منابع:

1. Dynamics of Structures — R.W. Clough, J. Penzein

2. Structural Dynamics theory and application — M. PAZ
([illegible])

3. Dynamics of structures — A. Chopra

4. Seismic Design Handbook — F. Naeim [illegible]
([illegible])

5. Structural Dynamics — R. Craig [illegible]

6. Theory of vibration with Applications — W. Thomson
([illegible])

7. Dynamics of Framed Structures — G. Rogers

8. Dynamic of Structures — J.L. Humar

نمره: میانترم 30٪ — پایانترم 56٪
[illegible] 3٪ — [illegible] 3٪
تحقیق 5٪ — [illegible] 3٪

سرفصل مطالب درس: مفاهیم و تعاریف [illegible]:

SDOF • سازه‌های [illegible]
• روش [illegible]

MDOF • سازه‌های [illegible]
1) [illegible]
2) [illegible]
• روش [illegible]
• روش [illegible]

- رفتار غیرخطی سازه‌ها

• مباحث جدید دینامیک سازه‌ها . کنترل فعال و غیرفعال

I) مفاهیم و تعاریف کلی در دینامیک سازه‌ها.

1 - انواع نیروها: نیروها به دو دسته تقسیم می‌شوند: ۱- استاتیکی:
۲- دینامیکی: نیرویی تابع زمان است.

نیروهای دینامیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: ۱- نیروهای معین: نیرویی است که بتوان آن را با روابط ریاضی معرفی کرد مانند: $P(t) = P_0 \sin \omega t$

۲- نیروهای نامعین: نیروهایی هستند که نمی‌توان با روابط ریاضی معین بیان نمود مانند نیروی زلزله و نیروی باد یا اثر امواج دریا. (البته می‌توان به صورت تقریبی آنها را معین کرد) با حالت [illegible] به صورت مطرح می‌شوند.

نیروهای معین به دو دسته تقسیم می‌شوند:
۱- تناوبی: که با پریود مشخص تکرار می‌شوند.
مانند نیروهای سینوسی و کسینوسی
۲- غیرتناوبی: نیرویی که تناوبی نباشد مانند: $P = e^{-t}$ و ...

اگر سازه‌ای تحت اثر بار دینامیکی قرار بگیرد از حالت تعادل خارج شده و به ارتعاش در می‌آید.

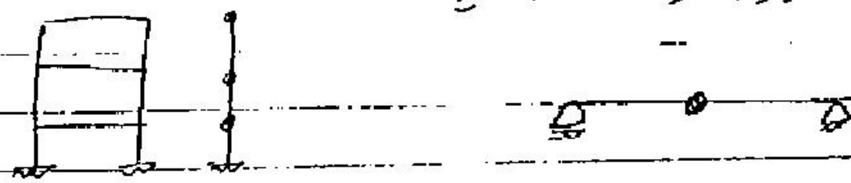
2 . انواع ارتعاش: ۱- ارتعاش اجباری (Forced vibration): ارتعاش تحت اثر نیرو.
۲- ارتعاش آزاد (Free Vib.): ارتعاش تحت شرایط اولیه

در دینامیک سازه‌ها منظور از شرایط اولیه جابجایی و سرعت اولیه می‌باشند.

3 . مدل‌سازی در دینامیک سازه‌ها و درجات آزادی:

مسائل اصلی در دینامیک سازه‌ها، جرم گسترده سازه‌ها می‌باشد.
حل به طریق کلاسیک معادلات دیفرانسیل پاره‌ای منجر می‌شود که برای اجتناب از حل این معادلات می‌توان جرم سازه را در برخی نقاط متمرکز فرض کرد. مانند شکل‌های زیر:

روش جرم متمرکز

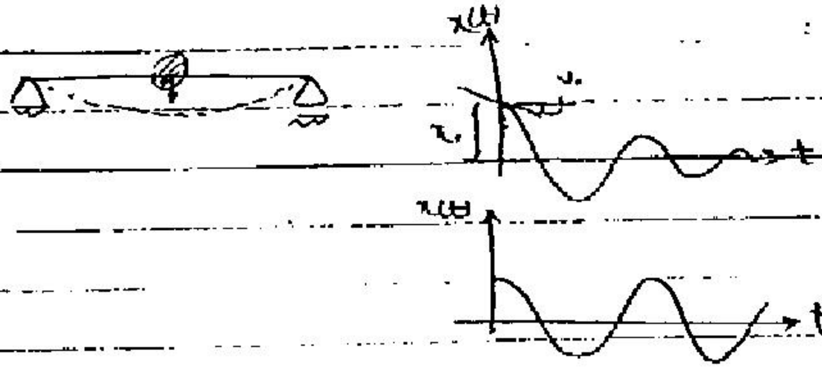


در روش پیشرفته جرم را به اجزای محدودی که بر اساس شکل سازه را مدل می‌کنیم. به این روش، روش محاسبات حجم پیوسته می‌گویند.
می‌توانیم در این روش به تعداد حرکت‌ها جابجایی‌های ممکن یا شکل سازه، درجه آزادی در نظر بگیریم.

درجه آزادی: پارامترهای مورد نیاز برای مشخص کردن رفتار سازه.

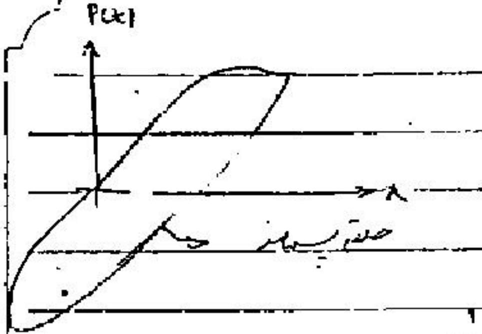
طبیعی است هرچه تعداد جرم‌های متمرکز و تعداد درجات آزادی را بیشتر کنیم، به رفتار واقعی سازه نزدیک‌تر می‌شویم.

4. میرایی (Damping):



این پدیده بیانگر نقش یک عامل مهم و ضروری در دینامیک سازه است. عاملی که باعث استهلاک انرژی حرکت می‌شود. به این عامل میرایی می‌گوییم.

میرایی در سازه‌ها از چهار جا نشأت می‌گیرد: 1. چسبندگی ذرات ماده (به این میرایی، میرایی ویسکوز نیز گفته می‌شود و متناسب با سرعت هستند. میرایی ویسکوز هستند) 2. فضای اطراف سازه (به این میرایی، میرایی خارجی می‌گوییم)
3. میرایی اصطکاکی وابسته به اصطکاک بین قطعات و اتصالات و...
4. میرایی سیکلی مانند Hysteresis



اگر سازه‌ای تحت اثر نیرو وارد منطقه غیرخطی شود سطح زیر نمودار بیانگر انرژی‌ای است که به سازه مستهلک شده است یعنی همان انرژی جذب شده به سازه. برای سنجیدن و این مسائل سازه باید وارد ناحیه غیرخطی شود و حلقه را بیابیم.

به این انرژی جذب شده، انرژی پسماند یا میرایی پسماند گوییم.

میرایی مورد نظر ما هیچ چهار میرایی گفته شده می‌باشد ولی کار مشکلی است. به دلیل به جای این چهار میرایی از میرایی لزجی استفاده می‌کنیم.

میراگر لزجی

ثابت میراگر: نیروی لازم برای ایجاد سرعت ثابت در میراگر لزجی می‌باشد. — c ثابت میراگر

میرایی لزجی ← $F = c\dot{x}$ (تابعی خطی از سرعت)

ثابت میراگر لزجی با روابط تجربی بدست می‌آید.

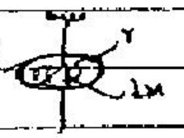
5. انواع روش‌های آنالیز دینامیکی سازه‌ها:

$x = x(t) \qquad \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \qquad \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)$

1) روش اول: استفاده از قانون نیوتن:

قانون دوم نیوتن: $\sum F = \underbrace{m\ddot{x}}_{F_I}$ نیروی اینرسی $\longrightarrow \sum F - m\ddot{x} = 0$

$\longrightarrow \sum F = 0$ شامل نیروی اینرسی



درجه آزادی دوران: $\sum M = I_{mo}\,\ddot{\theta} \qquad \theta = \theta(t)$

ممان اینرسی جرمی حول نقطه دوران O

$$I_{mo} = \int_m r^2\,dm$$

۲) روش دوم: با استفاده از روش کار مجازی

استاتیک: کار کلیه نیروهای وارد بر سازه به علت یک تغییر مکان مجازی کوچک برابر با صفر است.

در دینامیک: کار کلیه نیروهای وارد بر سازه (شامل نیروی اینرسی) به علت یک تغییر مکان مجازی کوچک برابر صفر است.

۳) روش انرژی:

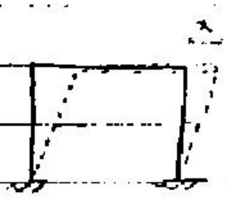
$$\underbrace{P}_{\text{انرژی پتانسیل}} + \underbrace{T}_{\text{انرژی جنبشی}} = cte$$

دوشنبه ۸۴/۷/۱۱

بخش اول: مدل‌های یک درجه آزادی Single Degree of Freedom Systems (SDOF)

می‌توان معادلات حرکت یک MDOF را به چند معادله SDOF (به منظور ساده‌سازی) تبدیل کرد. در هر معادله SDOF تنها یک متغیر وجود دارد.

بیشترین کاربرد SDOF در حل MDOF می‌باشد.



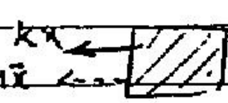
قابی را در نظر بگیرید که تنها حرکت جانبی آن مورد نظر است. این مدل، مدلی با یک درجه آزادی است.

در کلیه مراجع سختی معادل را با K نمایش می‌دهیم و تمام سختی را این گونه به صورت فنر تبدیل کرد. (K = مجموع سختی‌های ستون‌ها)

شرایط اولیه $t=0 \begin{cases} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{cases}$

معروف‌ترین روش حل مسائل دینامیکی در هر گام از روش انرژی است. برای این کار از قانون دوم نیوتن استفاده می‌کنیم.

$\sum F = 0$ شامل نیروی اینرسی



$\xrightarrow{\Sigma F=0} m\ddot{x}+kx=0$ یا $m\ddot{\theta}+k\theta=0$

با استفاده از معادلات دیفرانسیل می‌دانیم جواب معادله دیفرانسیل به صورت $x=Ge^{st}$ است که

G و s از شرایط مرزی تعیین می‌شوند.

با قرار دادن فرم عمومی جواب در معادله، مقادیر G و s بدست می‌آید:

$$s^2Ge^{st}\cdot m+kGe^{st}=0 \longrightarrow s^2=-\frac{k}{m}=-\omega^2$$

$$\longrightarrow s_{1,2}=\pm i\omega$$

$$\longrightarrow x=G_1e^{+i\omega t}+G_2e^{-i\omega t}$$

از طرفی داریم:

$$e^{\pm i\omega t}=\cos\omega t\pm i\sin\omega t$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x=G_1(\cos\omega t+i\sin\omega t)+G_2(\cos\omega t-i\sin\omega t)$$

$$\longrightarrow x=i(G_1-G_2)\sin\omega t+(G_1+G_2)\cos\omega t$$

در اینجا سیستم واقعی است. جواب آن نیز باید واقعی باشد پس باید رابطه‌ای بین G_1 و G_2 باشد تا i از معادله x حذف گردد. بنابراین G_1 و G_2 باید مزدوج هم باشند.

$$G_1,G_2=\alpha\pm i\beta$$

$$\longrightarrow x=A\sin\omega t+B\cos\omega t$$

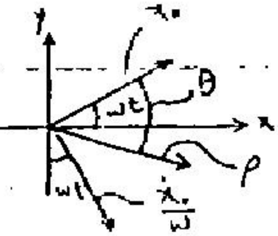
A و B از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

$$t=0 \longrightarrow x=B=x_0$$

$$t=0 \longrightarrow \dot{x}=A\omega=\dot{x}_0 \longrightarrow A=\frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$\longrightarrow \boxed{x=\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t+x_0\cos\omega t}$$

با دانستن جابجایی z به یک سازه به سادگی می‌توان پارامترهای دیگر مانند تنش را ... بدست آورد.

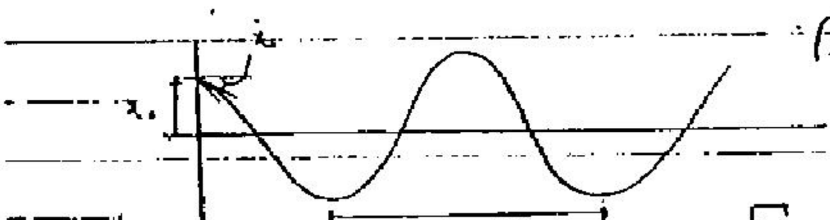


جواب بدست آمده در صفحه ی قبل:
در محور مختصات مقابل برابر است با
مجموع مقادیر دو بردار روی محور x
برای این کار برآیند دو بردار را پیدا کرده و تصویر آن
را بر روی محور x بدست می آوریم. پس داریم

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho\cos(\omega t-\theta)\\ \rho &= \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2+x_0^2}\\ \theta &= \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)\end{aligned}}$$

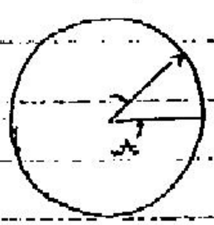
حال باید ρ و θ را تعیین کنیم:

بیشترین مقدار x برابر ρ است. این حسن را دارد که به سادگی می توان حداکثر جابجایی یا ρ را به آن دامنه جواب نیز می گوییم بدست آورد.
به θ زاویه اختلاف فاز می گوییم.



$T = \frac{2\pi}{\omega}$ زمان تناوب یا پریود یک دور کامل ، $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ω را فرکانس دایره ای (زاویه ای یا دورانی) و یا فرکانس طبیعی سازه می گوییم که واحد آن rad/s است.



اگر نقطه ای روی محیط دایره ای با سرعت زاویه ای ω به دوران بیفتد، پس از زمان t به اندازه ωt زاویه طی خواهد کرد که تصویر این حرکت بر محور x، همان حرکت رفت و برگشتی خواهد شد.

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ با واحد ($\frac{دور}{sec}$) را فرکانس می نامیم.

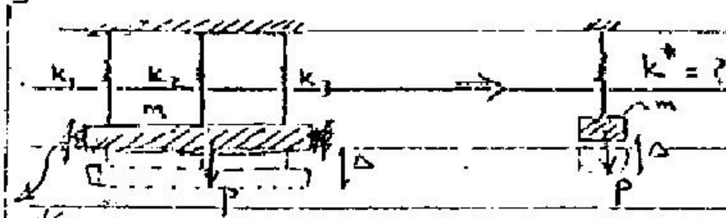
منظور از فرکانس تعداد دورهای در ثانیه می باشد. این فرکانس از مشخصات سازه است و با سختی سازه رابطه مستقیم دارد. بنابراین فرکانس می تواند مشخص کننده ی میزان سختی یک سازه باشد.

باید دقت کنیم که پاسخ حرکت بدست آمده بدون در نظر گرفتن اثر میرایی می باشد.

فنرهای معادل:

I) فنرهای موازی: سختی فنر معادل $k^* = ?$

فنرها با Δ یکسان



برای جلوگیری از دوران

$$\Delta = cte$$

$$F_1 = k_1 \Delta \qquad P = k^* \cdot \Delta \quad (I)$$

$$F_2 = k_2 \Delta$$

$$F_3 = k_3 \Delta$$

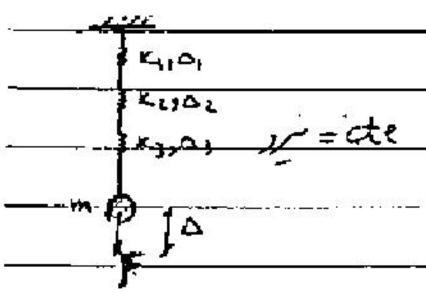
$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\underbrace{F_1 + F_2 + F_3 + \cdots}_{P} = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) \Delta$$

$$\Longrightarrow P = \left(\sum k_i\right) \Delta \quad (II)$$

$$(I), (II) \longrightarrow \boxed{k^* = \sum k_i}$$

II) حالت سری:



نیرو $= cte$

فنرها با F یکسان

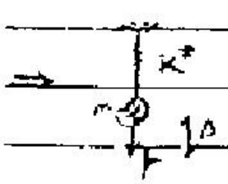
$$F = k_1 \Delta_1 \longrightarrow \Delta_1 = \frac{F}{k_1}$$

$$F_2 = k_2 \Delta_2 \longrightarrow \Delta_2 = \frac{F}{k_2}$$

$$F_3 = k_3 \Delta_3 \longrightarrow \Delta_3 = \frac{F}{k_3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\longrightarrow \underbrace{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots}_{\Delta} = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots\right)$$



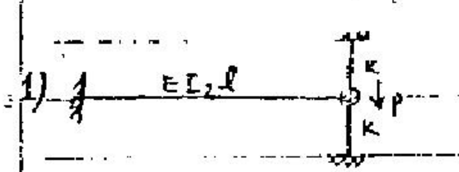
$$\longrightarrow \Delta = F\left(\sum \frac{1}{k_i}\right) \quad (III)$$

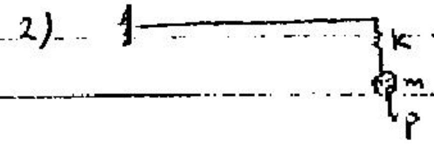
فنر معادل: $F = k^* \Delta \longrightarrow \Delta = \dfrac{F}{k^*} \quad (IV)$

$$(III), (IV) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{k^*} = \sum \frac{1}{k_i}}$$

سختی: مقدار نیروی لازم در نقطه‌ای از جهت ایجاد تغییر شکل واحد در نقطه‌ای از سیستم مفروض که در سایر نقاط ثابت باشد. (نیرو می‌تواند لنگر و جابجایی می‌تواند دوران باشد.)

