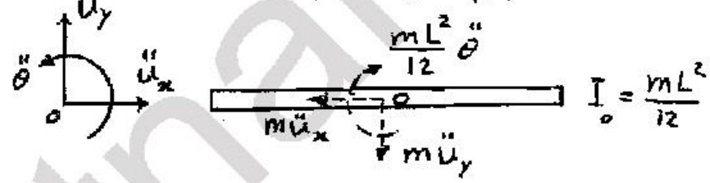
نیروی اینرسی منتجه کل جرم در مرکز ثقل و ممان اینرسی جسم .

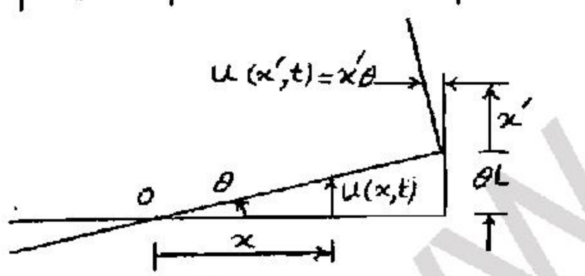
مثال - در سیستم سرهم بندی شده زیر مطلوبست تعیین ۱- معادله حرکت ۲- فرکانس طبیعی ۳- درصد میرائی ۴- پاسخ سیستم بدون میرائی تحت اثر ناگهانی نیروی P_0 ۵- اصلاح معادله حرکت وقتی نیروی افقی Q در میله افقی اثر می‌کند ۶- نیروی بحرانی (کمانش) . تغییر مکانها کوچک و مختصات شاخص ، چرخش حول نقطه O در نظر است .



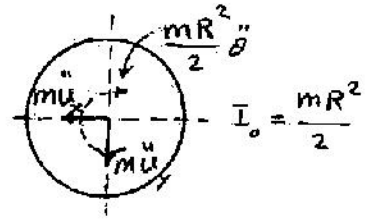
حل : سیستم صلب - OA و BC بدون جرم -

OB دارای جرم گسترده کل m_1



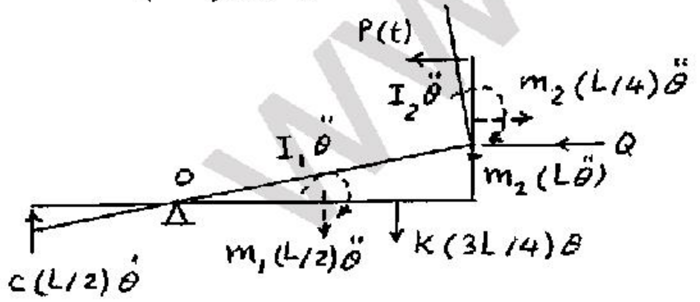


$$U(x,t) = x\,\theta(t)$$



(تغییر مکانها)

با توجه به نیروها ، نسبت به نقطه O لنگر می‌گیریم :



(نیروها)

$$I_1\ddot{\theta} + \left(m_1\frac{L}{2}\ddot{\theta}\right)\frac{L}{2} + I_2\ddot{\theta} + (m_2L\ddot{\theta})L + \left(m_2\frac{L}{4}\ddot{\theta}\right)\frac{L}{4} + \left(c\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)\frac{L}{2} + \left(K\frac{3L}{4}\theta\right)\frac{3L}{4} = P(t)\frac{L}{2}$$

$$I_1 = m_1L^2/12 \quad , \quad I_2 = m_2(L/8)^2/2 = m_2L^2/128$$

$$\left(\frac{m_1L^2}{3} + \frac{137}{128}m_2L^2\right)\ddot{\theta} + \frac{cL^2}{4}\dot{\theta} + \frac{9KL^2}{16}\theta = P(t)\frac{L}{2}$$

معادله حرکت ← $m^*\ddot{\theta} + c^*\dot{\theta} + k^*\theta = P^*(t)$

$$m^* = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{137}{128} m_2\right) L^2 \quad , \quad C^* = \frac{cL^2}{4} \quad , \quad k^* = \frac{9kL^2}{16} \quad , \quad P^*(t) = P(t)\frac{L}{2}$$

$$\omega^* = \sqrt{k^*/m^*} \quad , \quad \xi = \frac{C^*}{C_{cr}} = \frac{C^*}{2m^*\omega^*} = \frac{C^*}{2\sqrt{K^* m^*}}$$

از حل معادله حرکت :

$$P^*(t) = \frac{P(t)L}{2} = \frac{P_0 L}{2} \equiv P_0^*$$

$$\theta(t) = \frac{P_0^*}{k^*}(1-\cos\omega t) = \frac{8P_0}{9kL}(1-\cos\omega t)$$

$$u(x,t) = x\,\theta(t) \quad , \quad u(x',t) = x'\theta(t)$$

اگر نیروی افقی Q باشد : در لنگرگیری : $QL\theta$

$$m^*\ddot{\theta} + c^*\dot{\theta} + (K^* - QL)\theta = P^*(t)$$

نیروی افقی فشاری، سختی را کاهش می دهد،

$$K^* - QL = 0$$

$$Q_{cr} = \frac{K^*}{L} = \frac{9kL}{16}$$

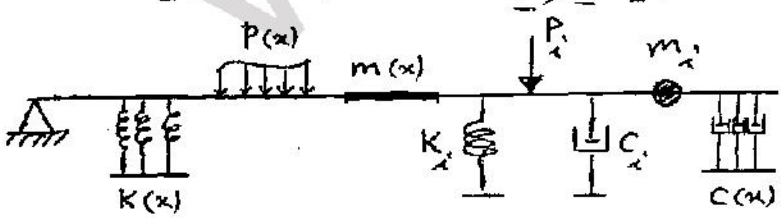
حالت ب سیستم های انعطاف پذیر

سیستم با بینهایت درجه آزادی با سختی و جرم گسترده در حالت مرتعش (غیرصلب)

دقت مساله بستگی به تابع شکل $\Psi(x)$ دارد $\quad U(x,t) = \Psi(x)\,Z(t)$

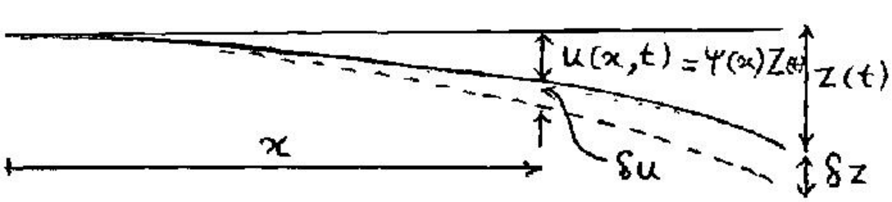
که تا چه حدی شرایط مرزی (هندسی) و شرایط فیزیکی مساله را ارضاء می نماید.

حالت کلی :



کاربرد اصل کار مجازی :

کار نیروها برابر صفر



کار مجازی الاستیک $\quad W_s = -\int \overbrace{k(x)u(x,t)dx}^{\text{نیروی فنر گسترده}} \cdot \delta u \quad - \sum_i K_i u_i \cdot \delta u_i$

$$\begin{cases} u(x,t) = \psi(x) z(t) \rightarrow \quad \delta u = \psi(x)\delta z \\ u_i = \psi_i \; z(t) \rightarrow \quad \delta u_i = \psi_i \delta z \end{cases}$$

$$W_s = -\left\{ \int k(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i K_i \psi_i^2 \right\} z\,\delta z$$

کار مجازی نیروهای میرایی $\quad W_D = -\int c(x)\dot{u}(x,t)dx \cdot \delta u \quad - \sum_i c_i \dot{u}_i \cdot \delta u_i$

$$\begin{cases} \dot{u}(x,t) = \psi(x)\dot{z}(t) \rightarrow \quad \delta u = \psi(x)\delta z \\ \dot{u}_i = \psi_i \dot{z}(t) \rightarrow \quad \delta u_i = \psi_i \delta z \end{cases}$$

$$W_D = -\left\{ \int c(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i c_i \psi_i^2 \right\} \dot{z}\,\delta z$$

به همین ترتیب: کار مجازی نیروی اینرسی:

$$W_I = -\left\{ \int m(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i m_i \psi_i^2 \right\} \ddot{z}\,\delta z$$

کار مجازی نیروهای خارجی: $\quad W_p = \int p(x)\,dx \cdot \delta u + \sum_i p_i \delta u_i$

$$W_p = \left\{ \int p(x)\psi(x)\,dx + \sum_i p_i \psi_i \right\} \delta z$$

با توجه به جهت نیروها، جهت تغییر مکان مجازی و علامت کارها، خواهیم داشت: $\quad \delta z \neq 0$

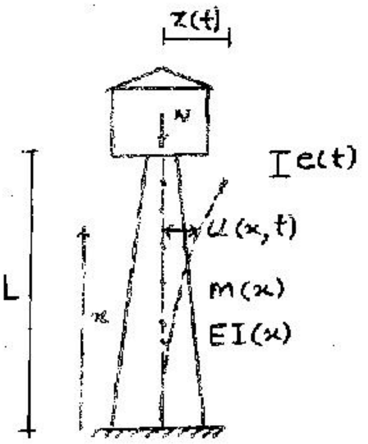
معادله حرکت سیستم معادل SDF: $\quad m^*\ddot{z} + c^*\dot{z} + K^*z = P^*(t)$

$$m^* = \int m(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i m_i \psi_i^2 \quad \Big| \quad K^* = \int k(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i K_i \psi_i^2$$

$$c^* = \int c(x)\psi^2(x)\,dx + \sum_i c_i \psi_i^2 \quad \Big| \quad P^* = \int P(x)\psi(x)\,dx + \sum_i P_i \psi_i$$

جرم، میرایی، سختی و نیروی مؤثر معادل سیستم SDF تعمیم داده شده با تابع $\psi(x)$

جزئیات بیشتر در یک حالت خاص



$$u(x,t) = \psi(x) Z(t)$$

از مبانی انرژی استفاده می کنیم (انرژی جنبشی و پتانسیل) :

انرژی جنبشی $T = \int_0^L \frac{1}{2} m(x) \dot{u}^2(x,t)\, dx =$

$$\frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[\psi^2(x) \dot{z}^2\right] dx \equiv \frac{1}{2} m^* \dot{z}^2 = T$$

جرم مؤثر معادل $m^* = \int_0^L m(x) \psi^2(x)\, dx$

برای بیان سختی معادل مؤثر k^* از اصول مقاومت مصالح (انرژی پتانسیل تغییر شکل) :

انرژی یا کار لنگر (ممان) $V = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx$ ، $u''(x,t) = \frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

$$M = EI u'' \quad , \quad u'' = \psi''(x) z(t)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(EI)^2}{EI} (u'')^2 dx \Rightarrow V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\psi''(x) z(t)\right)^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} k^* Z^2 \quad \text{که} \quad k^* = \int_0^L EI(x) \psi''^2(x)\, dx$$

سختی هندسی معادل مؤثر : نیروی محوری (قائم) N ← افت راس برج آب e

از مقاومت مصالح : $e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u'^2(x,t)\, dx$

انرژی پتانسیل آن $V_N = -\frac{N}{2} \int_0^L u'^2(x,t)\, dx$

انرژی پتانسیل نیروی N در اثر افت $e(t)$ کم می شود ← علامت منفی

اگر وزنه متغیر باید مد نظر باشد ، $N(x)$

$$V_N = -\frac{1}{2} \int_0^L N(x) u'^2(x,t)\, dx = -\frac{1}{2} \int_0^L N(x) \left[\psi'(x) Z\right]^2 dx$$

$$V_N = -\frac{1}{2} K_G^* Z^2 \quad \text{که} \quad K_G^* = \int_0^L N(x) \psi'^2(x)\, dx$$

$$\bar{K}^* = K^* - K_G^* = \int_0^L EI(x)\,\psi''^2(x)\,dx - N_{cr}\int_0^L \psi'^2(x)\,dx = 0$$

بحرانی کمانش $\quad N_{cr} = \dfrac{\int_0^L EI(x)\,\psi''^2(x)\,dx}{\int_0^L \psi'^2(x)\,dx}$

محاسبه فرکانس زاویه‌ای معادل موثر $\quad \omega^* = \sqrt{K^*/m^*}$

مثال ـ در برج آب قبلی $EI(x)$ و $m(x)$ در طول ارتفاع ثابت فرض می‌شود. مطلوبست برآورد ω^* برای توابع مختلف شکل $\psi(x)$ (جرم گسترده $\bar{m}$) .

الف ـ اگر از فرمول اولر در پایداری سازه‌ها استفاده کنیم $\quad \psi(x) = 1 - \cos\dfrac{\pi x}{2L}$

$$m^* = \int_0^L m\,\psi^2(x)\,dx = m\int_0^L \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228\,mL$$

$$K^* = \int_0^L EI\,\psi''^2(x)\,dx = EI\int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32}\frac{EI}{L^3}$$

$$\omega^* = \sqrt{K^*/m^*} = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{32L^3 \times 0.228\,mL}} = \underline{\frac{3.653}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}}$$

ب ـ اگر شکل ارتعاش برج را سهمی فرض کنیم : $\quad \psi(x) = \dfrac{x^2}{L^2}$

$$m^* = 0.2\,mL \;,\quad K^* = \frac{4EI}{L^3} \;,\quad \omega^* = \sqrt{\frac{4EI}{L^3 \times 0.2\,mL}} = \underline{\frac{4.472}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}}$$

* جواب دقیق از حل سیستم پیوسته ! $\quad \underline{\omega^* = \dfrac{3.517}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}}$

در حالت ب ، $\quad \psi(x) = \dfrac{x^2}{L^2} \longrightarrow \dfrac{d^2u}{dx^2} = Z\psi'' = \underbrace{Z\dfrac{2}{L^2}}_{\text{عدد ثابت}} \quad , \quad \dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{M}{EI} = Z\dfrac{2}{L^2}$

یعنی لنگر در طول ارتفاع ثابت است در صورتیکه در انتهای برج صفر و در تکیه‌گاه حداکثر است پس تابع مد نظر $\psi(x)$ یکی از شرایط مرزی را ارضاء نکرده و جواب از واقعیت دور است .

