فهرست

www.ttmar.ir

فصل اول: سينماتيك نقاط مادي

www.ttmar.ir

حرکت مستقیم الخط

سرعت لحظه اي : $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

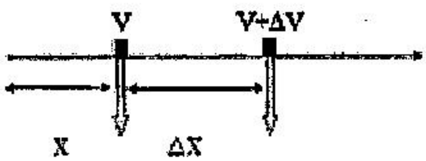
سرعت متوسط : $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

سیستم/واحد	جرم	طول	زمان	نیرو
SI	**Kg**	**m**	**s**	**$Kg.m/s^2$**
FPS	$lb.s^2/ft$	**Ft**	**s**	**lb**

Slug = lb . s^2/ft , g= 32.2 ft/ s^2 , 1ft = 12 inch , 1 inch=1" = 2.54 cm , 1ft=1'= 30 cm

$x =$ موقعیت $v =$ سرعت

$a =$ شتاب



شتاب لحظه ای $= a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

شتاب متوسط$= \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{((v+\Delta v)-v)}{(t+\Delta t)-t}$

$\Delta t \to 0$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{x},\ v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v},\ a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{\frac{dx}{v}} = \frac{vdv}{dx}\ , vdv = adx$$

حرکت مستقیم الخط یکنواخت: (a= 0)

$a = 0 \Rightarrow v =$ ثابت $\Rightarrow x = x_0 + vt$, $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow vdt = dx \Rightarrow \int_0^t vdt = \int_{x_0}^{x} dx$

حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت: (ثابت:a)

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow adt = dv \Rightarrow \int_0^t adt = \int_{v_0}^{v} dv \Rightarrow at = v - v_0 \rightarrow v = v_0 + at$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t vdt = \int_x^{x_0} dx \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t (v_0 + at)dt \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

www.ttnar.ir

حرکت نقطه مادی

۱- اگرشتاب تابع زمان باشد:

$$a=f(t)\quad,\quad a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow f(t)dt=dv\Rightarrow\int_0^t f(t)dt=\int_{v_0}^{v}dv\Rightarrow v=g(t)$$

$$v=g(t),v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_0^t vdt=\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t g(t)dt\Rightarrow x=h(t)$$

۲- اگر شتاب تابع مکان باشد:

$$a=f(x)\quad,\quad adx=vdv=f(x)dx=vdv\Rightarrow\int_{x_0}^{x}f(x)dx=\int_{v_0}^{v}vdv=\frac{1}{2}(v^2-v_0^{\ 2})\Rightarrow v=g(x)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=g(x)\Rightarrow\frac{dx}{g(x)}=dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{g(x)}=\int_0^t dt\Rightarrow t=h(x)\Rightarrow x=j(t)$$

۳- اگر شتاب تابع سرعت باشد:

$$a=f(v)\quad,\quad a=\frac{dv}{dt}=f(v)\Rightarrow\frac{dv}{f(v)}=dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}\frac{dv}{f(v)}=\int_0^t dt\Rightarrow t=g(v)\Rightarrow v=h(t)$$

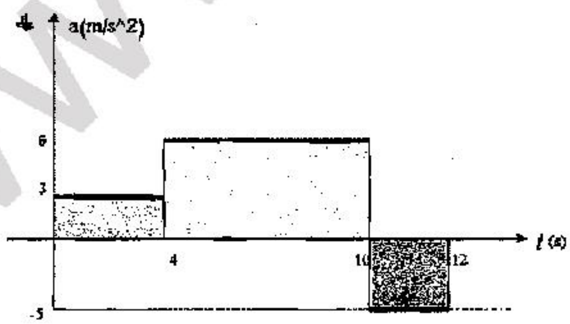
$$vdv=adx\Rightarrow vdv=f(v)dx\Rightarrow\int_{v}^{v}\frac{vdv}{f(v)}=\int_{x_0}^{x}dx\Rightarrow x=j(v)\,,\qquad v=h(t)=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int h(t)dt=\int dx$$

۴- ارتباط بین معادله و سرعت و شتاب:

$$a=\frac{dv}{dt}\rightarrow dv=adt\quad,\quad\int_{v_1}^{v_2}dv=\int_{t}^{t_2}adt\Rightarrow V_2-V_1=\int_{t_1}^{t_2}adt\quad,\quad a=\frac{dv}{dt}\quad,\quad v=\frac{dx}{dt}\quad,\quad v_2-v_1=\int_{t_1}^{t_2}adt$$

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_{x_1}^{x_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}vdt$$

مثال: مطلوب است نمودار منحنی $x\text{-}t$, $v\text{-}t$ در بین $0<t<20$ وهمچنین سرعت وموقعیت نقطه مادی درزمان $t=12\ (s)$ و مسافت طی شده تا $12\ s$. ($x_0=0$ و $v_0=-18m/s$)



$$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=adt\Rightarrow\int_{v_0}^{v_4}dv=\int adt\Rightarrow v_4=v_0+12=-18+12=-6\ \ m/s$$

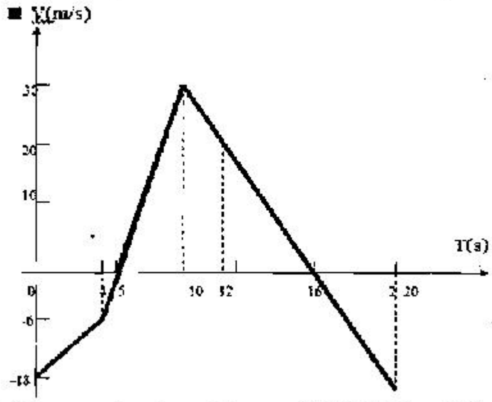
$$v_{10}=v_4+6(6)=-6+36=30\ \ m/s\Rightarrow v_{12}=v_{10}+2(-5)=30-10=20\ \ m/s\Rightarrow\qquad\Rightarrow$$

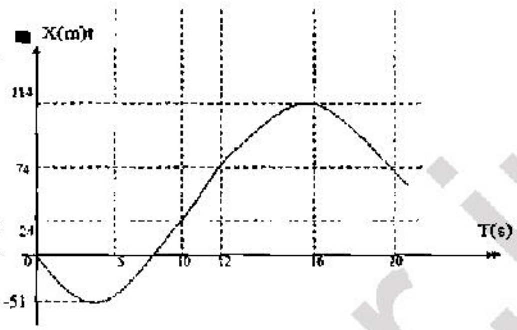
$$v_{20}=v_{12}+8(-5)=-20\ \ m/s$$

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=vdt\Rightarrow\int_{x_0=0}^{x_4}dx=\int_0^{20}vdt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_4=x_0+\int_0^{\pi}vdt=0-\frac{1}{2}(18+6)(4)=-48m\ ,\ x_5=x_4+\frac{1}{2}(6)(-1)=-51\ m\ ,\ x_{10}=x_5+\frac{1}{2}(30)(5)=24\ m$$

$$x_{12}=x_{10}+\frac{1}{2}(30+20)(2)=74m, x_{16}=x_{12}+\frac{1}{2}(20)(4)=114m\quad ,\quad x_{20}=x_{16}+\frac{1}{2}(4)(-20)=74\ m$$





t=12: مسافت طی شده $=74+51+51=176$ m

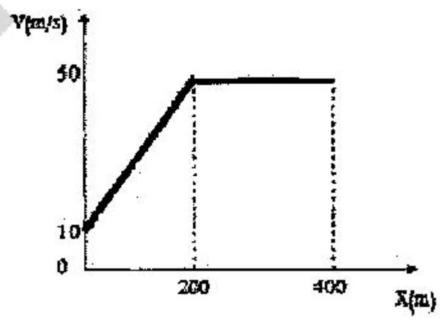
$$vdv=adx\quad ,\quad \frac{1}{2}(v^2-v_0^{\ 2})=\int adx\quad ,\quad v=(v_0^{\ 2}+2\int adx)^{\frac{1}{2}}$$

مثال: با توجه به نمودار v-x، مطلوبست ترسیم نمودار a-x و زمان لازم برای رسیدن به موقعیت $x=400\ (m)$

$$0\le x\le 200\Rightarrow v=0.2x+10\rightarrow\quad a=v\frac{dv}{dx}=(0.2x+10)(0.2)$$

$$\Rightarrow\quad a=0.04x+2\quad ,\quad v=0.2x+10$$

$$200<x\le 400\Rightarrow v=50\quad ,\quad a=50(0)=0$$

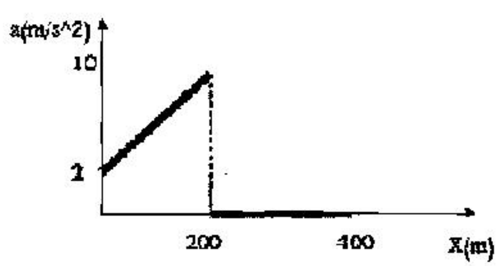


$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dt=\frac{dx}{v}\Rightarrow\int_0^t dt=\int_0^{200}\frac{dx}{0.2x+10}$$

$$x(m)\Rightarrow t=\frac{1}{0.2}Ln(0.2x+10)_0^{200}$$

$$t=5[Ln(40+10)-Ln(10)]\Rightarrow t=8.05(s)$$

$$dt=\frac{dx}{v}\Rightarrow\int_{8.05}^{t}dt=\int_{200}^{400}\frac{dx}{50}\Rightarrow t-8.05=\frac{x}{50}\Big]_{200}^{400}\rightarrow t=12\ .05(s)$$



www.ttnar.ir

حرکت نسبی چندین نقطه مادی

موقعیت مطلق نقطه $x_B = B$ ، موقعیت مطلق نقطه $x_A = A$

$x_{B/A} = x_B - x_A$ ، موقعیت نسبی نقطه B نسبت به نقطه $x_B - x_A = x_{B/A} = A$

سرعت نسبی نقطه A نسبت به B

$$\frac{d}{dt}(x_{B/A})=\frac{d}{dt}(x_B)-\frac{d}{dt}(x_A)=\dot{x}_{B/A}=\dot{x}_B-\dot{x}_A \Rightarrow v_{B/A}=v_B-v_A \quad :$$

سرعت مطلق $v_B = v_{B/A} + v_A = B$

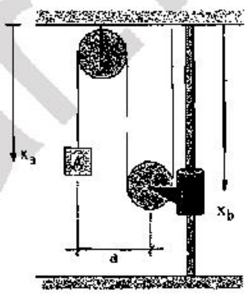
شتاب مطلق $\frac{d}{dt}(v_{B/A})=\frac{d}{dt}(v_B)-\frac{d}{dt}(v_A) \Rightarrow \ddot{x}_{B/A}=\ddot{x}_B-\ddot{x}_A \ , \ a_B = a_{B/A} + a_A = B$

حرکت وابسته چند جرم

مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب داریم :

$L=$ ثابت , $(x_A - c_1) + c_2 + (x_B - c_3) + c_4 + (x_B - c_5) = c$

$x_A + 2x_B = c'$, $v_A + 2v_B = 0$, $a_A + 2a_B = 0$



توجه : جهت مثبت را به سمت پایین گرفتنیم

مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب ما داریم :

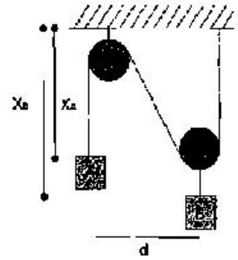
$L=$ ثابت , $L = x_A + \sqrt{d^2 + x_B^2} + x_B$

[d= ثابت , $\dot{d}=0$, $\ddot{d}=0$]

$\dot{L}=0 \Rightarrow \quad \dot{x}_A + \frac{1}{2}(d^2+x_B^2)^{-\frac{1}{2}}(2x_B.\dot{x}_B)+\dot{x}_B$

$\ddot{L}=0$

$L_1 = x_A + C_1$, $L_2 = \sqrt{d^2+x_B^2}$, $L_3 = x_B - C_3$



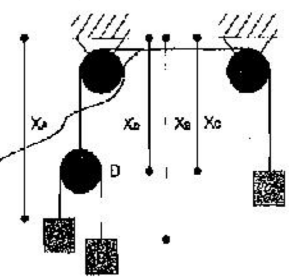
مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب ما داریم :

$(x_A - x_D) + (x_B - x_D) = c_1$, $x_A + x_B - 2x_D = C_1$, $x_D + x_C = C_2$

$v_A + v_B - 2v_D = 0$, $v_D + v_C = 0$

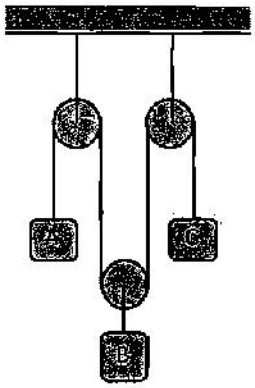
$a_A + a_B - 2a_D = 0$, $a_D + a_C = 0$

این طول همواره ثابت است



www.ttnar.ir

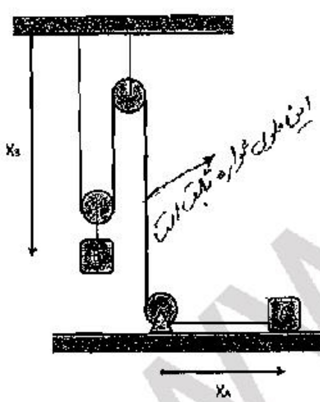
مثال :



$$XA + XB + XB + XC = Cte$$

$$\begin{cases} XA + 2XB + XC = Cte \\ VA + 2VB + VC = 0 \\ aA + 2aB + aC = 0 \end{cases}$$

مثال :



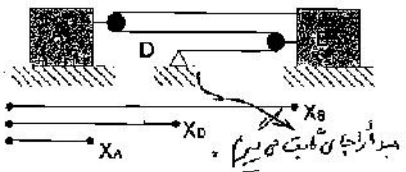
$$XB + XB + C1 + XA = Cte$$

$$\begin{cases} XA + 2XB = Cte \\ VA + 2VB = 0 \\ aA + 2aB = 0 \end{cases}$$

مثال: اگر $V_B = 18\ m/s$ (ثابت و در جهت x) مطلوبست:

الف) سرعت بلوک A ب) سرعت نقطه D کابل

ج) سرعت نسبی A نسبت به B



حل:

$(x_B - x_A) + (x_B - x_A) + x_B = C \ , \quad 3x_B - 2x_A = C \ , \quad 3V_B - 2V_A = 0$

$V_A = 1.5V_B = 3/2(18) = 27\ m/s \Rightarrow V_A = 27\ m/s \rightarrow$

$(x_B - x_A) + (x_D - x_A) = c_1 \ , \quad x_B + x_D - 2x_A = c_1 \ , \quad V_B + V_D - 2V_A = 0$

$18 + V_D - 2(27) = 0 \rightarrow V_D = 36\ m/s \rightarrow$

روش دیگر:

در مسائل از هر نقطه‌ای که مورد نیاز است می‌توان طناب را قطع کرد و روابط را نوشت

$(x_B - x_D) + x_B = c_2$

$2x_B - x_D = c_2$

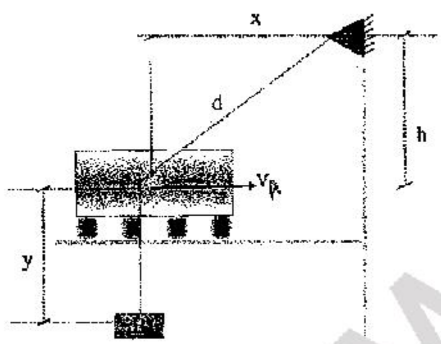
$2V_B - V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = 2V_B = 36\ m/s \rightarrow$

$V_{A/B} = V_A - V_B = [27 \rightarrow] - [18 \rightarrow] = 9\ m/s \rightarrow$

مثال: مطلوب است سرعت B نسبت به A

$V_A = ?$

$V_B = ?$



حل:

$$V_B = V_A + V_{B/A}$$

$$V_B = [V_A \leftrightarrow] + [V_{B/A} \updownarrow] \Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + V_{B/A}^2}$$

$$V_A = \dot{x}$$

$$L = d + y \quad \text{ثابت} \quad \dot{d} + \dot{y} = 0$$

$$|\dot{y}| = v_{B/A} = |\dot{d}| \qquad d = \sqrt{h^2 + x^2}$$

$$d^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow 2d\dot{d} = 2x\dot{x} \Rightarrow \dot{d} = \frac{x\dot{x}}{d}$$

$$V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \left(\frac{x\dot{x}}{d}\right)^2} \Rightarrow V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{d^2}}$$

$$V_B = \dot{x}\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{d^2}\right)} \qquad V_B = V_A\sqrt{1 + \frac{x^2}{d^2}}$$

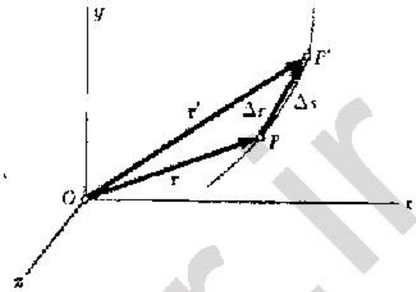
حرکت منحنی الخط

سرعت متوسط:

$$\bar{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

سرعت لحظه ای:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, v = \frac{ds}{dt}$$



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$\vec{v} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\vec{e}_t$$

$\vec{e}_t =$ ار واحد مماس بر مسیر حرکت $\Rightarrow \vec{v} = v\vec{e}_t$

شتاب متوسط $= \bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

شتاب لحظه ای $= \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

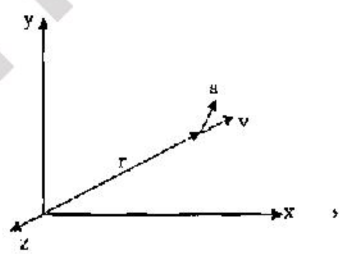
شتاب نقطه $= \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ، سرعت نقطه $= \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. بردار موقعیت $= \vec{r}$

مولفه های متعامد سرعت و شتاب

$\vec{r} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k} =$ مولفه های بردار های واحد

$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)$



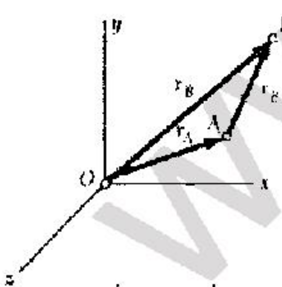
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d}{dt}(\vec{i}) + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d}{dt}(\vec{j}) + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d}{dt}(\vec{k})$$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$, $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$

$v_z = \dot{z}$

$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

حرکت نسبی



موقعیت نقطه $\vec{r}_A = A$

موقعیت نقطه $\vec{r}_B = B$

موقعیت نسبی نقطه B نسبت به نقطه A = $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_{B/A}$

$\Rightarrow \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$

سرعت نسبی نقطه B نسبت به A :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{r}_A) \Rightarrow \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

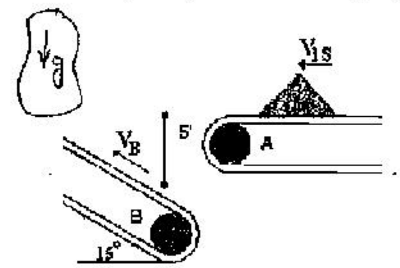
شتاب نسبی نقطه B نسبت به A :

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{v}_A) \Rightarrow \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

www.ttmar.ir

*** مثال:** سرعت نسبی شن و ماسه نسبت به تسمه B ؟ ($V_{S/B}$ به هنگام ریختن روی تسمه)



$v_{1S} = 6\,ft/s \quad , \quad v_B = 8\,ft/s$

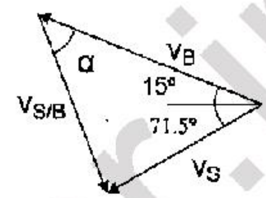
$\vec{v}_{S/B} = \vec{v}_S - \vec{v}_B$

$\vec{v}_s = \vec{v}_{sx} + \vec{v}_{sy} \qquad v_{sx} = 6\,ft/s \leftarrow \quad v_{sy} = \sqrt{2g(5)} = \sqrt{2(32.2)(5)} = 17.94\,ft/s \downarrow$

$\Rightarrow \vec{v}_{2S} = [6 \leftarrow] + [17.94 \downarrow] = 18.92\ ft/s$

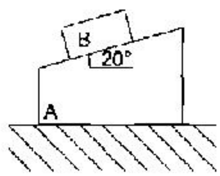
$v_{2S/B} = \sqrt{v_B^2 + v_S^2 - 2v_B v_s \cos 86.5} = 20.01\,ft/s$

$\dfrac{Sin(\alpha)^\circ}{18.92} = \dfrac{Sin(15+71.5)^\circ}{20.01} \Rightarrow \alpha = 70.69^\circ$



مثال: بلوك A با شتاب ثابت $80 mm/S^2$ به سمت چپ درحال حرکت است و بلوك B باشتاب نسبي ثابت $120\,mm/s^2$ به سمت بالا روي بلوك A در حال حرکت است. مطلوبست شتاب مطلق B.

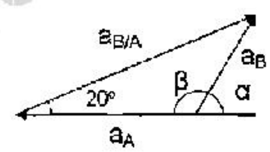
* وقتی جسم روی جسم دیگر حرکت کند حرکت جسمی که روی دیگری است نسبی است.