مثال: $\omega = ?$

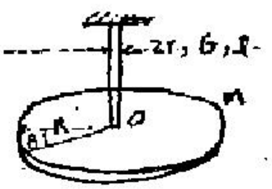




1) $\Delta = cte \longrightarrow k^* = \sum k \longrightarrow k^* = 2k + \frac{3EI}{\ell^3} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k + 3EI/\ell^3}{m}}$

2) $P = cte \longrightarrow \frac{1}{k^*} = \sum \frac{1}{k} \longrightarrow \frac{1}{k^*} = \frac{1}{k} + \frac{\ell^3}{3EI} \longrightarrow k^* = \frac{3EIk}{k\ell^3 + 3EI}$

$$\longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{3EIk}{m(k\ell^3 + 3EI)}}$$



مثال: دیسک صلبی را تحت تغییر زاویه‌ای حول محور قائم آن رها می‌کنیم، هدف یافتن فرکانس ارتعاش است. $\omega = ?$

رابطه تعادل: $\sum M = 0$

$$I_{mo} \cdot \ddot{\theta} + M_T = 0 \qquad M_T = \frac{GJ}{\ell}\theta$$

سختی پیچشی ستون

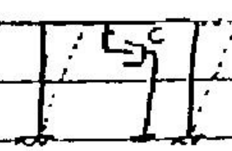
$J = \frac{\pi r^4}{2} \qquad I_{mo} = \int r^2 dm \xrightarrow{\text{برای صفحه دایره}} I_{mo} = \frac{1}{2} m R^2$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} m R^2}_{m} \ddot{\theta} + \overbrace{\frac{G\left(\frac{\pi r^4}{2}\right)}{\ell}}^{K} \theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{G\left(\frac{\pi r^4}{2}\right)}{\ell\left(\frac{1}{2} m R^2\right)}} = \frac{r^2}{R}\sqrt{\frac{\pi G}{m\ell}}$$

$\theta = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ اگر شرایط اولیه داده می‌شد A و B قابل محاسبه بود

SDOF با میرایی:

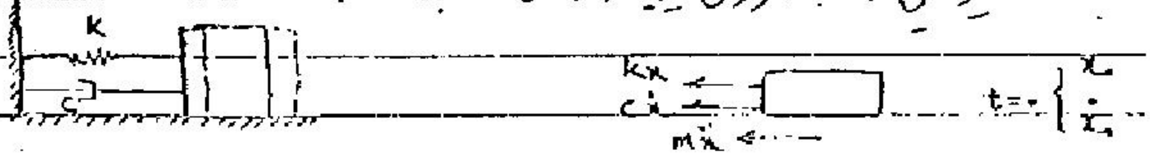


برای منظور کردن میرایی مصالح و سیستم میرایی در سازه منظور می‌کنیم

این میراگر و سیلندر متناسب با سرعت سازه، نیروی میرایی آن را وارد می‌کند.

x واحد جابجایی (تقسیم بر واحد سرعت) است.

معادله دیفرانسیل حرکت با در نظر گرفتن میرایی (ارتعاش آزاد برای SDOF):



با استفاده از قانون نیوتن داریم:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \\ x = Ce^{st} \end{cases}$$ رابطه کلی جواب

در معادله $\longrightarrow m(\cancel{C}s^2\cancel{e^{st}}) + (\cancel{C}s\,\cancel{e^{st}})c + (\cancel{Ce^{st}})k = 0$

$\longrightarrow ms^2 + cs + k = 0 ; s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \;,\; \zeta = \frac{c}{\underbrace{2m\omega}_{C_{cr}}} =$ نسبت میرایی (درصد میرایی)

C_{cr}: میرایی بحرانی

$\longrightarrow s^2 + 2\omega\zeta s + \omega^2 = 0$

$\longrightarrow s_1, s_2 = -\zeta\omega \pm \sqrt{(\zeta\omega)^2 - \omega^2} = \omega\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$

برای جواب‌های بالا، سه حالت ممکن است رخ دهد.

• حالت اول: نیروی میرایی صفر باشد یعنی $\zeta = 1$ که به آن میرایی بحرانی می‌گوییم.

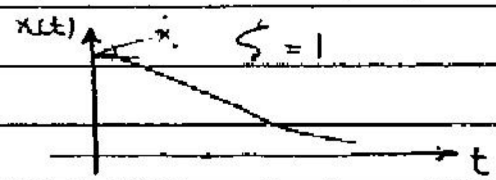
$\zeta = 1 \longrightarrow s_1 = s_2 = -\zeta\omega = -\omega$

در معادله $\longrightarrow x = G_1 e^{-\omega t} + G_2 t e^{-\omega t} = e^{-\omega t}(G_1 + G_2 t)$

G_1 و G_2 از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

$G_1 = x_0 \qquad G_2 = \omega x_0 + \dot{x}_0$

$\longrightarrow x = e^{-\omega t}\left(x_0 + (\omega x_0 + \dot{x}_0)t\right) = \left(x_0(1 + \omega t) + \dot{x}_0 t\right)e^{-\omega t}$



حالتی که $\zeta = 1$ ، نامناسب‌ترین حالت برای حالت زلزله ( ) می‌باشد.

• حالت دوم: میرایی بالاتر از حد (میرایی زیاد): زیر رادیکال مثبت ($\zeta>1$) یا $c>2m\omega$

Over Damping

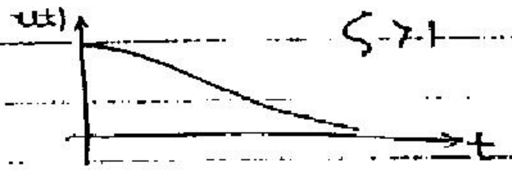
با تعریف $\omega^* = \omega\sqrt{\zeta^2-1}$ (فرکانس میرایی زیاد)

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega \pm \omega^*$$

$$\Longrightarrow x = G_1 e^{(-\zeta\omega+\omega^*)t} + G_2 e^{(-\zeta\omega-\omega^*)t} = e^{-\zeta\omega t}\left(G_1 e^{\omega^* t} + G_2 e^{-\omega^* t}\right)$$

می‌توان برحسب Sinh و Cosh به صورت زیر نوشت:

$$x = e^{-\zeta\omega t}\left(G_1 \sinh\omega^* t + G_2 \cosh\omega^* t\right)$$



این حالت نیز مناسب برای نوسان حالت واقعی نیست.

• حالت سوم: میرایی پایین‌تر از حد (میرایی کم)، زیر رادیکال منفی $\zeta<1$ یا $c<2m\omega$

(فرکانس میرایی کم) $\omega_D = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega \pm i\omega_D$$

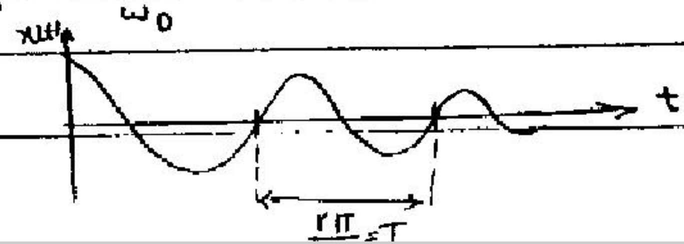
$$x = G_1 e^{(-\zeta\omega+i\omega_D)t} + G_2 e^{(-\zeta\omega-i\omega_D)t}$$

$$= e^{-\zeta\omega t}\left(G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t}\right)$$

$$= e^{-\zeta\omega t}\left(A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)\right)$$

$$t=0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{\dot{x}_0 + x_0\zeta\omega}{\omega_D} \qquad B = x_0$$

$$\Longrightarrow x = e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\zeta\omega}{\omega_D}\sin\omega_D t + x_0\cos\omega_D t\right)$$

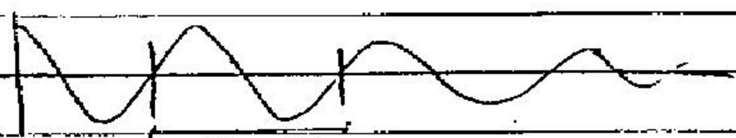


این حالت می‌تواند نشان‌دهنده‌ی یک نوسان واقعی باشد (یعنی برای یک نوسان واقعی باید $c < 2m\omega$ باشد)

چهارشنبه ۸۴/۷/۱۳

در جلسه قبل دیدیم که اگر $\zeta = \frac{c}{2m\omega} < 1$ باشد حرکت رفت و برگشتی خواهیم داشت و جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$x = e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}{\omega_D}\sin(\omega_D t) + x_0\cos(\omega_D t)\right)$$



$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$$

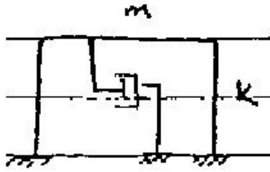
$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$$

* با توجه به اینکه ζ در حدود 10٪ است مشاهده می‌شود که $\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{0.99} \approx 1$ یعنی $\omega_D \approx \omega$

می‌توان رابطه $x = e^{-\zeta\omega t}\ldots$ را به صورت سینوسی تنها نوشت:

$$\begin{cases} \rho = \left[\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}{\omega_D}\right)^2 + (x_0)^2\right]^{1/2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega x_0}{x_0\,\omega_D}\right) \end{cases} \Rightarrow x = \rho\, e^{-\zeta\omega t}\cos(\omega_D t - \theta)$$

مثال: $\omega_D = ?$ معادله حرکت = ؟

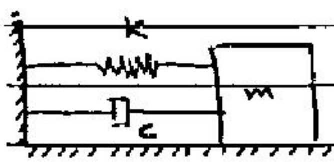


مفروضات:

$\omega = 5\ \text{rad/sec}$ $\quad \zeta = 20\%$ $\quad x_0 = 0$ $\quad \dot{x}_0 = 20\ \text{cm/sec}$

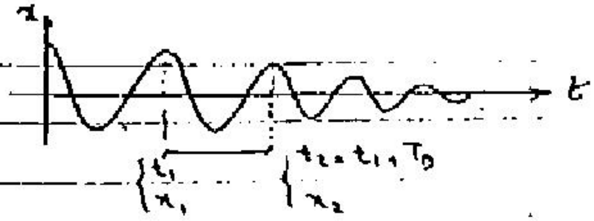
$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\zeta^2} = 5\sqrt{1-0.2^2} = 4.90$$

با جایگزین کردن در رابطه $x = e^{-\zeta\omega t}\ldots$ داریم:



$$x = e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega \cancel{x_0}}{\omega_D}\sin\omega_D t + \cancel{x_0}\cos\omega_D t\right)$$

$$\rightarrow x = e^{-0.2\times 5t}\cdot\left(\frac{20}{4.9}\right)\sin(4.9t) = 4.08\, e^{-t}\sin(4.9t)$$



نمودار مقابل منحنی ζ برحسب x_1 و x_2 .

اگر در لحظه‌ی t_1 جابجایی x_1 و در لحظه‌ی $t_2=t_1+T_D$ جابجایی x_2 باشد .

جابجایی در رابطه‌ی سینوسی داریم :

$$x=\rho\, e^{-\zeta\omega t}\cdot\cos(\omega_D t-\theta)$$

$$T_D=\frac{2\pi}{\omega_D}$$

$$t_1, x_1 \rightarrow x_1=\rho e^{-\zeta\omega t_1}\cos(\omega_D t_1-\theta)$$

$$t_1+T_D, x_2 \rightarrow x_2=\rho\, e^{-\zeta\omega(t_1+T_D)}\cdot\cos(\omega_D(t_1+T_D)-\theta)$$

$$x_2=\rho\, e^{-\zeta\omega(t_1+T_D)}\cdot\cos(\omega_D t_1+2\pi-\theta)$$

$$= \quad '' \quad \cdot\cos(\omega_D t_1-\theta)$$

حال از تقسیم $\frac{x_1}{x_2}$ داریم :

$$\frac{x_1}{x_2}=e^{\zeta\omega T_D}=e^{\zeta\omega\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}}}=e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

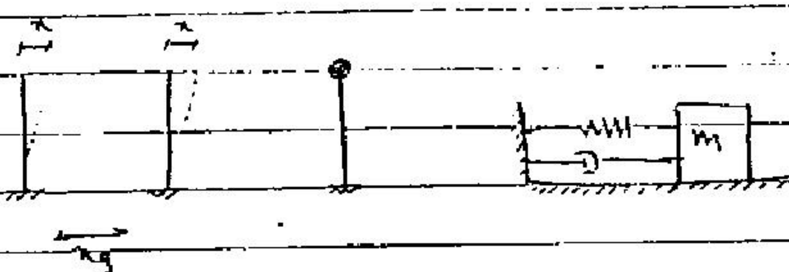
$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2}=e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

حال اگر با تقریب خوبی $\sqrt{1-\zeta^2}=1$ در نظر گرفته شود داریم

$$\frac{x_1}{x_2}=e^{2\pi\zeta} \Rightarrow 2\pi\zeta=\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$\Rightarrow \zeta=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

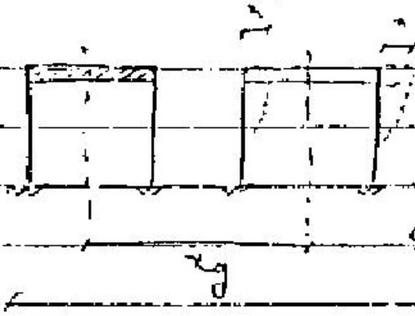
III) انواع تحریک سازه‌ها :



I) حرکات زمین

i) نیروی معادل زلزله :

با جابجایی زمین ، قاب جابجا می‌شود . علاوه بر این حرکت سر جابجایی (تغییر مکان) هم دارا است .



برش ستون‌ها با تغییر شکل } $\leftarrow kx = F_S$ ، $\leftarrow c\dot{x} = F_D$ — میرایی

جابجایی زمین + اینجا جابجایی کل مطرح است $\leftarrow$ --- $m(\ddot{x}+\ddot{x}_g) = F_I$ اینرسی

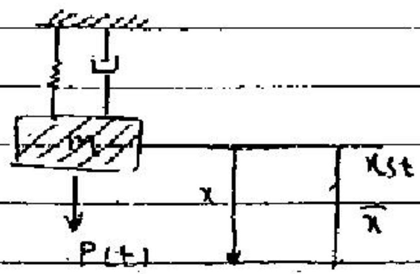
هم تغییر شکل هم جابجایی زمین

معادله دیفرانسیل حرکت: $m(\ddot{x}+\ddot{x}_g) + c\dot{x} + kx = 0$

$(F_I+F_D+F_S=0)$ $\quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g$

نیروی معادل زلزله چنین خواهد شد: $\boxed{m\ddot{x}_g}$

۲) اثر وزن در معادله دیفرانسیل حرکت:



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) + W$$

اگر $x = x(t)$ و $\bar{x} = \bar{x}(t)$ باشند داریم:

$x = \bar{x} + x_{st}$ (جابجایی استاتیکی تحت اثر وزن W) : $x_{st} = \dfrac{W}{k}$

$x = \bar{x} + x_{st} \longrightarrow \dot{x} = \dot{\bar{x}} \;,\; \ddot{x} = \ddot{\bar{x}}$

$$\longrightarrow m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + k(\bar{x} + x_{st}) = P(t) + kx_{st}$$

$$\boxed{m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = P(t)}$$

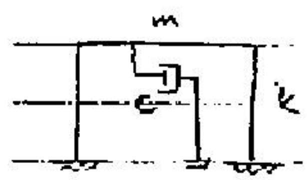
دوشنبه ۸۴/۷/۱۸

IV) ارتعاش تحت اثر بارهای هارمونیکی :

۱) ارتعاش تحت اثر نیروی سینوسی با میرایی :

نیروهای سینوسی، مدلهای مناسبی برای مدل‌سازی برخی نیروهای واقعی موجود در طبیعت می‌باشند. هم‌چنین هنگام استفاده از سری‌های فوریه این مدل نیروها مناسب می‌باشند.