ج ـ در این حالت سعی می شود با ارضاء شرایط مرزی و فیزیکی بیشتر، به یک تابع شکل $\psi(x)$ بهتر دست یابیم. یک تابع درجه ۳ (چند جمله ای) فرض می کنیم:

چهار ضریب پس چهار شرط لازم است. $\psi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

۱ـ تغییرمکان در تکیه گاه صفر است: $u = 0 \rightarrow \psi(x=0) = 0$

۲ـ ضریب زاویه در تکیه گاه گیردار صفر است: $u' = 0 \rightarrow \psi'(x=0) = 0$

۳ـ لنگر در انتهای برج صفر است: $u'' = 0 \rightarrow \psi''(x=L) = 0$

۴ـ همیشه در نقطه شاخص (مختصات شاخص): $u(x,t) = z(t) \rightarrow \psi(L) = 1$

$$\text{اعمال شرایط} \Rightarrow a = -\frac{1}{2L^3},\ b = \frac{3}{2L^2},\ c = d = 0 \Rightarrow$$

$$\psi(x) = -\frac{x^3}{2L^3} + \frac{3x^2}{2L^2},\quad \psi''(x) = \frac{3}{L^2}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$K^* = \frac{3EI}{L^3},\quad m^* = 0.2357\, mL \Rightarrow \omega^* = \frac{3.568}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

برآورد سختی هندسی و نیروی N_{cr} :

$$\text{حالت الف} \rightarrow \psi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2L} \rightarrow K_G^* = \int_0^L N \psi'^2(x)\, dx$$

$$K_G^* = N\int_0^L \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \left(\sin\frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{N\pi^2}{8L} \rightarrow N_{cr} = 2.467\,\frac{EI}{L^2}$$

$$\text{حالت ب} \rightarrow \psi(x) = \frac{x^2}{L^2} \rightarrow K_G^* = \frac{4}{3}\frac{N}{L} \rightarrow N_{cr} = \frac{3EI}{L^2}$$

$$\text{حالت ج} \rightarrow \psi(x) = -\frac{x^3}{2L^3} + \frac{3x^2}{2L^2} \rightarrow K^* = \frac{6}{5}\frac{N}{L} \rightarrow N_{cr} = 2.5\,\frac{EI}{L^2}$$

$$\text{حالت واقعی} \rightarrow N_{cr} = 2.67\,\frac{EI}{L^2}$$

RAYLEIGH'S Method for ω — تعیین فرکانس زاویه‌ای بوسیله روش رایله

در سال ۱۸۷۳ با استفاده از اصل بقای انرژی ، روش ساده برای برآورد ω (ارتعاش آزاد)

الف - سیستم جرم و فنر (سختی و جرم مؤثر معادل) $u(t) = u_0 \sin \omega t$

$$\dot{u}(t) = u_0 \omega \cos \omega t \quad , \quad u_{max} = u_0 \quad , \quad \dot{u}_{max} = u_0 \omega$$

حداکثر انرژی پتانسیل $V_{max} = \frac{1}{2} K u_{max}^2 = \frac{1}{2} K u_0^2$

حداکثر انرژی جنبشی $T_{max} = \frac{1}{2} m \dot{u}_{max}^2 = \frac{1}{2} m u_0^2 \omega^2$

$$T_{max} = V_{max} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = K/m$$

ب - سیستم با جرم و سختی گسترده به طول L $u(x,t) = \psi(x)\, z(t)$

$z(t) = z_0 \sin \omega t$ تغییر مکان نقطه شاخص

$$u(x,t) = \psi(x) z_0 \sin \omega t \rightarrow u_{max} = \psi(x) z_0$$

$$\dot{u}(x,t) = \psi(x) z_0 \omega \cos \omega t \rightarrow \dot{u}_{max} = \psi(x) z_0 \omega$$

$$u''(x,t) = \psi''(x) z_0 \sin \omega t \rightarrow u''_{max} = \psi''(x) z_0$$

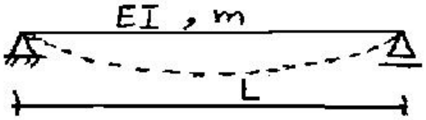
انرژی پتانسیل $V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x)\, u''^2\, dx \rightarrow V_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 \int_0^L EI(x)\, \psi''^2(x)\, dx$

انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x)\, \dot{u}^2\, dx \rightarrow T_{max} = \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 \int_0^L m(x)\, \psi^2(x)\, dx$

$$T_{max} = V_{max} \rightarrow \omega^2 = \int_0^L EI(x)\, \psi''^2(x)\, dx \Big/ \int_0^L m(x)\, \psi^2(x)\, dx = K^*/m^*$$

Rayleigh's quotient   خارج قسمت رایله

مثال - مطلوبست تعیین ω یک تیر ساده خمشی به روش رایله ؟ موارد اصلی مدنظر است .



الف - $\psi(x) = \frac{x}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)$ ب - $\psi(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$

الف - $\psi''(x) = \frac{2}{L^2}$, $V_{max} = \frac{1}{2} Z_0^2 EI \int_0^L (\frac{2}{L^2})^2 dx = \frac{1}{2} Z_0^2 \frac{4EI}{L^3}$

$$T_{max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \omega^2 m \int_0^L [\frac{x}{L}(\frac{x}{L}-1)]^2 dx = \frac{1}{2} Z_0^2 \omega^2 \frac{mL}{30}$$

$$T_{max} = V_{max} \longrightarrow \omega = \frac{10.95}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

ب - $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{L} \rightarrow \psi'(x) = \frac{\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L} \rightarrow \psi''(x) = -\frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}$

$$V_{max} = \frac{1}{2} Z_0^2 EI \int_0^L (-\frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L})^2 dx = \frac{1}{2} Z_0^2 EI \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \sin^2\frac{\pi x}{L} dx$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} Z_0^2 \omega^2 m \int_0^L \sin^2\frac{\pi x}{L} dx$$

$$T_{max} = V_{max} \longrightarrow EI\frac{\pi^4}{L^4} = \omega^2 m \rightarrow \omega = \frac{9.87}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

<u>انتخاب تابع شکل $\psi(x)$ - پیشنهاد رایلی</u>

ارتعاش آزاد بدون میرایی $f_I + f_s = 0$

تشریح حالت : تغییر مکان u در اثر اعمال نیروی اینرسی : $m\ddot{u} = -ku$

$$u(x,t) = \psi(x) Z(t) \rightarrow f_I = -m(x)\psi(x) Z_0 \omega^2 \sin\omega t$$

دقت نتایج بستگی به درستی $\psi(x)$ دارد. $f_I \propto m(x)\psi(x)$

* پیشنهاد رایلی : فرض می کنیم شکل تغییرمکان تحت اثر وزن سیستم بوجود می آید: mg

با اینکار پارامتر اصلی (جرم) اثر کرده و شرایط تکیه گاهی نیز ارضاء می شود.

اساس روش رایلی : نیرو $P(x) \xrightarrow{\text{باعث}} u(x)$ تغییرمکان

حداکثر انرژی پتانسیل حاصل $V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^L P(x)\, u_{max}(x)\, dx$

$$u(t) = u_0 \sin\omega t \rightarrow u_{max} = u_0 \quad , \quad \dot{u}(t) = u_0\omega\cos\omega t \rightarrow \dot{u}_{max} = u_0\omega$$

حداکثر انرژی جنبشی $T_{max} = \frac{1}{2}\int_0^L m\dot{u}_{max}^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L m u_{max}^2 \omega^2 dx$

$$T_{max} = V_{max} \rightarrow \frac{1}{2}\int_0^L m u_{max}^2 \omega^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L p(x) u_{max}\, dx$$

فرض رایلی $\quad p(x) = m(x) g \quad \Rightarrow$

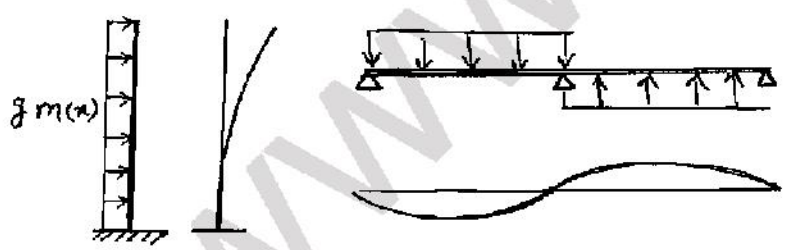
$$\frac{\omega^2}{2}\int_0^L m(x) u^2(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^L m(x) g\, u(x)\, dx$$

$$\omega^2 = \frac{g\int_0^L m(x) u(x)\, dx}{\int_0^L m(x) u^2(x)\, dx} = \frac{g\int_0^L m(x)\psi(x)\, dx}{Z_0\int_0^L m(x)\psi^2(x)\, dx}$$

در حالت سیستم با جرم های متمرکز (قاب های برشی) داریم :

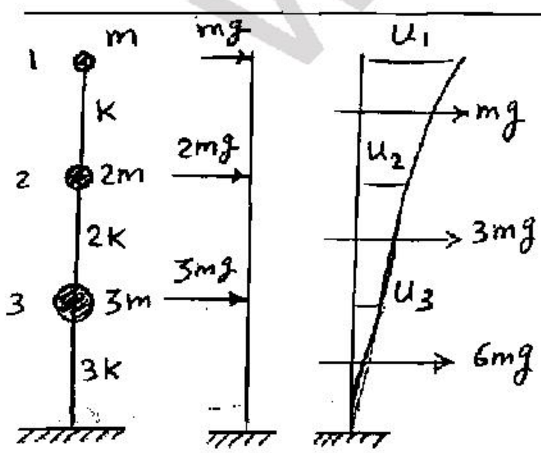
$$\omega^2 = \frac{g\sum_{i=1}^n m_i u_i}{\sum_{i=1}^n m_i u_i^2}$$

توجه : در فرض رایلی ، وزن گسترده یا متمرکز در جهت ارتعاش و بصورتی که باعث تغییر شکل در مود ارتعاشی مورد نظر باشد ، در نظر گرفته می شود ،



رعایت شرایط مرزی و سازگاری

و شکل ارتعاشی :



مثال - مطلوبست تعیین ω اصلی سیستم سه جرمی روبرو ؟

$$\Delta u_3 = \frac{F_3}{K_3} = \frac{6mg}{3K}$$

$$u_3 - \cancel{u_{\text{زمین}}}^{\text{صفر}} = u_3 = \frac{2mg}{K}$$

$$\Delta u_2 = u_2 - u_3 = \frac{F_2}{K_2} = \frac{3mg}{2K}$$

$$u_2 = \frac{3mg}{2K} + \frac{2mg}{K} = \frac{7mg}{2K} = 3.5\,\frac{mg}{K}$$

$$\Delta u_1 = u_1 - u_2 = \frac{F_1}{k_1} = \frac{mg}{k} \rightarrow u_1 = \frac{mg}{k} + \frac{3.5\,mg}{k} = 4.5\,\frac{mg}{k}$$

$$\omega^2 = \frac{g\sum_1^3 m_i u_i}{\sum_1^3 m_i u_i^2} = \frac{g \times \left(\frac{mg}{k}\right)(1\times 4.5 + 2\times 3.5 + 3\times 2)}{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 (1\times 4.5^2 + 2\times 3.5^2 + 3\times 2^2)} =$$

$$\frac{k}{m}\,\frac{17.5}{56.25} = 0.312\,{}^{k}/_{m} \rightarrow \underline{\omega = 0.56\sqrt{{}^{k}/_{m}}}$$

روش رایله اصلاح شده

یک روش ساده با تکرار مراحل (Iteration) و مناسب برای ساختمانهای برشی

فرض تغییرمکان اولیه برای شکل ارتعاشی یا محاسبه آن از طریق اعمال وزن سازه : $u^{(0)}(x,t)$

$$\left.\begin{aligned} V_{max}^{(0)} &= \frac{1}{2}\int EI(x)\, u''^{(0)^2} dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\sum K_i\, \Delta u_i^{(0)^2} \\ T_{max}^{(0)} &= \frac{1}{2}\int m(x)\, \dot{u}^{(0)^2} dx = \frac{1}{2}\omega^2 \int m(x)\, u^{(0)^2} dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i\, u^{(0)^2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} T_{max} &= V_{max} \\ \omega_{R00} &\ \text{معلوم} \end{aligned}$$

نیرویی که باعث ایجاد تغییرمکان $u^{(0)}$ می شود $P_i^{(0)} = K_i u_i^{(0)}$

$$K_i = m_i \omega^2 \rightarrow P_i^{(0)} = m_i \omega^2 u_i^{(0)}$$

تحت اثر نیروی اینرسی تغییرمکان جدید را محاسبه می کنیم $u_i^{(1)}$ و سپس انرژی پتانسیل جدید

$$V_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\int p^{(0)} u^{(1)} dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\sum P_i^{(0)} u_i^{(1)}$$

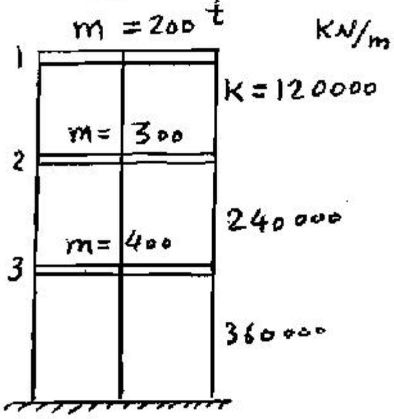
$$V_{max}^{(1)} = T_{max}^{(0)} \rightarrow \omega_{R01} \ \text{معلوم}$$

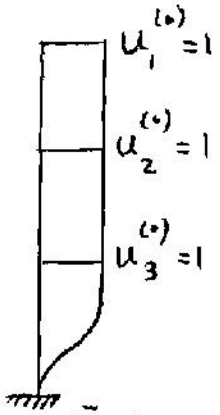
اگر انرژی جنبشی جدید را نیز از طریق تغییرمکان جدید $u^{(1)}$ محاسبه کنیم :

$$T_{max}^{(1)} = \frac{1}{2}\int m(x)\, \dot{u}^{(1)^2} dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\sum m_i\, \omega^2 u_i^{(1)^2}$$

$$T_{max}^{(1)} = V_{max}^{(1)} \rightarrow \omega_{R11} \ \text{معلوم} \xrightarrow[\text{ادامه}]{\text{بهمین ترتیب}} P_i^{(1)} = m_i\, \omega^2 u_i^{(1)} \ \text{-----}$$

مثال ـ مطلوبست تعیین ω قاب سه طبقه به روش رایله اصلاح شده؟ (سقف‌ها صلب).