حل:

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad , \quad \vec{a}_B = \sqrt{120^2 + 80^2 - 2(120)(80)\cos 20}$

$$\left.\begin{array}{l} a_B = 52.5\,mm/s^2 \\ \dfrac{\sin\beta}{120} = \dfrac{\sin 20^\circ}{52.5} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = 128.6^\circ \qquad \alpha = 51.4^\circ$$



مولفه‌های مماسی و نرمال

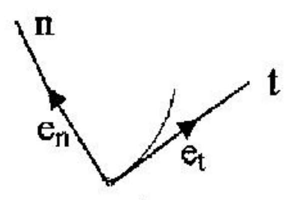
$\vec{e}_t =$ بردار واحد مماسي

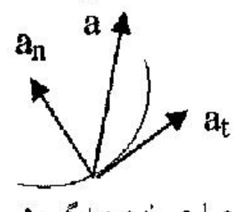
$\vec{e}_n =$ بردار واحد عمودي

$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad , \qquad \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \ , \ \vec{v} = v\vec{e}_t$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \ , \ \vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$

$\dfrac{d_{\vec{e}t}}{dt} = (\dfrac{d_{\vec{e}t}}{d\theta})(\dfrac{d\theta}{ds})(\dfrac{ds}{dt}) \quad \boxed{a_t = \dfrac{dv}{dt}}$

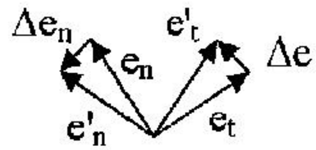




شعاع خمیدگی:

$$\rho = \frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

$$\frac{\Delta e_t}{\Delta\theta}=\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}=\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)}$$



$$\rightarrow\frac{de_t}{d\theta}=1\ \lim_{\Delta\theta\to0}\frac{\Delta e_t}{\Delta\theta}=\lim\frac{\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}{\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}=1$$

$\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}=\vec{e}_n$ چون بر t عمود است و مقدار 1 را نيز داراست.

$$\vec{a}=a_t\vec{e}_t+a_n\vec{e}_n=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v(\frac{d\vec{e}_t}{dt})=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v^2/\rho\,\vec{e}_n$$

با معادل گذاري : $a_n=\frac{v^2}{\rho}$

پس بـه دست آورديم : $\frac{d\vec{e}_t}{dt}=\frac{v}{\rho}\vec{e}_n$

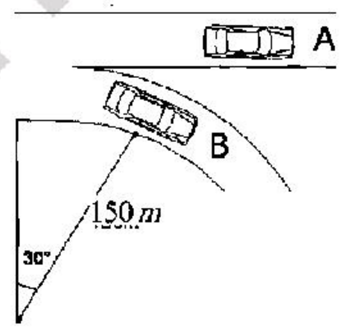
(در حركت مستقيم الخط يكنواخت)

$$\begin{cases}\vec{v}=v\vec{e}_t\\ \vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{e}t+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n\end{cases}\qquad a=0\Rightarrow\ \begin{matrix}\frac{dv}{dt}=0\\ \frac{v^2}{\rho}=0\end{matrix}\qquad \begin{cases}\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}=\vec{e}_n\\ \frac{d\vec{e}_n}{d\theta}=-\vec{e}_t\end{cases}$$

مثال:

$20.8m/s=v_A=\lfloor 75km/h\rightarrow\rfloor\qquad a_A=1.5m/s^2\qquad \vec{v}_{A/B}=?$

$11.1m/s=V_B=40km/h\qquad a_b=-8.9m/s^2\qquad \vec{a}_{A/B}=?$



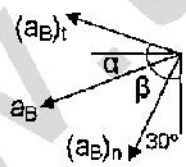
حل:

$V_A=20.8m/s$

$V_B=11.1m/s$

$\vec{V}_{A/B}=\vec{V}_A-\vec{V}_B$

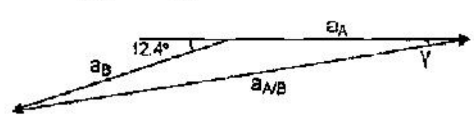
$\vec{V}_{A/B}=[20.8\rightarrow]-[11.1]$



$$\vec{V}_{A/B}=\sqrt{(20.8)^2+(11.1)^2-2(20.8)(11.1)Cos30}\Rightarrow V_{A/B}=12.5m/s\quad\frac{\sin\alpha}{11.1}=\frac{\sin30}{45}\rightarrow\alpha=26.4^\circ$$

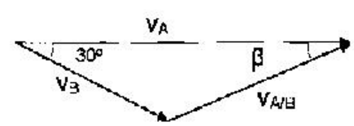
$(a_B)_t=0.9\,(a_B)_n=V^2/\rho=\frac{11.1^2}{150}=0.8m/s^2$

$\rightarrow a_B=1.2m/s^2\quad \beta=12.4^\circ$



$a_{A/B}=\sqrt{(1.5)^2+(1.2)^2-2(1.5)(1.2)\,Cos167.6}=2.70m/s^2$

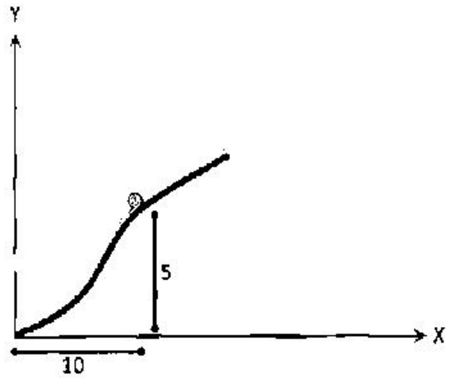
$\frac{\sin\gamma}{1.2}=\frac{\sin167.6}{2.7}\rightarrow\boxed{\gamma=5.6^\circ}$



$\boxed{\vec{a}_{A/B}=2.7}$

www.ttmar.ir

مثال : سرعت اسکی باز در مسیر سهموی در نقطهء A ، 6m/s و در حال افزایش با نسبت $2m/s^2$ است . مطلوبست : $\vec{a}_A$, $\vec{V}_A$



$$\begin{cases} y = (1/20)x^2 \\ dy/dx = (1/10)x \longrightarrow \\ d^2y/d^2x = (1/10) \end{cases}$$

at x=10 $\qquad dy/dx = 1$

$\vec{V}_A = 6\ (m/s)$ 45°

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

$\vec{a}_t = 2\ (m/s^2)$ 45°

$\rho = [1 + y'^2]^{3/2}/y'' = 28.28$

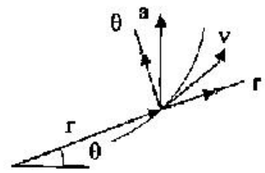
$\vec{a}_n = (v^2/\rho) = 1.27\ (m/s^2)$ 45°

$|a_A| = \sqrt{2^2 + 1.27^2}$

$\vec{a}_A = 2.37\ (m/s^2)$ 12.5°

(مختصات قطبی) مولفه‌های شعاعی و عرضی

$\theta =$ مختصات زاویه‌اي
$\vec{e}_r =$ بردار واحد شعاعي
$\vec{e}_\theta =$ بردار واحد عرضي



بردار موقعیت:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = d(r\vec{e}_r)/dt = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}r}{dt}$$

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}}$$

$$\frac{d\vec{e}r}{dt} = (\frac{d\vec{e}r}{d\theta})(\frac{d\theta}{dt}) = \dot{\theta}\,\dot{e}_\theta$$

$$\frac{rd\vec{e}r}{dt} = \underbrace{r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}_{v_\theta} \rightarrow v_\theta\vec{e}_\theta \qquad \boxed{v_\theta = r\dot{\theta}}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \;,\; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2 e_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$ ، شتاب زاویه اي : $\ddot{\theta} = \alpha \, rad/s^2$

مختصات استوانه‌ای

بردار موقعیت:

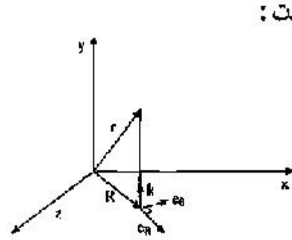
$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{z} = R\vec{e}_R + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_R) + \frac{d}{dt}(z\vec{k})$$

$$\rightarrow \vec{v} = v_R\vec{e}_R + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{k}$$

$$v_R = \dot{R} \;,\; v_\theta = R\dot{\theta} \;,\; v_z = \dot{z}$$



بردار شتاب:

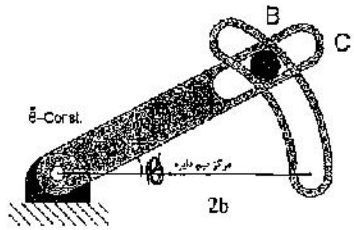
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_R\vec{e}_R + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{k}$$

$$\begin{cases} a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

www.ttmar.ir

مثال: سرعت و شتاب نقطه‌ی B را اگر بازوی OC با سرعت زاویه ای ثابت دوران کند بیابید.

حل:



$r = 2b\cos\theta$

$v_r = \dot{r} = \dfrac{d}{dt}(2b\cos\ \theta) = 2b(-\sin\ \theta)(\dot{\theta})$

$v_\theta = r\dot{\theta} = 2b\dot{\theta}\cos(\theta)$

$v = \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} = 2b\dot{\theta}$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = ?$

$\ddot{r} = 2b[(-\cos\ \theta)(\dot{\theta})^2 + (-\sin\ \theta)\ddot{\theta}] = -2b\dot{\theta}^2\cos\ \theta$

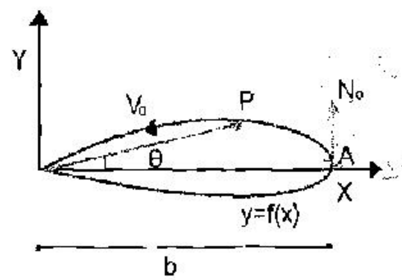
$a_r = -2b\dot{\theta}^2\cos\ \theta - 2b\cos\ \theta\ \dot{\theta}^2 = -4b\dot{\theta}^2\cos\ \theta$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -4b\dot{\theta}^2\sin\theta$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 4b\dot{\theta}^2$

مثال: در مسیرداده شده، سرعت ثابت و برابر v_0 است مطلوبست شتاب متحرک در موقعیت A؟ ($R = b\cos 3\theta$)

حل:



$A = \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \quad a_A \begin{cases} a_r = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$

$R = b\cos 3\theta$ زیرا در A، θ صفر است.

$\dot{R} = b(-\sin 3\theta)(3)(\dot{\theta}) = -3b\dot{\theta}\sin 3\theta$

$\ddot{R} = -3b\ddot{\theta}\sin 3\theta - 9b\dot{\theta}^2\cos 3\theta$

$v_A = \begin{cases} v_r = \dot{R} = 0 \\ v_\theta = R\dot{\theta} = v_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{v_0}{b} \end{cases}$

@A

$(R = b) \rightarrow b\cos 3\theta = b$

$\rightarrow \cos 3\theta = 1$

$\rightarrow \cos 3\theta = \cos 2k\pi$

$\rightarrow 3\theta = 2k\pi$

$\rightarrow \sin 3\theta = \sin 2k\pi = 0$

$A \rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{v_0}{b}, R = b, \ddot{R} = -9b\dot{\theta}^2 = -9\dfrac{v_0^2}{b}$

So $\rightarrow \ddot{R} = -9b\dot{\theta}^2 = -9\dfrac{v_0^2}{b}$

$a_A = a_r = -9\dfrac{v_0^2}{b} - b\left(\dfrac{v_0^2}{b^2}\right) \Rightarrow \boxed{a_A = -10\dfrac{v_0^2}{b}}$

www.tnar.ir

فصل دوم:
سینتیک نقطه مادي
(KINETICS)

حذف بخش ۴ و ۵

$\begin{cases} 12\text{-}12 \\ 12.13 \end{cases}$

مختصات فضایی

قانون کپلر

قوانین نیوتن

قانون اول : $\Sigma\vec{F}=0$

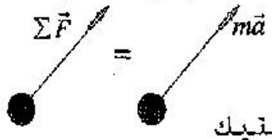
قانون دوم : $\sum\vec{F}=m\vec{a}$

$\vec{F}=m\vec{a}$, $\Sigma\vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})$, $\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$

$\sum\vec{F}-m\vec{a}=0$

نیروي مؤثر یا نیروي اینرسي (شبه نیرو) $= ma$

$$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \Sigma\vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$



دیاگرام آزاد نیروها　　　　دیاگرام سینتیك

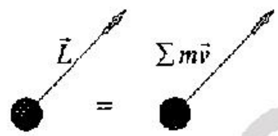
اصل دالامبر

قانون دوم نیوتن باید نسبت به یك دستگاه مختصات ثابت باشد.

ممنتوم خطي ،یا اندازه حرکت خطي (Linear Momentum)

$$\boxed{\sum m\vec{v}=\vec{L}}$$

$$\sum\vec{F}=\dot{\vec{L}}$$



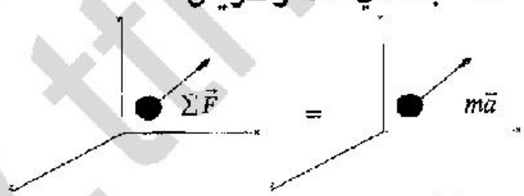
واحد ممنتوم :

$kg\ m/s=(kg.m/s^2)s=N.s \Leftarrow SI$

$lb.s \Leftarrow FPS$

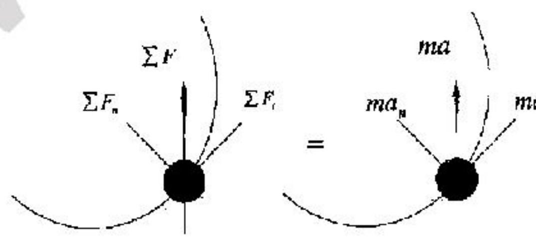
مختصات سه بعدي کارتزین

$$+\rightarrow \sum F_x=ma_x=m\ddot{x}$$
$$+\updownarrow \sum F_y=ma_y=m\ddot{y}$$
$$+\swarrow \sum F_z=ma_z=m\ddot{z}$$

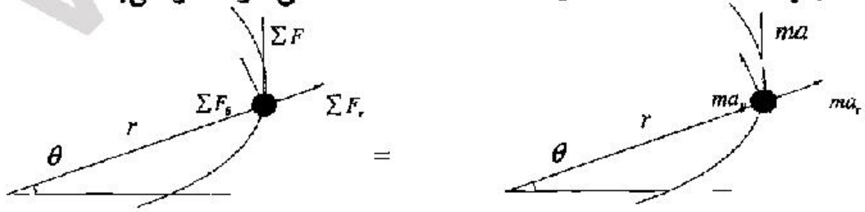


مختصات مؤلفه هاي مماسي و عمودي

$$+\uparrow \Sigma F_t=ma_t=m(\frac{dv}{dt})$$
$$+\leftarrow \Sigma F_n=ma_n=m\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$$



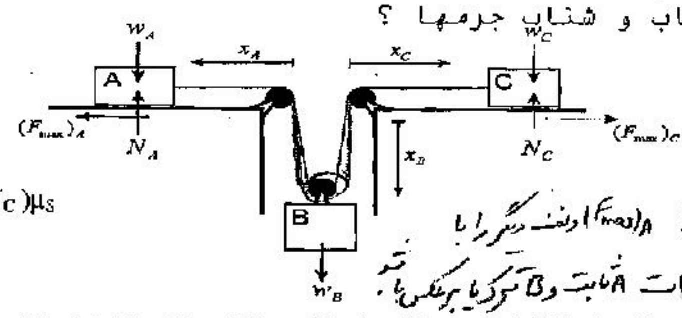
مختصات قطبي (مختصات مؤلفه های شعاعی و عرضی)



$$\boxed{\begin{array}{l} +\rightarrow\ r\ \Sigma F_r=ma_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) \\ +\uparrow\ \Sigma F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}) \end{array}}$$

www.ttmar.ir

مثال : سه وزنه به جرم های $m_A=5$ kg, $m_B=10$ kg, $m_C=10$ kg مطابق شکل زیر به هم متصل می باشد. اگر ضریب اصطکاک بین وزنه های A,C و سطح $\mu_S=0.24$, $\mu_K=0.20$ باشد؛ مطلوبست وضعیت سیستم؟ ومقدار کشش طناب و شتاب جرمها ؟



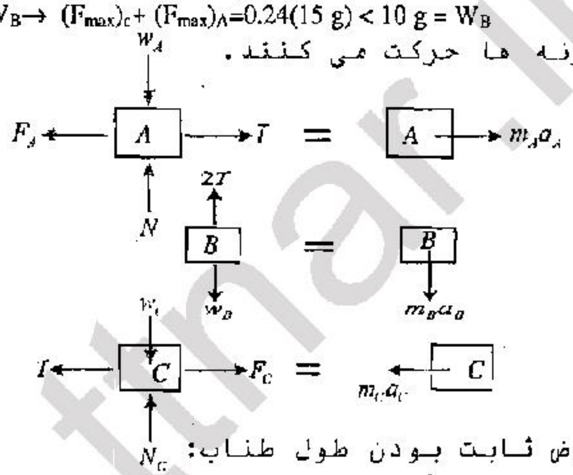
حل :

$F_{max}=\mu_S.N=(N_A+N_C)\mu_S$
$W_A=5\ g=N_A$
$W_C=10\ g=N_C$
$W_B=10\ g=N_B$

* بهتر بود نقطه پس را با $(F_{max})_A$ و نقطه دیگر را با $(F_{max})_B$ مقایسه کنیم زیرا امکانات A ثابت و B متحرک یا برعکس باشد.

$F_{max} < W_B \rightarrow (5\ g+10\ g)\ 0.24 < 10\ g = W_B \rightarrow (F_{max})_c + (F_{max})_A = 0.24(15\ g) < 10\ g = W_B$

پس وزنه ها حرکت می کنند.



$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow T-F_A=m_A.a_A$$
$$\Rightarrow T-0.2(5g)=5a_A$$

$$+\downarrow \Sigma\vec{F}=m_B\vec{a}_B \Rightarrow W_B-2T=m_B a_B$$
$$\Rightarrow 10g-2T=10a_B$$

$$+\leftarrow \Sigma\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow T-F_C=m_c a_c$$
$$\Rightarrow T-0.2(10g)=10a_c$$

جهت حرکت

با فرض ثابت بودن طول طناب:

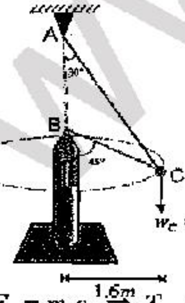
رابطه سینماتیکی

$$-x_A+2x_B-x_C=cte \Rightarrow -V_A+2V_B-V_C=0 \Rightarrow -a_A+2a_B-a_C=0 \Rightarrow a_B=1/2(a_A+a_C)$$

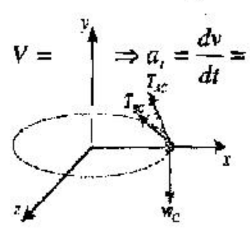
با استفاده از چهار معادله بالا داریم :

$a_A=4.76\ m/s^2 \rightarrow$, $a_B=3.08\ m/s^2 \downarrow$, $a_c=1.40\ m/s^2 \leftarrow$, $T=33.6$ (N)

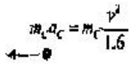
مثال : اگر جسم C به جرم ۵ kg با سرعت ثابت v در حال دوران حول میله قائم باشد ، مطلوبست حدود سرعت ثابت v که همواره دو کابل BC,AC در کشش باشند. ($g=9.81\ m/S^2$)



$V=$ ثابت $\Rightarrow a_t=\dfrac{dv}{dt}=0$ $\quad a_n=\dfrac{v^2}{r}=\dfrac{v^2}{1.6}$



=



درس با تعریف مثل نشود اگر منفی می شد
بی اثر بود.

$$\begin{cases}+\leftarrow \sum F_x=m_c a_c \Rightarrow T_{AC}Sin30°+T_{BC}Sin45°=\dfrac{5}{1.6}v^2\\ +\uparrow \sum F_y=0 \Rightarrow T_{AC}Cos30°+T_{BC}\cos 45°-5g=0\end{cases}$$

مراحل نسبت

حل :

$$\begin{cases}T_{AC}\sin 30°+T_{BC}\sin 45°=\dfrac{5}{1.6}v^2\\ T_{AC}\cos 30°+T_{BC}\cos 45°=5g\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T_{AC}=0 \Rightarrow \tan 45°=\dfrac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v=3.96\,m/s\\ T_{BC}=0 \Rightarrow \tan 30°=\dfrac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v=3.01\,m/s\end{cases}$$

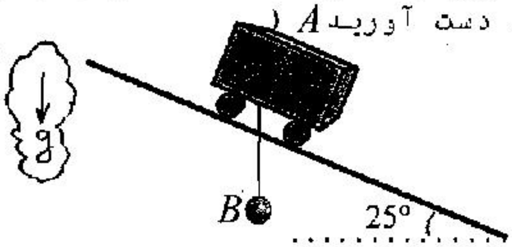
$\Rightarrow m/s\ 3.01 < v < 3.96\ m/s$

حال اگر v کمتر یا بیشتر از بازه بالا باشد ، باید طناب با کشش منفی را حذف کرده و معادلات را از اول بنویسیم و داریم:

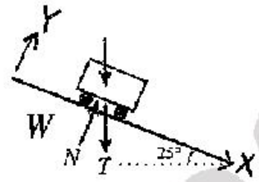
$v = 4 \Rightarrow T_{AB} < 0$

$v = 3 \Rightarrow T_{BC} < 0$

مثال : اگر سیستم فوق از حالت سکون شروع به حرکت کند؛ شتاب جسم A وکشش در کابل در لحظه شروع حرکت به دست آورید ($m_A = 20\ kg, m_B = 15\ kg$)



حل :



=

$+\searrow \sum F = m_A a_A$

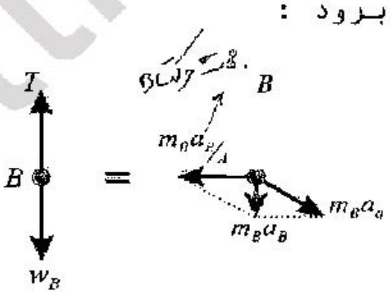
$\Rightarrow N Cos 90 + (W_A + T)\sin 25° = 20 a_A$

$(20g + T)\ \sin 25 = 20\ a_A$ ①

چون در لحظه اول که A به سمت راست حرکت می کند ، B می خواهد به سمت چپ برود :

$$\begin{cases} + \leftarrow \sum F = ma \Rightarrow 0 = m_B a_{B/A} - m_B a_A \cos 25° \quad ③ \\ + \downarrow \sum F = ma \Rightarrow W_B - T = m_B a_A \sin 25° \quad ② \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = 106.6 \quad N \\ a_A = 6.4 \quad m/s^2 \searrow \\ a_{B/A} = 5.8 \quad m/s^2 \leftarrow \end{cases}$$