حالت بارگذاری $P = P_0 \sin\bar{\omega}t$ که در آن $\bar{\omega}$ فرکانس بارگذاری است، سیستم یک درجه آزادی سازه را در نظر می‌گیریم



معادله دیفرانسیل حرکت سازه را می‌نویسیم :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin\bar{\omega}t$$

$$\longrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{P_0}{m}\sin\bar{\omega}t$$

با قرار دادن $\frac{c}{2m\omega} = \zeta$ داریم :

$$\ddot{x} + 2\omega\zeta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m}\sin\bar{\omega}t$$

با استفاده از معادلات دیفرانسیل می‌دانیم که جواب معادله فوق از دو قسمت (جواب عمومی و جواب خصوصی) تشکیل شده است.

$$x = \underbrace{x_c}_{\text{جواب عمومی}} + \underbrace{x_p}_{\text{جواب خصوصی}}$$

از جلسه قبل می‌دانیم :

- $x_c = e^{-\zeta\omega t}(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t)$

از طرفی برای جواب خصوصی داریم :

- $x_p = G_1 \sin\bar{\omega}t + G_2\cos\bar{\omega}t$

با جایگذاری x_p در معادله دیفرانسیل، G_1 و G_2 به صورت زیر بدست می‌آیند :

$$\begin{cases} G_1 = \dfrac{P_0}{k} \times \dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \\[2ex] G_2 = \dfrac{P_0}{k} \times \dfrac{-2\zeta\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \end{cases}$$

$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$ نسبت فرکانس

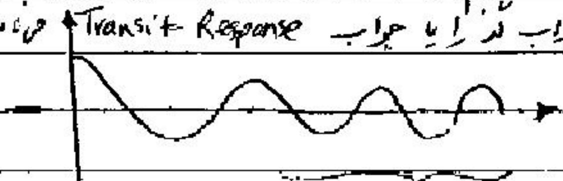
از آنجا که معادله حاصل از قرار دادن جواب خصوصی در معادله دیفرانسیل باید به ازای تمامی مقادیر زمان برقرار باشد، با اتحاد ضرایب جملات مشابه از یک طرف مجهول G_1 و G_2 بدست می‌آیند.

$$\Rightarrow x = e^{-\xi\omega t}\left(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\right) + \frac{P_0}{k}\left\{\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\bar{\omega}t - 2\xi\beta\cos\bar{\omega}t\right]\right\}$$

که A و B با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

قسمت دوم جواب را جواب دائم یا جواب Steady-State می‌نامند.

قسمت اول جواب را جواب گذرا یا جواب Transit Response می‌نامند.



سینوسی - کسینوسی

چون نیروی خارجی $P(t) = P_0 \sin\bar{\omega}t$ بر سازه اعمال می‌شود، بر خلاف ارتعاش آزاد این حرکت به سمت صفر نخواهد رفت.

از ادغام سینوس و کسینوس داریم:

$$x_s = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

$$\rho = \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)^2+(-2\xi\beta)^2\right]^{1/2}$$

(حداکثر جواب)

$$\Rightarrow \rho = \frac{P_0}{k}\left[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2\right]^{-1/2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{-2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

پارامتر بدون بعد D را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D = \frac{\rho}{(P_0/k)}$$

$$\Rightarrow D = \left[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2\right]^{-1/2}$$

که آن را ضریب بزرگنمایی می‌گوییم.

Dynamic Magnification Factor

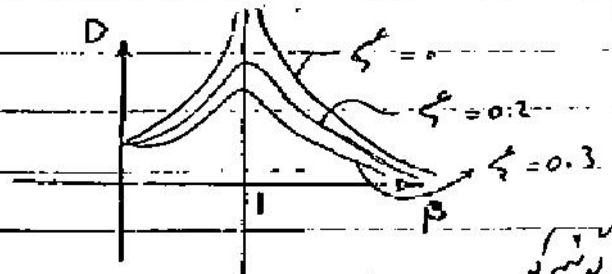
$\frac{P_0}{k}$ جابجایی استاتیکی سازه (جابجایی ماکزیمم) تحت اثر بار سینوسی، و D ضریب بزرگنمایی این مقدار جابجایی ماکزیمم دینامیکی را به ما می‌دهد.

$$\rho = \left(\frac{P_0}{k}\right)D$$

افزایش ζ موجب افزایش حد پایینی می‌شود و این مقدار به β (نسبت فرکانس‌ها) ارتباط دارد.

۲) حالت حدی (تشدید Resonant):

نمودار D-β را رسم می‌کنیم:



$\beta=1 \Rightarrow D=\frac{1}{2\zeta}$ (حالت تشدید)

حالت $\beta=1$ را حالت حدی (تشدید) گوییم که

حالت خطرناکی برای سازه‌های ساختمانی می‌باشد.

سازه‌ها باید طوری ساخته شوند که فرکانس آنها با فرکانس نیروی خارجی تفاوت کند. یکی از نیروهای خارجی نیروی زلزله است.

ساختن چنین سازه‌هایی تحت اثر زلزله کاملی می‌باشد که دلایل استفاده کمی از آنها وجود دارد و ضعیف زلزله کمی متغیر از آن هم می‌باشد.

همچنین مشکل دیگر این است که در سیستم‌ها باید عضوی به سازه قرار داد تا فرکانس سازه را از فرکانس زلزله دور کند. این کار با تغییر دادن سختی سازه انجام می‌شود. یکی از این روش‌ها استفاده از بادبندهای مختلف با قابلیت تغییر علم بارگذاری آنها می‌باشد. (به سیستم‌های ساخته شده از این نوع خودتنظیم می‌گویند)

البته برای تغییر فرکانس سازه می‌توان از تغییر جرم نیز استفاده کرد اما تقریباً غیرعملی و مشکل است. برای یافتن D حداکثر داریم:

$$\frac{dD}{d\beta}=0 \Longrightarrow \beta_{p_u}=\sqrt{1-2\zeta^2} \quad , \quad D_{p_{max}}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

با توجه به اینکه ζ کوچک است، در محاسبات مشاهده می‌شود که D حداکثر تقریباً با D در حالت تشدید برابر است.

* اگر حل جواب معادله دیفرانسیل را در حالت تشدید بنویسیم (در حالت خاص شرایط اولیه صفر داشته باشیم) داریم:

$$t=0 \begin{cases} x_0=0 \\ \dot{x}_0=0 \end{cases}$$

با قرار دادن $\beta=1$ در معادلات x و ساده کردن داریم:

$$\longrightarrow \text{حالت حدی}: \quad x=\frac{1}{2\zeta}\cdot\frac{P_0}{k}\left[\left(e^{-\zeta\omega t}-1\right)\cos\omega t\right]=\frac{P_0}{k}\cdot R$$

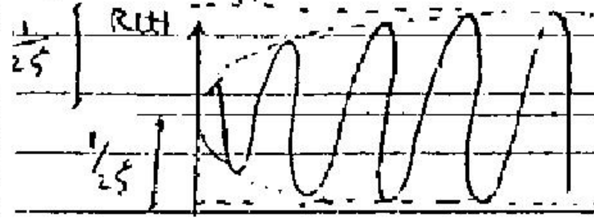
پارامتر R(t) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R(t)=\frac{x(t)}{(P_0/k)}$$

$$\longrightarrow R(t)=\frac{1}{2\zeta}\left[\left(e^{-\zeta\omega t}-1\right)\cos\omega t\right]$$

حالت D ، R(t) این است که D یک مقدار ثابت است ... منحنی R(t) را رسم می‌کنیم.

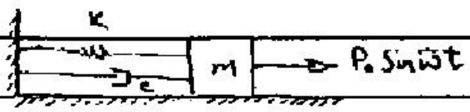
R(t) را ضریب نسبت جواب (Response Ratio Factor) می‌نامیم. و نمودار آن بر حسب زمان به صورت زیر است:



که نشان دهنده بی‌حرکتی حرکت و برگشتی با دامنه ثابت است.

با ترم ۲ معادله فوق حرکت زمان می‌گذرد از شرایط اولیه کاهش می‌یابد.

مثال: حرکت دائم جواب و ... مطلوبست



$W = 49\,N$

$k = 45\ N/cm = 4500\ N/m$

$C = 60\ N.Sec/m \qquad P_0 = 25N$

$\rho_{Res} = ? \qquad \rho_{max} = ?$

a) $\rho_{res} = D_{res} \cdot \frac{P_0}{k}\ , \quad D_{res} = \frac{1}{2\zeta} \qquad m = \frac{49}{9.81}\ kg$

$\zeta = \frac{c}{2m\omega}\ , \quad \frac{4500}{49/9.81} = \frac{k}{m} = \omega^2 \longrightarrow \omega = 30\ rad/sec$

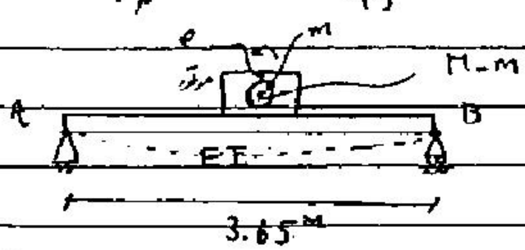
$\zeta = \frac{60}{2\left(\frac{49}{9.81}\right)(30)} = 0.2 \longrightarrow D_{res} = \frac{1}{2(0.2)} = 2.5$

$\rho_{res} = 2.5\ \frac{25}{45} = 1.39^{cm}$ در حالت تشدید

b) $D_{p_{Peak}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2(0.2)\sqrt{1-(0.2)^2}} = 2.55$

$\longrightarrow \rho_p = 2.55\ \frac{25}{45} = 1.44^{cm}$

موتور در حال ...

مثال:

W (وزن موتور) = 72000N

w (m جرم وزن) = 180N

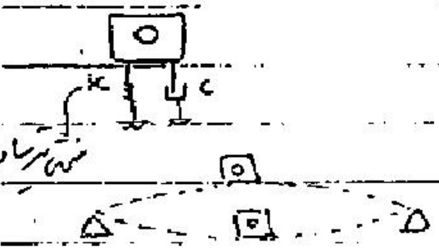
e (m خروج از مرکز) = 25.4 cm

E (تیر) $= 21\times10^6\ N/cm^2$ $\qquad I$ (ممان تیر) $= 5360\ cm^4$

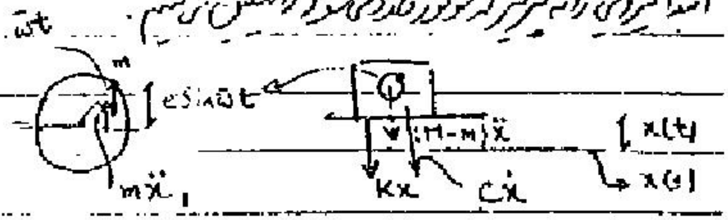
f (سرعت دوران موتور) $= 300\ rpm$, $\zeta = 10\%$

دامنه ارتعاش تیر = ؟ (نسبت دائم جواب را در نظر بگیرید) ...
لازم (صرفاً سهم پایدار) ...

مدل تیر ساده در معادل



ابتدا نیروی وارده بر تیر از موتور را که وارد می‌شود را تعیین می‌کنیم.



$\bar{\omega}$: سرعت دورانی موتور

m جابجایی جرم : $x_1 = x(t) + e \sin(\bar{\omega} t)$

m نیروی اینرسی جرم : $m\ddot{x}_1 = m(\ddot{x} - e\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t)$

در اینجا نیروی ... را در جهت حرکت جرم در نظر می‌گیریم.

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow (M-m)\ddot{x} + m(\ddot{x} - e\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t) + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\longrightarrow M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \underbrace{m e \bar{\omega}^2}_{P_0} \sin \bar{\omega} t$$

نسبت ... معادله ... در معادله ... می‌باشد.

در این قسمت دائم جواب لازم:

$$\underset{(\frac{P_0}{k})}{\rho} = \left[(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2\right]^{-1/2} \quad , \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$$\bar{\omega} = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{300}{60}\right) = \boxed{31.41\ \text{rad/sec}} \quad , \quad k = \frac{48EI}{l^3}$$

$$\longrightarrow k = 109864\ \text{N/cm} = 1098.64 \times 10^4\ \text{N/m}$$

... k ... $\bar{\omega}$ ...

$$M = \frac{72000}{9.81} = 7339.45\ \text{kg}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1098.64 \times 10^4}{7339.45}} = \boxed{38.68\ \text{rad/sec}}$$

$$\longrightarrow \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{31.41}{38.68} = 0.81$$

$$P_0 = \left(\frac{180}{9.81}\right)(0.254)(31.41)^2 = 4598\ N$$

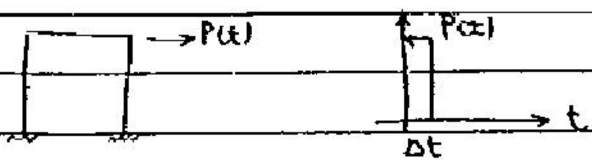
$$\longrightarrow \rho = \frac{4598}{1098.64\times10^{4}}\left[(1-0.811^2)^2+(2\times0.1\times0.811)^2\right]^{-1/2}$$

$$\longrightarrow \rho = 1.1^{\,mm}$$

تمرینات اول ریاضیات (سری سوم) تحویل شود (تحویل همینا).

دوشنبه ۸۴/۷/۲۵

۷- ارتعاش SDOF تحت بار نامشخص - انتگرال دوهامل   Duhamel's Integral



۱) اثر ضربه بر SDOF - بدون میرایی:

از انتگرال دوهامل برای بارهای متغیر دلخواه می‌توان استفاده کرد. این روش فقط تا زمانی که رفتار سازه خطی باشد.

می‌دانیم جرم × تغییرات سرعت برابر است با سطح زیر منحنی نیرو: $m\dot{x} = P(t).\Delta t$

فرض می‌کنیم سرعت اولیه صفر است که تغییرات سرعت ... شود

پس سرعت تغییر اثر ضربه برابر است با: $\dot{x} = \frac{P(t).\Delta t}{m}$ ،

$$t=0 \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 = \frac{P(t)\Delta t}{m} \end{cases}$$

حل حرکت آزاد بدون میرایی داشتیم:

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t$$

در جواب مقادیر اولیه را قرار می‌دهیم:

$$\boxed{x = \frac{P(t)\Delta t}{m\omega}\sin\omega t}$$

اگر رفتار سازه خطی باشد می‌توان از قانون جمع آثار استفاده کرد. لذا اگر در لحظه $t=0$ علاوه بر شرایط اولیه جابجایی و سرعت داشته باشیم می‌توانیم آنها را جداگانه محاسبه کنیم و جوابها را با هم جمع کنیم. همچنین می‌توان جابجایی اولیه را صفر (مربوط به ضربه) و سرعت اولیه را با $\frac{P(t)\Delta t}{m}$ (مربوط به ضربه) جمع کنیم.

ضربه به صورتهای مختلف مدل می‌شود:

۲) اثر ضربه بر SDOF - با میرایی:

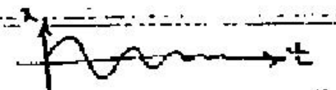
این بار از جواب کلی که برای ... با میرایی بدست آورده بودیم، استفاده می‌کنیم:

$$x = e^{-\xi\omega t}(A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t)$$

$$t=0 \longrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \dot{x} = \frac{P(t).\Delta t}{m} \end{cases} \Longrightarrow x_0 = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$\dot{x} \text{ مشتق‌گیری} \Longrightarrow A = \frac{P(t).\Delta t}{m\omega_D}$$

$-\xi\omega t$ ... P(t).Δt ... $\boxed{P(t).\Delta t \; e^{-\xi\omega t} \ldots}$



واضح است جواب به صورت مستهلک شونده خواهد بود

در این روش دقت را می‌توان با استفاده از گرفتن زمان کوتاه‌تر بیشتر کرد مثلاً $\frac{1}{5}$ یا $\frac{1}{10}$ زمان تناوب SDOF می‌توان گرفت

تا دقت بیشتر برود (روش تقریبی است).

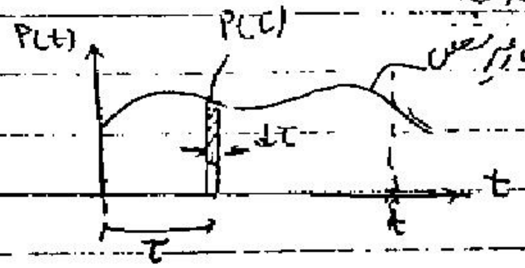
هر چه Δt کوچکتر باشد جواب

$$x = \frac{P(t)\,\Delta t}{m\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sin\omega_D t$$

درست‌تر است. پس

این روش برای نیروهای متغیر با زمان مناسب است.

۳ـ انتگرال دوهامل (بار غیر مشخص)



جواب در لحظه t برای ضربه $P(\tau)d\tau$

$$dx = \frac{P(\tau)\,d\tau}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)$$

$$\Longrightarrow x = \int_0^t \frac{P(\tau)\,d\tau}{m\omega_D} \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau))$$

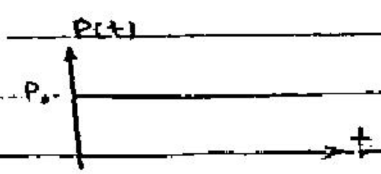
$$\longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P(\tau)\, e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau}$$

اینجا متغیر ما τ است.