فرض اولیه

$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = 1$$

$$\dot{u}^{(0)} = \omega u^{(0)}$$

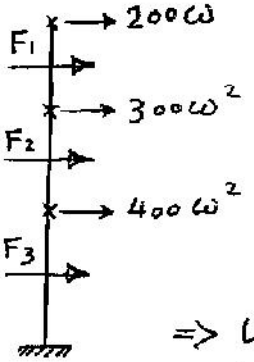
$$T_{max}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{u}_i^{(0)^2} = \frac{1}{2} \omega^2 (900)$$

$$V_{max}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum K_i \Delta u_i^{(0)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\left[K_1(1-1)^2 + K_2(1-1)^2 + K_3(1-0)^2\right] = \frac{1}{2}(360000)$$

$$T_{max}^{(0)} = V_{max}^{(0)} \rightarrow \omega^2 = \frac{360000}{900} = 400 \rightarrow \omega_{R00} = 20 \ \ Rad/s$$

$$P_i^{(0)} = m_i \omega^2 u_i^{(0)} \rightarrow P_1 = 200\omega^2 , \ P_2 = 300\omega^2 , \ P_3 = 400\omega^2$$



برش طبقات: $F_1 = 200\omega^2 , \ F_2 = 500\omega^2 , \ F_3 = 900\omega^2$

محاسبه $u_i^{(1)}$: $\Delta u_3^{(1)} = u_3^{(1)} - u_{زمین} \rightarrow \frac{F_3}{K_3} = u_3^{(1)} - 0 \Rightarrow$

$$u_3^{(1)} = 900\omega^2/360000 = 0.0025\omega^2$$

$$\Rightarrow u_2^{(1)} = 0.004583\omega^2 , \ u_1^{(1)} = 0.006253\omega^2$$

$$V_{max}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum P_i^{(0)} u_i^{(1)} = \frac{1}{2}\omega^4(3.625)$$

$$V_{max}^{(1)} = T_{max}^{(0)} \rightarrow \frac{1}{2}(3.625)\omega^4 = \frac{900}{2}\omega^2 \rightarrow \omega_{R01} = 15.75 \ \ Rad/s$$

$$T_{max}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 u_i^{(1)^2} = \frac{1}{2}\omega^6(0.01661)$$

$$T_{max}^{(1)} = V_{max}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{2}\omega^6(0.01661) = \frac{1}{2}\omega^4(3.625) \Rightarrow \omega_{R11} = 14.77 \ \ Rad/s$$

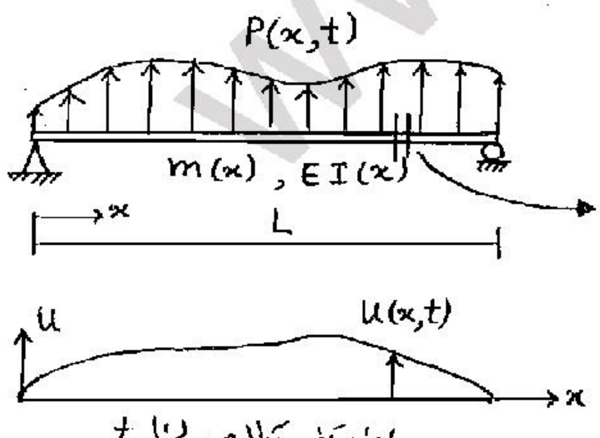
جوابها به سمت همگرایی میل می‌کند. برای دقت بیشتر می‌توان

$$P_i^{(1)} = m_i \omega^2 u_i^{(1)} \ \ldots\ldots$$

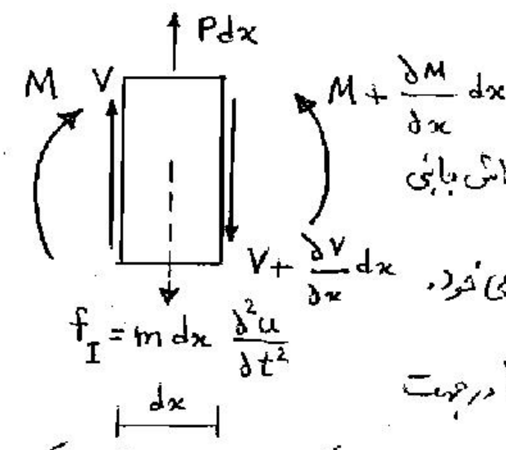
معادلات سیستم‌های پیوسته با جرم و سختی گسترده

Systems with Distributed Mass and Elasticity

اکثر سازه‌ها می‌توانند بصورت جرم متمرکز (در یک یا چند نقطه) مدل شوند (ساختمانهای چند طبقه با کف صلب و ساختمان‌هایی با اجزاء تیر ستون با جرم ناچیز). بخش بزرگی از درس به تجزیه و تحلیل این نوع مدل‌ها پرداخته می‌پردازد، به دو دلیل؛ اول اینکه چنین مدل‌هایی بصورت بسیار مناسب و مؤثر رفتار دینامیکی سازه را بیان می‌دارد بویژه ساختمانهای چند طبقه، و دوم اینکه روش‌های محاسباتی مناسب با کامپیوتر جهت حل معادلات دیفرانسیل معمولی حرکت این سازه‌ها به تعداد زیاد موجود است. با این حال برای برخی سازه‌ها با جرم و سختی گسترده نظیر دودکش‌ها، سدهای قوسی و سازه راکتورهای هسته‌ای و ...، روش فوق مناسب نیست و باید از روش تحلیل سیستم‌های پیوسته کمک گرفت. در این بخش به مسائل یک بعدی با جرم گسترده نظیر تیرها و برج‌ها و تحلیل آنها پرداخته می‌شود. معادله حرکت (حالت بدون میرایی) برای نیروی اعمالی بصورت زیر بیان می‌شود:



منحنی تغییر شکل در لحظه t



یک جزء دیفرانسیلی تیر

یک تیر سیستم با ارتعاش جانبی و با شرایط تکیه‌گاهی خود. از تعادل نیروها در جهت قائم داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

* در رابطه روبرو، اگر نیروی اینرسی نبود، رابطه کلاسیک بین برش و نیروی گسترده در تیرهای تحت بار گسترده حاصل می‌شد.

در مقاومت مصالح اگر از لنگر اینرسی مرتبط (وابسته) به شتاب زاویه‌ای جزء صرفنظر کنیم،

از تعادل چرخشی المان رابطه استاتیکی روبرو را داریم $V = \dfrac{\partial M}{\partial x}$ ②

باز هم در مقاومت مصالح اگر از تغییرشکل های برشی صرفنظر کنیم، داریم: ③ $M = EI\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

اگر روابط ۲ و ۳ را در رابطه ۱ قرار دهیم، معادله حاکم بر تغییرمکان (ارتعاش) جابجایی $u(x,t)$ تیر حاصل می‌شود:

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = P(x,t) \qquad ④$$

برای حل معادله نیاز به دو شرط مرزی در هریک از انتهای تیر و تغییرمکان و سرعت اولیه داریم.

مهمترین بخش حل معادله، مرحله ارتعاش آزاد آن است؛ برای سادگی m, EI

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EI}{m}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0 \qquad ⑤$$

برای حل فرض می‌کنیم پاسخ بصورت روبرو باشد: ⑥ $u(x,t) = \phi(x)\,.\,q(t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi(x)\,.\,\ddot{q}(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi''(x)\,q(t) \qquad ⑦$$

با بکارگیری روابط ۷ در ۵:

$$\phi(x)\,\ddot{q}(t) + \frac{EI}{m}\,q(t)\left[\phi''(x)\right]'' = 0$$

$$\phi(x)\,\ddot{q}(t) + \frac{EI}{m}\,\phi^{IV}(x)\,q(t) = 0 \qquad ⑧$$

$$-\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{EI}{m}\,.\,\frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)} = \text{مقدار ثابت} = \omega^2$$

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \qquad ⑨ \leftarrow \ddot{u} + \omega^2 u = 0 \\ \phi^{IV}(x) - \dfrac{m\omega^2}{EI}\phi(x) = 0 \quad , \quad \dfrac{m\omega^2}{EI} = \lambda^4 \end{cases}$$

رابطه کلاسیک ارتعاش آزاد بدون میرایی

$$\phi^{IV}(x) - \lambda^4\,\phi(x) = 0 \qquad ⑩ \quad \text{یا} \quad \left[EI\,\phi''(x)\right]'' - \omega^2 m\,\phi(x) = 0$$

از معادله ۹ به ازای هر مد با توجه به شرایط اولیه، تابع $q(t)$ مشخص خواهد شد:

$$q(t) = \frac{\dot{q}_0}{\omega_i}\sin\omega_i t + q_0\cos\omega_i t \qquad ⑪$$

برای حل معادله ۱۰

$$\phi(x) = \bar{C} e^{sx} \rightarrow (s^4 - \lambda^4)\, \bar{C} e^{sx} = 0$$

$$s^4 - \lambda^4 = 0 \rightarrow \quad s = \pm\lambda \;,\; \pm i\lambda \quad \Rightarrow$$

$$\phi(x) = A_1 e^{i\lambda x} + A_2 e^{-i\lambda x} + A_3 e^{\lambda x} + A_4 e^{-\lambda x}$$

یا

$$\phi(x) = B_1 \cosh(\lambda x) + B_2 \sinh(\lambda x) + B_3 \cos\lambda x + B_4 \sin\lambda x \quad (۱۲)$$

با اعمال شرایط مرزی در تکیه گاه‌ها به معادلات مثلثاتی خواهیم رسید که ما را به بینهایت ω هدایت خواهد کرد (سیستم پیوسته پس بینهایت درجه آزادی). بنابراین جواب ارتعاش آزاد جمع کلیه جوابها خواهد بود:

$$\omega_i \rightarrow \phi_i(x) \;,\; q_i(t) \quad \Rightarrow$$

$$u_c(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot q_i(t) \quad (۱۳)$$

با توجه به شرایط تکیه گاهی و شرایط مرزی در انتهای آزاد تیرها داریم:

تغییرمکان صفر	$\phi(x) = 0$	لنگرخمشی صفر	$\dfrac{d^2\phi}{dx^2} = 0$
شیب صفر	$\dfrac{d\phi}{dx} = 0$	برش صفر	$\dfrac{d^3\phi}{dx^3} = 0$

در انتهای آزاد، لنگر و برش صفر ـ در تکیه گاه گیردار، تغییرمکان و شیب صفر ـ در تکیه گاه مفصلی، تغییرمکان و لنگر صفر پس در هر انتها به هرحال دو شرط مرزی خواهیم داشت،

روش ساده شده:

$$\cosh \equiv ch \quad , \quad \sinh \equiv sh$$

$$ch(\lambda x) + \cos(\lambda x) = S \rightarrow S' = \lambda(sh(\lambda x) - \sin(\lambda x)) = \lambda V$$

$$sh(\lambda x) + \sin(\lambda x) = T \rightarrow T' = \lambda(ch(\lambda x) + \cos(\lambda x)) = \lambda S$$

$$ch(\lambda x) - \cos(\lambda x) = U \rightarrow U' = \lambda(sh(\lambda x) + \sin(\lambda x)) = \lambda T$$

$$sh(\lambda x) - \sin(\lambda x) = V \rightarrow V' = \lambda(ch(\lambda x) - \cos(\lambda x)) = \lambda U$$

رابطه (۱۲) را بصورت روبرو می‌نویسیم:

$$\phi(x) = C_1 S + C_2 T + C_3 U + C_4 V$$

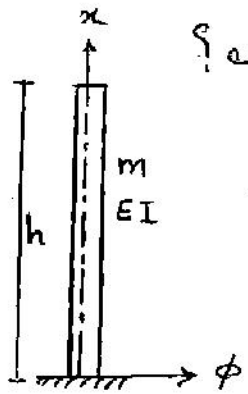
$$\frac{d\phi}{dx} = C_1 S' + C_2 T' + C_3 U' + C_4 V' = \lambda (C_1 V + C_2 S + C_3 T + C_4 U)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \dots\dots\dots\dots = \lambda^2 (C_1 U + C_2 V + C_3 S + C_4 T)$$

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} = \quad = \lambda^3 (C_1 T + C_2 U + C_3 V + C_4 S)$$

با توجه به شرایط مرزی و استفاده از روابط ساده بین ضرایب C_1 ، C_2 ، C_3 و C_4 می‌توان این ضرایب را محاسبه نمود.