ممنتوم زاویه ای (لنگر حرکتی) $\vec{H}_o$

ANGULAR MOMENTUM - MOMENT OF MOMENTUN

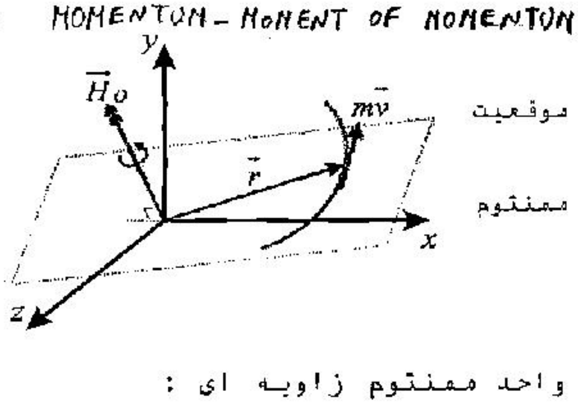
$\vec{L} = m\vec{v}$

$\vec{r} =$ موقعیت

$\vec{H}_\circ = \vec{r} \times m\vec{v} =$ ممنتوم

$H_\circ = r(mv)\sin\varphi$

$\vec{H}_\circ \perp (\vec{r}, m\vec{v})$



واحد ممنتوم زاویه ای :

$kg\ m/s^2 \quad \Leftarrow SI$

$lb.ft.s \quad \Leftarrow FPS$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \qquad m\vec{V}=m\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{H}_\circ=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}\times m \Rightarrow \vec{H}_\circ=m\left(yv_z-zv_y\right)\vec{i}+m\left(zv_x-xv_z\right)\vec{j}+m\left(xv_y-yv_x\right)\vec{k}$$

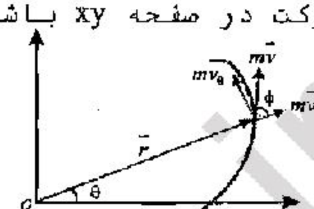
$$\vec{H}_\circ=H_x\vec{i}+\vec{H}_y\vec{j}+\vec{H}_z\vec{k} \qquad \dot{\vec{H}}_\circ=\frac{d(\vec{r}\times m\vec{v})}{dt}=0+\vec{r}\times\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\vec{r}\times(m\vec{a})-\sum\vec{M}_\circ$$

اگر حرکت در صفحه xy باشد؛ داریم : [illegible]

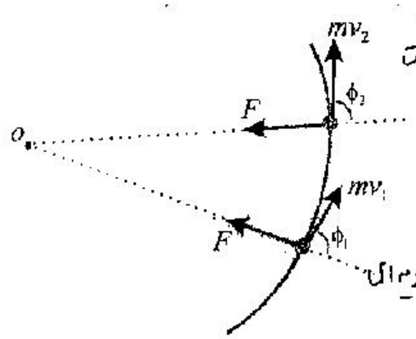
$$\vec{H}_\circ=H_{\circ z}\vec{k}$$

$$\vec{H}_\circ=\vec{r}\times m\vec{v} \Rightarrow H_\circ=rmv\sin\varphi$$

$$\left.\begin{matrix} H_\circ=rmv_\theta \\ v_\theta=r\dot{\theta} \end{matrix}\right\} \Rightarrow H_\circ=mr^2\dot{\theta}$$



حرکت تحت اثر نیروی مرکزی(Central Force)



اگر نیروئی روی جرم وارد گردد که همه جرم به سمت یک نقطه خاص باشد ،به آن حرکت نیروی مرکزی می نامند.

قانون گرانش : $F=G\dfrac{Mm}{R^2}$

حفظ ممنتوم زاویه ای یا بقای ممنتوم زاویه‌ای

$$r_1mv_1\sin\varphi_1=r_2mv_2\sin\varphi_2=\dots$$

$$r_1v_{\theta_1}=r_2v_{\theta_2}=\dots$$

حالات خاص

حفظ ممنتوم : اگر

$$\sum\vec{F}=\dot{\vec{L}} \Rightarrow \qquad \sum\vec{F}=0 \Rightarrow \dot{\vec{L}}=0 \Rightarrow \vec{L}_1=\vec{L}_2$$

بقای مومنتوم $\vec{L}$ ثابت

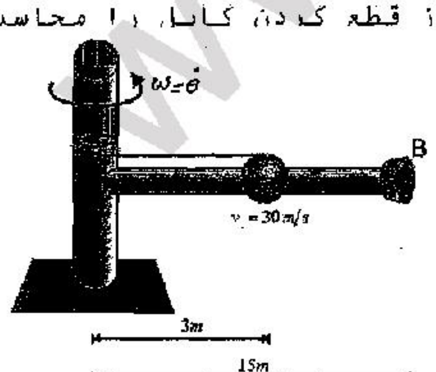
حفظ ممنتوم زاویه ای : اگر

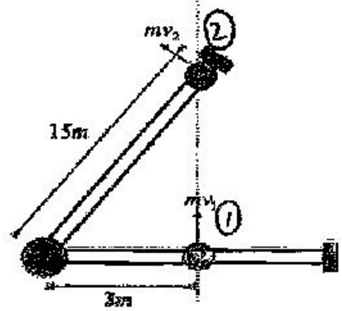
$$\sum\vec{M}_\circ=\dot{\vec{H}}_\circ \Rightarrow \qquad \sum\vec{M}_\circ=0 \Rightarrow \dot{\vec{H}}_\circ=0 \Rightarrow \left(\vec{H}_\circ\right)_1=\left(\vec{H}_\circ\right)_2$$

بقای مومنتوم زاویه ای: $\vec{H}_o$ ثابت است

$$\rightarrow r_1\times mV_1=r_2\times mV_2=\dots$$

مثال : اگر جرم گلوله 4 kg و از جرم میله صرف نظر شود، سرعت گلوله به هنگام رسیدن به نقطه B پس از قطع کردن کابل را محاسبه کنید.





حل :

$$\sum\vec{M}_\circ=\dot{\vec{H}}_\circ=0 \Rightarrow \left(\vec{H}_\circ\right)_1=\left(\vec{H}_\circ\right)_2 \Rightarrow 3\times(mv_1)=15\times(mv_2) \Rightarrow 3\times30=15\times v_2 \Rightarrow v_2=6 \quad m/s$$

هرگاه نیروی وارد بر جسم از نقطه ای ثابت بگذرد (همیشه از آن نقطه بگذرد) در آن صورت از $\vec{H}_o=\sum\vec{M}_o=0$ استفاده می کنیم.

www.ttnar.ir

فصل سوم:
سينتيك نقطه مادي
(روشهاي انرژي و ممنتوم)

www.tinar.ir

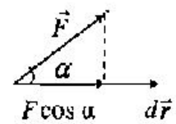
كارِ نيرو

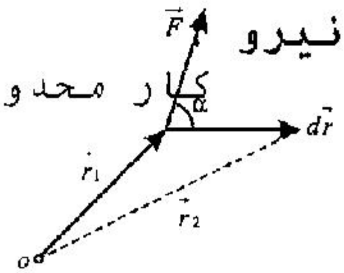
كار محدود انجام شده : $dU = \vec{F}.d\vec{r} = |\vec{F}|\cos\alpha \, dr$

$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$



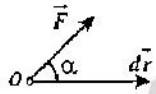


واحدكار : (SI): (ژول) N.m (J) (FPS): lb. ft

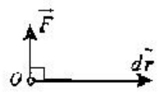
واحد لنگر: (SI): N.m (FPS): ft-lb

$1)\, dU = F.dr > 0 \qquad \alpha = 0$

$2)\, dU = F\, dr \cos\alpha > 0 \qquad 0 < \alpha < 90$

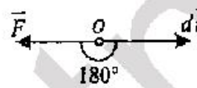


$3)\, dU = 0 \qquad \alpha = 90$



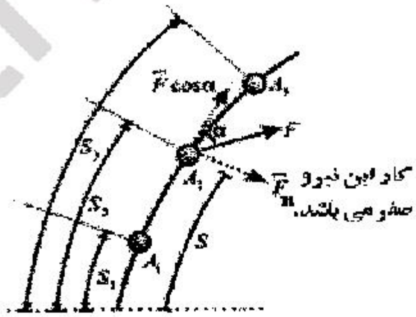
$4)\, dU = F\, dr \cos\alpha < 0 \qquad 90 < \alpha < 180$

$5)\, dU = -F.dr < 0 \qquad \alpha = 180$



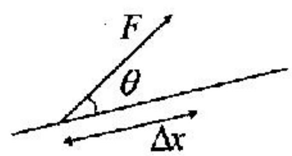
$$U_{1\to3} = \int_{A_1}^{A_3} (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$U_{1\to3} = \int_{A_1}^{A_3} dU = \int_{A_1}^{A_3} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{S_1}^{S_3} F\cos\alpha\, ds = \int_{S_1}^{S_3} \vec{F}_t . ds$$



كار يک نيروي ثابت :

$$U_{1\to2} = \int dU = F(\Delta x)\cos\theta$$



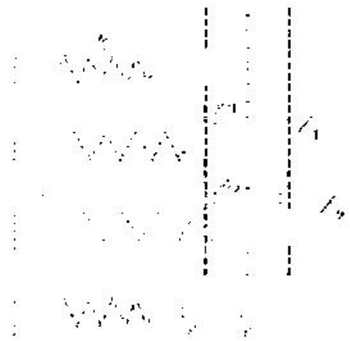
کار نیروي وزني :

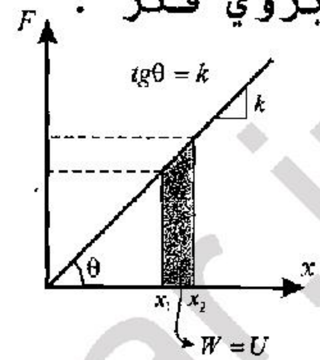
$$F_x = 0 \quad , \quad F_z = 0 \quad , \quad F_y = cte$$

$$U_{1\to 2} = \int_{y_1}^{y_2} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) \quad \Rightarrow$$

$$U_{1\to 2} = -W\,\Delta y = -W\,(y_2 - y_1) = \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy$$

کار نیروي فنر :





$$F = kx \quad , \quad dU = -F\,dx$$

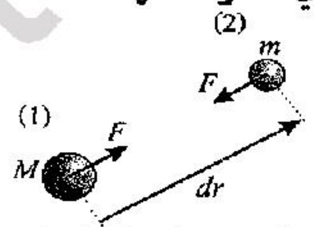
$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} dU = \int_{x_1}^{x_2} -(kx)\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow (U_{1\to 2})_s = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2)\Delta x$$

در حالت بازگشت به حالت اولیه کار نیروي فنر مثبت است.

کار نیروي گرانش :

$$F = G\frac{mM}{r^2}, G = 66.7\times 10^{-12}\left(\frac{m^3}{kg.s^2}\right)$$

$$U_{1\to 2} = \int dU = \int_{r_1}^{r_2} F\,dr \quad \Rightarrow \quad U_{1\to 2} = G\frac{mM}{r_2} - G\frac{mM}{r_1}$$



انرژي جنبشي واصل کار و انرژي :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

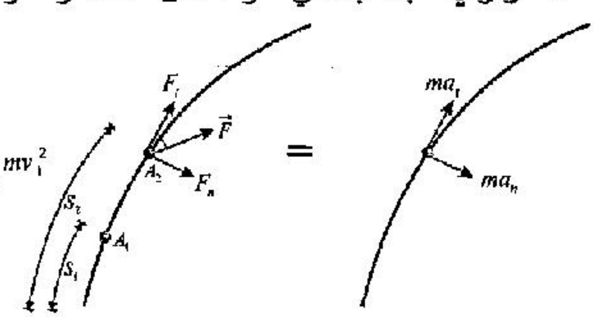
$$F_t = ma_t \Rightarrow F_t = m\frac{dv}{dt} = m(\frac{dv}{ds})\times(\frac{ds}{dt})$$

$$F_t\,ds = mv\,dv \Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad , T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$K = T = \frac{1}{2}mv^2$ انرژي



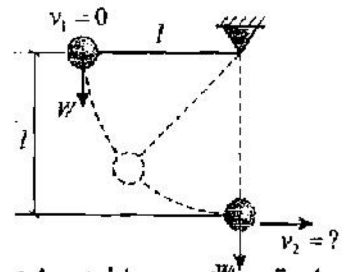
جنبشي

مثال :در شکل، اگر گلوله از وضعیت ۱ رهاشده باشد، سرعت آنرا در وضعیت ۲ بیابید؟

www.ttnar.ir

(توجه : كار نيروى كششى صفر است زيرا هميشه عمود بر مسير حركت است.)

حل:



$$\left.\begin{array}{l} T_1+U_{1\to2}=T_2 \\ T_1=0, T_2=\frac{1}{2}mv_2^{\,2} \\ (U_{1\to2})_g=mgl \end{array}\right\} \Rightarrow 0+mgl=\frac{1}{2}mv_2^{\,2} \Rightarrow v_2=\sqrt{2gl}$$

قدرت يا توان- راندمان يا بازده :

$$P=\frac{dU}{dt}=\frac{\sum(\vec{F}.d\vec{r})}{dt}=\sum\vec{F}.\vec{v}$$

قدرت $P=\sum(\vec{F}.\vec{v})$

واحد: (SI) : Watt=N.m/s =J/s , (FPS): lb.ft/s , 550 lb.ft/s= 1HP

$P=\frac{dT}{dt}=F.v$ قدرت $T=\frac{1}{2}mv^2$, $\frac{dT}{dt}=mv\frac{dv}{dt}=(ma)v=Fv=p\Rightarrow$

$P=\frac{dT}{dt}$, $U_{1\to2}=T_2-T_1$, $\Delta t=t_2-t_1$

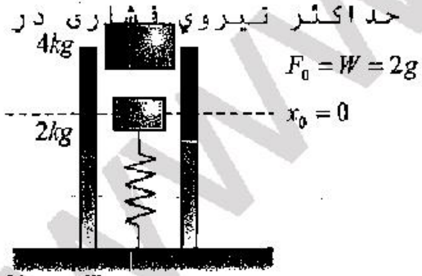
توان متوسط $=\overline{P}=\frac{\Delta W}{\Delta t}$, $\overline{P}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}Pdt=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\frac{dT}{dt}.dt=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}dT=\frac{T_2-T_1}{t_2-t_1}$

$\overline{P}=\frac{U_{1\to2}}{\Delta t}$, $\eta_m=\frac{P_{out}}{P_{in}}<1$ راندمان مكانيكي

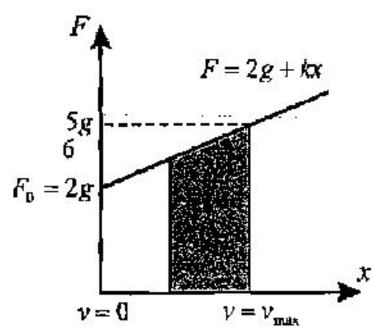
η_e=راندمان الكتريكي, η_{th}=راندمان حرارتي , $\eta=\eta_e.\eta_m.\eta_{th}<1$

مثال: اگر بلوك 4 kg را روي بلوك 2 kg قرار دهيم، تناوب آغاز مي گردد؛ مطلوبست: (K=400 N/m)

الف) حداكثر سرعت بلوك 4 kg ؟ ب) حداكثر نيروي فشاري در فنر ؟



حل:



الف)

$T_1+U_{1\to2}=T_2$

$T_1=0$, $T_2=\frac{1}{2}mv^2$

$$\left.\begin{array}{l} U_{1\to2}=(U_{1\to2})_g+(U_{1\to2})_e \\ (U_{1\to2})_e=-\frac{1}{2}(F_1+F_2)x=-2gx-200x^2 \\ (U_{1\to2})_g=6gx \end{array}\right\} \Rightarrow U_{1\to2}=4gx-200x^2=\frac{1}{2}mv^2$$

حداكثر سرعت :

$$\frac{d(U_{1\to2})}{dx}=0 \Rightarrow x=0.098(m)\ ,\quad v_{max}=0.8(m/s)$$

www.ttmar.ir

حداکثر نیروی فشاری زمانی است که، سرعت صفر می شود (اما جایی که تعادل استاتیکی داریم : $a=0$ (ب

$T_1+U_{1\to 2}=T_2$

$\frac{1}{2}mv_{max}^{\ 2}=mgh_{max} \Rightarrow h_{max}=\frac{1}{2g}v_{max}^{\ 2} \Rightarrow T_{max}=k.h_{max}$

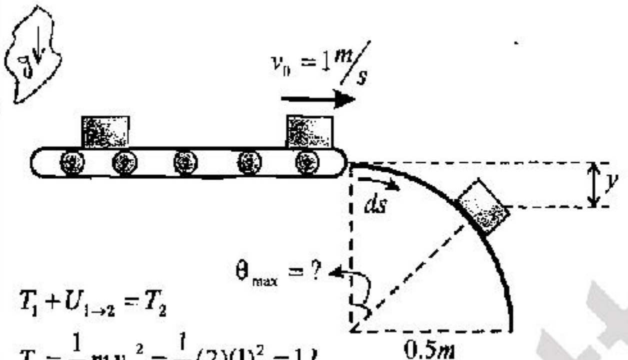
$v_2=0$

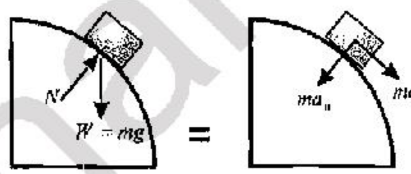
$4(9.81)x-200x^2=0$

$x=0.196\,(m)$

$F_{max}=2(9.81)+400(0.196)=98.1\,(N)$

مثال: بسته های 2kg توسط یک تسمه نقاله به روی یک رمپ دایره ای شکل با سرعت 1m/s می افتند. مطلوبست، حداکثر زاویه ای که این بسته ها از سطح جدا می شوند؟





$T_1+U_{1\to 2}=T_2$

$T_1=\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}=\frac{1}{2}(2)(1)^2=1J$

$U_{1\to 2}=W.y=mgr(1-\cos\theta_{max})=g(1-Cos\theta_{max}\quad)\quad,\quad T_2=v^2$

$\Rightarrow\ 1+mgr(1-\cos\theta_{max})=v^2 \Rightarrow 1+(1-Cos\theta_{max})g=v^2 \quad (I)$

: $N=0 \Rightarrow N-W\cos\theta_{max}=-ma_n$ هنگام جدا شدن $\Rightarrow -mgCos\theta_{max}=-m\frac{v^2}{0.5}\ (II)$

$(I,II)\Rightarrow \cos\theta_{max}=\frac{2v^2}{g} \Rightarrow \theta_{max}=42.7^\circ$

$N=0 \leftarrow$ شرط جدا شدن

راه دوم $+\searrow \sum F_t=+\searrow ma_t$

$w\sin\theta=ma_t=m\frac{dv}{dt} \longrightarrow mg\ \sin\theta=m\frac{dv}{dt} \longrightarrow g\sin\theta=\frac{dv}{dt}=a\,ds=a_t(0.5d\theta)$ $r\,d\theta$

$\longrightarrow v\,dv=g\sin\theta(0.5)d\theta \longrightarrow \int_1^v v\,dv=\int_0^{\theta_{max}}0.5g\sin\theta\,d\theta$

$\longrightarrow \frac{1}{2}v^2\Big|_1^v=-0.5g\,Cos\theta\Big|_0^{\theta_{max}} \longrightarrow \frac{1}{2}(v^2-1)=\frac{-1}{2}g(Cos\theta_{max}-1)$

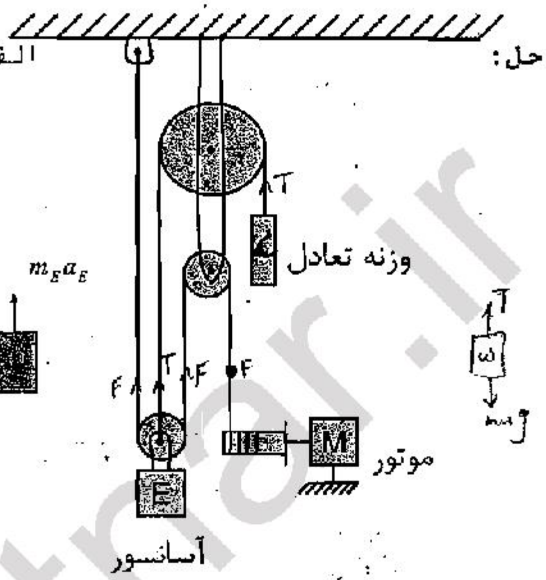
$\longrightarrow v^2-1=-g(Cos\theta_{max}-1) \longrightarrow v^2=1+(1-Cos\theta_{max})\ (I)$

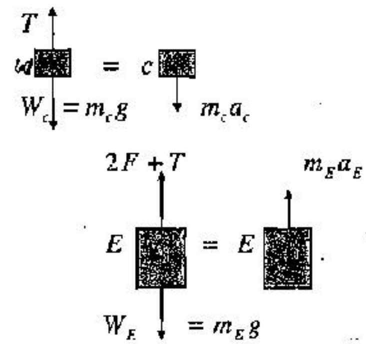
مثال : در شکل زیر مطلوب است توان موتورسیستم بالابر اگر
الف : اگر آسانسور با سرعت ثابت15 ft/s به سمت بالا در حرکت باشد .
ب : اگر آسانسور با سرعت 15 ft/s و شتاب$3\ ft/s^2$ به سمت بالا در حرکت باشد .