برای اینکه dx را بدست آوریم جمع آثار استفاده کردیم و همچنین سرعت و تغییر مکان اولیه (در لحظه τ) را نادیده در نظر گرفتیم. انتگرال دوهامل یعنی اثر همه ضربه‌های قبلی را هم در نظر گرفته‌ایم. چون جمع آثار، سیستم ما (سازه) باید خطی باشد.

معمولاً در زلزله نیروی زلزله به صورت تصادفی می‌باشد و $P(t)$ قابل بیان نیست چرا که اطلاعات ما به صورت رکوردهای گسسته می‌باشد. بنابراین عملاً انتگرال دقیق نیست و روش‌های عددی قابل محاسبه خواهد بود.

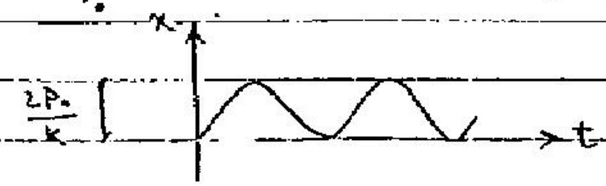
مثال:



$$x = \frac{1}{m\omega_D}\int_{\tau} P(\tau)\, e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cdot \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau$$

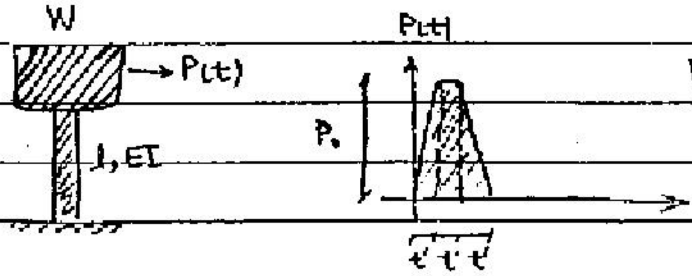
حال برای سیستم فوق اگر بخواهیم بار را در نظر بگیریم $\xi=0$ و انتگرال را برای این $P(t)=P_0$ به صورت ثابت در نظر بگیریم:

$$x = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P_0 \cdot \sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \frac{P_0}{k}(1-\cos\omega t)$$



یعنی اگر بار P_0 به صورت ناگهانی بر سیستم وارد شود، جابجایی ماکزیمم از حالت استاتیکی (کشش بار ثابت که میزان x ثابت برابر $\frac{P_0}{k}$ می‌شود) برابر $\frac{2P_0}{k}$ خواهد بود.

مثال:



$P_0 = 50\ kN$

$t' = 0.1^{sec}$

$k = \frac{3EI}{L^3} = 51.1\ ^{kN}/_{cm}$

$W = 5078\ kN$

مطلوبست حداکثر برش پایه ستون با فرض ضربه‌ای بودن بار؟

چون به فرض ضربه‌ای است، نیروی P(t) را به صورت یک ضربه عمل می‌کنیم آنگاه جابجایی به شکل زیر خواهد بود:

$$x = \frac{P(t)\cdot\Delta t}{m\omega}\sin\omega t$$

برای یافتن حداکثر برش پایه، حداکثر جابجایی انتها را در سختی ستون ضرب می‌کنیم:

$$\Longrightarrow x_{max} = \frac{P(t)\cdot\Delta t}{m\omega}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{5078}{9.81} = 517.6\ ton$$

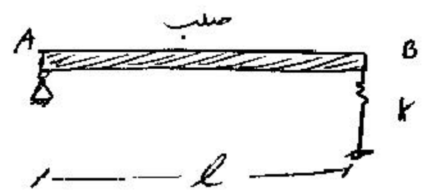
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{51.1\times180}{517.6}} = 3.14\ ^{rad}/_{sec}$$

* برای ضربه، مقدار برش بدون سطح زیر نمودار (مساحت زیر منحنی) را به جای P(t)Δt در رابطه جابجایی قرار می‌دهیم

$$x_{max} = \frac{\frac{1}{2}(0.1+0.3)\,50}{517.6 * 3.14}\times100 = 0.615^{cm}$$

برای حل دقیق‌تر مسئله باید انتگرال دوهامل با توجه به تابع P(t) را حل کنیم.

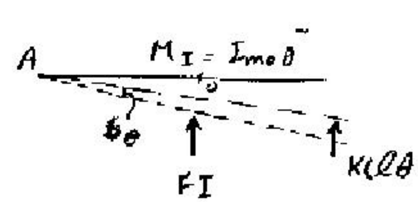
مثال: جرم واحد طول m است.



• قانون نیوتن: $\Sigma M = 0 \rightarrow I_{mA}\ddot{\theta} + K(\ell^2\theta) = 0$

$I_{mA} = \int r^2 dm = \int_0^{\ell} x^2 m\,dx = \frac{m\ell^3}{3} \longrightarrow \frac{m\ell^3}{3}\ddot{\theta} + K\ell^2\theta = 0$

$\rightarrow \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta} + K\ell\theta = 0$



• کار مجازی: $F_I = (m\ell)\frac{\ell}{2}\ddot{\theta}$

$I_{mo} = 2\int_0^{\ell/2} r^2 dm = 2\int_0^{\ell/2} (m\,dx)\,x^2 = \frac{m\ell^3}{12}$

$\Delta W = 0 \rightsquigarrow \frac{m\ell^3}{12}\ddot{\theta}\,\delta\theta + \frac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta}\left(\frac{\ell}{2}\delta\theta\right) + K\ell^2(\delta\theta) = 0$

$\rightsquigarrow \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta} + K\ell\theta = 0$

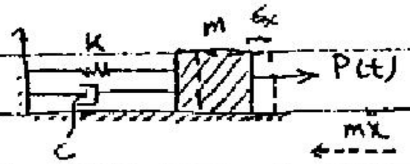
VI) روش کار مجازی برای SDOF :

1- اصل کار مجازی:

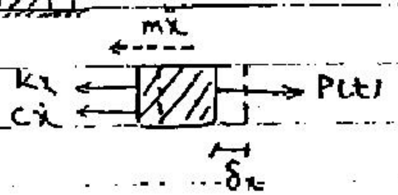
استاتیکی: کار کلیه نیروهای وارد بر سازه به جهت تغییر مکان مجازی برابر صفر است.

دینامیکی: کار کلیه نیروهای وارد بر سازه (شامل نیروهای اینرسی) برای تغییر مکان مجازی کوچک برابر صفر است.
(و نیروی اینرسی نسبت به مرکز جرم)
$\delta W = 0$

مثال:



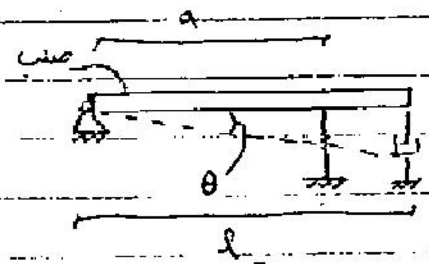
ابتدا دیاگرام آزاد جسم را رسم می‌کنیم:



رابطه کار مجازی : $-\left[m\ddot{x}(\delta x) + c\dot{x}(\delta x) + kx(\delta x)\right] + P(t)\,\delta x = 0$

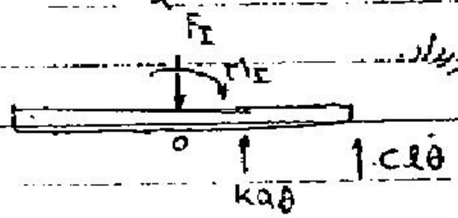
$$\longrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$$

مثال:



جرم واحد طولش $\frac{m}{\ell}$ است.

* برای کارهای سیستمی جرم گسترده قرار داده:
تمام نیروهای اینرسی معادل بر مرکز جرم را باید در مرکز جرم قرار داد.

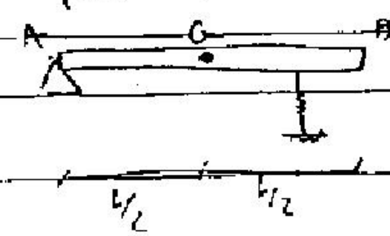


$F_I = m\left(\frac{\ell}{2}\ddot{\theta}\right)$

M_I حول مرکز جرم: $M_I = \left(\int r^2 dm\right)\ddot{\theta}$

$$\longrightarrow M_I = I_m \ddot{\theta}$$

مهم نیست که دوران نسبت به چه نقطه‌ای انجام می‌شود، بلکه مهم این است که I_m نسبت به مرکز جرم محاسبه شود.



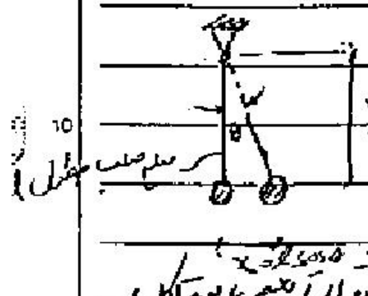
نسبت به A : $I_m = \frac{m\ell^2}{3}$ غلط

نسبت به G : $I_m = \frac{m\ell^2}{12}$

* بررسی بارهای بیرونی (لنگر) نسبت به مرکز جرم حساب می‌شود مستقل از اینکه دوران حول چه نقطه‌ای صورت می‌گیرد. اما بررسی نیروی اینرسی (نیروی اینرسی و لنگر اینرسی (دوران اینرسی جرم)) نسبت به مرکز دوران محاسبه می‌شود.

* جرم نقطه‌ای: بررسی بارهای تنها نیروی اینرسی داریم و لنگر اینرسی نخواهیم داشت.

۱. مختصات تعمیم یافته — Generalized Coordinate



فرض کنید ما آونگی داریم و آن را حرکت دورانی دادیم، این سیستم یک SDOF سیستم است چون با داشتن θ می‌توان موقعیت آن را مشخص کرد. حال اگر بخواهیم موقعیت جرم m را با دو مختصات x و y نمایش دهیم نمی‌توان گفت که این سیستم چند درجه آزادی است چرا که x و y به هم وابسته‌اند.

می‌توانیم x و y را مختصات محلی (Local Coordinate) (تغییر مکانی) بنامیم و θ را مختصات تعمیم یافته کلی.

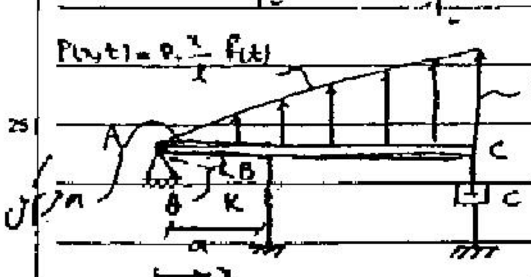
با توجه به این می‌توان گفت در بین مختصات محلی، مختصات با هم وابسته خواهند بود اما مختصات تعمیم یافته برای اجزای مختلف از هم مستقل خواهند بود.

اگر بخواهیم سیستم را به یک SDOF تبدیل کنیم و ضریب سختی را، جرم در مختصات تعمیم یافته و ضریب سرعت را ثابت میرایی در مختصات تعمیم یافته و ... بنامیم

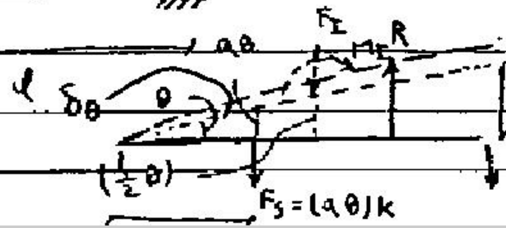
$$\underbrace{M^*}_{\text{جرم در مختصات تعمیم یافته}} \ddot{x} + \underbrace{C^*}_{\text{ثابت میرایی در مختصات تعمیم یافته}} \dot{x} + \underbrace{K^*}_{\text{سختی در مختصات تعمیم یافته}} x = \underbrace{P^*(t)}_{\text{نیروی خارجی در مختصات تعمیم یافته}}$$

مثال: حرکت برحسب θ

این مثال می‌تواند مثلاً میله‌ای برای پل یا ... باشد.



ابتدا دیاگرام آزاد سیستم را رسم می‌کنیم.



$$R = \frac{1}{2}(l)(P_0 f(t)) = \frac{P_0 l}{2} f(t)$$

به دنبال جابجایی مجازی $\delta\theta$، رابطه کار مجازی را می‌نویسیم : $\delta W = 0$

$$\longrightarrow -m\left(\frac{l}{2}\ddot{\theta}\right)\left(\frac{l}{2}\delta\theta\right) - \left(\frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}\right)(\delta\theta) - (cl\dot{\theta})(l\delta\theta)$$

$$-(a\theta)k(a\delta\theta) + \frac{1}{2}(l)(P_0 f(t))\left(\frac{2}{3}l\delta\theta\right) = 0$$

$$\longrightarrow \underbrace{\left(\frac{ml^2}{3}\right)}_{M^*}\ddot{\theta} + \underbrace{(cl^2)}_{C^*}\dot{\theta} + \underbrace{(ka^2)}_{K^*}\theta = \underbrace{\left(\frac{P_0 l^2}{3}\right)f(t)}_{P^*(t)}$$

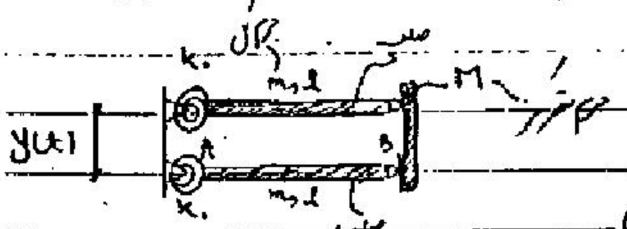
$$\longrightarrow M^*\ddot{\theta} + C^*\dot{\theta} + K^*\theta = P^*(t)$$

اگر بخواهیم مسأله فوق را با استفاده از نمودار نیروی آزاد حل کنیم داشتیم:

$\sum M = 0$, $F_I = 0$, $I_{m0} \longrightarrow$ حول مرکز دوران باید حساب شود.

تمرین: مسائل سوم و چهارم از سری دوم تحویل شود.

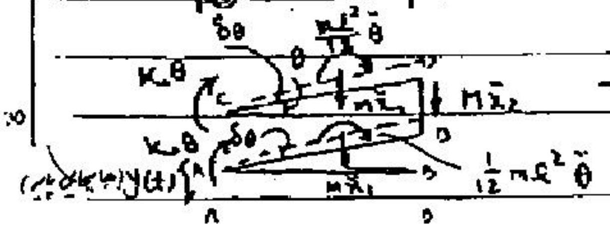
دوشنبه ۸۴/۸/۲



مطلوب است معادله دیفرانسیل حرکت ، K^*, M^* ؟
(برای حرکت جانبی کوچک میله‌ها)

اگر جرم متمرکز نداشته باشیم نمی‌توانیم بار جانبی در کل جرم
متناسب با انرژی پتانسیل داشته باشیم ولی اگر جرم متمرکز داشته باشیم علاوه بر انرژی، اثر انرژی هم داریم.

سیستم معادل یک درجه آزادی θ است.

ابتدا دیاگرام آزاد سیستم را رسم می‌کنیم:

حرکت سیستم ترکیبی از دو حرکت است حرکت تکیه‌گاه و
حرکت نسبی سیستم.

$$x_2 = y(t) + l\theta \rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{y}(t) + \frac{l}{2}\ddot{\theta} \;,\; \delta_{x_1} = \frac{l}{2}\delta_\theta$$

$$x_1 = y(t) + \frac{l}{2}\theta \rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{y}(t) + l\ddot{\theta} \;,\; \delta_{x_2} = l\delta_\theta$$

$$I_{AB} = I_{CD} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = m\left(\ddot{y}(t) + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\right) \\ M\ddot{x}_2 = M\left(\ddot{y}(t) + l\ddot{\theta}\right) \end{cases}$$

معادله کار مجازی در جهت δ_θ را به سیستم اعمال کرده و با اعمال کلیه نیروهای وارد بر سیستم را تحت اثر δ_θ برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\delta_W = 0 \rightarrow 2(k_0\theta)\delta_\theta + 2m\left(\ddot{y}(t) + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\right)\left(\frac{l}{2}\delta_\theta\right) + \frac{2ml^2}{12}\ddot{\theta}(\delta_\theta) + M\left(\ddot{y}(t) + l\ddot{\theta}\right)(l\delta_\theta) = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(M + \frac{2m}{3}\right)l^2}_{M^*}\ddot{\theta} + \underbrace{2k}_{k^*}\theta = \underbrace{-(m+M)\,l\,\ddot{y}(t)}_{P^*(t)}$$

VII) روش ریلی:

روش ریلی، روشی تقریبی برای یافتن فرکانس پایه حرکت است. سیستم‌هایی که بیش از یک درجه آزادی دارند یا بی‌نهایت درجه آزادی داشته و سیستم MDOF باشند.

در این روش با تقریب خوبی فرکانس حرکت را بدون تبدیل جرم به جرم متمرکز و با در نظر گرفتن جرم گسترده به دست می‌آوریم.