مثال - مطلوبست برآورد فرکانس های طبیعی یک تیر (ستون) طره پیوسته همگن؟



$$(\phi)_{x=0} = 0 \quad (1)' \qquad \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_{x=h} = 0 \quad (3)'$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad (2)' \qquad \left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_{x=h} = 0 \quad (4)'$$

از شرایط مرزی بالا $C_1 = C_2 = 0$ و

$$\begin{cases} C_3 [ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)] + C_4 [sh(\lambda h) + \sin(\lambda h)] = 0 & (5)' \\ C_3 [sh(\lambda h) - \sin(\lambda h)] + C_4 [ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)] = 0 & (6)' \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ch(\lambda h) + \cos(\lambda h) & sh(\lambda h) + \sin(\lambda h) \\ sh(\lambda h) - \sin(\lambda h) & ch(\lambda h) + \cos(\lambda h) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)'$$

C_3 و C_4 نمی‌توانند صفر باشند چون در آنصورت ارتعاشی وجود نخواهد داشت پس دترمینان ماتریس ضرایب صفر است، از آنجا داریم:

$$[ch(\lambda h) + \cos(\lambda h)]^2 - [sh(\lambda h) + \sin(\lambda h)][sh(\lambda h) - \sin(\lambda h)] = 0$$

$$ch^2(\lambda h) + \cos^2(\lambda h) + 2\,ch(\lambda h)\cos(\lambda h) - sh^2(\lambda h) + \sin^2(\lambda h) = 0$$

$$1 + 1 + 2\,ch(\lambda h)\cos(\lambda h) = 0 \rightarrow \underline{ch(\lambda h)\cos(\lambda h) + 1 = 0} \quad (۸')$$

از روش ساده امکان حل معادله بالا وجود ندارد پس به کمک روش عددی حل شده و داریم :

$$\lambda_i h = 1.8751,\ 4.6941,\ 7.8548,\ 10.996,\ 14.137,\ 17.279, \ldots$$

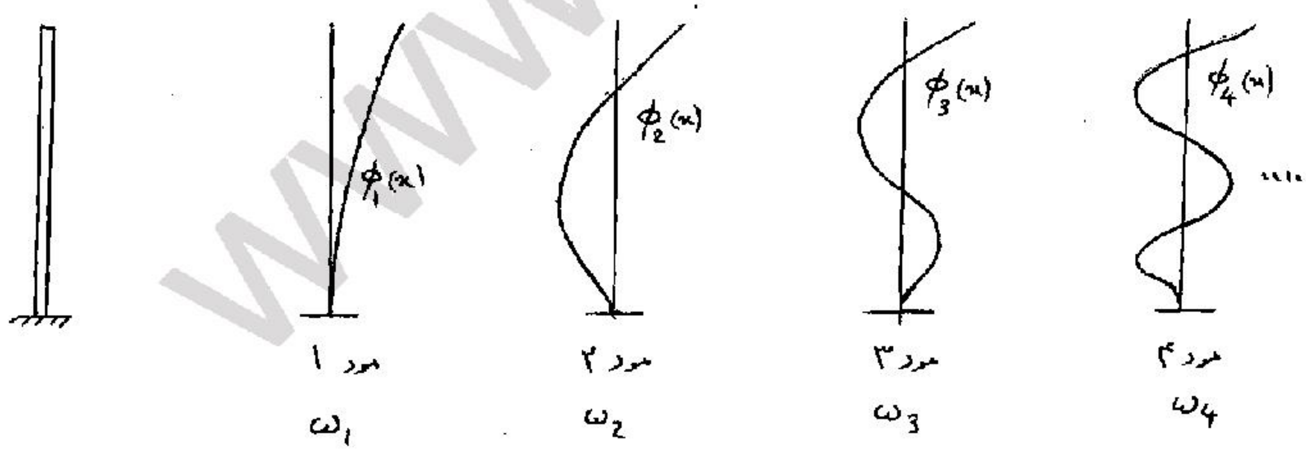
برای $i>4$ تقریباً $\lambda_i h \simeq \frac{(2n-1)\pi}{2}$ با توجه به $\omega^2 = \frac{\lambda^4 EI}{m}$

$$\omega_1 = \frac{3.516}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\ ,\ \omega_2 = \frac{22.03}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\ ,\ \omega_3 = \frac{61.70}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\ ,$$

$$\omega_4 = \frac{120.9}{h^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad \underline{\omega_i = \lambda_i^2\sqrt{\frac{EI}{m}}}$$

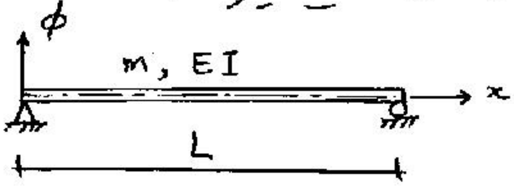
اگر C_3 را برحسب C_4 بنویسیم (رابطه ۵') و آنرا در رابطه (۱۲ درس) قرار دهیم و از روابط بقیه ضرایب در شرایط مرزی کمک بگیریم ، تابع $\phi_i(x)$ بصورت زیر خواهد بود :

$$\phi_i(x) = C_4\left[ch(\lambda_i x) - \cos(\lambda_i x) - \frac{ch(\lambda_i h) + \cos(\lambda_i \lambda)}{sh(\lambda_i h) + \sin(\lambda_i h)}\left(sh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)\right)\right]$$



$$T = 2\pi/\omega \quad \Rightarrow \quad T_i = \frac{2\pi h^2}{(\lambda_i h)^2}\sqrt{\frac{m}{EI}}$$

مثال - مطلوبست تعیین فرکانس ها و شکل تغییرمکانی ارتعاش آزاد یک تیر ساده.



در ابتدا با توجه به تکیه‌گاه ها ، تغییرمکان و لنگر صفر است .

$$u(0)=0 \rightarrow \phi(0)=0 \rightarrow B_3+B_1=0$$

$$M(0)=0 \rightarrow EI\phi''(0)=0 \rightarrow \lambda^2(-B_3+B_1)=0 \quad \Rightarrow \quad B_1=B_3=0 \quad \Rightarrow$$

$$\phi(x) = B_4 \sin(\lambda x) + B_2\, Sh(\lambda x)$$

$$x=L \rightarrow u(L)=0 \rightarrow \phi(L)=0 \rightarrow B_4 \sin(\lambda L) + B_2\, Sh(\lambda L)=0$$

$$M(L)=0 \rightarrow EI\phi''(L)=0 \rightarrow \lambda^2(-B_4 \sin(\lambda L) + B_2\, Sh(\lambda L))=0$$

از جمع دو رابطه اخیر ← $B_2\, Sh(\lambda L)=0$ در اینحالت $Sh(\lambda L)$ نمی تواند صفر شود چون ω صفر می شود که در ارتعاش بی معنی است پس $B_2=0$ ← $B_4 \sin(\lambda L)=0$

اگر $B_4=0$ داریم $\phi(x)=0$ که معنی ندارد پس $\sin(\lambda L)=0$ $\Leftarrow$

$\lambda L = n\pi$ برای $n=1,2,3,\dots$ $\Rightarrow$

با توجه به $\lambda^4=\dfrac{\omega^2 m}{EI}$ ← $\omega_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}\ ,\quad n=1,2,3,\dots$

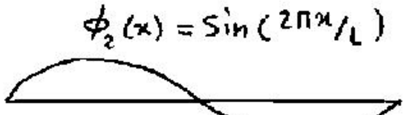
اگر $\lambda L=n\pi$ را در رابطه $\phi(x)$ بکار بریم : $\phi_n(x) = B_4 \sin\dfrac{n\pi x}{L}$

که B_4 مقدار اختیاری است .

$\phi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

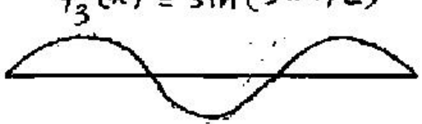
$\omega_1 = \dfrac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$ نصف سینوس

$\phi_2(x) = \sin(2\pi x/L)$



$\omega_2 = \dfrac{4\pi^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}} = 4\omega_1$ یک سینوس

$\phi_3(x) = \sin(3\pi x/L)$



$\omega_3 = \dfrac{9\pi^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}} = 9\omega_1$ یک و نیم سینوس

$\vdots$

رابطه ارتعاش آزاد سیستم پیوسته براساس تئوری تیر تیموشنکو

اگر از لنگر اینرسی چرخشی تیر صرفنظر نشود و تغییرشکل حاصل از تنش برشی ملحوظ شود (تئوری تیر تیموشنکو)، معادله ارتعاش آزاد بصورت زیر در می آید :

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-mr^2\left(1+\frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 t^2}+\frac{m^2r^2}{kGA}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=0$$

G مدول ارتجاعی برشی ، $r=\sqrt{\frac{I}{A}}$ شعاع ژیراسیون مقطع ، A سطح مقطع ، k ضریب شکل مقطع (مربوط به غیریکنواخت بودن تنش برشی در مقطع) که مثلاً برابر $\frac{5}{6}$ در مقطع مستطیلی و $\frac{9}{10}$ در مقطع دایره‌ای است (مقاومت مصالح) ،

رابطه تعامد مودال در سیستم های پیوسته — Modal ORTHOGONALITY

در این بخش خاصیت عمود بودن مودهای ارتعاش آزاد در سیستم های پیوسته ملاحظه می شود. برای سهولت بیان از یک تیر یک دهانه با انتهای مفصلی ، گیردار یا آزاد و بدون جرم متمرکز در انتها استفاده می شود ، برای شروع رابطه ۱۰ (معادله دیفرانسیل تفکیک شده تابع شکلی ϕ)

$$\phi^{IV}(x)-\lambda^4\phi(x)=0 \quad (10) \quad \left(\frac{m\omega^2}{EI}=\lambda^4\right)$$

برای مود r ام بازنویسی می شود

$$\left[EI(x)\,\phi_r''(x)\right]''=\omega_r^2\,m(x)\,\phi_r(x) \qquad (14)$$

طرفین را در $\phi_n(x)$ ضرب کرده و از صفر تا L انتگرال میگیریم :

$$\int_0^L\phi_n(x)\left[EI(x)\,\phi_r''(x)\right]''dx=\omega_r^2\int_0^L m(x)\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx \qquad (15)$$

طرف چپ را بصورت بخش بخش انتگرال می گیریم (روش های انتگرالگیری) :

$$\int_0^L\phi_n(x)\left[EI(x)\phi_r''(x)\right]''dx=\left\{\phi_n(x)\left[EI(x)\,\phi_r''(x)\right]'\right\}_0^L-\left\{\phi_n'(x)\left[EI(x)\,\phi_r''(x)\right]\right\}_0^L+\int_0^L EI(x)\,\phi_n''(x)\,\phi_r''(x)\,dx \qquad (16)$$

به سادگی ملاحظه می‌شود، مقادیر داخل آکولادها در $x=0$ و $x=L$ (انتهای تیر بصورت آزاد، ساده یا گیردار) برابر صفر هستند. زیرا اگر گیردار باشد داریم $\phi=0$ و $\phi'=0$ و اگر ساده باشد داریم $\phi=0$ و به دلیل لنگر صفر $\phi''=0$ و اگر آزاد باشد، لنگر و برش صفر است $\phi''=0$ و $\phi'''=0$

در این مرحله مقدار رابطه ۱۶ را در ۱۵ قرار می‌دهیم:

$$\int_0^L EI(x)\,\phi_n''(x)\,\phi_r''(x)\,dx = \omega_r^2 \int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx \qquad (17)$$

اینک مجدداً از ابتدا شروع کرده و رابطه ۱۰ را برای مود n ام می‌نویسیم و طرفین را در $\phi_r(x)$ ضرب کرده و از صفر تا L انتگرال می‌گیریم که مشابه حالت قبل خواهیم داشت:

$$\int_0^L EI(x)\,\phi_n''(x)\,\phi_r''(x)\,dx = \omega_n^2 \int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx \qquad (18)$$

رابطه ۱۷ را از رابطه ۱۸ تفریق می‌کنیم:

$$(\omega_n^2-\omega_r^2)\int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx = 0 \qquad (19)$$

در نتیجه با توجه $\omega_n \neq \omega_r$ خواهیم داشت:

$$\int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx = 0 \qquad (20)$$

با استفاده از رابطه ۲۰ در رابطه ۱۵ داریم:

$$\int_0^L \phi_n(x)\left[EI(x)\,\phi_r''(x)\right]''dx = 0 \qquad (21)$$

روابط ۲۰ و ۲۱ روابط تعامد مودها نامیده می‌شوند.

تحلیل دینامیکی سیستم پیوسته به روش مودال

MODAL Analysis of Forced Dynamic Response

رابطه (معادله) حرکت سیستم پیوسته را می‌نویسیم (رابطه ۴):

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = P(x,t)$$

اگر سیستم را برای حالت ارتعاش آزاد حل کرده باشیم و ω_r و ϕ_r معلوم باشند

جواب (واکنش) بصورت روبرو خواهد بود (رابطه ۱۳): $u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)\, q_r(t)$

ترکیب خطی مودها که در حقیقت جمع جوابهای حاصل از معادله دیفرانسیل است.

بنابراین، پاسخ $u(x,t)$ از جمع آثار هریک از مودهاست (ترم ۱۲ام در سری

بالا مقدار مشارکت (تأثیر) مود ۱۲ام در کل پاسخ است).

ϕ را مود و q را مختصات مودال می‌نامند که مجهول است. البته مجهول اصلی

$u(x,t)$ است. جواب مفروض (رابطه ۱۳) را در معادله ۴ قرار می‌دهیم:

$$\sum_{r=1}^{\infty} m(x)\,\phi_r(x)\,\ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{\infty}\left[EI(x)\,\phi_r''(x)\right]''\,q_r(t) = P(x,t)$$

اینک هرترم را در $\phi_n(x)$ ضرب و درطول تیر انتگرال می‌گیریم:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \ddot{q}_r(t)\int_0^L m(x)\,\phi_n(x)\,\phi_r(x)\,dx + \sum_{r=1}^{\infty} q_r(t)\int_0^L \phi_n(x)\left[EI(x)\,\phi_r''(x)\right]''dx = \int_0^L P(x,t)\,\phi_n(x)\,dx$$

باتوجه به خاصیت تعامد مودها (روابط ۲۰ و ۲۱) همه ترم‌ها در ترکیب عبارات سمت چپ

برابر صفراست بجز ترم مربوط $r=n$ که خواهیم داشت:

$$\ddot{q}_n(t)\int_0^L m(x)\left[\phi_n(x)\right]^2 dx + q_n(t)\int_0^L \phi_n(x)\left[EI(x)\,\phi_n''(x)\right]''dx = \int_0^L P(x,t)\,\phi_n(x)\,dx$$

که بصورت ساده روبرو می‌نویسیم:

$$M_n\,\ddot{q}_n(t) + K_n\,q_n(t) = P_n(t) \qquad (۲۲)$$

که:

$$M_n = \int_0^L m(x)\left[\phi_n(x)\right]^2 dx \quad , \quad K_n = \int_0^L \phi_n(x)\left[EI(x)\,\phi_n''(x)\right]''dx \qquad (۲۳)$$

$$P_n(t) = \int_0^L P(x,t)\,\phi_n(x)\,dx$$

باتوجه به روابط بخش خاصیت تعامد مودها:

$$K_n = \int_0^L EI(x)\left[\phi_n''(x)\right]^2 dx \qquad (۲۴)$$

M_n و K_n عبارت از جرم و سختی تعمیم داده شده (generalized) برای مود nام می باشد که رابطه کلی فرکانس میان آنها برقرار است $\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n} \rightarrow K_n = \omega_n^2 M_n$