$(W_c = 2200lb, W_E = 5000lb, \frac{ft}{s^2}\ g=32.2)$

حل: الف:

$P = \sum \vec{F}.\vec{v} \Rightarrow P = F.v$





$m_c g - T = m_c a_c$

① $2200 - T = \frac{2200}{g} a_c$

$2F + T - m_E g = m_E a_E$

② $2F + T - 5000 = \frac{5000}{g} a_E$

$v_E = cte,\ a_E = 0 \Rightarrow a_c = 0$

$\begin{cases} 2200 - T = 0 \Rightarrow T = 2200\ (lb) \\ 2F + T - 5000 = 0 \Rightarrow F = 1400\ (lb) \end{cases}$

طول کابل متصل به وزنه تعادل ثابت است :

$\uparrow a_E = a_c \downarrow$

طول کابل تا نقطه M نیز ثابت است :

$2X_E + X_m = cte. \Rightarrow 2v_E \uparrow = v_m \downarrow \Rightarrow v_m = 30\frac{ft}{s}$

$P_m = (1400)(30) = 42000(lb\cdot\frac{ft}{s}) \Rightarrow P_m = \frac{42000}{550} = 76.4(HP)$ Horse Power

ب :

$v_E = 15(\frac{ft}{s})\uparrow, a_E = 3(\frac{ft}{s^2})\uparrow \Rightarrow a_c = 3(\frac{ft}{s^2})\downarrow$

با توجه به قسمت الف داریم :

$F = 1735.4(lb)\quad , v_m = 30(\frac{ft}{s})\downarrow,\ P_m = (1735.4)(30) = 52062(lb\frac{ft}{s}) \Rightarrow P_m = \frac{1735.4\times 30}{550} = 94.7(HP)$

اصل حفظ انرژی(مکانیکی) :

شرط استفاده از اصل حفظ انرژی آن است که نیروهای ما پایستار و یا محافظه کار باشند. (Conservative Force)

نیروهای ما به دو صورت قابل تقسیم بندی هستند : **نیروهای پایستار و غیر پایستاریا نا پایستار .**

$U_{friction} = \int \vec{F}_k . d\vec{r}$

۱:کار نیروهای غیرپایستار به مسیرحرکت بستگی دارد. (غیر پایستار)

$U_{ساز} = \int \vec{W}.d\vec{r} = W\Delta y$

۲:کار نیروهای پایستار به مسیرحرکت بستگی ندارد و فقط متناسب با جابجایی است. (پایستار)

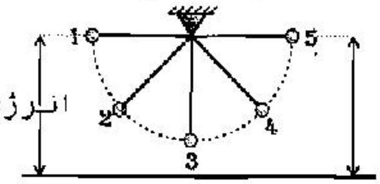
اصطکاک

وزن

www.ttrar.ir

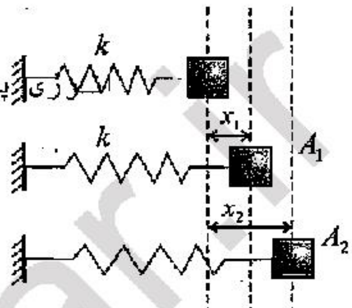
انرژی پتانسیل :

انرژی پتانسیل نیروی وزنی



$$U_{1\to 2} = -\Delta y W = Wy_1 - Wy_2$$
$$V_g = Wy$$

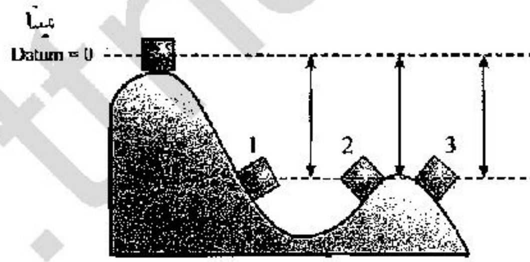
انرژی پتانسیل نیروی فنر



$$U_{1\to 2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$
$$V_e = \frac{1}{2}kx^2$$
$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2$$
$$V_1 = V_{g_1} + V_{e_1} \;,\; V_2 = V_{g_2} + V_{e_2}$$

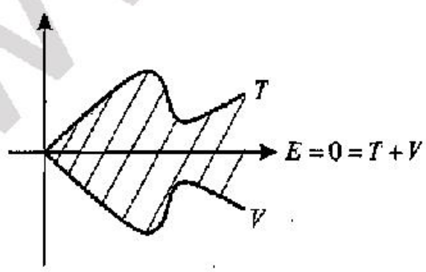
اصل حفظ انرژی مکانیکی :

$$\left.\begin{matrix} T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \\ T_1 + V_1 - V_2 = T \end{matrix}\right\} \Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$E_1 = E_2 = E_3 = \dots = E_n \quad ; \quad E = T + V$$



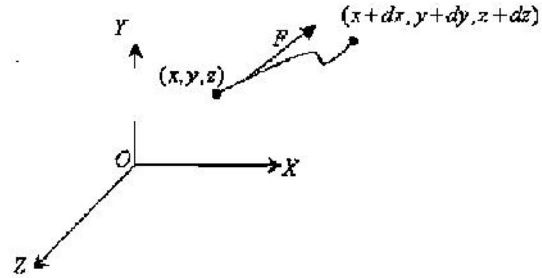
$$V = cte. \Rightarrow V_1 = V_2 = V_3$$
$$E_1 = E_2 = E_3 = \dots$$

اگر انرژي مكانيكي ثابت باشد، آنگاه E روي محور y = 0 در $T+V=0$ نظر گيريم و T قرينه ي U مي شود، زيرا:



تابع پتانسیل :

$$V = V_g + V_e$$
$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2 = -\Delta V \quad , \quad U = V(x,y,z)$$



$$dU = V(x,y,z) - V(x+dx, y+dy, z+dz)$$
$$dU = -dV(x,y,z) = -dV \quad \Rightarrow \quad dU = -dV$$
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$dU = \vec{F}.d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

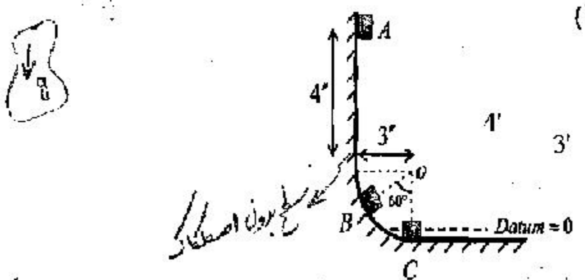
$$dU = -dV = -[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{\partial V}{\partial x} = -F_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -F_y \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -F_z\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F} = -grad\vec{V}\ ,\ \vec{F} = -\nabla\vec{V}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$$

توجه: هرگاه $\vec{F} = -\nabla\vec{V}$ شود، می توانیم از اصل حفظ انرژی مکانیکی استفاده کنیم .

برای نیروهای وزنی:
$$V = Wy\ ,\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = W\ \ ,\vec{F} = -\vec{W}$$

مثال: اگر جسم از نقطه A رها شود، مطلوب است نیروی وارده از سطح به جسم در نقاط B و C ؟ (W=1.25 lb)



حل:

$$\begin{cases} N_B - W\cos 60 = ma_n = m\frac{v_B^2}{\rho} \Rightarrow N_B - 1.25(0.5) = \frac{1.25}{32.2}(\frac{v_B^2}{3}) \\ N_C - W = ma_n = m\frac{v_C^2}{\rho} \Rightarrow N_C - 1.25 = \frac{1.25}{32.2}(\frac{v_C^2}{3}) \end{cases}$$

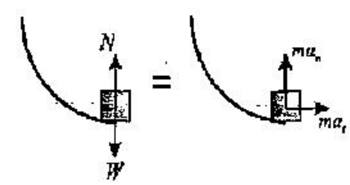
$$E_A = E_B = E_C \Rightarrow T_A + V_A = T_B + V_B = T$$

$$E_A = T_A + V_A = 0 + 7W = 7(1.25)\ ,\ E_B = 7$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1.25}{32.2})v_B^2 + 3(.5)(1.25) = \frac{1}{2}(\frac{1.25}{32.2})v_C^2 = 7(1.25)$$

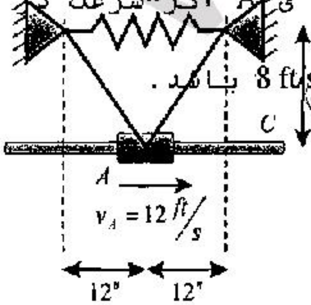
$$v_B^2 = 11g \Rightarrow N_B = 5.21(lb)$$
$$v_C^2 = 14g \Rightarrow N_C = 7.08(lb)$$

C :



مثال: مطلوبست نیروی کششی فنر در موقعیت اولیه ی A اگر سرعت در نقطه ی A برابر 12 ft/s و سرعت طوقه در نقطه ی C برابر 8 ft/s باشد.

$\frac{ft}{s^2}, g = 32.2\times 12\frac{in}{s^2}$ (g=32.2 و W=2 lb , K=3 lb/in)

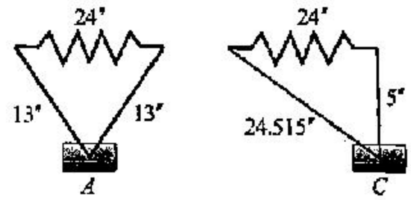


حل :

www.ttmar.ir

$$\begin{cases} L_1 = 26+24 = 50 \Rightarrow x_1 = 50 - L \\ L_2 = 53.5'' \Rightarrow x_2 = 53.5 - L \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = 3.5'' \quad (1)$$

طول اولیه



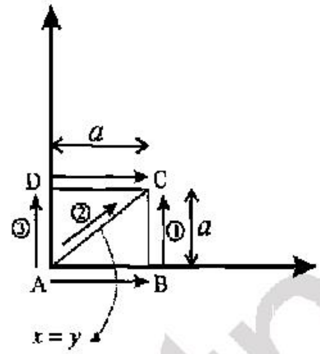
$$E_A = E_C \Rightarrow T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{g}\right)(144\times 12) + 1.5x_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{g}\right)(64\times 12) + 1.5x_2^2 \quad (2)$$

$$x_1 = 1.08(in) \quad , \quad F_1 = 3.24(lb)$$

$\frac{1.08}{12} = 0.09'$

مثال : اگر $\vec{F} = x^2 y\vec{i} + xy^2\vec{j}$ روی ذره P درصفحه x-y اثر کند، ثابت کنید که نیروی $\vec{F}$ نیروی غیر محافظه کار است و همچنین کار نیروی F روی ذره P را که از نقطه A به نقطه ی C حرکت می کند را حساب کنید.



حل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\vec{F} = -grad\vec{V}$$

$$\vec{F}_X = -\frac{\partial V}{\partial x} = x^2 y \qquad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = x^2 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = y^2 \end{cases}, \ x^2 \neq y^2$$

$$\vec{F}_Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = y^2 x$$

پس نیروی F نیروی غیر محافظه کار است.

$$\oint F.dr = 0 \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \ldots$$

$$U_{A\to C} = \int_A^C \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^C F_x\,dx + F_y\,dy = \int_0^a F_x\,dx + \int_0^a F_y\,dy = \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{2}$$

روش دیگر :

$$U_{A\to C} = U_{A\to B} + U_{B\to C}$$

$$U_{A\to B} = \int_0^a F_x\,dx + \int_0^0 F_y\,dy = 0$$

$$U_{B\to C} = \int_0^0 F_x\,dx + \int_0^a F_y\,dy = a\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{a^4}{3}$$

با فرض اینکه پایستار باشد مسیر حرکت تفاوتی ندارد :

$$U_{A\to C} = U_{A\to B} + U_{B\to C} \Rightarrow \frac{a^4}{2} = 0 + \frac{a^4}{3} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

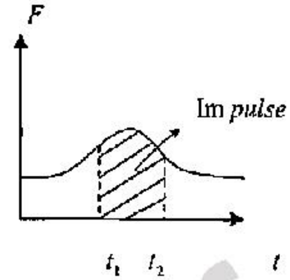
پس نیروی ما ناپایستار است.

www.ttnar.ir

اصل نيروي محرک و ممنتوم و حرکت خطي: (Impulse & Momentum)

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F}dt=md\vec{v} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=m\int_{v_1}^{v_2}d\vec{v}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

$$m\vec{v}_2=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt+m\vec{v}_1$$



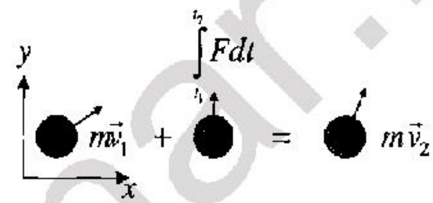
$$\vec{I}_{imp_{1\to2}}=(\int_{t_1}^{t_2}F_x dt)\vec{i}+(\int_{t_1}^{t_2}F_y dt)\vec{j}+(\int_{t_1}^{t_2}F_z dt)\vec{k}$$

اصل ايمپالس و ممنتوم

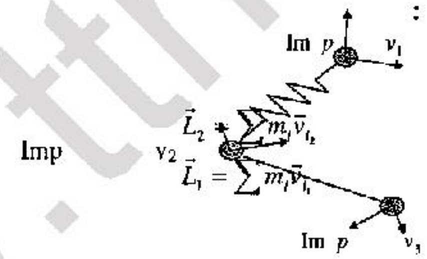
$$\vec{L}_2=\vec{I}_{imp_{1\to2}}+\vec{L}_1$$

واحد ايمپالس: N.s : (SI) lb.s : (FPS)

$$\begin{cases} mv_{2_x}=\int_{t_1}^{t_2}F_x dt+mv_{1x} & \xrightarrow{+} \\ mv_{2_y}=\int_{t_1}^{t_2}F_y dt+mv_{1y} & \overset{+}{\uparrow} \end{cases}$$



چندين جرم:



$$\text{Im } p_{1\to2}=\sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt$$

نیروی کل ایمپالس

$$\Rightarrow \sum m_i\vec{v}_{i1}+\sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt=\sum m_i\vec{v}_{i2}$$

حفظ ممنتوم سيستم:

$$\sum\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_i dt=0 \Rightarrow \sum m_i\vec{v}_{i_1}=\sum m_i\vec{v}_{i_2}$$

مومنتوم در موقعیت (1)

مومنتوم در موقعیت (2)

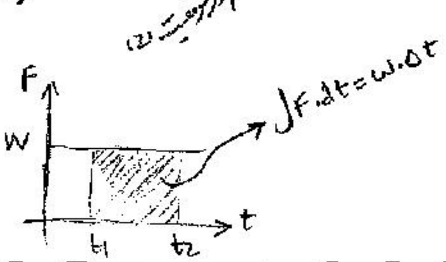
$$\vec{L}_1+\vec{I}mp_{1\to2}=\vec{L}_2$$

$$Imp_{1\to2}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$$

واحد ایمپالس شبیه واحد مومنتوم

(N.S)

(lb.S)



روش سوم در حل مسائل دینامیکی

روش اول: قانون دوم نیوتن

روش دوم: کار و انرژی

www.ttnar.ir

انواع مسائل برخورد

۱- مسائل ضربه ای ($\Delta t \approx 0.01s$)

درمسائل ضربه ای از اثر وزن اصطکاک و نیروی فنر صرفه نظر می گردد:

$$t = dt \cong 0 \Rightarrow \underbrace{\int w dt = 0}_{\text{ایمپالس وزن}} \quad , \quad \underbrace{\int F_s dt \approx 0}_{\text{ایمپالس فنر}} \quad , \quad \underbrace{\int F_\mu dt \approx 0}_{\text{اصطکاک}}$$

۲- مسائل غیر ضربه ای

در مسائل غیر ضربه ای :

$$\Delta t > 0 \Rightarrow \int w dt \neq 0 \quad , \quad \int F_s dt \neq 0 \quad , \quad \int F_\mu dt \neq 0$$

مثال: اگر از اصطکاک صرفنظر شده باشد، مطلوب است مدت زمانی که Aبه سرعت :

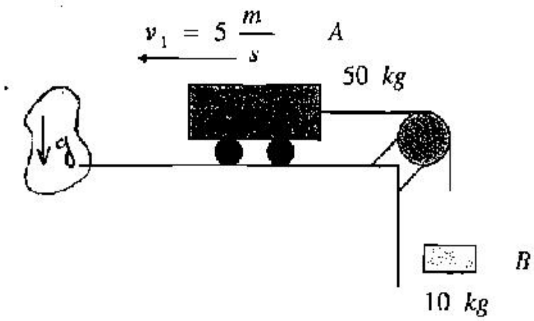
الف: صفر می رسد .

؟

ب: 5m/sبه طرف راست می رسد ؟

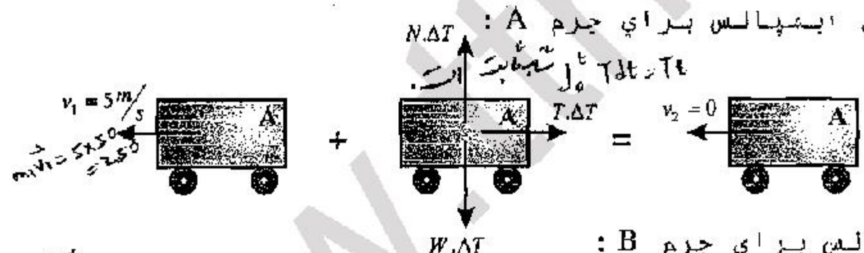
(از اصطکاک صرفنظر شده است.)

(زمانی که سرعت مستقیماً 5m/s ــ می‌شود؟)

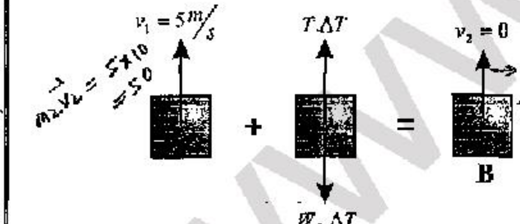


حل:

الف : اصل ایمپالس برای جرم A :



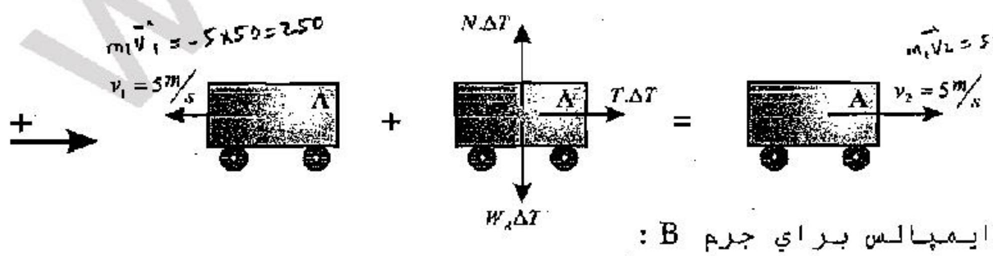
اصل ایمپالس برای جرم B :



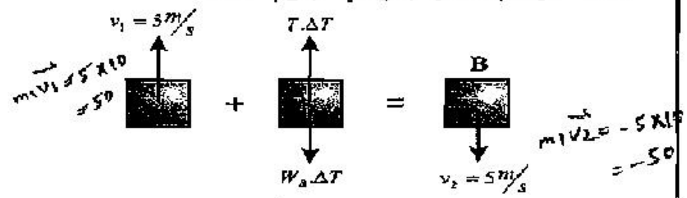
$$\left.\begin{array}{l} 1. \quad -250 + T\Delta t = 0 \\ 2. \quad 50 + (T - 98.1)\Delta t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{30}{g}$$

$\Delta t = 3.06\ (s)$

ب: اصل ایمپالس برای جرم A :



اصل ایمپالس برای جرم B :



www.tmar.ir

براي جرم B نيز داريم : $(v'_B)_t = (v_B)_t$

اصل ايمپالس و ممنتوم براي كل سيستم :

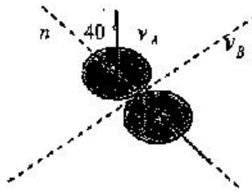
$$\xrightarrow{+n} m_A(v'_A)_n \pm m_B(v'_B)_n = m_A(v_A)_n \pm m_B(v_B)_n$$

رابطه سرعت هاي نسبي :

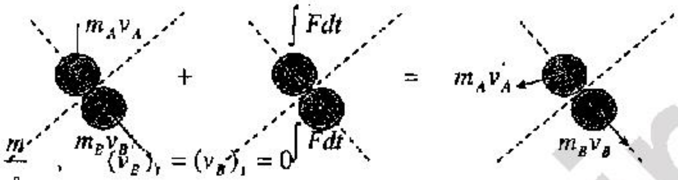
$$e[(v_A)_n-(v_B)_n]=(v'_B)_n-(v'_A)_n$$

مثال : سرعت هاي نهايي دو جسم را بعد از برخورد بيابيد ؟(e=0.75)

$(m_A = 2.5kg \ , \ m_B = 1.5kg \ , \ v_A = 8\frac{m}{s} \ , \ v_B = 6\frac{m}{s})$



حل:



$(v'_A)_t = (v_A)_t = 8\sin(40°) = 5.15\ \frac{m}{s} \quad , \quad (v'_B)_t = (v_B)_t = 0$

$+n \nwarrow : m_A(v'_A)_n - m_B(v'_B)_n = -m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n \Rightarrow 2.5(v'_A)_n - 1.5(v'_B)_n = -6.325$

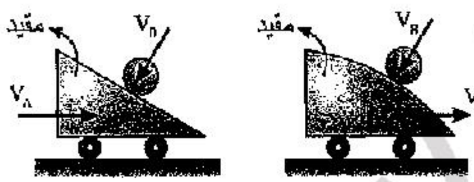
$e = \frac{(v'_B)_n + (v'_A)_n}{-(v_A)_n + (v_B)_n} \ \Rightarrow \ (v'_B)_n + (v'_A)_n = 9.1$

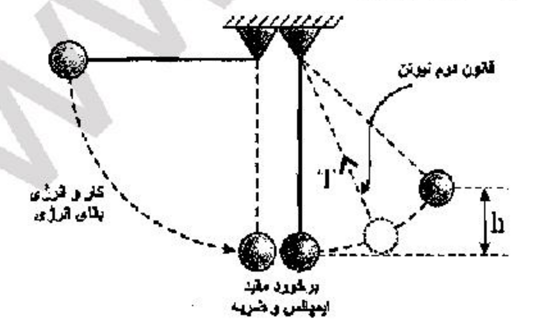
$(v'_A)_n = 1.83\,(\frac{m}{s})\nwarrow \ , v'^2_A = (v'_A)_n^2 + (v'_A)_t^2 \Rightarrow v'_A = 5.46\ (\frac{m}{s}) \ , \alpha = \tan^{-1}(\frac{(v'_A)_t}{(v'_A)_n}) = 20.4°$

$v'_B = (v'_B)_n = 7.27\ (\frac{m}{s})$ 40°

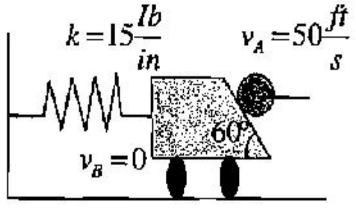
برخورد مقيد

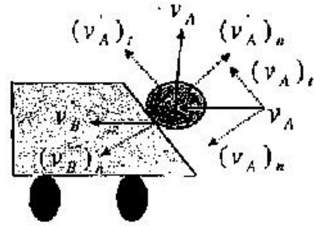
راستاي حركت پس از برخورد مشخص مي باشد.
همان روابط قبل صحيح است اما به جاي اصل ايمپالس و ممنتوم در جهت n ، در جهت عمود به ايمپاس با مقدار نامعلوم (مثلا عكس العمل زمين) رابطه را مي نويسيم.