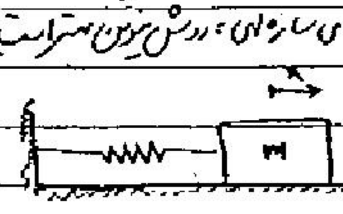
مزایای این روش سادگی و تقریب خوب آن بدون متمرکزسازی انجام می‌باشد.

از آنجا که سازه‌های حقیقی درجات آزادی زیاد، به تعداد درجات آزادی‌اش فرکانس دارد، باید بدانیم روش ریلی چه فرکانسی از سازه را بیان می‌کند.

۱- روش انرژی: در این روش از اصل بقای انرژی برای به دست آوردن معادله حرکت استفاده می‌شود:

$$\underbrace{P}_{\text{پتانسیل}} + \overbrace{T}^{\text{جنبشی}} = cte$$

این روش، روش خوبی برای سیستم‌های ساده است. (برای سیستم‌های سازه‌ای، روش ریلی بهتر است).



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \;,\; P = \frac{1}{2}kx^2$$

اصل بقای انرژی: $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = cte$

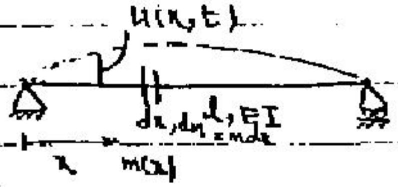
$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به زمان}} \cancel{\frac{1}{2}} m \ddot{x} \dot{x} + \cancel{\frac{1}{2}} k \cancel{x} \dot{x} = 0 \longrightarrow \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$

۲- روش ریلی:

مبنای روش: در حرکت هارمونیک انرژی ثابت است، انرژی پتانسیل + جنبشی.

$$\begin{cases} T = 0 \longrightarrow P_{max} = cte \\ P = 0 \longrightarrow T_{max} = cte \end{cases} \Longrightarrow P_{max} = T_{max} \quad (I)$$

* قسمت تقریبی این روش، حدس تابع تغییر شکل سازه در اثر ارتعاش است.



تیر مقابل را تحت شرایط ارتعاش آزاد در نظر گرفته‌ایم، می‌خواهیم فرکانس طبیعی سازه را بدست آوریم.

جابجایی هر نقطه از تیر تابعی از محل نقطه و زمان است $[u(x,t)]$. در ریلی u را به صورت حرکت هارمونیک ساده به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(x,t) = \psi(x) \cdot \sin \omega t \qquad \text{یا} \quad u = \psi \cdot \sin \omega t$$

ω مجهول است که به دنبال آن می‌گردیم.

$\psi(x)$ شکل ارتعاش و $\sin \omega t$ سرعت ارتعاش را نشان می‌دهد.

$\psi(x)$ را تابع شکلی یا Shape Function می‌نامیم. این تابع را دلخواه انتخاب می‌کنیم (البته باید شرایط مرزی را ارضا کند و به همین دلیل روش ریلی تقریبی است).

$$(\text{در خمش})\ P = \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2 dx}{EI} \quad , \quad M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = EI \psi'' \sin \omega t$$

مشتق نسبت به مکان را با $'$ و مشتق نسبت به زمان را با $\dot{}$ نشان می‌دهیم.

$$\longrightarrow P_{max} = \frac{1}{2} \int_l EI (\psi'')^2 dx \longrightarrow$$ برای P_{max} باید داشته باشیم: $\sin \omega t = 1$

$\dot{u}(t) = \psi \omega \cos \omega t$

$T_{max} = \frac{1}{2}$ جرم $\times$ (ماکزیمم سرعت)^2 $\longrightarrow$ برای سرعت ماکزیمم $\cos \omega t = 1$ می‌باشد

$$\longrightarrow T_{max} = \frac{1}{2} \int_l (m\,dx)(\psi \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l m \psi^2 dx$$

با استفاده از رابطه (I) یعنی $P_{max} = T_{max}$ می‌توان نوشت:

$$\longrightarrow \int_l EI(\psi'')^2 dx = \omega^2 \int_l m(x)\cdot\psi^2 dx$$

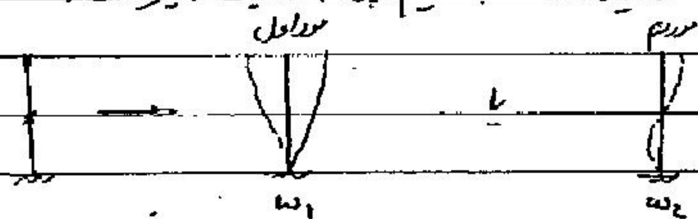
حتی در معادلات فوق EI می‌تواند تابعی از مکان باشد.

$$\xrightarrow[\text{ریلی}]{\text{رابطه}} \boxed{\omega^2 = \frac{\int_l EI(\psi'')^2 dx}{\int_l m(x)\cdot\psi^2\cdot dx} = \frac{\text{انرژی پتانسیل خمشی}}{\text{انرژی جنبشی}}}$$

از آنجا که توابع شکل مختلف، ωهای مختلفی بدست می‌دهند، باید کمترین این فرکانس‌ها را انتخاب کرد. ثابت می‌شود که کمترین فرکانس بدست آمده، نزدیک‌ترین فرکانس به فرکانس اصلی سازه می‌باشد.

فرکانس مود یک سازه چند درجه آزادی با چند فرکانس، فرکانس اصلی خوانده می‌شود که بیشترین اثر را در حرکت سازه دارد.

کوچکترین ω بدست آمده از روش ریلی را انتخاب می‌کنیم، چون به واقعیت نزدیکتر است.



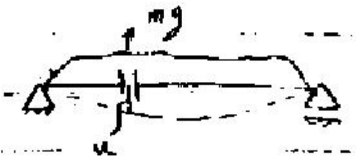
سازه دو درجه آزادی ممکن است به شکل‌های مختلف مود ارتعاش کند (در حقیقت ترکیبی از آنها را دارد). حال اگر تابع شکل نظیر اولی را در نظر بگیریم، جواب حاصل از روش ریلی، ω_1 خواهد بود و اگر تابع شکل نظیر دومی را در نظر بگیریم، ω_2 بدست می‌آید. (کوچکترین ω مربوط به مود ارتعاش نظیر تابع ψ می‌باشد).

بنابراین سعی کنید در انتخاب تابع ψ، سعی در نزدیکی آن به مود اول (که مود غالب است) بشود.

بنابر مطالب فوق معمولاً روش ریلی برای سازه‌ای ساخته شده که مود اول آنها قابل حدس است استفاده می‌شود.

ما لذا این روش برای کنترل جواب دقیق استفاده می‌شود.

* اگر تابع شکل Ψ را شکل سازه تحت اثر بارهای ثقلی در نظر بگیریم، می‌توان انرژی پتانسیل ماکزیمم را از بارهای خارجی به دست آورد (که با انرژی کرنشی داخلی معادل است).



انرژی = وزن × جابجایی مرکز

$$P_{max} = \frac{1}{2}\int_l \left[g\, m(x)\, dx\right](\bar{\Psi}) \longrightarrow P_{max} \leftarrow \sin\omega t = 1$$

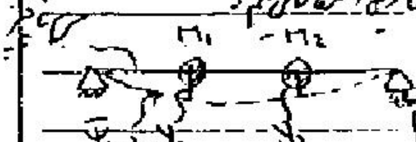
برای ω^2 خواهیم داشت:

$$\boxed{\omega^2 = g\,\frac{\int_l m\bar{\Psi}\,dx}{\int_l m\bar{\Psi}^2\,dx}} \quad \text{(II)}$$

$\bar{\Psi}$: تابع شکل متناظر شکل سازه تحت بارهای ثقلی (شکل وزن سازه)

* برای این سازه‌ها که ... از جرم متمرکز استفاده کرده‌ایم ...

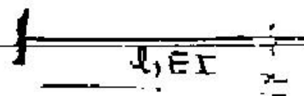
حالت خاص: این حالتی است که سازه شامل n جرم متمرکز باشد.



$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}M_1 g y_1 + \frac{1}{2}M_2 g y_2 \\ \frac{1}{2}M_1(\omega y_1)^2 + \frac{1}{2}M_2(\omega y_2)^2\end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\omega^2 = g\,\frac{\sum My}{\sum My^2}} \quad \text{(III)} \quad \text{یا} \quad \boxed{\omega^2 = g\,\frac{\sum wy}{\sum wy^2}} \quad \text{(IV)}$$

نکته: اگر دو سازه مشابه داشته باشیم و جرم آن‌ها در نظر گرفته نشود (که معمولاً اینطور است)، این دو دارای انرژی پتانسیل یکسان می‌باشند و بنابراین نمی‌توانیم مستقیماً از روابط فوق استفاده کنیم و باید انرژی پتانسیل جدید را با در نظر گرفتن انرژی پتانسیل محوری به دست آوریم. ... [illegible]

مثال: m: جرم واحد طول



فرکانس را با استفاده از رابطه ریلی برای دو حالت زیر به دست آورید:

$$\text{I)}\ \Psi(x) = a\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$$

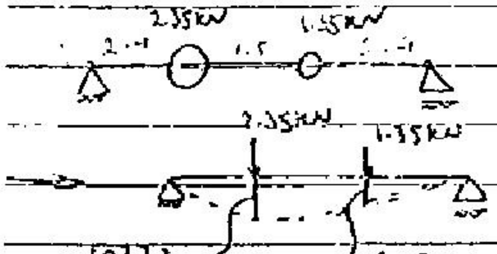
$$\text{II)}\ \Psi(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

I) با استفاده از رابطه (I):

$$\omega^2 = \frac{EI\int_0^l a^2\left(\frac{3}{l^2} - \frac{3x}{l^3}\right)^2 dx}{m\int_0^l a^2\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]^2 dx}$$

$$\longrightarrow \omega = 3.56\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

II) $\omega = 4.47\sqrt{\dfrac{EI}{m\ell^4}}$



مثال: از وزن تیر صرف‌نظر کرده و با صرف‌نظر از تغییر شکل برشی
به صورت ۲ درجه آزادی فرکانس را از روش ریلی
بدست آورید.

تغییر شکل تیر تحت بار ثقلی

با استفاده از روابط حاصل از حل استاتیکی سیستم

$$y_1 = \frac{10372}{EI} \qquad y_2 = \frac{6874}{EI}$$

از رابطه‌ی IV استفاده می‌کنیم:

$$\omega^2 = g\frac{\sum Wy}{\sum Wy^2} = 9.81\,\frac{(2.35)(10372)+(1.35)(6874)}{(2.35)(10372)^2+(1.35)(6874)^2}\times EI$$

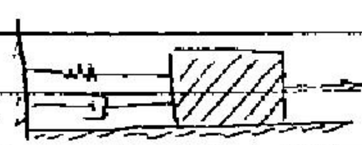
$$\longrightarrow \omega^2 = 1.046\times10^{-3}\,EI \longrightarrow \boxed{\omega = 0.0323\sqrt{EI}}$$

تمرینات سری چهارم ۴-۱ و ۴-۳ را تحویل دهید.

دوشنبه ۱۳۸۴/۸/۹

VIII) تحلیل دینامیکی SDoF با روش فوریه: Frequency Domain

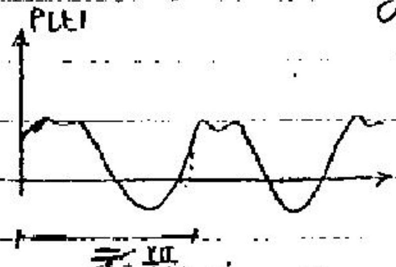
۱- تبدیل بار متناوب به مجموعه‌ای از بارهای هارمونیک با استفاده از سری فوریه:



در روش انتگرال دوهامل، بار را به بارهای ضربه‌ای کوچک تقسیم می‌کردیم. معمولاً روشی که در آن ... حالت‌های زمانی ... (Time Domain) ...
روش دیگر حل مسئله این است که با استفاده از سری فوریه P(t) را به ترکیبی سینوسی و کسینوسی با هم جمع شده
تقسیم کنیم.
تبدیل بار P(t) به سری بارهای سینوسی - کسینوسی. از مزایای این روش ... چرا که با امکان

متفاوت و تقسیم‌بندی را می‌دهد. یکی از این تفاوت‌ها در مورد شناسایی فرکانس‌های غالب در مورد زلزله می‌باشد.

شناسایی فرکانس‌های غالب مثلاً در مورد زلزله می‌تواند در طراحی Filtering کمک کند.



تعریف: نیروی $P(t)$ را در نظر می‌گیریم:
این نیرو را می‌توان به صورت یک سری از توابع سینوسی، کسینوسی به صورت زیر نوشت:

سری فوریه: $P(t) = a_0 + a_1 \cos\bar{\omega}t + a_2 \cos 2\bar{\omega}t + \dots$
$+ b_1 \sin\bar{\omega}t + b_2 \sin 2\bar{\omega}t + \dots$

$$\Longrightarrow P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\bar{\omega}t + b_n \sin n\bar{\omega}t\right)$$

که در آن:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T P(t)\,dt \quad , \quad a_n = \frac{2}{T}\int_T P(t)\cdot\cos n\bar{\omega}t\,dt \qquad n=1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T P(t)\cdot\sin n\bar{\omega}t\,dt \qquad n=1,2,\dots$$

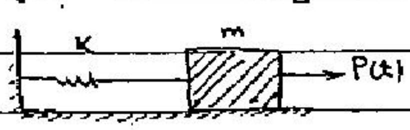
البته برای این تبدیل باید معادله‌ی $P(t)$ در یک دوره تناوب معلوم باشد.

Even Function: $P(-t) = P(t)$.
Odd Function: $P(-t) = -P(t)$

اگر تابع مورد نظر فرد باشد داریم: $a_n = 0 \;,\; n = 0,1,2,\dots \Longrightarrow P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\bar{\omega}t$

و اگر تابع زوج باشد داریم: $b_n = 0 \;,\; n = 1,2,\dots \Longrightarrow P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\bar{\omega}t$

۲- جواب SDOF تحت اثر $P(t)$ (به صورت سری فوریه نوشته شده است) - بدون میرایی



I) $P(t) = P_0 \sin\bar{\omega}t \longrightarrow x = \frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\sin\bar{\omega}t$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$$\text{II)}\ P(t) = P_0 \cos\bar{\omega}t \Longrightarrow x = \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\cos\bar{\omega}t$$

$$\text{III)}\ P(t) = P_0 \Longrightarrow x = \frac{P_0}{k}$$

x بدست آمده فوق، قسمت دائم جواب می‌باشد.

~~- در حالت عمومی نیرو کلی:~~

با استفاده از ترتیب حالات I ، II و III می‌توان نوشت:

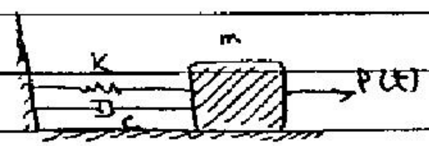
$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\bar{\omega}t + b_n\sin n\bar{\omega}t\right)$$

$$x = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{k}\cdot\frac{1}{1-\beta_n^2}\cdot\cos n\bar{\omega}t + \frac{b_n}{k}\cdot\frac{1}{1-\beta_n^2}\sin n\bar{\omega}t\right]$$

$$x = \frac{1}{k}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\beta_n^2}\right)\left(a_n\cdot\cos n\bar{\omega}t + b_n\sin n\bar{\omega}t\right)\right]$$

که در آن $\beta_n = \frac{n\bar{\omega}}{\omega}$ می‌باشد.

۳- جواب SDoF تحت اثر بار P(t) با میرایی:



جواب Steady State سیستم میرا را می‌یابیم:

$$\text{I)}\ P(t) = P_0\sin\bar{\omega}t \Longrightarrow x = \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\bar{\omega}t - 2\xi\beta\cos\bar{\omega}t\right]$$

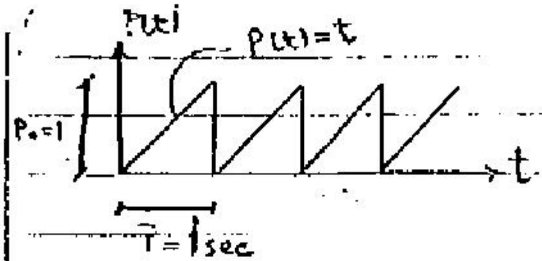
$$\text{II)}\ P(t) = P_0\cos\bar{\omega}t \Longrightarrow x = \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[2\xi\beta\sin\bar{\omega}t + (1-\beta^2)\cos\bar{\omega}t\right]$$

$$\text{III)}\ P(t) = P_0 \Longrightarrow x = \frac{P_0}{k}$$

مشابه حالت بدون میرایی، با تلفیق سه قسمت فوق برای P(t) به صورت سری فوریه داریم: (پیوست بعد)

$$x = \frac{1}{k}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}\left\{\left[a_n(2\xi\beta_n) + b_n(1-\beta_n^2)\right]\sin n\bar{\omega}t\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left[a_n(1-\beta_n^2) - b_n(2\xi\beta_n)\right]\cos n\bar{\omega}t\right\}\right).$$



مثال: نیرو P(t) را به صورت سری فوریه بنویسید:
اول [illegible]

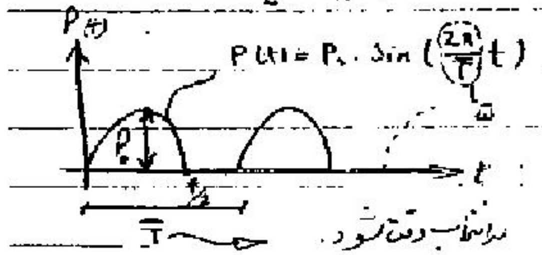
$$a_0 = \frac{1}{\bar T}\int_{\bar T} P(t)\,dt = \frac{1}{1}\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\bar T}\int_{\bar T} P(t)\cdot \cos n\bar\omega t\,dt = \frac{2}{1}\int_0^1 t\cdot\cos n\bar\omega t\,dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\bar T}\int_{\bar T} P(t)\cdot \sin n\bar\omega t\,dt = \frac{2}{1}\int_0^1 t\,\sin n\bar\omega t\,dt = \frac{-1}{n\pi}$$

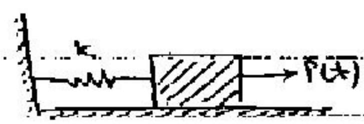
$$\Longrightarrow P(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\overbrace{\bar\omega}^{2\pi} t \quad , \quad \bar\omega = \frac{2\pi}{\bar T} = 2\pi$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\sin 2\pi t + \frac{1}{2}\sin 4\pi t + \cdots\right)$$



در انتخاب دقت شود.