رابطه اخیر با نوشتن معادله ۱۴ برای مود nام و ضرب طرفین رابطه در $\phi_n(x)$ و انتگرال گیری از صفر تا L و استفاده از بیان M_n و K_n (روابط ۲۳) بدست می آید. (۲۵)

$P_n(t)$ نیروی تعمیم داده شده برای مود nام است، معادله ۲۲ یک معادله دیفرانسیل معمولی است که مجهول آن $q_n(t)$ می باشد (مشابه SDF) و فقط به مود nام یعنی $\phi_n(x)$ ارتباط دارد. بنابراین می توانیم بینهایت معادله مشابه معادله ۲۲ برای هریک از مود ها داشته باشیم، در حقیقت معادله دیفرانسیل اولیه (معادله ۴) که بصورت Partial بود و مجهول آنه $u(x,t)$ است تبدیل به بینهایت معادله دیفرانسیل معمولی (رابطه ۲۲) با مجهول $q_n(t)$ می شود که هرکدام مستقل می باشد و بصورت مجزا و کلاسیک قابل حل می باشد (با توجه به نوع بارگذاری $P(x,t)$). وقتی $q_n(t)$ معلوم باشد (مود nام) می توان میزان مشارکت مود nام در تغییرمکان $u(x,t)$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$u_n(x,t) = \phi_n(x)\, q_n(t) \qquad (۲۶)$$

کل تغییرمکان از جمع آثار هریک از مود ها حاصل می شود

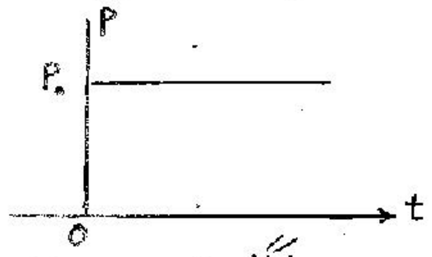
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\, q_n(t) \qquad (۲۷)$$

لنگر خمشی و نیروی برشی در هر مقطع از تیر ناشی از تغییرمکان آن نقطه در لحظه t بصورت زیر می باشد:

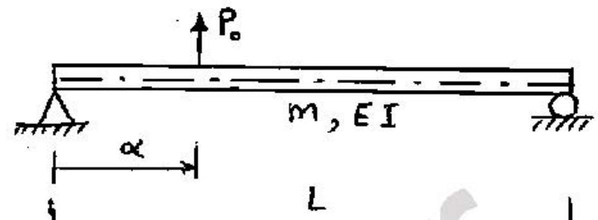
$$M(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} EI(x)\, \phi_n''(x)\, q_n(t) \qquad (۲۸)$$

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[EI(x)\, \phi_n''(x) \right]' q_n(t) \qquad (۲۹)$$

مثال - یک تیر ساده تحت بارگذاری داده شده مورد نظر است، مطلوبست واکنش تیر (تغییر مکان و لنگر خمشی) وقتی که نیروی متمرکز در فاصله α از تکیه‌گاه سمت چپ اثر می‌کند. حالت خاص وقتی نیرو در وسط دهانه اثر کند.



بارگذاری



قبلاً ارتعاش آزاد تیر ساده را تحلیل نموده بودیم:

$$\begin{cases} \omega_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}} \\ \phi_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{L} \end{cases} \qquad (a)$$

مقدار $\phi_n(x)$ را در روابط ۲۳ قرار می‌دهیم:

$$M_n = \frac{mL}{2} \quad , \quad K_n = \frac{n^4\pi^4 EI}{2L^3} \qquad (b)$$

$$P(x,t) = P_0\,\delta(x-\alpha)$$

$\delta(x-\alpha)$ دلتای دیراک ← متمرکز در α

$$P_n(t) = P_0\,\phi_n(\alpha) \qquad (c)$$

معادله مودال nام ←

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_0\,\phi_n(\alpha) \qquad (d)$$

قبلاً حل یک سیستم SDF در بارگذاری پله‌ای (Step) ملاحظه شده بود فقط پارامتر $q_n(t)$ به $u(t)$ و $u_{st} = P_0\phi_n(\alpha)/K_n$ حداکثر، خواهد بود:

$$q_n(t) = \frac{P_0\phi_n(\alpha)}{K_n}(1-\cos\omega_n t) = \frac{2P_0L^3}{\pi^4 EI}\,\frac{\phi_n(\alpha)}{n^4}(1-\cos\omega_n t) \qquad (e)$$

رابطه e را در معادله ۲۷ قرار داده و توجه شود که $\phi_n(x)$ از رابطه a معلوم است، پس $u(x,t)$ بدست می‌آید.

در حالت خاص $\alpha = \frac{L}{2}$، مقدار فوق را در معادله e قرار می‌دهیم سپس در رابطه ۲۷:

$$u(x,t) = \frac{2P_0L^3}{\pi^4 EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(L/2)}{n^4}(1-\cos\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (f)$$

که

$$\phi_n\left(\frac{L}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \cdots \\ 1 & n = 1, 5, 9, \cdots \\ -1 & n = 3, 7, 11, \cdots \end{cases} \qquad (g)$$

مقدار g را در f قرارداده :

$$u(x,t) = \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1-\cos\omega_3 t}{81}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1-\cos\omega_5 t}{625}\sin\frac{5\pi x}{L} - \frac{1-\cos\omega_7 t}{2401}\sin\frac{7\pi x}{L} + \cdots\right) \qquad (h)$$

تغییر مکان در وسط تیر :

$$u\left(\frac{L}{2},t\right) = \frac{2P_0 L^3}{\pi^4 EI}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1} + \frac{1-\cos\omega_3 t}{81} + \frac{1-\cos\omega_5 t}{625} + \frac{1-\cos\omega_7 t}{2401} + \cdots\right) \qquad (i)$$

ضرایب 1 ، 81 ، 625 ، 2401 و تقسیم در مخرج کسر نشان می دهد که مشارکت و تأثیر مود اول تعیین کننده است و سری سریعاً همگرا می شود ،

لنگر خمشی از قرار دادن رابطه h در ۲۸ بدست می آید :

$$M(x,t) = -\frac{2P_0 L}{\pi^2}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1-\cos\omega_3 t}{9}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1-\cos\omega_5 t}{25}\sin\frac{5\pi x}{L} - \frac{1-\cos\omega_7 t}{49}\sin\frac{7\pi x}{L} + \cdots\right) \qquad (j)$$

لنگر خمشی در وسط دهانه :

$$M\left(\frac{L}{2},t\right) = -\frac{2P_0 L}{\pi^2}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{1} + \frac{1-\cos\omega_3 t}{9} + \frac{1-\cos\omega_5 t}{25} + \frac{1-\cos\omega_7 t}{49} + \cdots\right) \qquad (k)$$

در مجموعه اخیر با توجه به n^2 در مخرج کسر ، همگرایی کند است البته نسبت به رابطه (i) که در مخرج n^4 را دارد . از این مطلب در می یابیم که مشارکت (تأثیر) مودهای بالاتر در نیرو بیشتر است نسبت به تغییر مکان .

---

* توضیح مختصر در خصوص مشکلات تحلیل سیستم های پیوسته در عمل
مشکل متغیر بودن $m(x)$, $EI(x)$ در روابط و انتگرال گیری مشکل - ارضاء مشکل شرایط مرزی در تیرهای سرتاسری (امکان پذیر ولی پیچیده و طولانی) - گره های ارتباطی تیر وستون در قابها

اصول تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس

Dynamic Analysis in the Frequency Domain

به چند دلیل، تحلیل دینامیکی در حوزه فرکانس بر تحلیل در حوزه زمانی ترجیح دارد:

۱- در بارگذاری زلزله (تابع غیرمشخص - مشکل انتگرال دوهامل - طیف طرح - FFT)

۲- اندرکنش خاک و سازه (مدل سازی خاک - FE ، BE - امپدانس خاک)

۳- پدیده های تصادفی (آمار و احتمالات - ارتعاشات تصادفی - تحلیل ریسک)

شکل نمایی سری فوریه برای بارگذاری دینامیکی (پریودیک)

$$P(t) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n t}{T_p} + \sum_{1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n t}{T_p}$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2\pi/T_p}{2\pi/T} = T/T_p$$

$$\beta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega} = T/T_p \quad , \quad \beta_2 = \frac{\Omega_2}{\omega} = \frac{2\times 2\pi/T_p}{2\pi/T} = \frac{2T}{T_p} = \frac{2\Omega_1}{\omega}$$

$$\beta_n = \frac{\Omega_n}{\omega} = \frac{n\times 2\pi/T_p}{2\pi/T} = \frac{nT}{T_p} = \frac{n\Omega_1}{\omega} \Rightarrow \Omega_n = n\Omega_1$$

$$\sin\Omega_n t = \sin n\Omega_1 t = \frac{e^{in\Omega_1 t} - e^{-in\Omega_1 t}}{2i}$$

$$\cos\Omega_n t = \cos n\Omega_1 t = \frac{e^{in\Omega_1 t} + e^{-in\Omega_1 t}}{2}$$

$$\Rightarrow (1) \quad P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{P}_n \, e^{in\Omega_1 t}$$

ضرایب $\bar{P}_n$ مجهول است و مانند ضرایب a_n و b_n باید معلوم شوند.

$$\int_0^{T_p} e^{in\Omega_1 t} \, e^{-im\Omega_1 t} \, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T_p & n = m \end{cases}$$

خاصیت تعامد توابع اکسپوننشیل

با توجه به خاصیت تعامد، طرفین رابطه (1) را در عبارت $e^{-im\Omega_1 t}$ ضرب و از صفر تا T_p انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{cases} \bar{P}_n = \dfrac{1}{T_p} \displaystyle\int_0^{T_p} p(t)\, e^{-in\Omega_1 t}\, dt & n \quad \text{سایر مقادیر} \quad (۲) \\ \bar{P}_0 = \dfrac{1}{T_p} \displaystyle\int_0^{T_p} p(t)\, dt & n = 0 \quad (۳) \end{cases}$$

<u>تحلیل سیستم SDF در حوزه فرکانس</u>

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}_n\, e^{in\Omega_1 t} \qquad (٤)$$

از جواب گذرا صرفنظر می شود - برای سهولت ، جزئیات برای $n=1$ ارائه می شود :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \bar{P}_1\, e^{i\Omega_1 t}$$

چون $\bar{P}_1$ ضریب ثابت است (فاکتور)

پس برای سهولت بیشتر در ابتدا درنظر گرفته می شود ←

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = e^{i\Omega_1 t}$$

$$u(t) = \bar{H}\, e^{i\Omega_1 t}, \quad \dot{u} = \bar{H} i \Omega_1 e^{i\Omega_1 t}, \quad \ddot{u} = -\bar{H}\Omega_1^2\, e^{i\Omega_1 t} \qquad (i^2 = -1)$$

$$e^{i\Omega_1 t}\, \bar{H}\left[-\Omega_1^2 m + c\Omega_1 i + k\right] = e^{i\Omega_1 t} \qquad e^{i\Omega_1 t} \neq 0$$

$$\bar{H} = \frac{1}{-\Omega_1^2 m + i\Omega_1 c + k} = \frac{1}{k\left(-\dfrac{\Omega_1^2 m}{k} + \dfrac{i\Omega_1 c}{k} + 1\right)}$$

$$\beta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega}, \quad \xi = \frac{c}{c_{cr}}, \quad c_{cr} = 2m\omega$$

$$\frac{\Omega_1 c}{k} = \frac{\Omega_1}{k} \times \frac{c}{c_{cr}}\, c_{cr} = \frac{\Omega_1}{k}\,\xi(2m\omega) = \frac{\Omega_1}{\omega^2}\,\xi\, 2\omega = 2\beta_1\xi$$

$$\bar{H}(\Omega_1) = \frac{1}{k(-\beta_1^2 + 2i\beta_1\xi + 1)}$$

درحالت کلی Ω_n :

$$\bar{H}(\Omega_n) = \bar{H}(n\Omega_1) = \frac{1}{k(-n^2\beta_1^2 + 2in\beta_1\xi + 1)} \qquad (۵)$$

بنابراین در حالت کلی با توجه به فاکتور ثابت $\bar{P}_n$ در تابع نیرو و ترکیب بار از جملات

تابع اکسپوناسیل، جواب معادله مورد نظر بصورت زیر خواهد بود:

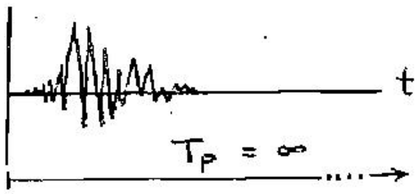
رفتار سازه باید خطی باشد.

$$\bar{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{H}(n\Omega_1)\, \bar{P}_n\, e^{in\Omega_1 t} \qquad (۶)$$

تحلیل سیستم SDF در بارگذاری غیرتناوبی ـ تبدیل فوریه

نیروهایی که تابع آنها شکل خاصی ندارد و پریودیک نمی باشند (زلزله ـ امواج تکی).