مثال : مطلوبست حداكثر تغيير طول فنر وقتي جسم A به B برخورد كند ؟ (e=0.75, k=15 lb/in)





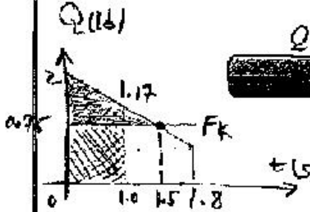
www.ttnar.ir

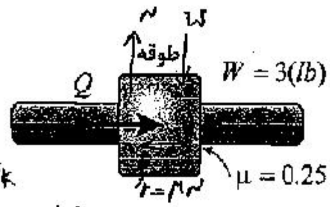
$$\left.\begin{array}{l}1.\quad -250 + T\Delta t = 250\\ 2.\quad 50 + (T-98.1)\Delta t = -50\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{60}{g}$$

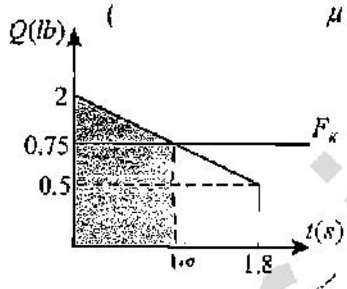
$\Delta t = 6.12s$

مثال : مطلوبست سرعت طوقه اگر از حال سکون رها شده باشد در: الف) t=1s ب) t=2 s ج) حداکثر سرعت طوقه

($\mu = 0.25$ W=3 lb)







حل:

$$\vec{L}_2 = \sum \vec{I}_{mp_{1\to2}} + \vec{L}_1 \quad , \quad \vec{L}_1 = mv_1 = 0 \quad , \sum I_{mp} = \int_0^t Q dt - \int_0^t F_k dt$$

$$(Imp_{1\to2})_Q - (Imp_{1\to2})_{F_k}$$

شروع حرکت از حال سکون

الف: t=1

$$0 + I_{mp_{1\to2}} = \frac{3}{g}v \quad , \quad \int_0^1 Qdt = \frac{1}{2}(2+1.167) = 1.58\,(lb*s) \quad , \quad \int_0^1 F_k dt = 0.75(1) = 0.75\,(lb*s)$$

$$\Rightarrow v = 8.91\,(ft/s)$$

ب: t=2

$$0 + I_{mp_{1\to2}} = \frac{3}{g}v \quad , \quad \int_0^2 Qdt = \frac{1}{2}(2+0.5)(1.8) = 2.25\,(lb*s) \quad , \quad \int_0^2 F_k dt = 0.75(2) = 1.5\,(lb*s)$$

$$\Rightarrow v = 8.05\,(ft/s)$$

برای وقتی که v=0 است، t=?

$$2.25 - 0.75t = 0 \quad , \quad t = 3(s)$$

در ثانیه سوم متحرک از حرکت باز می ایستد و زمانی سرعت ماکزیمم می شود که $\int_0^t Fdt$ و $\int_0^t Qdt$ بیشترین اختلاف را داشته باشند، یعنی در محل تلاقی دو نمودار با هم در t=1.5 s.

$$v_{max} = \frac{1}{2}(2-0.75)(1.5)/(\frac{3}{32.2}) = 10.06\frac{ft}{s}$$

a) $t=1s \longrightarrow v = 8.94$ m/s

b) $t=2s \longrightarrow v = 8.05$ m/s

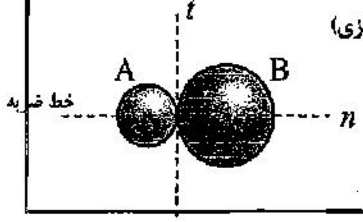
$$\vec{0} + Imp_{1\to2} = \vec{0}$$

$$2.25 - 0.75t = 0 \longrightarrow t = 3(s)$$

برخورد (ضربه) Impact

(مرکزی)

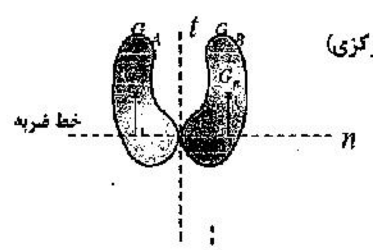
۱.مرکزی (مراکز جرم روی خط ضربه قرار دارند.) نقاط مادی



www.ttnar.ir

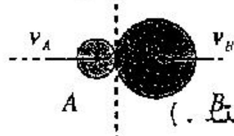
جسم صلب

۲. غیر مرکزي (مراکز جرم روي خط ضربه قرار ندارند.)



برخورد مرکزي

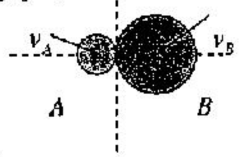
۱.مستقیم (سرعت روی خط ضربه می افتند.)

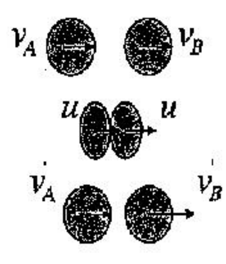


۲.مایل(حداقل یکی از سرعت ها روی خط نیفتند.)

(غیر مستقیم)

* ایمپالس در جهت مماس بر سطوح و وزن که صرف‌نظر می‌شود.
⇐ فقط ایمپالس در جهت n مدنظر است.



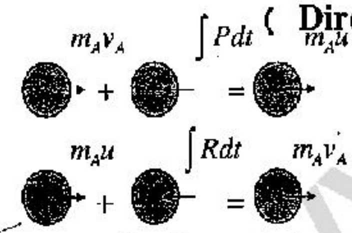


پیش از برخورد

تغییر شکل

بازگشت

برخورد مستقیم مرکزي (Direct Central Impact)



اصل ایمپالس و ممنتوم

مرحله تغییر شکل (Deformation)

مرحله بازگشت (Restitution)

برای کل سیستم

$n \xrightarrow{+}$ $m_A v_A + m_B v_B + 0 = m_A v'_A + m_B v'_B$ از رابطه سرعت نسبی

و

A برای

$$\left.\begin{aligned} \xrightarrow{+}\ & m_A v_A - m_A u = \int Pdt \\ \xrightarrow{+}\ & m_A u - m_A v'_A = \int Rdt \end{aligned}\right\} \Rightarrow e = \frac{\int Rdt}{\int Pdt} = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

ضریب بازگشت $0 \le e \le 1$

A برای

براي جسم B نیز به همین ترتیب داریم : $e = \dfrac{v'_B - u}{u - v_B}$

با حذف u از این دو رابطه ، رابطه سرعت هاي نسبی بدست می‌آید: $e(v_A - v_B) = v'_B - v'_A$

ضریب بازگشت (استرداد) :

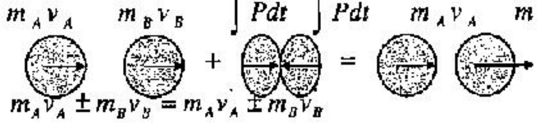
به جنس 2 جسم و هندسه برخورد بستگی دارد.

$$\boxed{e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}} = \frac{\int Rdt}{\int Pdt}$$

(Coefficient of Restitution)

اصل ایمپالس و ممنتوم براي کل جرم ها

برای کل سیستم



$$m_A v_A \pm m_B v_B = m_A v'_A \pm m_B v'_B$$

$$v'_B - v'_A = e\,(v_A - v_B)$$

سرعت نسبی پس از برخورد — سرعت نسبی قبل از برخورد

حالات خاص

۱) ضربه از نوع کاملا ارتجاعی (الاستیک) : (e=1)

$$\begin{cases} v_A - v_B = v'_B - v'_A \\ m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \end{cases}$$

$\Delta T = 0$ (اتلاف انرژی)

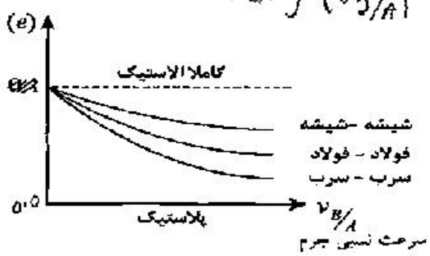
$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 \qquad : \quad T_1 = T_2 \qquad \text{حفظ انرژي}$$

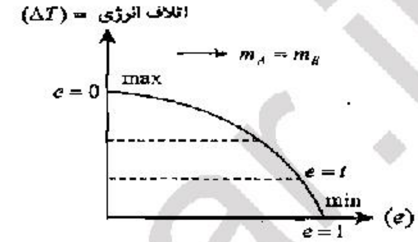
۲)ضربه از نوع کاملاً خمیری وپلاستیک(مومسان) : (e=0)

$e = 0 \Rightarrow v'_B - v'_A = 0 \Rightarrow v'_A = v'_B = v'$ حداکثر اتلاف انرژي Plastic Impact

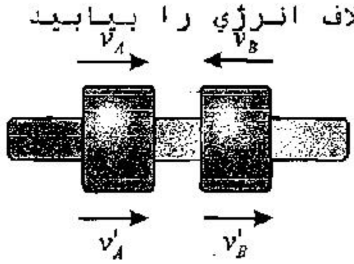
حالت کلي : ۰<e<۱ در سرعت هاي نسبي متفاوت ، این ضریب فرق دارد.

$e = f(v_{B/A})$





مثال : دو جسم A وB به هم برخورد مي کنند اتلاف انرژي را بیابید ؟



$v_A = 6\frac{ft}{s}$, $v_B = 4\frac{ft}{s}$ $e = 0.8$, $W_A = 5lb$, $W_B = 3lb$,

حل:

جهت فرضي

اصل ایمپالس و ممنتوم براي کل جرم ها :

$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow (5/g)(6) - (3/g)(4) = (5/g)v'_A + (3/g)v'_B$

رابطه سرعت هاي نسبي

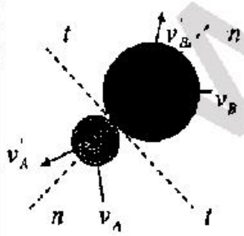
$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \Rightarrow (0.8)(6-(-4)) = (v'_B - v'_A)$

$\Delta T = T - T' = 3.54 - 2.49 = 1.05\ (ft.lb)$

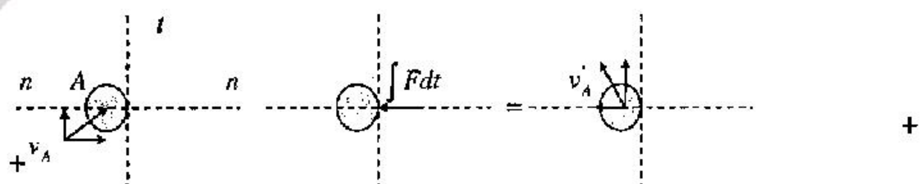
اتلاف انرژی سیستم

$$\begin{cases} 5v'_A + 3v'_B = 18 \\ -v'_A + v'_B = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_A = 0.75(\frac{ft}{s}) \leftarrow \\ v'_B = 7.25(\frac{ft}{s}) \rightarrow \end{cases}$$

برخورد مرکزي مایل (Oblique Central Impact)



اصل ایمپالس و ممنتوم براي جرم A :



$+t \qquad m_A (v_A)_t + 0 = m_A (v'_A)_t$

سرعت در راستاي عمود بر ضربه ثابت است (حفظ ممنتوم A در جهت t)

$(v'_A)_t = (v_A)_t$

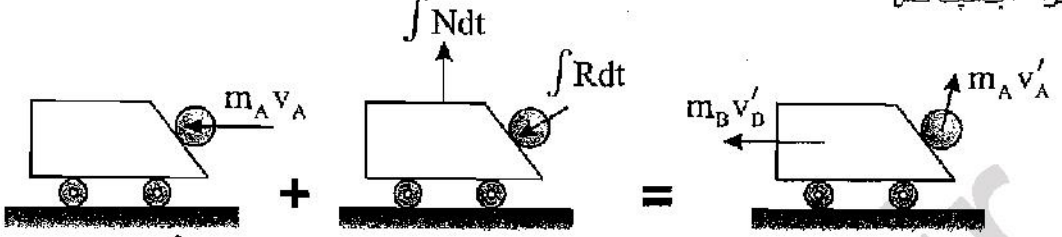
www.ttmar.ir

$v_A = 50\frac{ft}{s}$, $W_A = 1.5(lb)$, $W_B = 4(lb)$

بخاطر برخورد از نیروهای غیرضربه‌ای صرف نظر می‌شود.

$$e = \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n} \Rightarrow 0.866\,v'_B + (v'_A)_n = 32.476$$

اصل ايمپالس



$(v'_A)_t = (v_A)_t = 25(\frac{ft}{s})$ I

$$\left.\begin{array}{l} \overset{+x}{\leftarrow} : m_A v_A + 0 = -m_A (v'_A)_x + m_B v'_B \\ (v'_A)_x = (v'_A)_n \cos(30°) - (v'_A)_t \cos 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{75}{g} = \frac{4}{g} v'_B \quad \frac{1.5}{g}\left[(v_A)_n \cos(30°) - 12.5\right] \quad II$$

$I, II \Rightarrow v'_B = 19.222(\frac{ft}{s})$

اصل كار و انرژي :

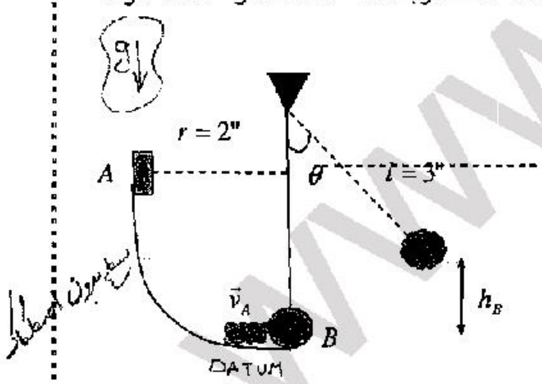
$T_2 = \frac{1}{2} m_B {v'_B}^2$ $\quad U_{1\to 2} = \frac{1}{2} K x_{max}^2$ $\quad T_1 = 0$ $\quad T_1 + U_{1\to 2} = T_2$

$$\frac{1}{2} m_B (v'_B)^2 = \frac{1}{2} k x_{max}^2 \underset{g = 32.2\frac{ft}{s^2}}{\overset{k = 15\frac{lb}{in} = 180\frac{lb}{ft}}{\Longrightarrow}} x_{max} = .505(ft) = 6.06(in)$$

اصل بقای انرژی: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

مثال :در شكل مقابل اگر بسته A رها شود، مطلوبست حداكثر مقدار θ و حداكثر كشش طناب ؟

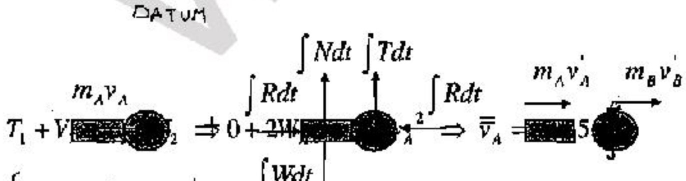
(اگر $e = 0.9, W_A = 2.5\ lb, W_B = 4\ lb$)



$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\longrightarrow \vec{V_A} = 11.35\ (ft/s \rightarrow)$

حل:



$$\left\{\begin{array}{l} m_A v_A + 0 = m_A v'_A + m_B v'_B \\ e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \end{array}\right\} \Rightarrow v'_B = 8.3(\frac{ft}{s}), v'_A = -1.9(\frac{ft}{s})$$

اصل پايستگي انرژي بعد از برخورد

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

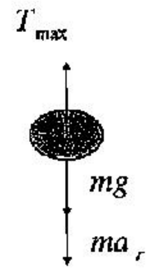
$E_1 = E_2$

$\frac{1}{2}m(v_B')^2 = m_B g h_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{(v_B')^2}{2g} = 1.1\,(ft)$

$\cos\theta_{max} = \frac{3-1.1}{3} \Rightarrow \theta_{max} = \arccos\frac{1.9}{3} = 50.70°$

$T_{max} = m_B g + m_B \frac{(v_B')^2}{r}$ $\quad +\uparrow \sum F_y = m a_y$

$T_{max} = 6.85\,(lb)$



www.ttmar.ir

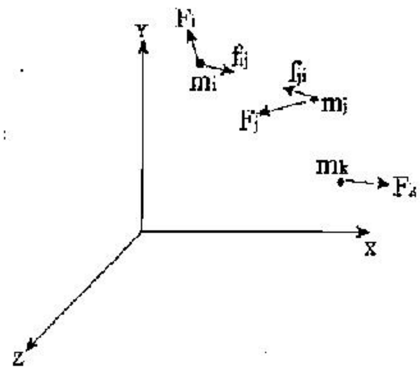
فصل چهارم:

سیستم نقاط مادي

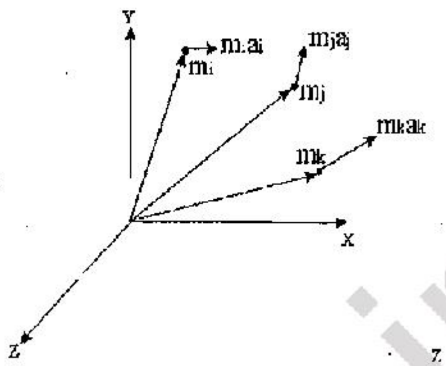
www.ttmar.ir

F_i = نیروي خارجي که به جرم m_i اثر مي کند.

f_{ji} = نیروي داخلي از i به j و $f_{ij} = -f_{ji}$



=

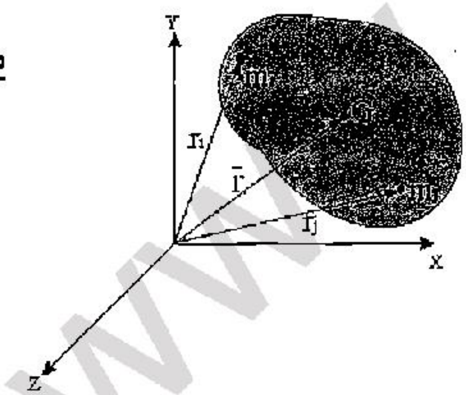


اصل دوم نیوتن براي جرم i :
$$\begin{cases}\vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ij} = m_i \vec{a}_i \\ \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i\end{cases}$$

بر ی سیستم نقاط مادي ($i:1\to n$):

$$\begin{cases}\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = \sum_i m_i \vec{a}_i \quad , \quad \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = 0 \\ \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i (\vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}) = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) \quad , \quad \sum_i (\vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a}_i \\ \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i\end{cases}$$

حرکت مرکز جرم سیستم نقاط مادي



$$\bar{\vec{r}} = \vec{r}_G$$
$$\bar{\vec{r}} = \bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k}$$
$$m\bar{\vec{r}} = \sum m_i \vec{r}_i$$
$$m = \sum m_i$$

موقعیت مرکز جرم :
$$\rightarrow \bar{x} = \frac{1}{m}\left(\sum m_i x_i\right), \ \bar{y} = \ldots \quad , \quad \bar{z} = \ldots$$

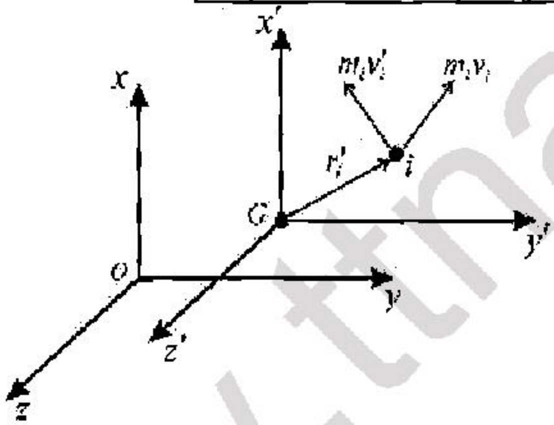
www.ttnar.ir

سرعت جرم i = $\bar{v}_i$: $\rightarrow m\bar{\vec{v}} = \sum m_i \bar{v}_i \Rightarrow \vec{v} = \bar{v}_x \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} + \bar{v}_z \vec{k}$

شتاب جرم i = $\bar{a}_i$: $\rightarrow m\bar{\vec{a}} = \sum m_i \bar{a}_i \Rightarrow \vec{a} = \bar{a}_x \vec{i} + \bar{a}_y \vec{j} + \bar{a}_z \vec{k}$

$$\left.\begin{cases} \vec{L} = m\bar{\vec{v}} = \sum m_i \bar{v}_i \Rightarrow \bar{\vec{v}} = \bar{v}_i \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} + \bar{v}_z \vec{k} \\ \dot{\vec{L}} = m\bar{\vec{a}} \\ \sum \vec{F} = \dot{\vec{L}} \end{cases}\right\} \rightarrow \sum \vec{F} = M\bar{\vec{a}} = \dot{\vec{L}}$$