مثال:



الف) P(t) را برحسب سری فوریه بنویسید.
ب) جواب حاصل را بیابید.
با صرف‌نظر از خاصیت میرایی:

$$\frac{\bar T}{T} = \frac{4}{3}$$

$$a_0 = \frac{P_0}{\pi} = \frac{P_0}{\bar T}\int_0^{\bar T/2}\sin\frac{2\pi}{\bar T}t\,dt$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{فرد} \\ \frac{P_0}{\pi}\cdot\frac{2}{1-n^2} & \text{زوج} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} P_0/2 & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}$$

$$\left(a_n = \frac{2}{\bar T}\int_0^{\bar T/2}\sin\frac{2\pi}{\bar T}t\cos\frac{2\pi}{\bar T}t\,dt\right) \quad \left(b_n = \frac{2}{\bar T}\int_0^{\bar T/2}\sin\frac{2\pi}{\bar T}t\cos\frac{2\pi}{\bar T}t\,dt\right)$$

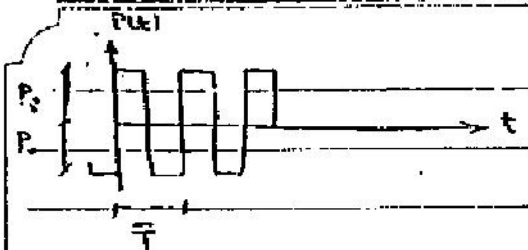
$$\Longrightarrow P(t) = \frac{P_0}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2}\sin\bar\omega t - \frac{2}{3}\cos 2\bar\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\bar\omega t - \cdots\right)$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1}{k}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\beta_n^2}\left(a_n\cos n\bar\omega t + b_n\sin n\bar\omega t\right)\right]$$

$$\beta_1 = \frac{\bar\omega}{\omega} = \frac{3}{4} \qquad \beta_2 = 2\beta_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad \ldots \quad , \beta_n = n\beta_1 = \frac{3n}{4}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{P_0}{k\pi}\left[1 + \frac{8\pi}{7}\sin\bar\omega t + \frac{8}{15}\cos 2\bar\omega t + \frac{1}{60}\cos 4\bar\omega t + \cdots\right]$$

مثال: $P(t) = ?$ $\quad x(t) = ?$

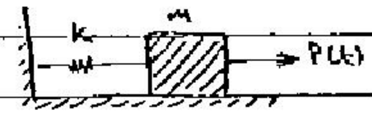


طیف نیرو؟

$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{1}{6}$ رسم طیف { طیف جواب؟

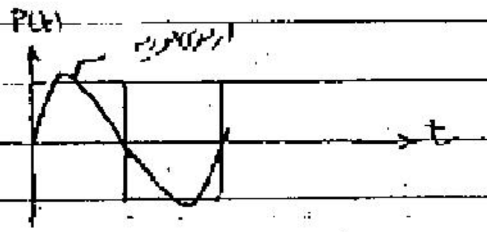
تابع $P(t)$ نشان داده شده تابع فرد است بنابراین: $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0$ $\quad P(t) = -P(-t)$

$$b_n = \frac{2}{\bar{T}}\left[\int_0^{\bar{T}/2} P_0 \sin n\bar{\omega}t + \int_{\bar{T}/2}^{\bar{T}} -P_0 \sin n\bar{\omega}t\, dt\right]$$

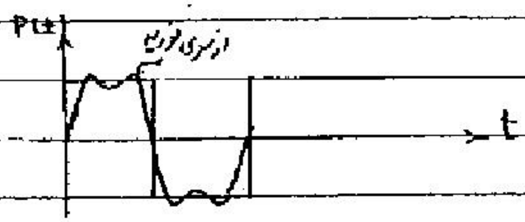


$$\longrightarrow b_n = \frac{4P_0}{n\pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, 2k+1$$

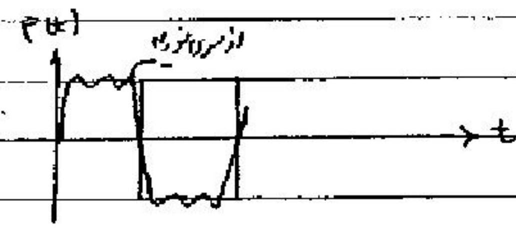
$$\longrightarrow P(t) = \frac{4P_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\bar{\omega}t \quad , \quad 2k+1 = n$$



با در نظر گرفتن یک جمله از سری فوریه ←



با در نظر گرفتن دو جمله از سری فوریه ←



با در نظر گرفتن سه جمله از سری فوریه ←

$$x = \frac{4P_0}{k\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin n\bar{\omega}t}{n(1-\beta_n^2)} \qquad n = 2m+1$$

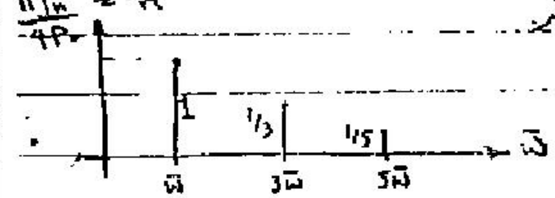
حال به دنبال آن هستیم تا با در نظر گرفتن جملات متفاوت از $P(t)$، مقدار $P(t)$ را بدست آوریم و سپس برای هر سری از آنها به جای P را حساب کنیم. در این حالت ما باید در نهایت بر یک محور مختصات بر حسب فرکانس رسم کنیم.

یعنی طیف نیرو عبارت است از دامنهٔ نیروی $P(t)$ به ازای فرکانس‌های متفاوت.

(معرف)

$$P(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4P_0}{n\pi}\sin n\bar{\omega}t=\sum_{n=1}^{\infty}P_n\sin n\bar{\omega}t$$

که دامنهٔ نیروی هر یک از جملات سری فوریه می‌باشد، $P_n=\frac{4P_0}{n\pi}$



مرسوم است که در نمودارها از کمیت‌های بدون بعد استفاده می‌کنند.

نمودار فوق را طیف نیرو در حوزهٔ فرکانس می‌گویند.

این نمودار نشان می‌دهد فرکانس $\bar{\omega}$، بیشترین مشارکت را نسبت به سایر فرکانس‌های $P(t)$ دارد.

حال می‌خواهیم طیف جابجایی را رسم کنیم:

(از قبل)

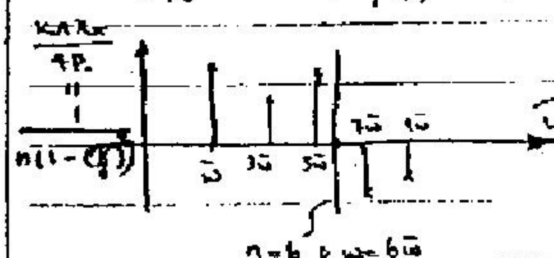
$$x=\frac{4P_0}{K\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\bar{\omega}t}{n(1-\beta_n^2)}$$

(از قبل)

$$\Rightarrow x=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{4P_0}{K\pi n(1-\beta_n^2)}}_{x_n}\sin n\bar{\omega}t$$

$$\frac{K\pi X_n}{4P_0}=\frac{1}{n(1-\beta_n^2)}=\frac{1}{n(1-(n/6)^2)}\leftarrow\beta_n=\frac{n}{6}$$

از داده‌های مسأله



طیف در $6\bar{\omega}$ تغییر جهت می‌دهد. طیف جواب سازه در حوزهٔ فرکانس $\bar{\omega}$

اما در نزدیکی $6\bar{\omega}$ جز جوابهای ... خارج است.

طیف به ما در انتخاب ... مناسب کمک می‌کند.

۴- جواب SDOF سازه تحت بارهای تناوبی با استفاده از صورت مختلط سری فوریه:

$$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\bar{\omega}t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\bar{\omega}t$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos n\bar{\omega}t = \frac{e^{in\bar{\omega}t} + e^{-in\bar{\omega}t}}{2} \qquad \sin n\bar{\omega}t = \frac{e^{in\bar{\omega}t} - e^{-in\bar{\omega}t}}{2i}$$

به جای معادلات فوق به رابطه سری فوریه $P(t)$ داریم :

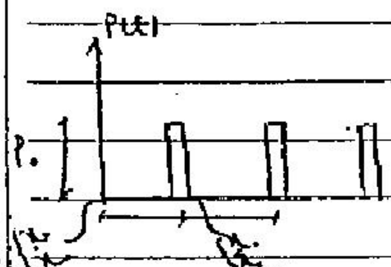
$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{in\bar{\omega}t}$$

زوج فوریه ←

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\, e^{-in\bar{\omega}t}\, dt = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

C_n را تبدیل فوریه می‌نامیم.

مثال : تمرین ۳-٤ :



$$t=0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t$ تحت شرایط اولیه

از آنجا که سرعت جابجایی را قبل از ضربه به دست آورده و اثر ضربه را به آن اضافه کنیم (ضربه اثر سرعت اولیه دارد ولی اثر جابجایی ندارد)

$$\left| \begin{array}{l} \text{سرعت اولیه} = \text{سرعت ناشی از اثر ضربه} \\ x = \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t = x_0 \end{array} \right.$$

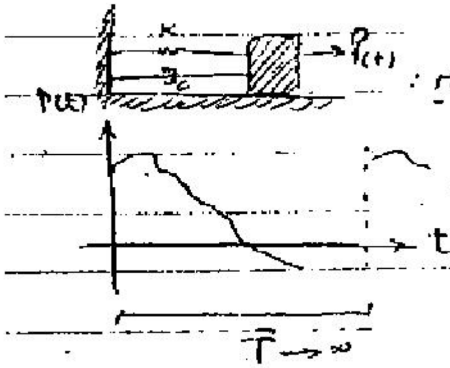
از روی معادله فوق به جواب می‌رسیم.

SDOF با میرایی :

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n H(n\bar{\omega})\, e^{in\bar{\omega}t}$$

$$H_{(n\bar{\omega})} = \frac{1}{k(-n^2\beta_n^2 + 2in\beta_n\xi + 1)}$$

چهارشنبه ۸۴/۸/۱۱



۵) جواب SDoF به اثر بار مشخص، با استفاده از انتگرال فوریه:

برای استفاده از سری فوریه برای چنین نیرویی باید ابتدا به صورت تناوب برای این بار در نظر بگیریم (یعنی تناوبی بودن نیرو که از شرایط سری فوریه است را برقرار سازیم).
حال برای محاسبه دقیق جواب باید این T را به سمت ∞ میل دهیم. آنگاه با توجه به مسائل ریاضی بیان شده نیرو را هم به جای سری فوریه، انتگرال فوریه جایگزین می‌کنیم (در حقیقت تابع پیوسته‌ای) از آن استفاده خواهیم کرد:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\bar{\omega})\, e^{-i\bar{\omega}t}\, d\bar{\omega}$$

که در آن $C(\bar{\omega})$ تبدیل فوریه به صورت زیر می‌باشد:

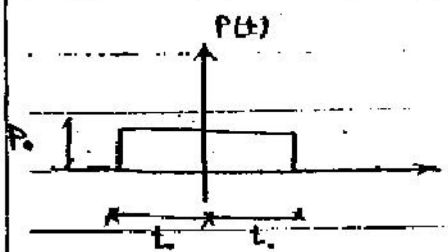
$$C(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-i\bar{\omega}t}\, dt$$

$$\longrightarrow x = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\bar{\omega})\, H(\bar{\omega})\, e^{i\bar{\omega}t}\, d\bar{\omega}$$

که در آن:

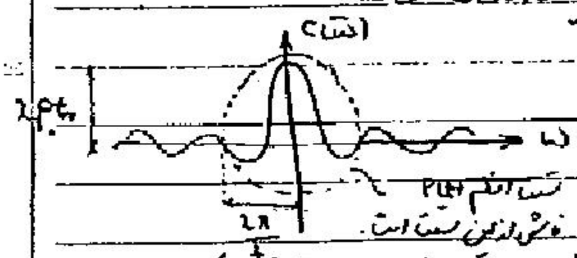
$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\zeta + 1)}$$ می‌باشد.

مثال:



تبدیل فوریه: $C(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-i\bar{\omega}t}\, dt$

$$\longrightarrow C(\bar{\omega}) = \int_{-t_0}^{+t_0} P_0\, e^{-i\bar{\omega}t}\, dt = 2P_0 t_0 \left(\frac{\sin\bar{\omega}t_0}{\bar{\omega}t_0}\right)$$



نمودار $C(\bar{\omega})$ نشان می‌دهد که قسمت اعظم $P(t)$ (که در انتگرال فوریه حاضر است) در قسمت مرکزی $C(\bar{\omega})$ است یعنی $-\frac{2\pi}{t_0} < \bar{\omega} < \frac{2\pi}{t_0}$.

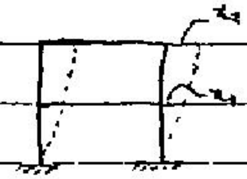
اگر P(t) تابعی پیوسته نیست بنابراین انتگرال فوق به شیوه‌های ریاضی قابل انجام نیست و با روش‌های عددی محاسبه می‌شود.

IV) مدل‌های چند درجه آزاد:

Multi Degree of Freedom Systems (MDOF)

۱) مبانی حرکت سیستم‌های چند درجه آزاد:

اگر در یک سیستم بیش از یک درجه تغییر مکان داشته باشیم، سازه‌ای با چند درجه آزادی خواهیم بود. (معمولاً تشخیص MDOF یا SDOF بر عهده‌ی طراح می‌باشد).



واقعیت این است که در سازه‌ها تغییر مکان‌های بسیاری اعم از دورانی و انتقالی وجود دارند و بنابراین تعیین تعداد درجات آزادی سازه بر عهده‌ی شخص طراح می‌باشد.

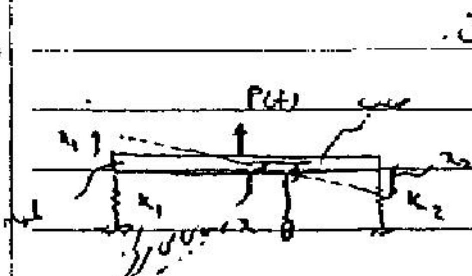
در مسائل پیش رو ما دو فرض می‌کنیم؛ اول اینکه مسائل را چند درجه آزادی در نظر بگیریم. دوم اینکه جرم را متمرکز در نظر بگیریم.

در MDOF به جای جرم، سختی و ضریب میرایی، ماتریس آنها را داریم و به جای تغییر مکان و سرعت و شتاب بردارهای آنها را خواهیم داشت. یعنی معادلات تعادل دینامیکی به صورت زیر خواهد بود:

$$\underbrace{[m]}_{\text{ماتریس جرم}}\{\ddot{x}\} + \underbrace{[c]}_{\text{ماتریس میرایی}}\{\dot{x}\} + \underbrace{[k]}_{\text{ماتریس سختی}}\{x\} = \underbrace{\{P(t)\}}_{\text{بردار نیروی خارجی}}$$

به مجموعه‌ی [m]، [c] و [k] ماتریس سیستم گفته می‌شود.

* ابعاد ماتریس‌ها، بردارهای تغییر مکان و شتاب بستگی به درجات آزادی و تعداد آنها دارد. انتخاب درجات آزادی، در شکل ماتریس‌های سیستم مؤثر است.