فرض: یک نیروی پریودیک با زمان تناوب ∞



تغییر متغیر زمان به فرکانس $t \to \Omega$

برای حل معادله دیفرانسیل تعادل دینامیکی از تغییر متغیر استفاده می شود: طبق تعریف:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_p} = \Delta\Omega \qquad \text{و} \qquad n\Omega_1 = \Omega_n$$

$$\bar{P}(\Omega_n) = T_p \bar{P}_n = \frac{2\pi}{\Omega_1}\bar{P}_n = \frac{2\pi}{\Delta\Omega}\bar{P}_n$$

$$\bar{P}_n = \bar{P}(\Omega_n)\frac{\Delta\Omega}{2\pi}$$

$$P(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}\bar{P}_n e^{in\Omega_1 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\bar{P}(\Omega_n)\, e^{in\Omega_1 t}\Delta\Omega$$

$$P(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\bar{P}(\Omega_n)\, e^{i\Omega_n t}\Delta\Omega \qquad (۷)$$

برای یافتن عبارت $\bar{P}(\Omega_n)$، طرفین عبارت $\bar{P}_n = \frac{1}{T_p}\int_{0}^{T_p} P(t)\, e^{-i\Omega_n t}\, dt$ را

که از قبل داشتیم در T_p ضرب می کنیم:

$$\bar{P}_n T_p = \bar{P}(\Omega_n) = \int_{-T_p/2}^{+T_p/2} P(t)\, e^{-i\Omega_n t}\, dt$$

$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{T_p}$ اگر $T_p \to \infty \Rightarrow \Delta\Omega \to d\Omega$

Ω_n که به ازای n های مختلف دارای مقدار منفرد (نقطه‌ای) بود، حالا بصورت متغیر پیوسته‌ای از Ω در می‌آید. در نتیجه شکل بیانی $p(t)$ که بصورت $\sum$ بود، به شکل انتگرال در می‌آید که به آن انتگرال فوریه می‌گویند:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\Omega_n)\, e^{i\Omega_n t} \Delta\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}(\Omega)\, e^{i\Omega t} d\Omega \qquad (۸)$$

که در این انتگرال فوریه مقدار $\bar{P}(\Omega) \leftarrow$ (۹)

$$\bar{P}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, e^{-i\Omega t} dt \qquad (۹)$$

دو رابطه اخیر (۸) و (۹) را زوج تبدیل فوریه گویند.

$\bar{P}(\Omega)$ را تبدیل فوریه $p(t)$ و $p(t)$ را تبدیل معکوس فوریه $\bar{P}(\Omega)$ می‌نامند.

شرط لازم وجودی تبدیل فوریه آن است که $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt$ موجود باشد که البته اکثر توابع فیزیکی نظیر نیروها چنین خصوصیتی را دارند.

خلاصه نتایج روش برای متغیر فرکانس $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ بصورت زیر می‌شود:

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}(f)\, e^{i(2\pi f t)} df \quad (۱۰) \quad , \quad \bar{P}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, e^{-i(2\pi f t)} dt \quad (۱۱)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{H}(f)\, \bar{P}(f)\, e^{i(2\pi f t)} df \qquad (۱۲)$$

یا بصورت دیگر زیر:

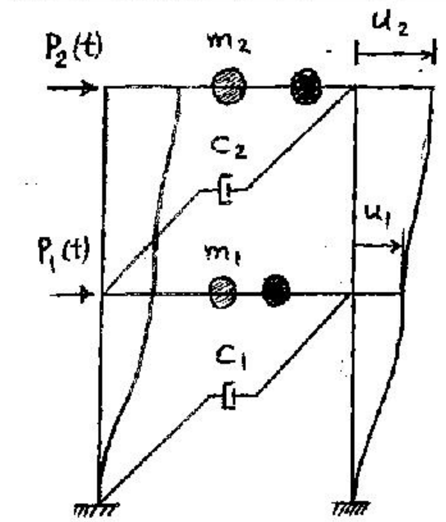
$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(f)\, e^{i(2\pi f t)} df \quad (۱۳) \quad \text{که} \quad \bar{U}(f) = \bar{H}(f)\, \bar{P}(f) \quad (۱۴)$$

تهیه انتگرال اخیر احتیاج به محاسبه انتگرال مرزی در صفحه مختلط دارد.

کاربرد مطالب در تهیه طیف فوریه بارگذاری (زلزله - ....)

$$\begin{array}{ccc} p(t) & \xrightarrow{(۱۱)} & \bar{P}(f) \\ & & \downarrow (۱۴) \\ u(t) & \xleftarrow{(۱۲)} & \bar{U}(f) \end{array}$$

برنامه FREQ-RESP در کتاب - در حالت زلزله برای انتگرال ها از روش عددی

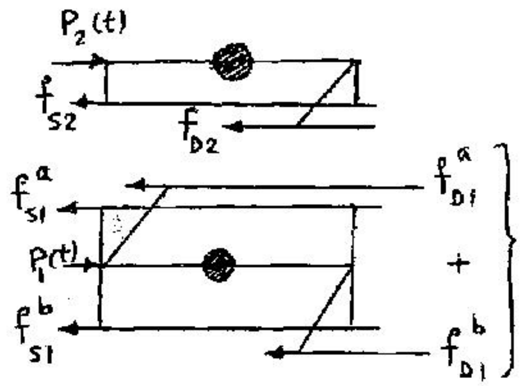


سیستم ساده (قاب برشی دو طبقه)

برای سادگی فرض می‌شود تیرها و کف صلب هستند.

از تغییر شکل محوری تیرها و ستون‌ها و از اثر نیروی محوری در سختی ستون‌ها صرف‌نظر می‌شود، رفتار خطی است.

تعداد درجات آزادی مستقل برابر دو است (u_1, u_2).



قانون دوم نیوتن برای حرکت هر یک از جرم‌ها:

$$p_i - f_{Si} - f_{Di} = m_i \ddot{u}_i \qquad (i=1,2)$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + f_{s1} + f_{D1} = P_1 \\ m_2\ddot{u}_2 + f_{s2} + f_{D2} = P_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

معادله برداری حرکت MDF:

$$[m]\{\ddot{u}\} + \{f_D\} + \{f_s\} = \{P\}$$

نیروی سختی $\{f_s\}$ بستگی به بردار تغییر مکان طبقات $\{u\}$ دارد، سختی جانبی هر طبقه K_i که بستگی به برش طبقه V_i داشته و رابطه بین آن و تغییر مکان طبقه است: $V_i = K_i \Delta_i$

$\Delta_i = u_i - u_{i-1}$ و سختی هر طبقه (در قاب برشی) برابر سختی جانبی کل ستون‌های طبقه می‌باشد:

$$K_i = \sum_{\text{ستون‌ها}} \frac{12EI_c}{h^3}$$

نیروی سختی مؤثر در سقف طبقه اول از دو بخش تشکیل می‌شود: f_{s1}^a از طبقه بالا و f_{s1}^b از طبقه پایین:

$$f_{s1} = f_{s1}^b + f_{s1}^a$$

$$\Delta_1 = u_1 \quad , \quad \Delta_2 = u_2 - u_1 \rightarrow f_{s1} = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2)$$

$$f_{s2} = k_2 (u_2 - u_1)$$

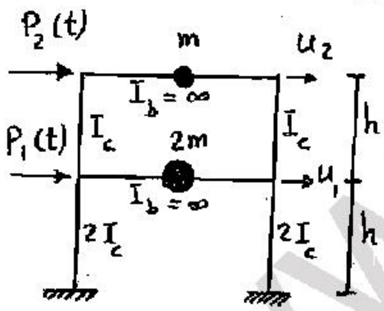
توجه شود که f_{s1}^{a} و f_{s2} هردو بیان کننده برش در طبقه دوم هستند پس در مقدار مساوی ولی مختلف العلامت می‌باشند. پس:

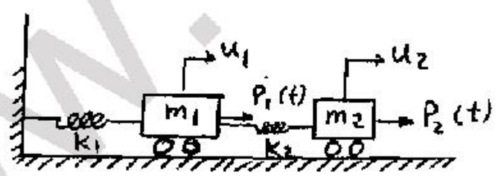
$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \{f_s\} = [k]\{u\}$$

بطور مشابه می‌توان برای نیروی میرایی نیز اقدام نمود که البته به دلیل مسائل مطرح در تعیین میرایی در عمل، معمولاً بصورت درصد میرایی و در معادلات تفکیک شده اعمال می‌گردد.

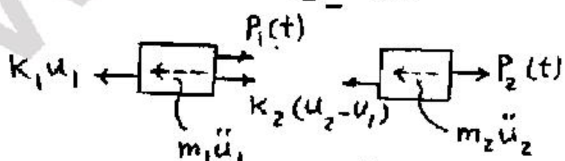
درنهایت معادله حرکت بصورت معادله دیفرانسیل برداری نوشته می‌شود که مجهولات u_1 و u_2 بوده و معادله بصورت وابسته است (coupled) که بنابراین معادله باید بصورت همزمان حل شود.

مثال - مطلوبست تعیین معادله حرکت قاب برشی زیر؟ مدول الاستیسیته E





مدل تحلیلی



پیکره آزاد

$$m_1 = 2m \quad , \quad m_2 = m$$

$$k_1 = 2\,\frac{12(2EI_c)}{h^3} = \frac{48EI_c}{h^3} \qquad k_2 = 2\,\frac{12(EI_c)}{h^3} = \frac{24EI_c}{h^3}$$

$$[m] = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad [K] = \frac{24EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 24\frac{EI_c}{h^3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

با استفاده از مدل جرم متمرکز ، ماتریس جرم همیشه قطری خواهد بود (تفاوت دو روش) ،

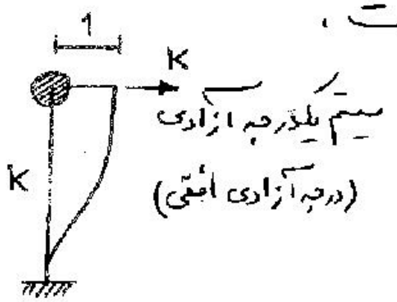
برای تشکیل ماتریس سختی ، چگونگی استفاده از سختی طبقه در سازه‌های برشی ملاحظه شد ،

البته در حالت کلی از ضرایب سختی برای تشکیل ماتریس سختی استفاده می‌شود که در ابتدای

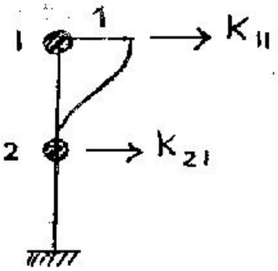
شروع درس ، اشاراتی به آنها شد (جلسات اول درس دینامیک سازه‌ها) ، یادآوری خلاصه :

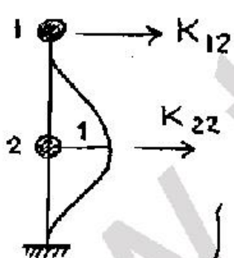
K_{ij} نیرو در درجه آزادی i وقتی تغییرمکان واحد در j اعمال می‌شود و سایر

درجات آزادی گرفته (قفل) شده است .



$$f_s = K \underbrace{(u - 0)}_{\text{تغییرمکان نسبی}} = Ku$$





$$f_{s1} = k_{11} u_1 + k_{12} u_2$$

$$f_{s2} = k_{21} u_1 + k_{22} u_2$$

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

جزئیات تشکیل ماتریس سختی در درس تحلیل سازه‌ها تشریح می‌شود .

طریقه تعیین ضرایب ماتریس‌های سختی و جرم با استفاده از اصول اجزاء محدود

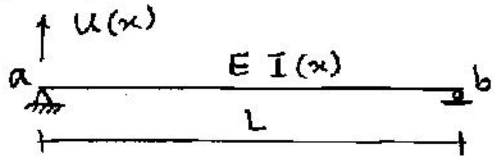
اساس : شبکه بندی ، عناصر انتخابی ، گره‌ها ، توابع شکلی (Shape Function)

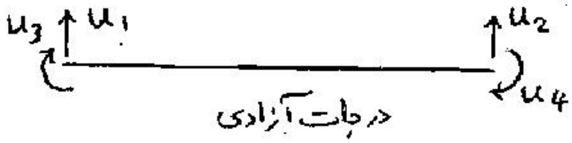
$\psi(x)$ با توجه به حالت بارگذاری (صفحه یا ....) چند جمله‌ای هرمیتی یا لاگرانژی ....

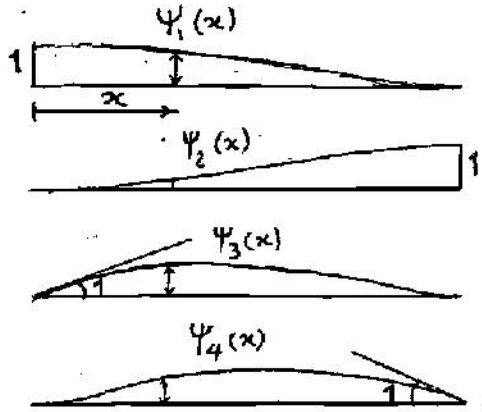
خواص چند جمله‌ای ها : ارضاء شرایط تغییرشکلی مورد نظر در المان مورد بررسی

جزئیات روش اجزاء محدود در درس مربوط بوده و اینجا فقط به نحوه تعیین k_{ij} و m_{ij}

پرداخته می‌شود .







$$u_a = u_1 = 1 \rightarrow \Psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$u_b = u_2 = 1 \rightarrow \Psi_2(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$\theta_a = u_3 = 1 \rightarrow \Psi_3(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

$$\theta_b = u_4 = 1 \rightarrow \Psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

چند جمله ای های هرمیتی

در حالت کلی تغییر مکان یک نقطه از تیر بصورت زیر خواهد بود :

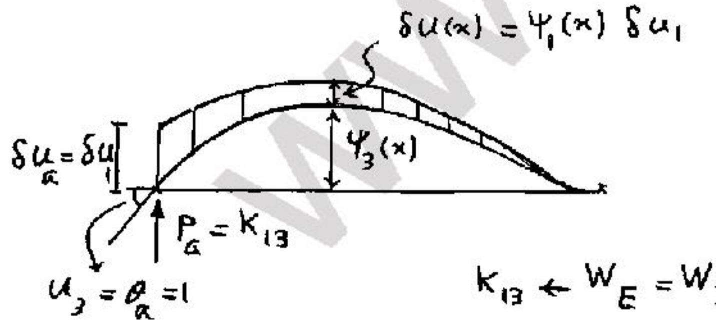
$$u(x) = \Psi_1(x)\, u_1 + \Psi_2(x)\, u_2 + \Psi_3(x)\, u_3 + \Psi_4(x)\, u_4$$

برای تعیین ضرایب می توان از روش تعادل و انرژی و کار مجازی استفاده کرد . اینجا کار مجازی :

تساوی کار نیروهای خارجی با کار نیروهای داخلی در یک تغییر مکان مجازی .

برای نمونه جزئیات مراتب برای ضریب K_{13} ارائه می شود . نیروی قائم ایجاد شده در گره a

بر اثر چرخش واحد در همان نقطه .