ممنتوم زاويه اي سيستم نقاط مادي :



دستگاه ثابت: $Oxyz$

دستگاه متحرك: $Gx'y'z'$

سرعت نسبي نقطه i نسبت به نقطه G = $\vec{v}_i'$ سرعت مركز جرم = $\bar{\vec{v}}$ سرعت مطلق نقطه i = $\vec{v}_i$

$v_i = \bar{\vec{v}} + \vec{v}_i'$

ممنتوم زاويه اي سيستم نقاط مادي نسبت به نقطه G (در دستگاه متحرك

$$\left.\begin{cases} \vec{H}_G' = \sum(\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') \rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \frac{d}{dt}(\vec{H}_G') = \frac{d}{dt}\left(\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'\right) \rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \sum(\vec{v}_i' \times m_i \vec{v}_i') + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i' \\ \sum(v_i' \times m_i \vec{v}_i') = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i'$$

شتاب مطلق نقطه i = $\vec{a}_i = \vec{a}_i' + \bar{\vec{a}}$

$$\begin{cases}\begin{rcases}\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}_i'\times m_i(\vec{a}_i-\bar{\vec{a}})\Rightarrow\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}_i'\times m_i\vec{a}_i-\left(\sum m_i\vec{r}_i'\right)\times\bar{\vec{a}}\\ \left(\sum m_i\vec{r}_i'\right)\times\bar{\vec{a}}=0\end{rcases}\rightarrow\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}_i'\times m_i\vec{a}_i\\ \begin{rcases}\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}_i'\times m_i\vec{a}_i\\ \sum\vec{F}_i+\sum\vec{f}_{ij}=m_i\vec{a}_i\end{rcases}\rightarrow\begin{cases}\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}_i'\times\vec{F}_i+\sum\vec{r}_i'\times\sum\vec{f}_{ij}\\ \sum\vec{r}_i'\times\sum\vec{f}_{ij}=0\end{cases}\rightarrow\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{r}_i'\times\vec{F}_i=\sum\vec{M}_G\quad(1)\end{cases}$$

ممنتوم زاويه اي سيستم نسبت به نقطه ي G (دردستگاه ثابت) $=\vec{H}_G$

$$\begin{cases}\begin{rcases}\vec{H}_G=\sum\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i\\ \vec{v}_i=\vec{v}_i'+\bar{\vec{v}}\end{rcases}\rightarrow\vec{H}_G=\sum\vec{r}_i\times m_i(\vec{v}_i'+\bar{\vec{v}})\rightarrow\begin{cases}\vec{H}_G=\sum\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'+\left(\sum m_i\vec{r}_i'\right)\times\bar{\vec{v}}\\ \left(\sum m_i\vec{r}_i'\right)\times\bar{\vec{v}}=0\end{cases}\\ \Rightarrow\vec{H}_G=\sum\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'=\vec{H}'_G\xrightarrow{(1)}\dot{\vec{H}}'_G=\sum\vec{M}_G=\dot{\vec{H}}_G\end{cases}$$

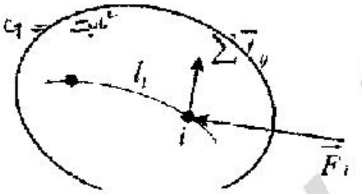
حالت خاص $\sum M_{G_1}=0$

درواقع مشتق مومنتوم زاويه‌اي حول دستگاه متحرک و ثابت برابر است با مجموع گشتاورها

$\dot{H}_{G_1}=\dot{H}'_{G_1}=0$

$\rightarrow H_{G_1}=$ ثابت

$\begin{cases}H_{G_1}=H_{G_2}\\ H'_{G_1}=H'_{G_2}\end{cases}$



كار نيرو :

براي جرم i كار نيروها

$$(U_{1\to2})_i=\int_{l_i}\left(\vec{F}_i+\sum\vec{f}_{ij}\right).\,d\vec{r}_i$$

براي سيستم نقاط كل كارنيرو ها را بدست مي آوريم

$$U_{1\to2}=\sum_{i=1}^{n}(U_{1\to2})_i\rightarrow U_{1\to2}=\int_{l_i}\sum_i\left(\vec{F}_i+\sum_j\vec{f}_{ij}\right).\,d\vec{r}_i=\int_{l_i}\sum_i(\vec{F}_i\,.\,d\vec{r}_i)+\int_{l_i}\sum_i\sum_j(\vec{f}_{ij}\,.\,d\vec{r}_i)$$

= (external) كارنيروي خارجي + (internal) كارنيروي داخلي
كار كل =

$$\Rightarrow u_{1\to2}=(u_{1\to2})_{\text{int}}+(u_{1\to2})_{ext}$$

توجه : در مسائلي كه اتصال بين دو جرم غير ارتجاعي باشد :

$$\left(u_{1\to2}\right)_{in}=0$$

$T' =$ حرکت دورانی (نسبت به مرکز جرم)

انرژی جنبشی

$$\begin{cases} T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \quad , \quad (\vec{v}_i=\vec{v}'_i+\bar{\vec{v}}) \to T=\frac{1}{2}\sum m_i\left(\vec{v}'_i+\bar{\vec{v}}\right).\left(\vec{v}'_i+\bar{\vec{v}}\right)=\frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2+\frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)\bar{v}^2+\left(\sum m_i\vec{v}'_i\right).\bar{\vec{v}} \\ \left(\sum m_i\vec{v}'_i\right)=0 \quad , \quad m=\sum m_i \\ \Rightarrow \; T=\frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2+\frac{1}{2}m\bar{v}^2 \end{cases}$$

$\bar{T} =$ (انتقالی) حرکت مرکز جرم

$$T=T'+\bar{T}$$

انرژي جنبشي انتقالي +
انرژي جنبشي حركت دوراني = انرژي جنبشي سيستم

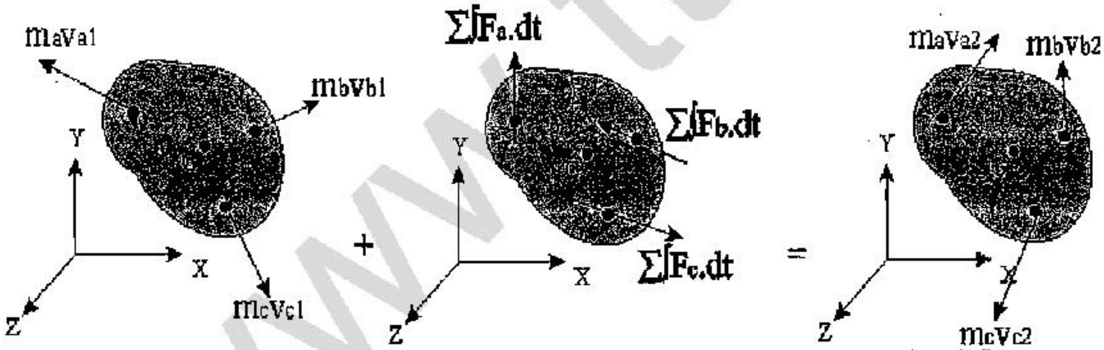
اصـــــل كـــــار و انـــــرژی :

$$T_1+U_{1\to2}=T_2$$

اصل حفظ انرژی :

$$T_1+V_1=T_2+V_2$$

اصل ايمپالس و ممنتوم :



اصـــل ايـمپـــالس و :
(I) ممنتوم خطي

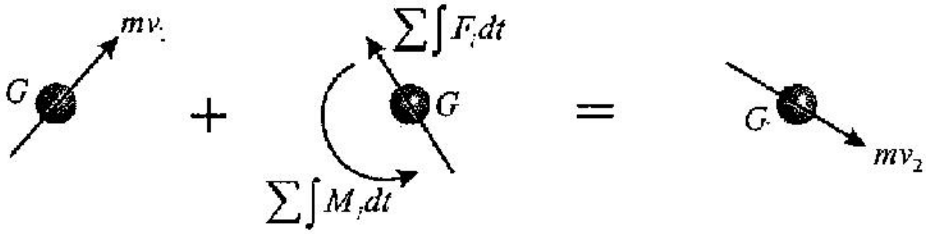
$$\begin{cases} \vec{L}_1+\overrightarrow{IMP}=\vec{L}_2 & (I) \\ \left(\vec{H}_O\right)_1+\sum\int\vec{M}_O\,dt=\left(\vec{H}_O\right)_2 & (II) \\ \left(\vec{H}_O\right)_1=\sum\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_{i1} \end{cases}$$

(II) اصل ايمپالس و ممنتوم
زاويه اي:

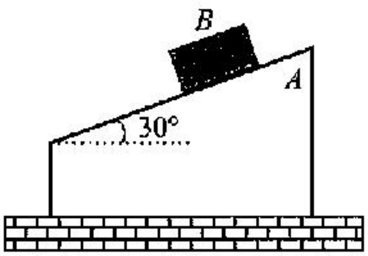
www.ttnar.ir

(*) اگر به مرکز جرم منتقل کنیم یا مرکز جرم مشخص بود:

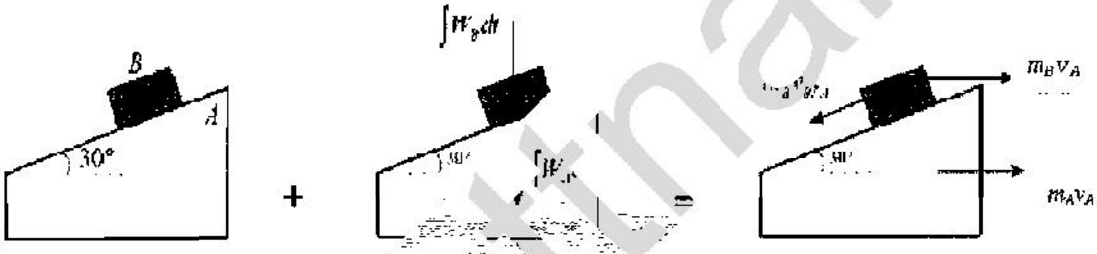
-



مثال: شكل مقابل پس از اينكه بلوك B، [illegible] روي بلوك A حركت كرد، [illegible] B نسبت به A.
$W_A = 2$ [illegible] 15 v_B [illegible]



حل:



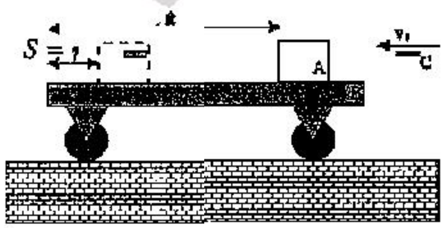
ایمپالس و ممنتوم براي سيستم

$$\xrightarrow{+} \quad 0+0=-m_B v_{B/A}\cos [illegible] m_B v_A [illegible] m [illegible] \Rightarrow \quad v_A = 0.32\ v_{B/A}$$

$$\begin{cases} T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \\ T_1 = 0 \quad , \quad V_1 \ [illegible] \\ T_2 = \frac{1}{2} [illegible] \ v_B \ [illegible] \\ V_2 \ [illegible] \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} [illegible]_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B \left(v^2{}_A + v^2{}_{B/A} - 2 v_A v_{B/A} \cos 30^\circ \right) - \frac{1}{2} W_B \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_A = [illegible] \ ft/s \ \rightarrow \quad , \quad v_{B/A} = 11.59 \ ft/s \ \swarrow$$

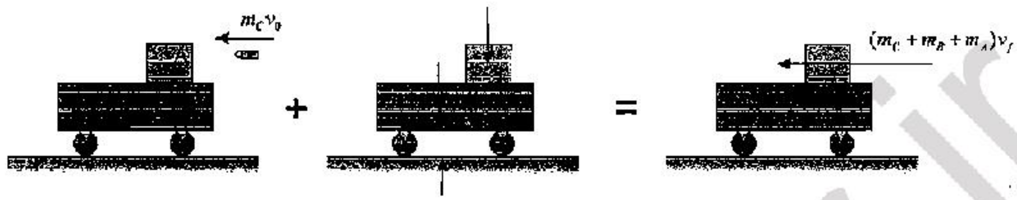
مثال: گلوله C با سرعت v_0 به سمت جسم A شلیک می گردد و در آن فرو می رود و باعث حرکت جسم A روی گاری B و حرکت گاری می گردد.
مطلوبست:



الف- سرعت نهايي كل سيستم. ب- موقعيت نهايي A نسبت به B .

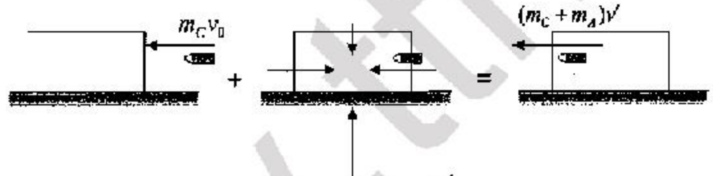
$W_A = 10\ lb$, $W_B = 8\ lb$, $W_C = \frac{1}{16}\ lb = 1$ اونس , $v_0 = 1600\ ft/s$, $\mu_k = 0.5$

حل: با فرض اینکه جرم A به همراه C روی B باقی بماند و در نهایت سرعت همگی یکسان باشد ، از اصل ایمپالس و ممنتوم برای سیستم استفاده کرده و سرعت نهایی را محاسبه می کنیم :



$$\Rightarrow m_C v_0 = (m_C + m_A + m_B)\, v_f \Rightarrow v_{final} = \frac{\frac{1}{16}(1600)}{\frac{1}{16}+10+8} \Rightarrow v_f = 5.54\ ft/s$$

سرعت گلوله و بلوک A (v') را پس از فرو رفتن گلوله در A ، حساب می کنیم :



$$m_C v_0 + 0 = (m_C + m_A)\, v' \Rightarrow v' = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+10}(1600) = 9.94\ ft/s$$

براي بدست آوردن كار نيروي اصطكاك، اصل كار و انرژي را از زماني كه گلوله در A نشست تا زماني كه بلوك A نسبت به B متوقف شد، مي نويسيم :

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_C + m_A)v'^2 = 15.43\ ft.lb \quad , \quad T_2 = \frac{1}{2}(m_C + m_A + m_B)v_f^2 = 8.6\ ft.lb$$

$$U_{1\to 2} = (U_{1\to 2})_{friction} = -0.5\left(\frac{1}{16}+10\right)(\Delta x)$$

$$T_2 - T_1 = U_{1\to 2}$$

$$\Rightarrow 8.6 - 15.43 = -0.5\left(\frac{1}{16}+10\right)(\Delta x) \to \Delta x = 1.36\ ft$$

مسافتي كه A روي B مي پيمايد : Δx $\Leftarrow$

$S = 2 - 1.36 = 0.64\ ft$ موقعيت نهايي نسبت به انتهاي B

با توجه به موقعیت نهایی A که روی B باقی می ماند ، پیش فرض اولیه صحیح و نتایج درست می باشند .

مثال: در صفحه بدون اصطکاک مقابل ، $m_A = 2kg$ و $m_B = 1kg$. در لحظه اولیه داریم:

$\vec{H}_G = 3\ {kg.m^2}/{s}$ ↺

$\vec{\bar{v}}_0 = 1.5\vec{i} + 1.2\vec{j}\ m/s$

$T' = 18.75\ J$

که T' در آن انرژي جنبشي سيستم نسبت به مرکز جرم (دوران) آن است. اگر در لحظه بعدی جرم A دارای سرعت v'_A (که موازي محور Y ها است) گردد، مطلوبست: v'_A , v'_B , b .

حل

حفظ ممنتوم سيستم

$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$

$\vec{L}_1 = m\bar{v}_1 = (1+2)\left(1.5\vec{i} + 1.2\vec{j}\right)$

$\vec{L}_2 = (2)\left(v'_A\vec{j}\right) + \left(v'_{Bx}\vec{i} - v'_{By}\vec{j}\right) \qquad (1)$

$4.5\vec{i} + 3.6\vec{j} = v'_{Bx}\vec{i} + \left(2v'_A - v'_{By}\right) j$

$v'_{Bx} = 4.5\ m/s$ (1) , $2v'_A - v'_{By} = 3.6\ m/s$ (2) و نیز $T = \bar{T} + T'$ حفظ انرژي جنبشی $T_1 = T_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}m\bar{v}_0^2 + T' = \frac{1}{2}(3)\left((1.5)^2 + (1.2)^2\right) + 18.75 = 24.28\ J \\ T_2 = \frac{1}{2}m_A v_A'^2 + \frac{1}{2}m_B\left(v_{Bx}'^2 + v_{By}'^2\right) \end{cases} \Rightarrow v_A^2 + \frac{1}{2}\left(v_{Bx}'^2 + v_{By}'^2\right) = 24.28 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \rightarrow \begin{cases} v'_A = 3.2\ m/s \ \uparrow \\ v'_{Bx} = 4.5\ m/s \ \rightarrow \\ v'_{By} = 2.8\ m/s \ \downarrow \end{cases}$$

حفظ ممنتوم زاويه اي سيستم نسبت به O :

$\left(\vec{H}_O\right)_1 = \left(\vec{H}_O\right)_2$

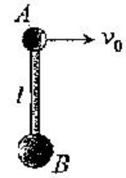
$\left(\vec{H}_O\right)_1 = \dot{H}_G + \vec{\bar{r}} \times m\bar{v}_O \Rightarrow \left(\dot{H}_O\right)_1 = 3\vec{k} + \left(1.6\vec{j}\right) \times (3)\left(1.5\vec{i} + 1.2\vec{j}\right) = 3\vec{k} - 3(1.5)(1.6)\vec{k} = -4.2\vec{k}$

$\left(\vec{H}_O\right)_2 = (2)\,a\vec{v}'_A k' - b(v'_{By})(1)\,\vec{k}$

$\Rightarrow -4.2 = (2)\,av'_A - bv_{By} \quad \Rightarrow b = 5.98\ m$

مثال : در صفحه افقی بدون اصطکاک اگر به A سرعت $\vec{v}_0$ بدهیم مطلوبست سرعت جرم ها پس از 90° , 180° دوران میله.

$m_A = m \ , m_B = 2m$

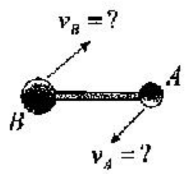


حل :

$$m\bar{Y} = \sum m_i y_i \rightarrow \bar{Y} = \frac{m(l) + 2m(0)}{m + 2m} = \frac{l}{3}$$

$$m\vec{\bar{v}} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B \Rightarrow 3m\vec{\bar{v}} = m\vec{v}_A + 2m\vec{v}_B \Rightarrow 3m\vec{\bar{v}} = m\vec{v}_0 + 0 \Rightarrow \bar{v} = {}^{v_0}\!/_{3}$$

در حالت دوران 90° داریم :



$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{L}_1 = m_A \vec{v}_0 = (mv_0)\vec{i} \\ \vec{L}_2 = m_A\left(-v_{AX}\vec{i} - v_{AY}\vec{j}\right) + m_B\left(v_{BX}\vec{i} + v_{BY}\vec{j}\right) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} v_0 = -v_{AX} + 2v_{BX} & (1) \\ 0 = -v_{AY} + 2v_{BY} & (2) \end{array} \right\}$$

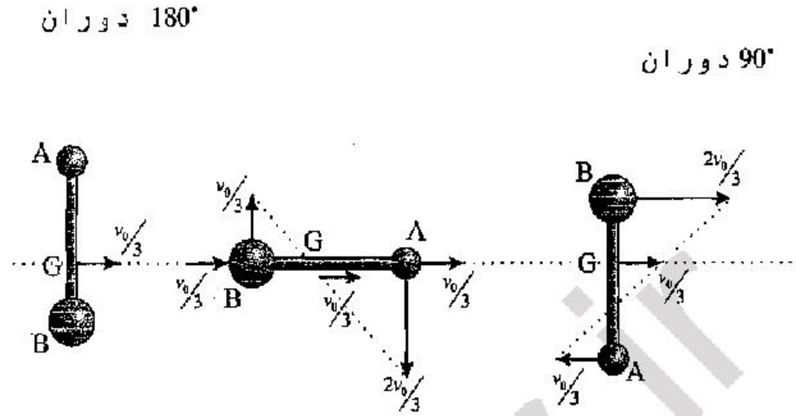
$$T_1 = T_2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_1 = {}^1\!/_2 mv_0^2 \\ T_2 = {}^1\!/_2 m\left(v_{AX}^2 + v_{AY}^2\right) + {}^1\!/_2 (2m)\left(v_{BX}^2 + v_{BY}^2\right) \end{array} \right\} \rightarrow v_0^2 = v_{AX}^2 + v_{AY}^2 + 2v_{BX}^2 + 2v_{BY}^2 \quad (3)$$

$$(H_G)_1 = (H_G)_2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (H_G)_1 = {}^2\!/_3 lm(v_0) \\ (H_G)_2 = {}^2\!/_3 lm(v_{AY}) + {}^1\!/_3 l(2m)(v_{BY}) \end{array} \right\} \rightarrow v_0 = v_{AY} + v_{BY} \quad (4)$$

$$(1),(2),(3),(4) \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} v_{AX} = {}^{v_0}\!/_3 \rightarrow & v_{BX} = {}^{v_0}\!/_3 \rightarrow \\ v_{AY} = {}^{2v_0}\!/_3 \downarrow & v_{BY} = {}^{v_0}\!/_3 \uparrow \end{array} \right.$$

در حالت 180° نیز داریم :

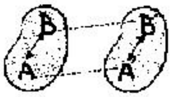
www.ttmar.ir


180° دوران
90° دوران
A
G
B
$v_0/3$
G
A
B
$v_0/3$
$v_0/3$
$v_0/3$
$v_0/3$
$2v_0/3$
B
$2v_0/3$
G
$v_0/3$
A
$v_0/3$

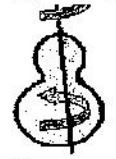
فصل پنجم: سینماتیک اجسام صلب

www.ttmar.ir

حرکت اجسام صلب (KINEMATICS OF RIGID BODIES)

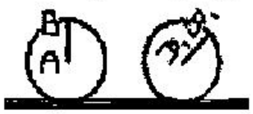


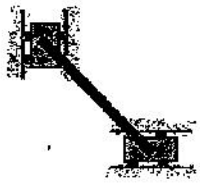
۱) حرکت انتقالی :



۲) حرکت دورانی حول محور ثابت :

۳) حرکت عمومی در صفحه : ترکیب حرکت انتقالی و دورانی

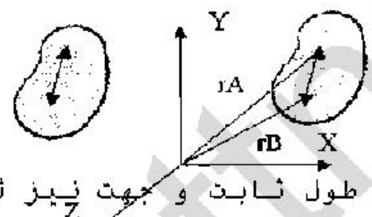




۴) حرکت دورانی حول نقطه

۵) حرکت کلی : غیر از حالات خاص قبل

۱) حرکت انتقالی
TRANSLATIONAL



$\vec{r}_B=\vec{r}_{A/B}+\vec{r}_A$

$\frac{d}{dt}(\vec{r}_B)=\frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B})+\frac{d}{dt}(\vec{r}_A)$

برای حرکت انتقالی چون طول ثابت و جهت نیز ثابت است : $\frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B})=0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r}_B)-\frac{d}{dt}(\vec{r}_A)=0 \Rightarrow \vec{V}_B-\vec{V}_A=0 \Rightarrow \vec{V}_B=\vec{V}_A$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{V}_B)=\frac{d}{dt}(\vec{V}_A) \Rightarrow \vec{a}_B=\vec{a}_A$

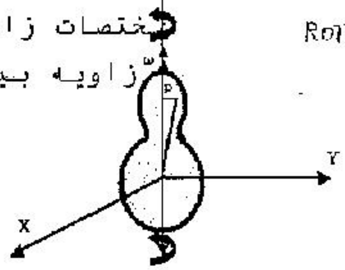
بنابراین همانند یك نقطه مادي فرض مي شود ، یعني سرعت شتاب همه نقاط یکسان است.