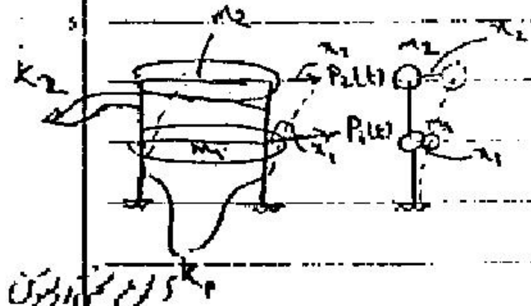


مثلاً اگر x_1 و x_2 را به عنوان درجات آزادی انتخاب کنیم، شکل معادلات با حالتی که x و θ را به عنوان درجات آزادی در نظر بگیریم متفاوت خواهد بود. اما باید توجه داشت که در هر دو حالت جواب مسئله یکسان می‌باشد.

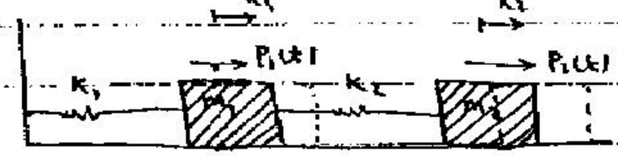
یعنی جواب سازه در $t=t_1$ به بعد در حالت [illegible] خواهد بود.

* سازه‌های مهم مشترک، بایستی نیروهای اثر نیروهای خارجی در محل درجات آزادی می‌باشد.

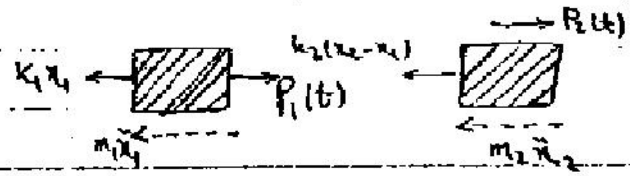
مثال:



در SDOF درجه آزادی را رسم می‌کردیم و با استفاده از معادلات تعادل مناسب و با ترکیبی از درجه آزادی را به دست آورده و مسأله را حل می‌کردیم.
در MDOF به تعداد درجات آزادی فنر رسم می‌کنیم.



x_1 و x_2 جابجایی‌های مطلق جرم‌های m_1 و m_2 می‌باشند.



$\sum F_x = 0 \Longrightarrow$ m_1 برای جرم: $m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2-x_1) = P_1(t)$

m_2 برای جرم: $m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2-x_1) = P_2(t)$

$$\xrightarrow[\text{ماتریسی}]{\text{به صورت}} \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس قطری جرم}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}}_{\text{بردار شتاب}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس کشش سازه}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}_{\text{بردار جابجایی}} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

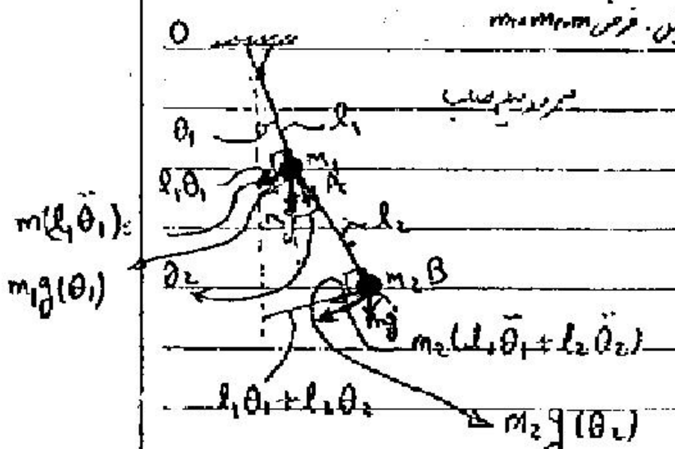
$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

k_{ij}: نیروی لازم در نقطه i جهت جابجایی واحد در نقطه j، اگر نقاط دیگر ثابت باشند.

تمرین: ۵-۱ و ۵-۲ حل داده شوند.
تا سر MDOF سایزمیک خواهیم داشت.

$\sin\theta = \theta$ ۸۴/۸/۱۶ دوشنبه

مثال:
مطلوبست تشکیل معادلات حرکت جرم متمرکز - حرکت حدودی معادلات دیفرانسیل. فرض $m_1=m_2=m$



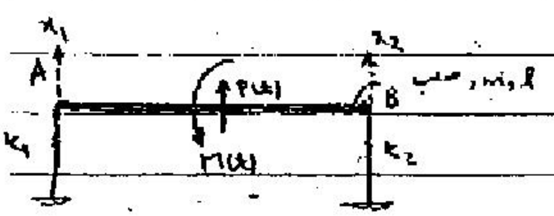
اساس کار در MDOF مانند SDOF ترسیم دیاگرام آزاد
بخش های مختلف سازه می باشد.
ماتریس های فرض شده در MDOF بستگی به مدل سازی
سازه ما دارد (تعداد درجات آزادی). البته جواب
نهایی تغییری حاصل نمی شود تنها شکل معادلات دیفرانسیل
تغییر می کند.

تمامی نیروهای اینرسی A می بریم و سپس حول O گشتاور می گیریم (چون در A مفصل داریم لنگر خمشی ناشی از m_2 در A
صفر است)

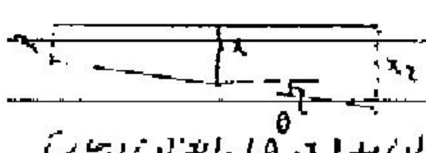
$$\sum_O M = 0 \rightarrow \left[m_2(l_1\ddot\theta_1+l_2\ddot\theta_2)+m_1(l_1\ddot\theta_1)\right]l_1 + \left[m_2 g(\theta_2)+m_1 g(\theta_1)\right]l_1 = 0$$

$$\sum_A M = 0 \rightarrow m_2(l_1\ddot\theta_1+l_2\ddot\theta_2)(l_2)+m_2 g(\theta_2)l_2 = 0$$ (جرم m_2 ... m_1 ...)
و ... تقسیم کردیم)

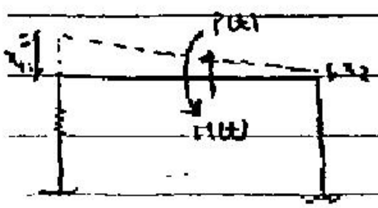
$$m_1=m_2=m \longrightarrow \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2g/l & 0\\ 0 & g/l\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$



مثال: تیر صلب AB به جرم کل m
صلب و با جرم یکنواخت می باشد.
مطلوبست معادله دیفرانسیل حرکت:
این سیستم یک سیستم دو درجه آزادی است:

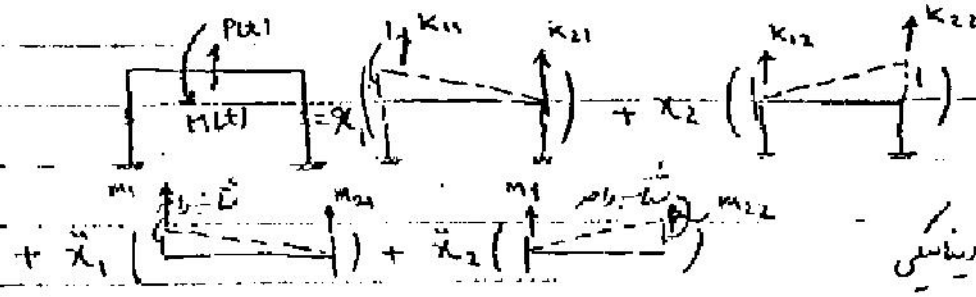


می توان این درجات آزادی را x_1 و x_2 اختیار کرد و یا جابجایی مرکز جرم و دوران تیر (x و θ) را به عنوان درجات
آزادی انتخاب کرد. ما این مساله را برای هر دو حالت درجه آزادی حل می نماییم.



نکته: در این مساله این است که چون جرم گسترده داریم.

نیروهای خارجی به علاوه نیروهای اینرسی معادل باشند. ... می توان نوشت:



بخش استاتیکی

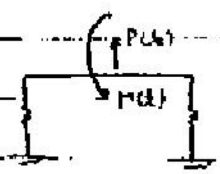
بخش نیروهای دینامیکی

برای نوشتن معادلات دیفرانسیل حرکت، معادلات تعادل مناسب را در کل درجات آزادی را می‌نویسیم

K_{ij} : نیروی لازم در نقطه‌ی i جهت جابجایی واحد در نقطه‌ی j وقتی درجات آزادی مهار شوند.
m_{ij} : نیروی لازم در نقطه‌ی i جهت شتاب واحد در نقطه‌ی j ~~وقتی درجات آزادی مهار شوند~~

بدین ترتیب تعریف ما از جرم با استفاده از رابطه‌ی $F=ma$ به صورت زیر تغییر می‌کند:
جرم عبارت است از نیروی لازم جهت شتاب واحد.

حال نیروهای خارجی را در کل درجات آزادی اعمال می‌کنیم



$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{P(t)}{2}-\frac{M(t)}{l}}_{P_1(t)} \qquad \underbrace{\frac{P(t)}{2}+\frac{M(t)}{l}}_{P_2(t)}$$

اکنون از دیاگرام بالای صفحه استفاده کرده داریم:

از نیروی متناظر با پارامتر N ام

$$x_1K_{11}+K_{12}x_2+m_{11}\ddot{x}_1+m_{12}\ddot{x}_2=P_1(t)$$ در کل درجه آزادی ۱ :

$$x_1K_{21}+x_2K_{22}+m_{21}\ddot{x}_1+m_{22}\ddot{x}_2=P_2(t)$$ در کل درجه آزادی ۲ :

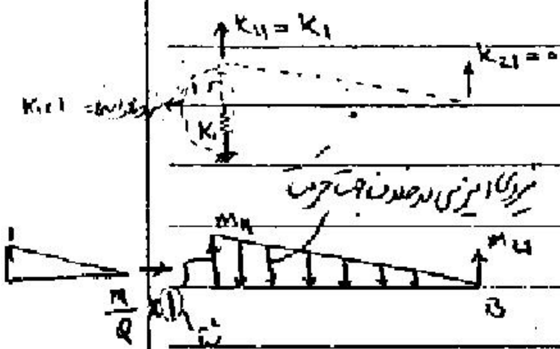
معادلات فوق، در حقیقت معادلات تعادل در راستای درجه آزادی در نقاط درجه آزادی مربوط را نوشتیم.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{P(t)\}$$

و در نتیجه حل مسأله به یافتن ماتریس سختی و ماتریس جرم تبدیل می‌شود. $\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}P(t) - \frac{1}{l}M(t) \\ \frac{1}{2}P(t) + \frac{1}{l}M(t) \end{Bmatrix}$

- یافتن ماتریس های $[K]$:



(حال در بدست آوردن k_{ij} که راحت است)

بهمین ترتیب: $k_{12}=0$ و $k_{22}=k_2$ ،

$$\rightarrow [K] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

دیاگرام نیروهای اینرسی

- یافتن ماتریس $[m]$:

چون جرم AB گسترده است بنابراین نیروی اینرسی حاصل از آن نیز گسترده است و از ضرب جرم در شتاب آن بدست می‌آید.

$\oplus$ در نقطه B $\rightarrow \curvearrowleft \sum_B M = 0 \Rightarrow m_{11} \cdot l - \frac{m}{l} \times \frac{1}{2} l \times \frac{2}{3} l$

$$\rightarrow m_{11} = \frac{m}{3}$$

$$\curvearrowleft \sum_A M = 0 \longrightarrow -m_{21}(l) + \frac{m}{l} \times \frac{1}{2} l \times \frac{1}{3} l = 0 \longrightarrow m_{21} = \frac{m}{6}$$

بهمین ترتیب بدست می‌آید: $M_{22} = \frac{m}{3}$ ، $m_{12} = \frac{m}{6}$

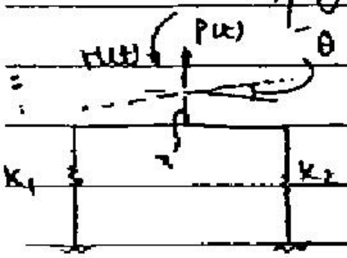
و معادلات دیفرانسیل حرکت به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} m/3 & m/6 \\ m/6 & m/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

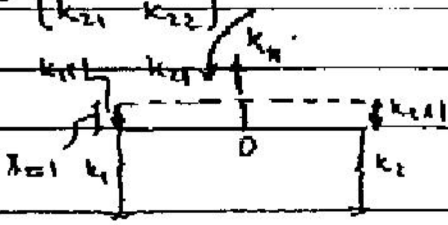
* هر دو ماتریس $[m]$ و $[k]$ متقارن اند.
* نتیجه: با داشتن [illegible] حاصله [illegible] نیروهای [illegible] حاصل می‌شوند.

حال قصد داریم تا مثال قبل را با در نظر گرفتن درجات آزادی به صورت x و θ حل کنیم:

x: درجه آزادی ۱
θ: درجه آزادی ۲

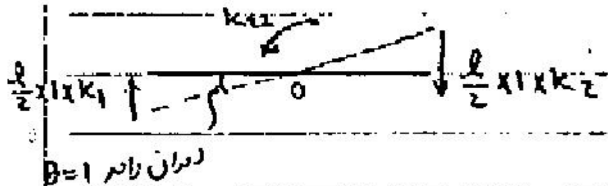


$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$



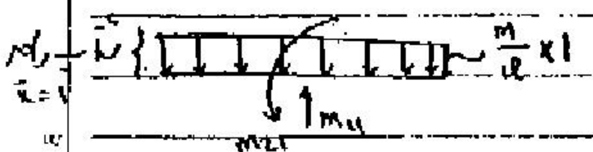
$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow k_{11} = k_1 + k_2$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum_O M = 0 \Longrightarrow -k_{21} + k_2\left(\frac{l}{2}\right) - k_1\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \Longrightarrow k_{21} = \frac{l}{2}(k_2 - k_1)$$



$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum_O M = 0 \longrightarrow -k_{22} + \left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)(k_1 + k_2)$$

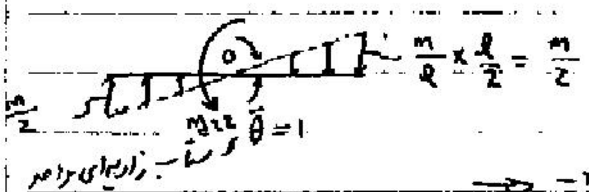
$$\longrightarrow k_{22} = \frac{l^2}{4}(k_1 + k_2)$$



$$\sum F_y = 0 \longrightarrow m_{11} = \frac{m}{l} \times l = m$$

$$\longrightarrow m_{11} = m$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum_O M = 0 \Longrightarrow m_{21} = 0$$



$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum_O M = 0$$

$$\Longrightarrow -m_{22} + \frac{m}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{2}{3} l \times \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow m_{22} = \frac{ml^2}{12}$$

بصورت بردار $\{P(t)\}$ را منتقل به O می‌کنیم پس داریم:

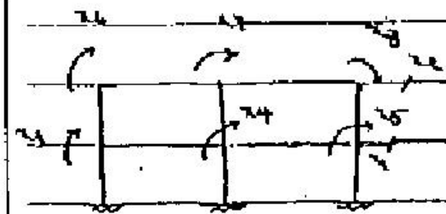
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & \frac{l}{2}(k_2 - k_1) \\ \frac{l}{2}(k_2 - k_1) & \frac{l^2}{4}(k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(t) \\ M(t) \end{Bmatrix}$$

~~معادلات ... دو معادله درگیر می‌باشند~~

ماتریس جرمی که از این روش بدست می‌آید را ماتریس جرم سازگار (Consistent Mass Matrix) می‌نامیم.

~~شرط عدم درگیر شدن معادلات از حالت درگیری این است که المان‌های غیر قطری ماتریس سختی صفر باشد یعنی سختی دو فنر برابر باشند.~~

۲) مدل‌سازی سازه‌ها :



قاب مقابل را در نظر می‌گیریم :

این قاب را به 5 روش می‌توان مدل‌سازی کرد :

سه درجه آزادی انتقالی و دورانی برای هر عضو.

درست است که تمامی درجات آزادی (حاصل از k) در ایجاد تنش‌ها موثر اند. اما انتخاب درجات آزادی مناسب برای یک سازه، وابسته به تشخیص ما از اهمیت تأثیر آنها (درجات آزادی) در تنش‌ها خواهد شد.

فرض کنید برای قاب فوق 8 درجه آزادی در نظر می‌گیریم. (اعضای قاب صلب می‌باشند).

۱) محاسبه‌ی $[m]$ و $[k]$ (با هشت درجه آزادی)

در این روش فرض بر این است که دوران‌ها تأثیر چندانی بر ایجاد تنش‌ها ندارند. بدین منظور دوران‌ها را در قسمت استاتیکی در نظر می‌گیریم ولی در قسمت مربوط به دینامیکی (اینرسی دورانی)، صرف نظر می‌کنیم. جواب مدل‌سازی در هر سه روش یکسان خواهد شد.

فرض کنیم x_1 و x_2 اهمیت اصلی را داشته باشند و x_3 تا x_8 در دینامیک قابل صرف نظر کردن می‌باشند.

سیستم : $[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{18} \\ k_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ k_{81} & & & k_{88} \end{bmatrix}_{8\times 8}$ و $[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}_{8\times 8}$ (2

$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$, $[k'] = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ (3

k'_{ij} : نیروی لازم در نقطه‌ی i برای جابجایی واحد در نقطه‌ی j در حالتی که سایر نقاط حرکت خود را دارند. k'_{ij} را سختی اصلاح شده می‌نامند.