در تیر چرخش واحد در a اعمال شده و

یک تغییر مکان قائم مجازی در a درنظر می گیریم .

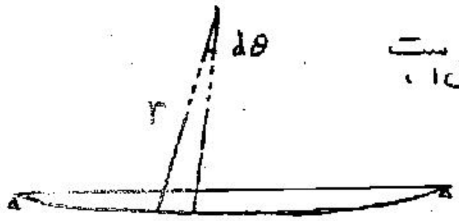
تساوی کار نیروهای داخلی با کار نیروهای خارجی $K_{13} \leftarrow W_E = W_I$

در این حالت کار خارجی فقط توسط مولفه قائم نیرو در نقطه a انجام می شود زیرا تغییر مکانهای

مجازی در گره های دیگر صفر است .

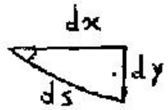
$$\underline{W_E = \delta u_a\, P_a = \delta u_1\, K_{13}}$$

کار مجازی داخلی توسط لنگرهای داخلی ناشی از $\theta_a = 1$ بر روی انحناهای مجازی انجام می شود .



در یک تیر تحت خمش: $\frac{1}{r}$ انحناء و $\frac{1}{r}dx=d\theta$ مقدار چرخش است،

$Md\theta$ کار مربوطه می باشد



$$ds \# dx \quad , \quad d\theta = \frac{ds}{r} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx}$$

از طرفی $\rightarrow d\theta = \frac{dy}{dx}$

مقدار انحناهای مجازی با صرفنظر کردن از اثرات ناشی از تغییر شکل برشی عبارت از:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

در حالت مورد نظر در اینجا، تغییر مکان مجازی δu می باشد: $y=\delta u$

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2}{dx^2}(\delta u(x)) = \frac{d^2}{dx^2}(\psi_1(x)\,\delta u_1) = \psi_1''(x)\,\delta u_1$$

لنگر داخلی ناشی از چرخش $\theta_a=1$ با توجه به $\frac{M}{EI}=y''$, $\Leftarrow y=\psi_3(x)$

$$M(x) = EI(x)\,\psi_3''(x) \rightarrow \text{کار داخلی} \quad Md\theta = M\frac{dx}{r}$$

$$W_I = \delta u_1 \int_0^L EI(x)\,\psi_1''(x)\,\psi_3''(x)\,dx$$

$$W_I = W_E \Rightarrow K_{13} = \int_0^L EI(x)\,\psi_1''(x)\,\psi_3''(x)\,dx$$

در حالت کلی ضرایب سختی مربوط به خمش تیر:

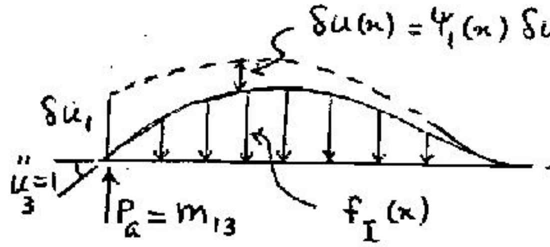
$$\boxed{K_{ij} = \int_0^L EI(x)\,\psi_i''(x)\,\psi_j''(x)\,dx}$$

در حالت کلی با تعیین ضرایب دیگر ماتریس سختی به روش فوق برای تیر مورد نظر خواهیم داشت. $\rightarrow$

$$[K] = \frac{2EI}{L^3}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 3L & 3L \\ -6 & 6 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 2L^2 & L^2 \\ 3L & -3L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس کل یک سازه از سرهم بندی ماتریس اجزاء

Consistent mass matrix



تعیین ضرایب ماتریس جرم سازگار (تیر)

مشابه حالت K_{ij} عمل می شود (تساوی کارهای داخلی و خارجی).

برای نمونه m_{13} مد نظر است،

اگر تیر تحت اثر شتاب زاویه ای واحد در انتهای چپ قرار گیرد $\ddot{u}_3 = \ddot{\theta}_a = 1$ (بقیه صفر)

شتابهائی در طول تیر ایجاد می شود : $u(x) = \Psi_1 u_1 + \Psi_2 u_2 + \Psi_3 u_3 + \Psi_4 u_4$

$$\ddot{u}(x) = 0 + 0 + \Psi_3(x)\ddot{u}_3 + 0 \Rightarrow \underline{\ddot{u}(x) = \Psi_3(x)\ddot{u}_3}$$

نیروی اینرسی (طبق اصل دالامبر) مقاوم در برابر این شتاب :

$$f_I(x) = m(x)\ddot{u}(x) = m(x)\Psi_3(x)\ddot{u}_3$$

ضرایب تأثیر جرم مربوط به این شتاب به عنوان نیروهای اینرسی گره‌ای ناشی از آن تعریف می شوند. این نیروها به کمک اصل تغییر مکانهای مجازی از نیروی اینرسی گسترده معادل محاسبه می شوند، مثلاً با ایجاد تغییر مکان مجازی قائم و مساوی قرار دادن کار انجام شده توسط نیروی گره‌ای خارجی P_a با کار انجام شده توسط نیروهای اینرسی گسترده $f_I(x)$، نیروی قائم در انتهای چپ محاسبه می شود (همان m_{13}) :

$$W_E = W_I \rightarrow P_a\,\delta u_a = \int_0^L f_I(x)\,\delta u(x)\,dx$$

$$m_{13}\,\delta u_1 = \int_0^L \underbrace{(m(x)\Psi_3(x)\times 1)}_{f_I(x)} \times \underbrace{\Psi_1(x)\,\delta u_1}_{\delta u(x)}\,dx$$

$$m_{13} = \int_0^L m(x)\Psi_1(x)\Psi_3(x)\,dx \longrightarrow \boxed{m_{ij} = \int_0^L m(x)\Psi_i(x)\Psi_j(x)\,dx}$$

با تعیین سایر ضرایب از توابع شکلی خود در نهایت ماتریس جرم سازگار المان تیری بصورت زیر:

$m(x) = \bar{m}$

$$[m] = \frac{\bar{m}L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

برای ماتریس میرایی نیز بطور مشابه می‌توان عمل کرد

$$c_{ij} = \int_0^L c(x)\,\psi_i(x)\,\psi_j(x)\,dx$$

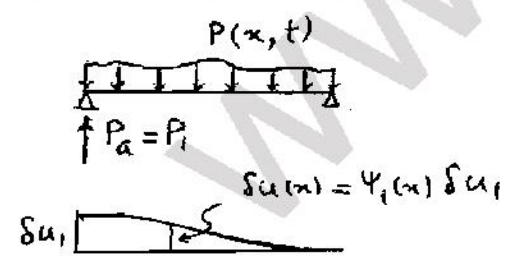
ولی مشکل ارزیابی $c(x)$ که بیانگر مشخصه استهلاک ویسکوز پیوسته برای هر المان است می‌باشد

در عمل اثر میرایی بصورت درصد میرایی در معادلات نهایی درنظر گرفته می‌شود.

بردار بارگذاری

برای تعیین بردار بارگذاری مربوط به درجات آزادی مربوطه، ساده‌ترین روش استفاده از اصول ساده استاتیک است که بار بین گره‌ها را بطور ساده به درجات آزادی گره‌ها تقسیم و انتقال می‌دهد.

البته می‌توان از بارهای گره‌ای سازگار نیز استفاده کرد، مثلاً تعیین نیروی سازگار متناظر با u_1 با استفاده از اصل کار مجازی؛ نتیجه:



$$P_1(t) = \int_0^L P(x,t)\,\psi_1(x)\,dx$$

در حالت کلی:

$$P_i(t) = \int_0^L P(x,t)\,\psi_i(x)\,dx$$

معادله حرکت در حالت کلی $[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{P(t)\}$

① معادله ارتعاش آزاد بدون میرایی $[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\}$

اگر تعداد درجات آزادی N باشد پس N معادله دیفرانسیل همزمان وابسته coupled خواهیم داشت. حل معادله ارتعاش آزاد با میرایی امکان پذیر است ولی مستلزم داشتن (تعیین) ماتریس میرایی $[c]$ می باشیم!

جواب معادله بصورت روبرو درنظر گرفته می شود ② $\{u(t)\} = q_i(t)\{\phi\}_i$

$\{\phi\}_i$ بردار تغییر شکل که وابسته به زمان نمی باشد و متغیر زمان با تابع $q_i(t)$ وارد مساله می شود: $q_i(t) = A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t = D_i \sin(\omega_i t + \alpha)$

A_i و B_i ضرایب ثابت که از شرایط اولیه بدست می آید.

$$\{u(t)\} = \{\phi\}_i (A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t) \quad ③$$

توجه شود که ω_i و $\{\phi\}_i$ مجهول هستند. رابطه (جواب) ② در معادله ① !

$$\left[-\omega_i^2 [m]\{\phi\}_i + [k]\{\phi\}_i\right] q_i(t) = \{0\} \quad ④$$

پس: $q_i(t) \neq 0$

$$\left[[k] - \omega_i^2 [m]\right]\{\phi\}_i = \{0\} \quad ⑤ \text{ یا } [k]\{\phi\}_i = \omega_i^2 [m]\{\phi\}_i$$

معادله مشخصه: $\det\left[[k] - \omega_i^2 [m]\right] = 0$ ⑥ ; پس $\{\phi\}_i \neq \{0\}$

$\Leftarrow$ چند جمله ای مرتبه N برحسب ω_i^2 $\Rightarrow$ ω_i معلوم $i = 1$ تا N

ریشه های معادله مشخصه یعنی ω_iها: مقادیر مشخصه، eigenvalues، فرکانس های زاویه ای

از رابطه ۵ می توان بردار $\{\phi\}_i$ را به ازای ω_i ها بدست آورد (البته مقادیر نسبی دامنه حرکت و نه مقادیر مطلق آنها).

$$\{\phi\}_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix}$$

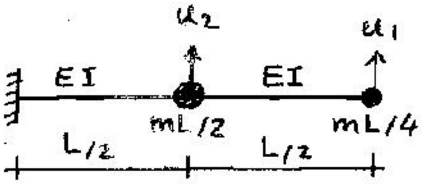
بردار مود طبیعی، شکل مود ارتعاش، eigenvectors، بردار مشخصه، ...

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \ldots <$$

ترتیب شماره گذاری فرکانس ها و پریودها

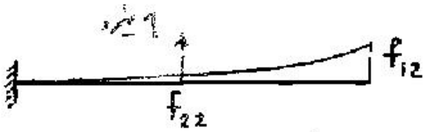
$$T_1 > T_2 > \ldots$$

مثال - مطلوبست تعیین فرکانس زاویه‌ای و مود شکل های سیستم زیر ؟



ابتدا باید معادله حرکت نوشته شود (ماتریس سختی و جرم) ؛
از روش ماتریس نرمی استفاده می شود (اعمال نیروی واحد و محاسبه تغییر مکانهای حاصل در درجات آزادی) از تحلیل سازه ؛

$$[f] = \frac{L^3}{48EI}\begin{bmatrix}16 & 5\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$ ماتریس نرمی

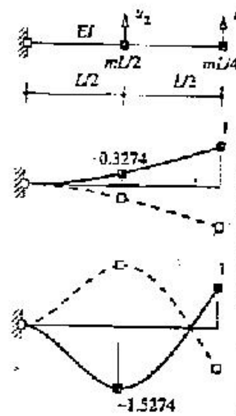


$$[k] = [f]^{-1} = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix}2 & -5\\ -5 & 16\end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix}mL/4 & 0\\ 0 & mL/2\end{bmatrix} \rightarrow [m]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}$$

$$\left[[k] - \omega^2[m]\right] = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix}2-\lambda & -5\\ -5 & 16-2\lambda\end{bmatrix} \leftarrow \lambda = \frac{7mL^4}{192\,EI}\,\omega^2$$ برای سادگی

$$\det\begin{bmatrix}2-\lambda & -5\\ -5 & 16-2\lambda\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 20\lambda + 7 = 0$$



$$\lambda_1 = 0.36319 \quad , \quad \lambda_2 = 9.6368 \rightarrow \begin{cases}\omega_1 = 3.15623\sqrt{\dfrac{EI}{mL^4}}\\[2ex] \omega_2 = 16.2580\sqrt{\dfrac{EI}{mL^4}}\end{cases}$$

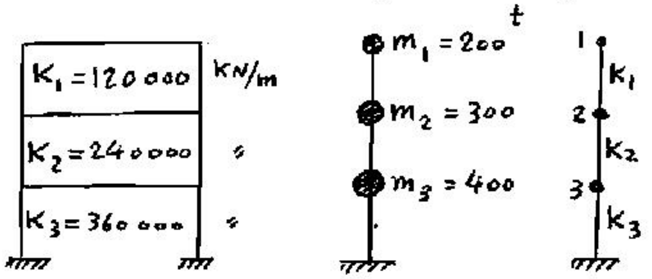
$$\left[[K] - \omega_i^2[m]\right]\{\phi\}_i = \{0\}$$

$$\left[[K] - \omega_1^2[m]\right]\begin{Bmatrix}1.0\\ \phi_2\end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \rightarrow \phi_{21} = 0.3274$$

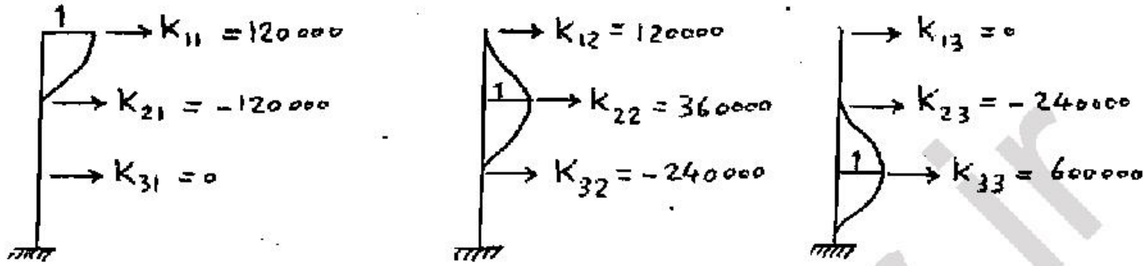
$$\left[[K] - \omega_2^2[m]\right]\begin{Bmatrix}1.0\\ \phi_2\end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \rightarrow \phi_{22} = -1.5274$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix}1.0000\\ 0.3274\end{Bmatrix} \quad , \quad \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix}1.0000\\ -1.5274\end{Bmatrix}$$