۲) حرکت دورانی حول محور z ثابت
ROTATION ABOUT FIXED AXIS

θ: مختصات زاویه ای نسبت به صفحه xz

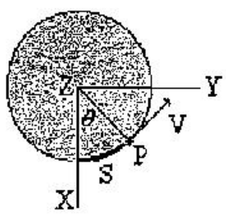
φ: زاویه بین بردار موقعیت و محور z

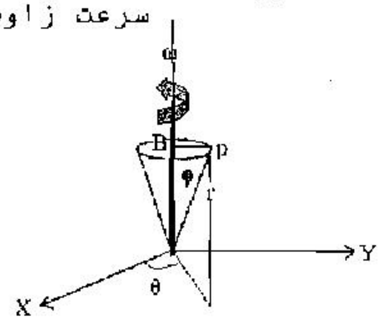
$\vec{r}$: بردار موقعیت نقطه P

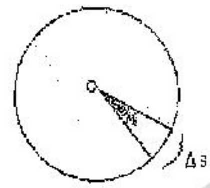


$$V=\frac{\Delta s}{\Delta t}\ ,\ \begin{cases}\Delta s=(BP)\Delta\theta \\ BP=(OP)\sin\varphi=r\sin\varphi\Rightarrow V=BP(\frac{\Delta\theta}{\Delta t})\Rightarrow V=(r\sin\varphi)(\dot\theta)=\bar\omega\times\bar r \\ \dot\theta=\frac{d\theta}{dt}=\omega\end{cases}$$

سرعت زاویه ای







$$\begin{cases}\vec a=\frac{d\vec V}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec\omega\times\vec r)\Rightarrow\vec a=\frac{d}{dt}(\vec\omega)\times\vec r+\vec\omega\times\frac{d}{dt}(\vec r) \\ \ddot\theta=\dot\omega=\frac{d\omega}{dt}=\alpha \\ \frac{d}{dt}(\vec r)=\vec v=(\vec\omega\times\vec r)\end{cases}$$

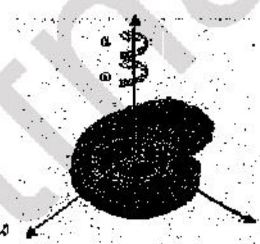
$$\Rightarrow\vec a=\vec\alpha\times\vec r+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)\Rightarrow\begin{cases}a_n=\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)=\vec\omega\times\vec v \\ a_t=\vec\alpha\times\vec r\end{cases}$$

شتاب زاویه ای

حالت خاص (حرکت دورانی یک صفحه نازک حول محور عمود بر صفحه)

$$\vec V=\vec\omega\times\vec r\Rightarrow V=r\omega$$

$$\vec a=\vec\alpha\times\vec r+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)\quad\Rightarrow\begin{cases}a_t=r\alpha \\ a_n=r\omega^2\end{cases}$$



معادلات دوران محور ثابت

x	θ
$V=\frac{dx}{dt}=\dot x$	$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot\theta$
$a=\frac{dV}{dt}=\dot V=\ddot x$	$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\dot\omega=\ddot\theta$
$a=V(\frac{dV}{dx})$	$\alpha=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$

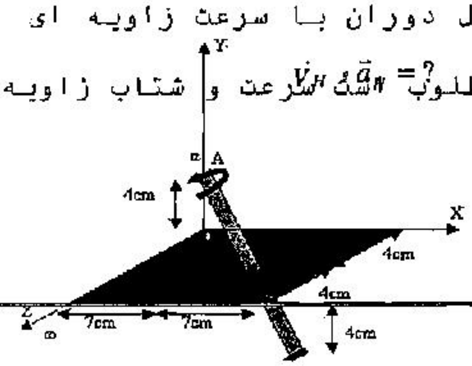
حالتهای خاص :

حرکت دورانی با سرعت زاویه ای ثابت : $\omega=$ cte و $\alpha=0$ ، $\theta=\omega t+\theta_0$

حرکت دورانی با شتاب زاویه ای ثابت : $\alpha=$ cte و $\omega=\omega_0+\alpha t$ ، $\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

مثال : صفحه حول محور AC در حال دوران با سرعت زاویه ای $18\frac{rad}{s}$ و شتاب زاویه ای $\alpha=45\frac{rad}{s^2}$ است. مطلوب است سرعت و شتاب زاویه ای نقطه H $(\bar r_{H/C}=4\bar j)$. $\vec V_H$ و $\vec a_H$ $=?$

حل :



www.ttmar.ir

$$\vec V=\vec\omega\times\vec r \qquad , \qquad \vec a=\vec\alpha\times\vec r+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$$

$$\vec r=\vec r_{H/B}=7\vec i+4\vec k$$

$$\begin{cases}\omega=18\ (\frac{rad}{s})\\ \vec\omega=\omega\,\lambda_{AC} \qquad\qquad \Rightarrow \vec\omega=14\vec i-8\vec j+8\vec k\ (\frac{rad}{s})\\ \lambda_{AC}=\dfrac{14\vec i-8\vec j+8\vec k}{\sqrt{14^2+8^2+8^2}}=\dfrac{1}{18}(14\vec i-8\vec j+8\vec k)\end{cases}$$

$$\vec\alpha=\alpha\vec\lambda_{CA}=-\alpha\vec\lambda_{AC}\Rightarrow \vec\alpha=\frac{-45}{18}(14\vec i-8\vec j+8\vec k)$$

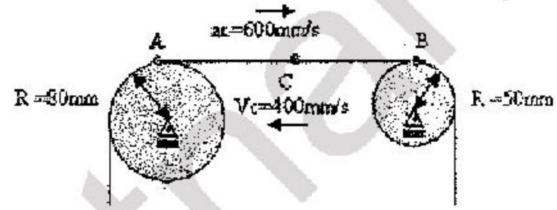
$$\vec V_H=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 14 & -8 & 8\\ 7 & 0 & 4\end{vmatrix}=-32\vec i+56\vec k\ (\frac{cm}{s}) \qquad \vec a_H=\frac{-45}{18}\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 14 & -8 & 8\\ 7 & 0 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 14 & -8 & 8\\ -32 & 0 & 56\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec a_H=-386\vec i-1040\vec j-396\vec k\ (\frac{cm}{s^2})$$

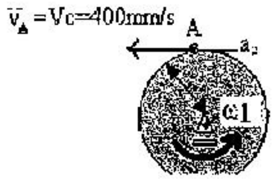
مثال : با توجه به حرکت کابل قرقره B به سمت قرقره A مطلوب است : $\omega_1=?$ $\omega_2=?$

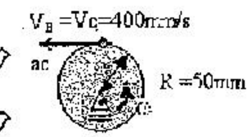
$\alpha_1=?$ $\alpha_2=?$

$a_A=?$ $a_B=?$



حل :





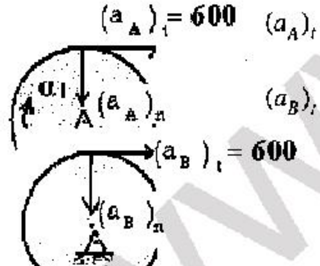
$$V_A=r_A\omega_1\Rightarrow 400=80\omega_1\Rightarrow\omega_1=5\ \frac{rad}{s}$$

$$V_B=r_B\omega_2\Rightarrow 400=50\omega_2\Rightarrow\omega_2=8\ \frac{rad}{s}$$

$(a_A)_t=600$

$$(a_A)_t=r_A\alpha_1\Rightarrow 600=80\,\alpha_1\Rightarrow\alpha_1=7.5\ \frac{rad}{s^2}$$

$$(a_B)_t=r_B\alpha_2\Rightarrow 600=50\,\alpha_2\Rightarrow\alpha_2=12\ \frac{rad}{s^2}$$



$$(a_A)_n=r_A\omega_A^2=80(5)^2=2000\ mm/s^2$$

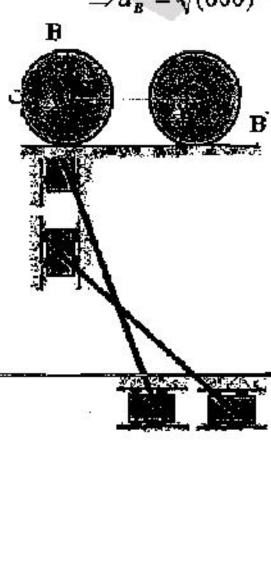
$$(a_B)_n=r_B\ \omega^2=50(8)^2=3200\ mm/s^2$$

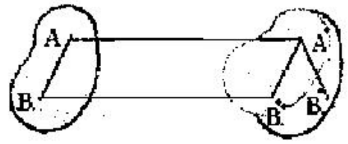
$$\Rightarrow a_A=\sqrt{(600)^2+(2000)^2}=2088\ mm/s^2 \quad 73.3°$$

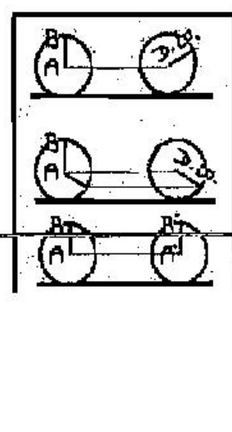
$$\Rightarrow a_B=\sqrt{(600)^2+(3200)^2}=3256\ mm/s^2 \quad 79.4°$$

۳) حرکت کلی در صفحه (حرکت عمومی در صفحه)

از ترکیب حرکت انتقالی و حرکت دورانی حول ... آید.

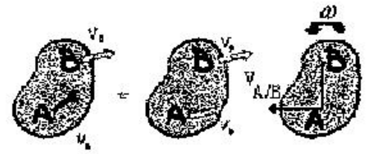




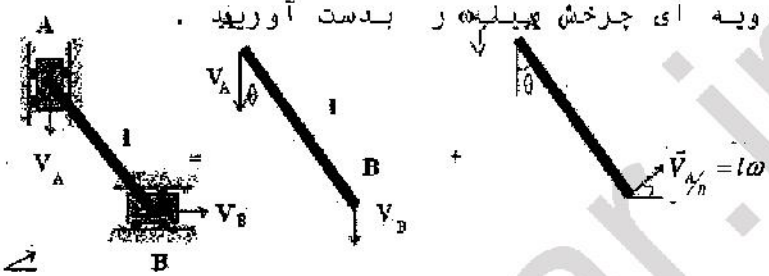


حرکت انتقالی در صفحه ا حرکت دورانی در صفحه= حرکت کلی در صفحه
سرعت نسبی و مطلق در حرکت صفحه ای

$\vec{V}_B \rightarrow$ A انتقال
بوسیله سرعت B
$\vec{V}_{A/B} \rightarrow$ B حول نقطه A دوران $\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$
$\vec{V}_{A/B} = l\omega$



مثال : جسم A با سرعت V_A در حال حرکت به سمت پائین می باشد ، سرعت زاویه ای چرخش میله ω را بدست آورید .



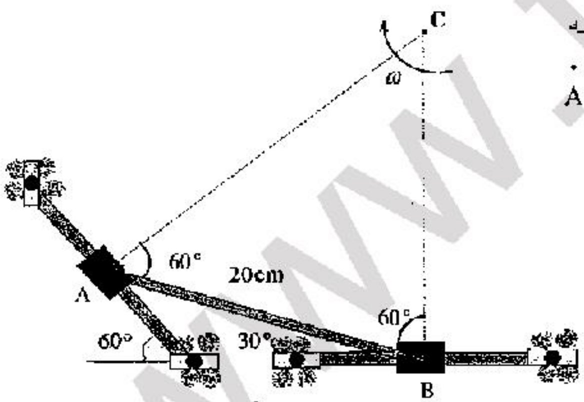
حل :

$[\vec{V}_B \rightarrow] = [V_A \downarrow] + [l\omega \angle]$

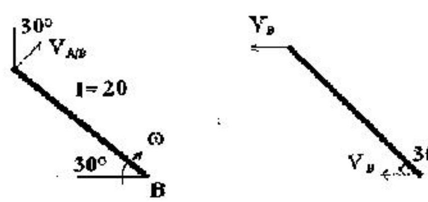
$V_A = V_B \tan\theta$

$\omega = \frac{V_A}{l\sin\theta}$

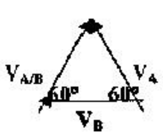
مثال : طوقه B با سرعت $25\ cm/s$ به سمت چپ در حال حرکت است . با توجه به شکل سرعت طوقه A را بدست آورید ؟



حل : حرکت مقید

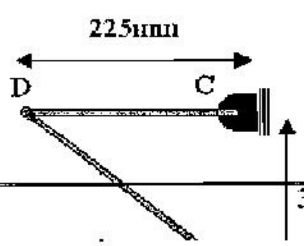


$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \Rightarrow [V_A \angle 60^\circ] = [V_B \leftarrow] + [20\omega \angle 30^\circ]$



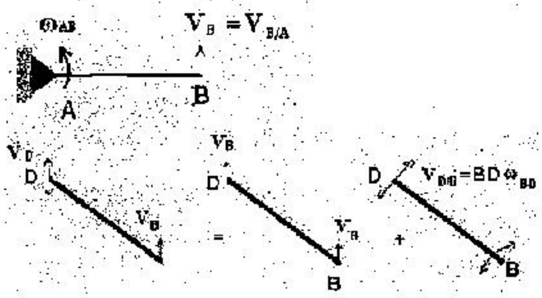
$\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B = 25 (Cm/s)$

مثال : اگر در حالت نشان داده شده سرعت زاویه ای برابر $3\ rad/s$ باشد، مطلوب است: $\omega_{BD}, \omega_{DC} = ?$

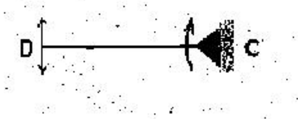


www.ttmar.ir

حل :

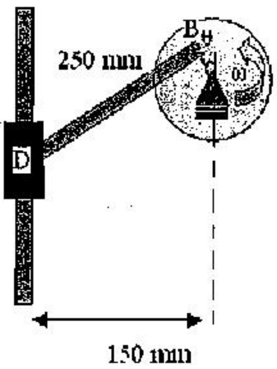


$$\begin{cases} \vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B} \\ [V_D \updownarrow] = [.45 \uparrow] + [BD \,.\, \omega_{BD} \nearrow] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{BD} = 0 \\ \vec{V}_D = \vec{V}_B = [.45 \ {m}/{s} \uparrow] \end{cases}$$



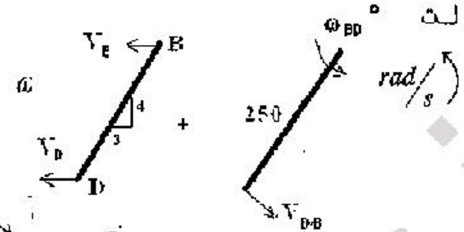
$$\Rightarrow V_D = 0.225\, \omega_{DC} = 0.45 \ {m}/{s} \quad \Rightarrow \ \omega_{DC} = 2 \ {rad}/{s}$$

www.ttmar.ir



مثال : اگر یک دیسک با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = 500\ rpm$ در حال دوران باشد، مطلوب است : سرعت طوقه D در حالت $\theta = 0°$, $\theta = 90°$ (فاصله نقطه B تا مرکز دیسک $50\ mm$ می باشد)

حل : در حالت °0

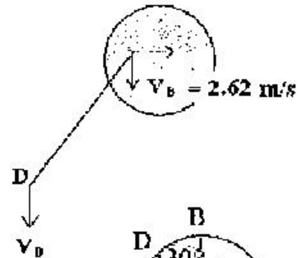


$V_B = r\omega = 0.05 \times 52.36 = 2.62 \quad m/s \leftarrow$

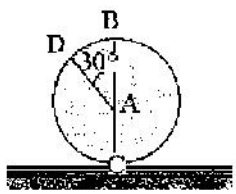
$\vec{V}_D \downarrow = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B} = [2.62 \leftarrow] + [0.25\omega_{BD} \, ^3_4 \searrow]$

$\Rightarrow \; V_D = 1.96 \; m/s \downarrow \quad , \quad \omega_{BD} = 13.1 \quad rad/s$

در حالت $\theta = 90$:

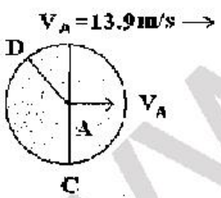


$V_D \parallel V_B \Rightarrow V_D = V_B = 2.62 (m/s) \downarrow \; , \; \omega_{BD} = 0$

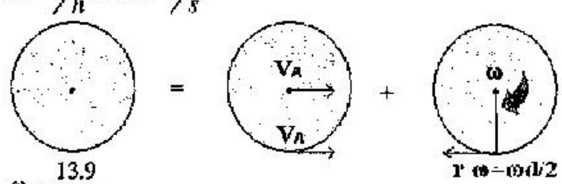


مثال : اتومبیلی با سرعت ثابت $50 \, km/h$ در حال حرکت در جهت راست می باشد . اگر قطر چرخهای اتومبیلی $610\ mm$ باشد ، مطلوب است ، سرعت نقاط D,C,B,A ؟

حل : روش اول :

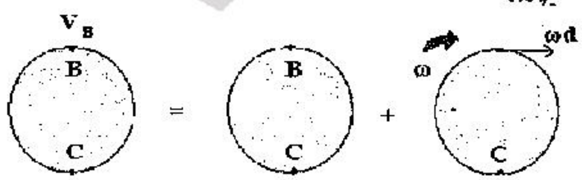


$V_A = 50 \; km/h = 13.9 \; m/s$



$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A} \quad , \quad V_C = 0$

$\rightarrow \; V_{C/A} = V_A = r\omega \quad \Rightarrow 13.9 = r\omega \; \Rightarrow \; \omega = \frac{13.9}{0.61/2}$

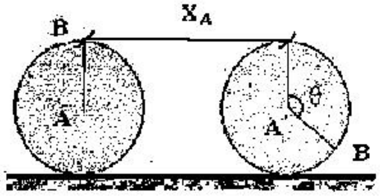


$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{B/C} \qquad \Rightarrow \; \vec{V}_B = 0 + [d\omega \rightarrow] = [2 \times 13.9 \rightarrow] = [27.8 \; m/s \rightarrow]$

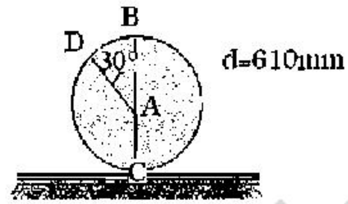
$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{D/A} \Rightarrow \; \vec{V}_D = [13.9 \rightarrow] + [13.9 \nearrow_{30°}] \qquad \Rightarrow \vec{V}_D = 2 \times 13.9 \cos 15° = [26.8 \; m/s \; \angle_{15°}]$

www.tnmar.ir

روش دوم : به شرطی که لغزش در کار نباشد



$$X_A = r\theta \quad\Rightarrow\quad V_A = r\dot{\theta} = r\omega \qquad a_A = r\alpha$$



$$\omega = \frac{V_A}{r} = \frac{V_A}{d/2} = 44.84 \quad rad$$

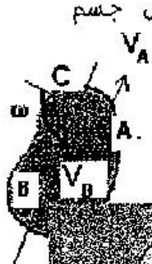
$$V_B = (BC)\omega = 2V_A = 27.8 \quad m/s$$

$$V_D = (DC)\omega = (\vec{CA} + \vec{AD}) \times \omega = .59 \times 44.84 = 26.5 \quad m/s$$

مرکز آ

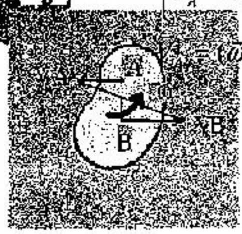
C (نقطه با سرعت صفر) مرکز انی دوران است که لزوماً روی جسم نیست.

تکیه گاه در تمام لحظات مرکز آني دوران مي باشد.



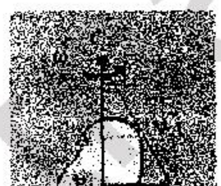
$$\begin{cases} V_C = 0 \\ \vec{V}_A = V_C + \vec{V}_{A/C} = \vec{V}_{A/C} = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_A = \vec{V}_{A/C} = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) \\ (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) \perp \vec{r}_{A/C} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_A \perp \vec{r}_{A/C}$$

$$V_A = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) = (\vec{\omega} \times \vec{C}_A)$$



$V_A \parallel V_B$

$V_A \perp AB$



$V_A \parallel V_B$

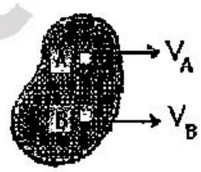
$V_A \perp AB$

$V_A \neq V_B$

$V_A \parallel V_B$

$V_A \not\perp AB$

$\omega = 0$



$V_A \perp AB$

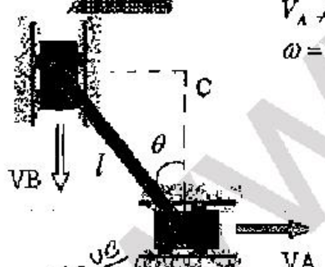
$V_A \parallel V_B$

$V_A = V_B$

$\omega = 0$

مثال : در شکل ز V_A B را برحسب

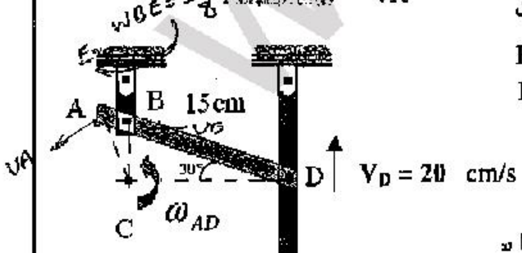
حل :



$$V_A = (AC)\omega = (l\cos\theta)\omega$$

$$\omega = \frac{V_A}{l\cos\theta} \quad , \quad V_B = V_A \tan\theta$$

مثال : طوقه D با سرعت $20\ cm/s$ به سمت بالا درحال حرکت می باشد . طول BD برابر 10 cm و طول AB برابر $15\ cm$ است. مطلوب است: $\omega_{AD} = ?,\ V_B = ?,\ V_A = ?$



حل : براي ميله BE نقطه E مرکز دوران ا

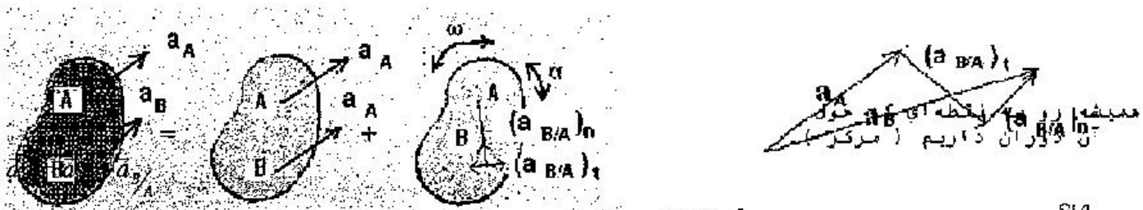
$$V_D = (DC)\,\omega_{AD} \Rightarrow \omega_{AD} = \frac{V_D}{DC} = \frac{20}{15\cos 30^\circ} = 1.54 \quad rad/s$$

$$V_B = (BC)\,\omega_{AD} = (15\sin 30^\circ)(1.54) \Rightarrow V_B = 11.55 \quad cm/s \leftarrow$$

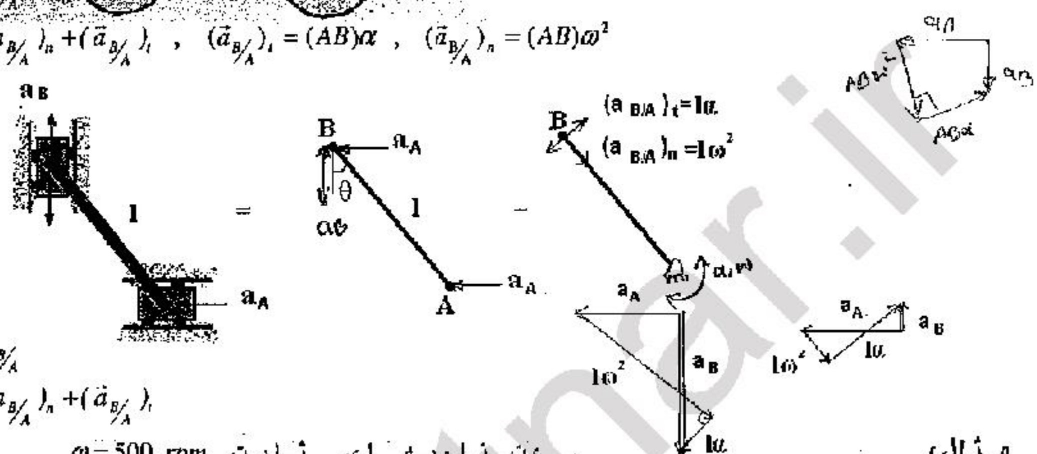
$AC=\sqrt{(25\sin 30°)^2+(10\cos 30°)^2} \;\Rightarrow\; AC=15.21\ cm$

$V_A=(AC)\,\omega_{AD}=(15.21)(1.54) \;\Rightarrow\; V_A=23.4\ \ {cm}/{s}\ \ 34.7°$

شتاب مطلق و نسبی در حرکت صفحه ای

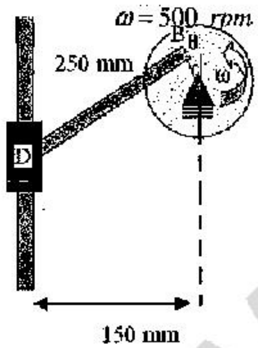


$\vec a_B=\vec a_A+(a_{B/A})_n+(\vec a_{B/A})_t\ ,\ \ (\vec a_{B/A})_t=(AB)\alpha\ ,\ \ (\vec a_{B/A})_n=(AB)\omega^2$



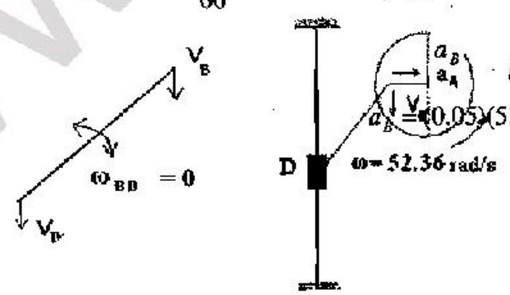
$\vec a_B=\vec a_A+\vec a_{B/A}$

$\vec a_B=\vec a_A+(a_{B/A})_n+(\vec a_{B/A})_t$



مثال) ... ت زاویه ای ثابت $\omega=500\ rpm$ در حال دوران باشد، مطلوب است: شتاب طوقه D در حالت $\theta=90°$, $\theta=180°$. (فاصله نقطه B تا مرکز دیسک 50 mm می باشد.)

حل : $\omega=500\ rpm=\dfrac{500\times 2\pi}{60}=52.36\ {rad}/{s}$



در حالت $\theta=90°$

$a_B=(0.05)(52.36)^2=137.1\ \ {m}/{s^2}$

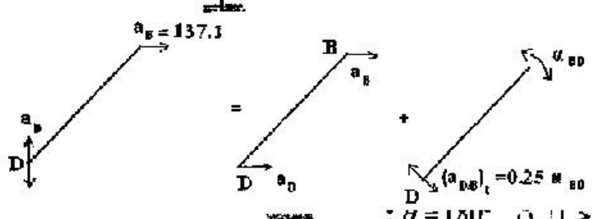
$V_B=(0.05)(52.96)=2.62\ \ {m}/{s}$

$(a_{D/B})_t=0.25\times\alpha_{BD}$

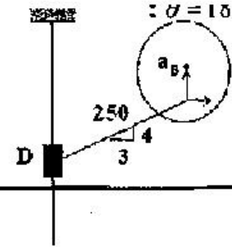
$\vec a_D=\vec a_B+\vec a_{D/B}$

$[a_D \updownarrow]=[137.1\rightarrow]+[0.25\,\alpha_{BD}\ \ 23.6°]$

$\Rightarrow a_D=59.8\ {m}/{s^2}\ \uparrow$



در حالت $\theta=180°$:

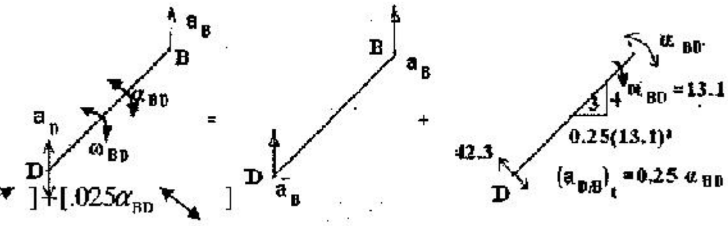


$a_B=137.1\ \ {m}/{s^2}$

$$\Rightarrow 0.2\omega_{BD} = 2.62 \Rightarrow \omega_{BD} = 13.1 \ \ {}^{rad}/_{s} \quad V_B = BC(\omega_{BD}) = 2.62$$

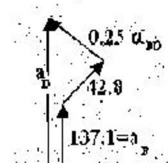
$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + (\vec{a}_{D/B})_n + (\vec{a}_{B/D})_t$$



$$[a_D \updownarrow] = [137.1 \uparrow] + [42.8 \nearrow] + [.025\alpha_{BD} \nwarrow\searrow]$$

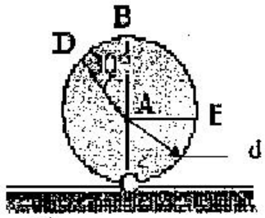
$$\Rightarrow a_D = 190.65 \ \ {}^{m}/_{s^2} \uparrow$$



مدل ... میباشد $50 \ \cancel{90} \ {}^{km}/_{h}$

$a_C = ?$

$V_{A/C} \rightarrow \sqrt{A/C} = 13.89 \rightarrow$

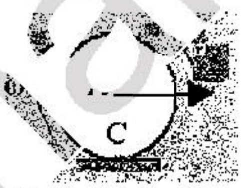


حل :

$V_B = V_C + V_{B/C} = 0 + [d\omega \rightarrow]$
$= 27.78$ m/s

$V_D = V_C + V_{D/C} = 0 + [D C\omega$
$= 26.8 \ \angle 15°$

$V_E = V_C + V_{E/C} = 0 + r\sqrt{2} \frac{13.89}{r}$
$= 13.89\sqrt{2} \ \angle 45°$



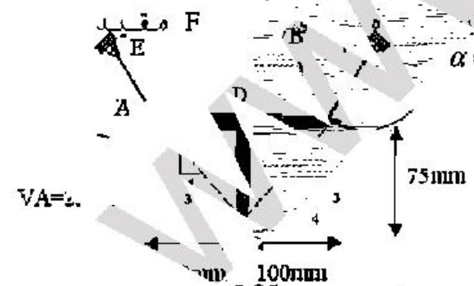
$V_A = 50 \ {}^{km}/_{h} = 25 \ {}^{m}/_{s} \rightarrow V_A = 13.89$ m/s $\rightarrow$

$$V_A = \frac{d}{2}\omega \Rightarrow 25 = \frac{0.55}{2}\omega \Rightarrow \omega = 90.9 \ \ {}^{rad}/_{s} \Rightarrow$$

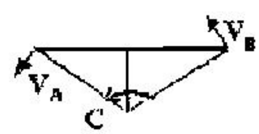
$\Rightarrow a_B$

مثال : میله زیر از نقاط A و B به ... مقید F ... است . مطلوب است : $\alpha = ?$ و $a_C = ?$

$$BF = AE = 100mm \ , V_A = 250 \ {}^{mm}/_{s} \text{ و } \frac{dV_A}{dt} = 0$$



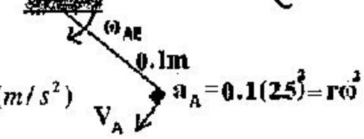
حل :

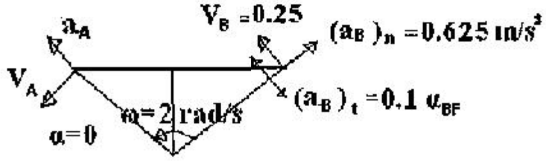


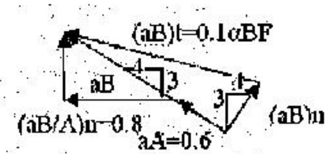
$$V_A = (AC)\omega \Rightarrow \omega = \frac{0.25}{0.125} = 2 \ {}^{rad}/_{s}$$

$$V_A = (AE)\omega_{AE} \Rightarrow \omega_{AE} = \omega_{BF} = \frac{0.25}{0.1} = 2.5 \ {}^{rad}/_{s}$$

$$a_A = (a_A)_n = r\omega_{AE}^2 = 0.1(2.5)^2 [= \frac{V^2}{r} = \frac{(0.25)^2}{0.1}] = .625 (m/s^2)$$





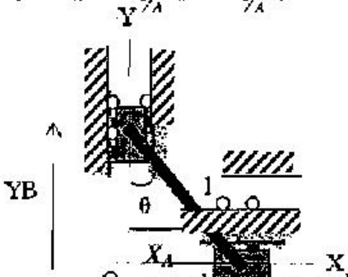


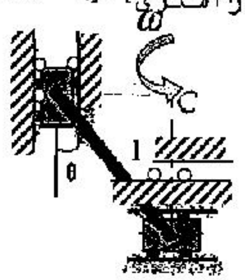
$$\begin{cases}(\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t \\ (a_B)_n = 0.625\ m/s^2\ ,\ (a_B)_t = 0.1\alpha_{BF} \\ (a_{B/A})_n = 0.2\omega^2 = 0.8\ m/s^2\ ,\ (a_{B/A})t = 0.2\alpha \end{cases} \Rightarrow [.625 \nearrow] + [0.1\alpha_{BF} \nwarrow\!\!\searrow] = [.625 \nwarrow] + [.8 \leftarrow] + [0.2\alpha \updownarrow]$$

$$\Rightarrow \alpha = 12(rad/s)$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + (\vec{a}_{C/A})_n + (\vec{a}_{C/A})_t = [.625 \nwarrow] + [.125 \times 2^2 \nwarrow] + [.125 \times 12 \nearrow] = 1.875(m/s^2) \uparrow$$

حرکت صفحه ای به روش پارامتری





$$x_A = l\sin\theta\ ,\ y_B = l\cos\theta$$

$$V_A = \frac{dx_A}{dt} = \frac{d}{dt}(l\sin\theta) = l\dot{\theta}\cos\theta = l\omega\cos\theta$$

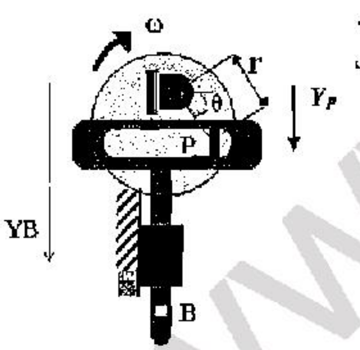
$$V_B = \frac{dy_B}{dt} = \frac{d}{dt}(l\cos\theta) = -l\dot{\theta}\sin\theta = -l\omega\sin\theta$$

$$a_A = \frac{dV_A}{dt} = \frac{d}{dt}(l\omega\cos\theta) = l\dot{\omega}\cos\theta - l\omega^2\sin\theta = l\alpha\cos\theta - l\omega^2\sin\theta$$

$$a_B = \frac{dV_B}{dt} = \frac{d}{dt}(-l\omega\sin\theta) = -l\dot{\omega}\sin\theta - l\omega^2\cos\theta = -l\alpha\sin\theta - l\omega^2\cos\theta$$

مثال : میله T شکل توسط یک پین به دیسکی که با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α درحال حرکت است . فاصله پین تا مرکز دیسک برابر r می باشد .

مطلوب است: $V_B = ?\ ,\ a_B = ?$

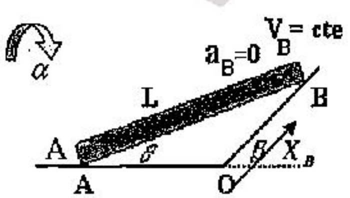


حل :

$$\begin{cases} y_B = y_p + C \\ y_p = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow y_B = r\sin\theta + C \Rightarrow V_B = \frac{dy_B}{dt} = r\omega\cos\theta \Rightarrow a_B = \frac{dV_B}{dt} = r\alpha\cos\theta - r\omega^2\sin\theta$$

مثال : میله AB با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α در حال حرکت است .

مطلوب است : $\vec{V}_E = ?\ ,\ a_E = ?$

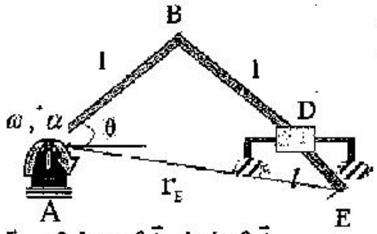


حل :

$$\frac{X_B}{Sin\theta} = \frac{L}{Sin\beta} \Rightarrow V_B = \frac{dX_B}{dt} = \frac{L\omega Cos\theta}{Sin\beta} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{V_B Sin\beta}{LCos\theta}$$

$$\Rightarrow \alpha_{AB} = \dot{\omega}_{AB} = \frac{V_B Sin\beta}{L} \times \frac{\omega_{AB} Sin\theta}{Cos^2\theta} = \frac{V^2_B Sin^2\beta}{L^2 Cos^3\theta} Sin\theta$$

مثال : میله AB با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α در حال حرکت است .
مطلوب است : $\vec V_E=?\ ,\ \vec a_E=?$



حل :

$\vec r_E = 3\,l\cos\theta\,\vec i - l\sin\theta\,\vec j$

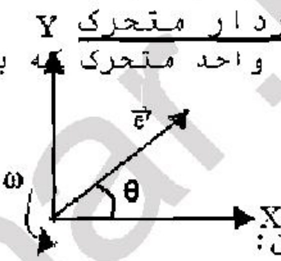
$\vec V_E=\frac{d}{dt}\vec r_E\quad,\quad \vec a_E=\frac{d\vec V_E}{dt}$

$\Rightarrow\ \vec V_E=-3l\omega\sin\theta\,\vec i-l\omega\cos\theta\,\vec j$

$\Rightarrow \vec a_E=-3l(\dot\omega\sin\theta+\omega^2\cos\theta)\vec i-l(\dot\omega\cos\theta-\omega^2\sin\theta)\vec j=-3l(\alpha\sin\theta+\omega^2\cos\theta)\vec i-l(\alpha\cos\theta-\omega^2\sin\theta)\vec j$

مشتق بردار متحرک

بردار واحد متحرک که با سرعت زاویه ای ω در حال دوران می باشد
$\vec e=$



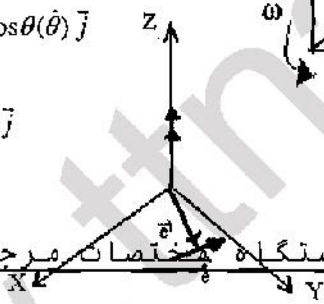
$\vec e=\cos\theta\,\vec i+\sin\theta\,\vec j$

$\frac{d\vec e}{dt}=\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec i+\sin\theta\,\vec j)=-\sin\theta(\dot\theta)\,\vec i+\cos\theta(\dot\theta)\,\vec j$

بنابراین:

$\Rightarrow|\dot e|=\omega\qquad \frac{de}{dt}=\dot{\vec e}=-\omega\sin\theta\,\vec i+\omega\cos\theta\,\vec j$

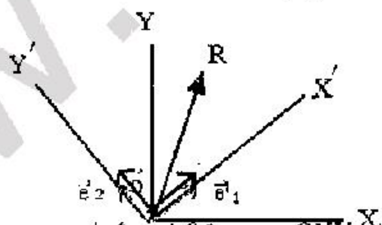
$\Rightarrow\frac{d\vec e}{dt}=\dot\omega\times\dot e$



بردار در دستگاه مختصات مرجع متحرک

$\vec R=R_x\vec i+R_y\vec j=R_1\vec e_1+R_2\vec e_2$

$\frac{d\vec R}{dt}=\frac{d}{dt}(R_1\vec e_1+R_2\vec e_2)=\dot R_1\vec e_1+R_1\dot{\vec e}_1+\dot R_2\vec e_2+R_2\dot{\vec e}_2$



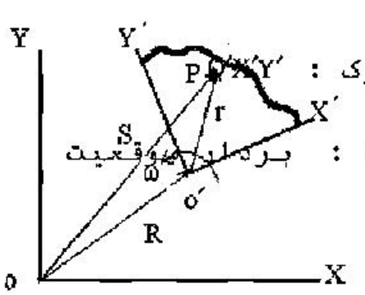
که در این روابط OXY دستگاه ثابت و OX′Y′ دستگاه متحرک و $\vec i,\vec j$ بردارهای یکه در دستگاه ثابت و $\vec e_1,\vec e_2$ در دستگاه متحرک است. پس داریم :

$\dot{\vec R}=(\dot R_1\vec e_1+\dot R_2\vec e_2)+R_1\dot{\vec e}_1+R_2\dot{\vec e}_2\ \Rightarrow\ \dot{\vec R}=\dot{\vec R}_1'+\vec\omega\times(R_1\vec e_1+R_2\vec e_2)\Rightarrow\ \dot{\vec R}=\dot R_1'+R_1(\vec\omega\times\vec e_1)+R_2(\vec\omega\times\vec e_2)$

$\Rightarrow\dot{\vec R}=\dot{\vec R}'+\vec\omega\times\vec R$ تئوري امگا

که دستگاه مطلق : $\dot{\vec R}$ و دستگاه متحرک: $\dot{\vec R}'$.

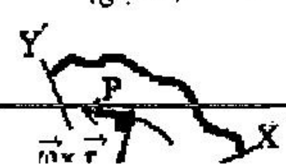
سرعت یک نقطه مادی:



دستگاه ثابت : OXY دستگاه متحرک : O′X′Y′

$\vec S$: بردار موقعیت نقطه P است.

$\vec R$: بردار موقعیت نقطه O′ (مطلق) و $\vec r$: بردار موقعیت نقطه P (نسبی)



www.ttmar.ir