مثال - در قاب سه طبقه داده شده مطلوبست تعیین ω_i و $\{\phi\}_i$ ؟



$$f_{s1} = k_1(u_1 - u_2)$$
$$f_{s2} = k_2(u_2 - u_3) - k_1(u_1 - u_2)$$
$$f_{s3} = k_3 u_3 - k_2(u_2 - u_3)$$



$u_1 = 1 , u_2 = u_3 = 0$ $\qquad$ $u_2 = 1 , u_1 = u_3 = 0$ $\qquad$ $u_3 = 1 , u_1 = u_2 = 0$

$$[k] = 120\times10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} , \quad [m] = 200 \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$\Big[[k] - \omega^2 [m]\Big] = 120\times10^3 \begin{bmatrix} 1-\lambda_i & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5\lambda_i & -2 \\ 0 & -2 & 5-2\lambda_i \end{bmatrix}$$

برای سادگی $\lambda_i = \omega_i^2/600$

دترمینان ماتریس اخیر صفر ←

$$\lambda_i^3 - 5.5\,\lambda_i^2 + 7.5\,\lambda_i - 2 = 0$$

$\lambda_1 = 0.351 \quad , \quad \lambda_2 = 1.61 \quad , \quad \lambda_3 = 3.54$

$\omega_1^2 = 210 \quad , \quad \omega_2^2 = 966 \quad , \quad \omega_3^2 = 2124$

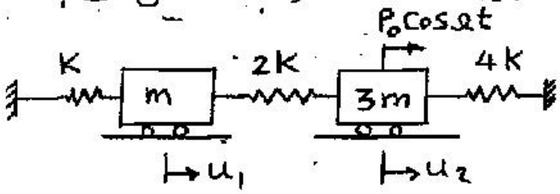
$\omega_1 = 14.5$ Rad/s $\quad , \quad \omega_2 = 31.1 \quad , \quad \omega_3 = 46.1$

$$\Big[[K] - \omega_i^2 [m]\Big]\{\phi\}_i = \{0\}$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1-\lambda_i & -1 & 0 \\ \hline -1 & 3-1.5\lambda_i & -2 \\ 0 & -2 & 5-2\lambda_i \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \phi_1 = 1 \\ \hdashline \phi_2 \\ \phi_3 \end{array}\right\}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 1 + \begin{bmatrix} 3-1.5\lambda_i & -2 \\ -2 & 5-2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مثال ـ یک سازه دو درجه آزادی بصورت زیر مدل شده است، مطلوبست تحلیل آن؟



$$\begin{cases} K = 1000 \quad , \quad m = 0.5 \\ \xi = 2\% \qquad \text{واحدها هماهنگ است.} \\ \Omega = 1.03\,\omega_1 \end{cases}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 6K \end{bmatrix} \quad , \quad [m] = m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[[K] - \omega^2[m]\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3K - \omega^2 m & -2K \\ -2K & 6K - 3\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 1.2417\ K/m \quad , \quad \omega_2^2 = 3.7584\ K/m$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8792 & -0.3792 \end{bmatrix} \quad , \quad \Omega = 1.03\omega_1 = 51.32\ \text{Rad/s}$$

$$M_1 = \{\phi\}_1^T[m]\{\phi\}_1 = 3.319\,m \quad , \quad M_2 = 1.4314\,m$$

$$K_1 = \{\phi\}_1^T[K]\{\phi\}_1 = 4.1212K \quad , \quad K_2 = 5.3798K$$

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_0\cos\Omega t \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\phi\}_1^T\{P(t)\} = P_1 = 0.8792\,P_0\cos\Omega t$$

$$\{\phi\}_2^T\{P(t)\} = P_2 = -0.3792\,P_0\cos\Omega t$$

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{P_i}{M_i}$$

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{2}\{\phi\}_i q_i$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 2.9008 \\ 2.5500 \end{Bmatrix}\frac{P_0}{K}\cos(\Omega t - 2.5468)}_{\text{اثر مود اول}} -$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0.1084 \\ -0.0411 \end{Bmatrix}\frac{P_0}{K}\cos(\Omega t - 0.0364)}_{\text{اثر مود دوم}}$$

$$[m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [c][\Phi]\{\dot{q}\} + [k][\Phi]\{q\} = \{P(t)\}$$

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_i^T$ ضرب می کنیم :

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m][\Phi]\{\ddot{q}\}} + \{\phi\}_i^T[c][\Phi]\{\dot{q}\} + \{\phi\}_i^T[k][\Phi]\{q\} = \{\phi\}_i^T\{P(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11} & & 0 \\ & m_{22} & \\ 0 & & \ddots \; m_{NN} \end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{N1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{N2} \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} \phi_{1N} \\ \phi_{2N} \\ \vdots \\ \phi_{NN} \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_1\ddot{q}_1}_{\text{صفر}} + \underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_2\ddot{q}_2}_{\text{صفر}} + \cdots + \underbrace{\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i}_{M_i}\ddot{q}_i + \cdots$$

$$M_i \quad \ddot{q}_i$$

برای درنظرگرفتن میرایی معمولاً با روش رایله عمل می شود $[c] = \alpha[m] + \beta[k]$

بنابراین خاصیت تعامد مودها نسبت به ماتریس میرایی نیز برقرار می شود :

$$\{\phi\}_r^T[c]\{\phi\}_s = 0 \quad , \quad \{\phi\}_i^T[c]\{\phi\}_i = C_i$$

در نهایت :

$$M_i\ddot{q}_i + C_i\dot{q}_i + K_i q_i = P_i$$

$$\{\phi\}_i^T[k]\{\phi\}_i = K_i \quad , \quad \{\phi\}_i^T\{P(t)\} = P_i$$

با توجه به روابط بین جرم ، سختی و میرایی

معادله یک درجه آزادی مستقل

$$\underline{\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = P_i/M_i} \qquad i = 1 \text{ تا } N$$

$\Rightarrow \quad q_i$ معلوم

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{N}\{\phi\}_i q_i$$

مودهای اولیه مهم است، می توان چند مود اول را درنظر گرفت

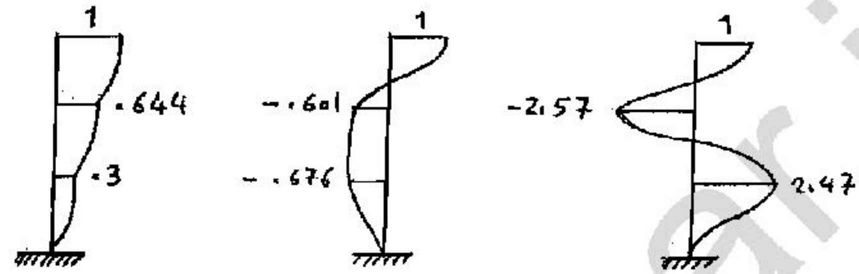
$$\{u\} = \sum_{i=1}^{r}\{\phi\}_i q_i \qquad r \ll N$$

$$\begin{bmatrix} 3-1.5\lambda_i & -2 \\ -2 & 5-2\lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.351 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2.475 & -2 \\ -2 & 4.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{21} = 0.644 \\ \phi_{31} = 0.300 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 1.61 \longrightarrow \phi_{22} = -0.601 \ , \ \phi_{32} = -0.676$$

$$\lambda_3 = 3.54 \longrightarrow \phi_{23} = -2.57 \ , \ \phi_{33} = 2.47$$



مود اول　　　مود دوم　　　مود سوم

ORTHOGONALITY OF MODES　　　خاصیت تعامد مودها

معادله مشخصه $[[K]-\omega_r^2 [m]]\{\phi\}_r = \{0\}$ را برای مود شماره r می‌نویسیم:

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_s^T$ ضرب می‌کنیم: $[K]\{\phi\}_r - \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r = \{0\}$

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r - \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = 0 \qquad ①$$

حال معادله را برای مود S ام می‌نویسیم:

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_r^T$ ضرب می‌کنیم: $[K]\{\phi\}_s - \omega_s^2 [m]\{\phi\}_s = \{0\}$

$$\{\phi\}_r^T [K]\{\phi\}_s - \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s = 0 \qquad ②$$

چون [K] و [m] متقارن است، رابطه ② ←

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r - \omega_s^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = 0 \qquad ③$$

رابطه ① − رابطه ③ $= (\omega_s^2 - \omega_r^2)\{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = 0 \Rightarrow$

رابطه تعامد مودها نسبت به ماتریس سختی و جرم: $\{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = 0 \ , \ \{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = 0$

$\{\phi\}_i$ الف ـ با تقسیم مولفه های بردار مود بر بزرگترین عدد آنها ، بردار مود به عدد یک مقیاس می شود.

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\phi\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

ب ـ مقیاس نمودن بر حسب ماتریس جرم به نحویکه $\{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_i = 1$

$$\{\phi\}_i'^T [m] \{\phi\}_i' = M_i \rightarrow \{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{M_i}} \{\phi\}_i'$$

ماتریس مودال

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 , \{\phi\}_2 \dots \{\phi\}_N]$$

ماتریس مقادیر مشخصه (فرکانسی)

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \ddots \ \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

در مثال قبل :

$$\{\phi\}_1'^T [m] \{\phi\}_1' = M_1 = 360.2$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1.0 / \sqrt{M_1} \\ 0.644 / \sqrt{M_1} \\ 0.3 / \sqrt{M_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0527 \\ 0.0339 \\ 0.0158 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 1$$

MODAL ANALYSIS تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی به روش مودال

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\}$$

از تحلیل ارتعاش آزاد مقادیر ω_i و $\{\phi\}_i$ معلوم است ($i = 1$ تا N).

تغییر متغیر از مجهول هندسی $\{u\}$ به مجهول مودال : $\{u\} = [\Phi]\{q\}$

$$\{u(t)\} = \sum_{i=1}^{N} \{\phi\}_i \, q_i(t)$$

$$[m][\Phi]\{\ddot{q}\} + [c][\Phi]\{\dot{q}\} + [k][\Phi]\{q\} = \{P(t)\}$$

طرفین رابطه را در $\{\phi\}_i^T$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T [m][\Phi]\{\ddot{q}\}} + \{\phi\}_i^T [c][\Phi]\{\dot{q}\} + \{\phi\}_i^T [k][\Phi]\{q\} = \{\phi\}_i^T \{P(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11} & & 0 \\ & m_{22} & \\ 0 & & \ddots \; m_{NN} \end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{N1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{N2} \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} \phi_{1N} \\ \phi_{2N} \\ \vdots \\ \phi_{NN} \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{\{\phi\}_i^T [m]\{\phi\}_1 \ddot{q}_1}_{\text{صفر}} + \underbrace{\{\phi\}_i^T [m]\{\phi\}_2 \ddot{q}_2}_{\text{صفر}} + \cdots + \underbrace{\{\phi\}_i^T [m]\{\phi\}_i}_{M_i} \ddot{q}_i + \cdots$$

برای درنظرگرفتن میرایی معمولاً با روش رایلی عمل می‌شود $[c] = \alpha[m] + \beta[k]$

بنابراین خاصیت تعامد مودها نسبت به ماتریس میرایی نیز برقرار می‌شود:

$$\{\phi\}_r^T [c]\{\phi\}_s = 0 \quad , \quad \{\phi\}_i^T [c]\{\phi\}_i = C_i$$

درنهایت:

$$M_i \ddot{q}_i + C_i \dot{q}_i + K_i q_i = P_i$$

$$\{\phi\}_i^T [k]\{\phi\}_i = K_i \quad , \quad \{\phi\}_i^T \{P(t)\} = P_i$$

با توجه به روابط بین جرم، سختی و میرایی

معادله یک درجه آزادی مستقل

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = P_i / M_i$$

$i = 1$ تا N

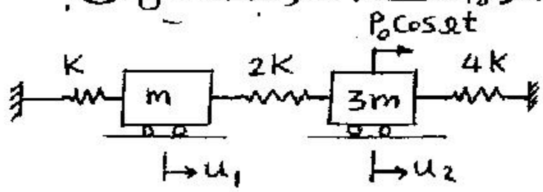
$\Rightarrow \quad q_i$ معلوم

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{N} \{\phi\}_i q_i$$

مودهای اولیه مهم است، می‌توان چند مود اول را درنظرگرفت

$$\{u\} = \sum_{i=1}^{r} \{\phi\}_i q_i \qquad r \ll N$$

مثال ـ یک سازه دو درجه آزادی بصورت زیر مدل شده است . مطلوبست تحلیل آن؟



$$\begin{cases} K = 1000 \quad , \quad m = 0.5 \\ \xi = 2\% \quad \text{دامپرها هماهنگ است .} \\ \Omega = 1.03\,\omega_1 \end{cases}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 6K \end{bmatrix} \quad , \quad [m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det \Big[[K] - \omega^2 [m] \Big] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3K - \omega^2 m & -2K \\ -2K & 6K - 3\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 1.2417\ K/m \quad , \quad \omega_2^2 = 3.7584\ K/m$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8792 & -0.3792 \end{bmatrix} \quad , \quad \Omega = 1.03\omega_1 = 51.32\ \text{Rad/s}$$

$$M_1 = \{\phi\}_1^T [m] \{\phi\}_1 = 3.319\,m \quad , \quad M_2 = 1.4314\,m$$

$$K_1 = \{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 = 4.1212\,K \quad , \quad K_2 = 5.3798\,K$$

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_0 \cos \Omega t \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\phi\}_1^T \{P(t)\} = P_1 = 0.8792\,P_0 \cos \Omega t$$

$$\{\phi\}_2^T \{P(t)\} = P_2 = -0.3792\,P_0 \cos \Omega t$$

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{P_i}{M_i}$$

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} = \sum_{i=1}^{2} \{\phi\}_i q_i$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 2.9008 \\ 2.5500 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 2.5468)}_{\text{اثر مود اول}} -$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0.1084 \\ -0.0411 \end{Bmatrix} \frac{P_0}{K} \cos(\Omega t - 0.0364)}_{\text{اثر مود دوم}}$$