البته در این قسمت درجات آزادی حذف شده حرکت دارند ولی نقاط در نظر گرفته شده تغییر مکان ندارند.

ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی ماتریس سختی اصلاح شده، محاسبه‌ی ماتریس نرمی است. $[k']$ معکوس ماتریس نرمی می‌باشد.

$$m=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad \underbrace{[k_{con}]_{2\times2}}_{\text{ماتریس سختی متراکم}} = \cdots$$

در عمل چندین اول انجام نمی شود (مگر در بحث های تحقیقاتی) و معمولاً از سه روش بعدی (مخصوصاً روش ۴) مورد استفاده قرار می گیرد.

5) در این روش تنها درجات آزادی های را در نظر می گیریم که تأثیر بسزایی در ایجاد نیروی اینرسی دارند یعنی آن درجات آزادی های که جرم متناسب با آنها اثر بسیار کمی دارند (مثل دورانها) را کاملاً صرف نظر می کنیم. شرط این حالت این است که مثلاً نقطه ها کاملاً صلب باشند...

$$m=\begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} \qquad [k]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

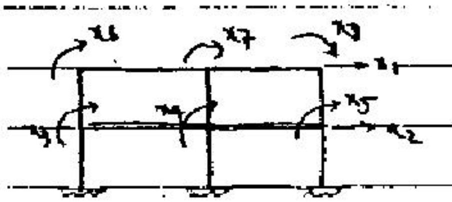
۱۴. ارتباط سیستم MDOF با سیستم های دینامیکی سازه ای.

تمرینات ۶-۱ و ۶-۴ ۶-۳ تحویل داده شود

دوشنبه ۸۴/۸/۲۳

۱۳) تراکم استاتیکی   Static

سازه ی مثال (در نظر بگیرید):



$$m_R \rightarrow \qquad m=\left[\begin{array}{cc|c} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ \hline & & 0 \\ 0 & & \ddots \end{array}\right] \qquad [k]=\left[\begin{array}{c|c} \overset{2\times2}{k_{RR}} & k_{RO} \\ \hline k_{OR} & \underset{6\times6}{k_{OO}} \end{array}\right]_{8\times8}$$

R: Remain

O: Omit

k_{ij}: سختی استاتیکی دارد.

با نوشتن معادلات حرکت داریم:

$$\left[\begin{array}{c|c} m_R & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \vdots\\ \ddot{x}_8\end{Bmatrix}+\left[\begin{array}{c|c} k_{RR} & k_{Ro} \\ \hline k_{oR} & k_{oo} \end{array}\right]\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_8\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_R(t)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} m_R & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\begin{Bmatrix}\ddot{x}_R\\ \ddot{x}_o\end{Bmatrix}+\left[\begin{array}{c|c} k_{RR} & k_{Ro} \\ \hline k_{oR} & k_{oo} \end{array}\right]\begin{Bmatrix}x_R\\ x_o\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_R(t)\\ 0\end{Bmatrix}$$

برای متراکم ساختن درجات آزادی x_o، باید در طرف دوم تساوی، نیروی متناظر آنها صفر باشد. البته ما بنا داشتیم این نقاط در محاسبات دینامیکی منظور نشوند.

یعنی اگر جرم یکی از گره‌ها صفر باشد، آن درجه آزادی نیز احتمالاً در محاسبات دینامیکی وارد نمی‌گردد.

با انجام ضرب ماتریسی داریم:

$$\begin{cases} m_R\cdot\ddot{x}_R + k_{RR}\cdot x_R + k_{Ro}\cdot x_o = P_R(t) \\ k_{oR}\cdot x_R + k_{oo}\cdot x_o = 0 \longrightarrow x_o = -k_{oo}^{-1}\,k_{oR}\,x_R \end{cases}$$

با جایگذاری x_o از معادله دوم در معادله اول داریم: $K_{Ro} = K_{oR}^{T}$

$$m_R\cdot\ddot{x}_R + k_{RR}\cdot x_R - k_{Ro}\,k_{oo}^{-1}\,k_{oR}\,x_R = P_R(t)$$

$$\longrightarrow \underbrace{m_R}_{2\times1}\ddot{x}_R + \underbrace{(k_{RR} - k_{oR}^{T}\,k_{oo}^{-1}\,k_{oR})}_{2\times2\ \ K_{con}}x_R = \underbrace{P_R(t)}_{2\times1}$$

ماتریس متراکم شده سختی

بنابراین معادلات دیفرانسیل حرکت به صورت زیر بدست می‌آید:

$$[m_R]\{\ddot{x}_R\} + [k_{con}]\{x_R\} = \{P_R(t)\}$$

بدین ترتیب، درجات آزادی x_3 تا x_8 در معادلات استاتیکی لحاظ شده‌اند ولی در دینامیک قرار نشده‌اند.

ماتریس سختی متراکم شده همان ماتریس سختی اصلاح شده می‌باشد.

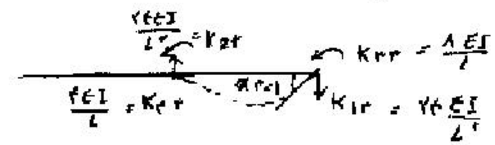
حل مثال :

الف) با درنظر گرفتن چهار درجه آزادی :

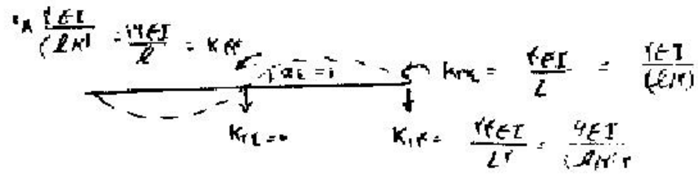
$$[m] = \begin{bmatrix} \frac{ml}{4} & & & \\ & \frac{ml}{2} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

• $x_2 = 1 \longrightarrow$

• $x_3 = 1 \longrightarrow$



• $x_4 = 1 \longrightarrow$



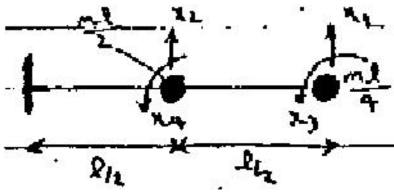
• برای تعیین جهت های پیچش :

حال می لازم است تا شود ← اگر گیردار شود تمایل داشت اینگونه شود

ب) دو درجه آزادی از ماتریس سختی اصلاح شده)

$\longrightarrow$ K : ماتریس نرمی $\xrightarrow{\text{معکوس}}$ K : سختی اصلاح شده

* ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی ماتریس سختی اصلاح شده (غیر از روش ماتریس تراکم)، یافتن ماتریس نرمی است که عناصر آن [illegible] می‌باشند. ماتریس سختی اصلاح شده، عکس ماتریس نرمی است.

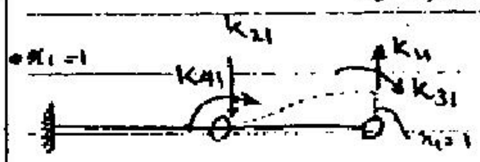


مثال:
معادلات حرکت را برای درجات آزادی x_1 و x_2 با تراکم گرفتن ماتریس سختی (4×4) بنویسید.

$$[m]=\begin{bmatrix} \frac{ml}{4} & 0 \\ 0 & \frac{ml}{2}\end{bmatrix} \qquad [k]=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1=1 & x_2=1 & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 12 & -12 & -3l & -3l \\ -12 & 24 & 3l & 0 \\ \hline -3l & 3l & l^2 & \frac{l^2}{2} \\ -3l & 0 & \frac{l^2}{2} & 2l^2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} & & x_3=1 & x_4=1 \end{array} \end{array} \times \frac{8EI}{l^3}$$

$$\begin{array}{cc} k_{RR} & k_{RO} \\ k_{OR} & k_{OO} \end{array}$$

$\pm\frac{4EI}{L}$ در وسط ایجاد [illegible]



برای یافتن هر یک از عناصر ماتریس $[k]$ را بدست می‌آوریم:

k_{11}: نیروی لازم برای ایجاد x_1 جهت جابجایی واحد در امتداد x_1، وقتی سایر درجات آزادی ثابت باشند.

$$k_{11}=\frac{12EI}{(l/2)^3} \qquad k_{21}=\frac{12EI}{(l/2)^3} \qquad \underbrace{k_{31}}_{}=\frac{6EI}{(l/2)^2} \qquad k_{41}=\frac{6EI}{(l/2)^2}$$

یعنی در امتداد ۳
متناظر با جابجایی در امتداد ۱

در جهت مثبت درجات آزادی می‌باشد.

ج) روش ماتریس تراکم:

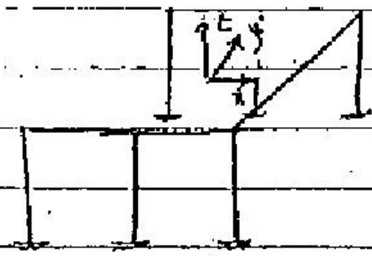
$$k_{Con}=k_{RR}-k_{OR}^{T}\,k_{OO}^{-1}\,k_{OR} \longrightarrow k_{Con}=\frac{48EI}{7l^2}\begin{bmatrix}2 & -5\\ -5 & 16\end{bmatrix}$$

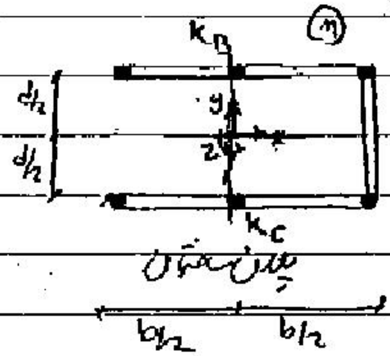
$$\longrightarrow \begin{bmatrix}\frac{ml}{4} & 0\\ 0 & \frac{ml}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k_{Con}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

۴) مرکز سختی ساختمان یک طبقه با سه درجه آزادی Δx، Δy و θ_z (دو حرکت جانبی و یک حرکت پیچشی حول محور قائم سازه (z)):

نیروی زلزله، نیروی اینرسی است که به جرم سازه اثر می‌کند. حال اگر مرکز سختی و مرکز جرم بر هم منطبق نباشند، سازه حول مرکز سختی [illegible] ... [illegible] عدم تقارن [illegible] درجه آزادی پیچشی ممکن است بر اثر زلزله در آن به وجود آید.

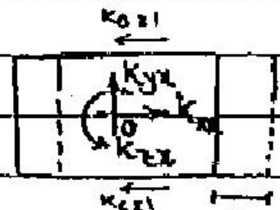
مثال: یک طبقه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم: (۳)





کس آزادی طبقه: $\ddot{x}_{g_x}, \ddot{x}_{g_y}, \ddot{\theta}_z$

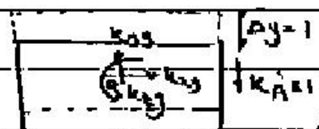
• تشکیل ماتریس سختی:



$$k_{xx} = k_B + k_C \qquad k_{yx} = 0$$

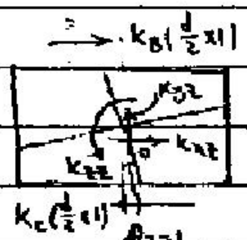
$$\Delta_x = 1 \quad \sum_o M = 0 \Rightarrow -k_{zx} + k_C\left(\frac{d}{2}\right) - k_B\left(\frac{d}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow k_{zx} = \frac{d}{2}(k_C - k_B)$$



$$k_{yy} = k_A \qquad k_{xy} = 0$$

$$\sum_o M = 0 \Rightarrow -k_{zy} + \frac{b}{2} k_A = 0 \Rightarrow \boxed{k_{zy} = \frac{b}{2} k_A}$$



با توجه به تقارن ماتریس سختی: $k_{xz} = k_{zx} \ , \ k_{yz} = k_{zy}$

$$\sum_o M = 0 \Rightarrow -k_{zz} + k_C\left(\frac{d}{2}\right)^2 + k_B\left(\frac{d}{2}\right)^2 + k_A\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow k_{zz} = \frac{d^2}{4}(k_B + k_C) + \frac{b^2}{4} k_A$$

$$\Rightarrow [k] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_B + k_C & 0 & (k_C - k_B)\frac{d}{2} \\ 0 & k_A & k_A \cdot \frac{b}{2} \\ (k_C - k_B)\frac{d}{2} & k_A \frac{b}{2} & (k_B + k_C)\frac{d^2}{4} + k_A \frac{b^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & \frac{m(b^2 + d^2)}{12} \end{bmatrix} \qquad \{P(t)\} = -\begin{Bmatrix} m\ddot{x}_{g_x} \\ m\ddot{x}_{g_y} \\ I_{mo}\ddot{\theta}_z \end{Bmatrix}$$

برای I_{mo} شکل برای m حول محور z دوران

معادله دیفرانسیل کل: $[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = -\{P(t)\}$

حالت خاص I) : $k_B = k_C = k$

ماتریس سختی به صورت زیر در می‌آید:

$$[k] = \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & k_A & k_A \frac{b}{2} \\ 0 & k_A \frac{b}{2} & k\frac{d^2}{2} + k_A \frac{b^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$m\ddot{x} + kx = P_1(t)$$

بنابراین می‌توان گفت معادله حرکت در راستای x مستقل از دو راستای دیگر می‌باشد و این اثر تقارن است :

معادله دیفرانسیل حرکت در راستای x :

$$m\ddot{u}_x + 2k_x u_x = -m\ddot{u}_g(x)$$

یعنی اگر سازه نسبت به امتداد خاصی متقارن باشد، معادله حرکت در آن امتداد مستقل از درجات آزادی دیگر خواهد بود.

حالت خاص II) k_A را روی محور طولی قرار دهیم یعنی سختی در دو راستا متقارن باشد ($b=0$)

در این حالت ماتریس سختی قطری می‌شود. (یعنی از سه درجه آزادی، دو درجه را مستقل بودیم، سومی هم خود به خود مستقل می‌شود). قرار دادن k_A در وسط مانند متقارن نمودن سازه نسبت به محور x است.

در این حالت در هر امتداد SDOF داریم و سه معادله مستقل از هم بدست می‌آید.

دو حالت فوق اثر تقارن سازه‌ها را نشان می‌دهد که بسیار مهم می‌باشد.

چهارشنبه ۸۴/۸/۲۵

X) معادلات حرکت MDOF :

۱) معادلات حرکت قاب‌های برشی - بدون میرایی

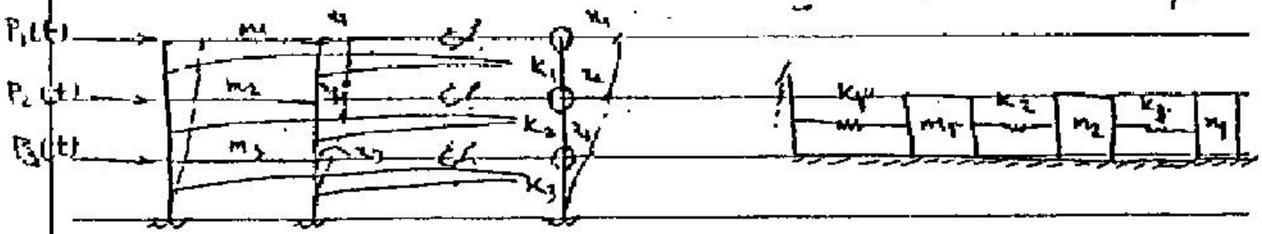
قاب‌های برشی قاب‌هایی هستند که دارای دو فرض اساسی می‌باشند:

۱- سختی خمشی طبقات نسبت به سختی ستون‌ها زیاد باشد (دیافراگم صلب) : دال‌های بتنی یا ترکیب تیر و دال در حقیقت تا حدی این فرض را برآورده می‌کنند.

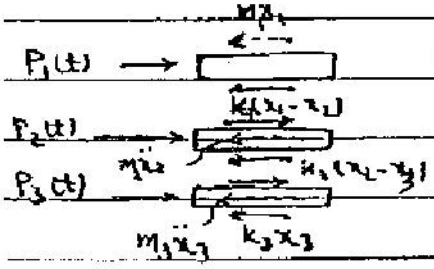
۲- کل وزن (جرم) سازه در محل طبقات متمرکز باشد.

به این صورت می‌توان این قاب را با جرم‌های متمرکز در محل طبقات مدل کرد.

برای قاب برشی از تیرها به صورت آزاد انتقال جرمی به منظور راحت‌تر شدن مدل‌سازی مناسب جرم‌ها در تراز طبقات متمرکز می‌کنیم و در اینجا از تغییر طول محوری ستون‌ها صرف‌نظر می‌نماییم.



با در نظر گرفتن درجات آزادی دیگر ماهیت کلی رفتاری این سیستم تنها حجم محاسبات تغییر می‌کند.



سه درجه آزادی را پس از یک تغییر مکان سازه رسم می‌نماییم :

الان برای دستیابی به معادله دیفرانسیل حرکت، اقدام به نوشتن معادلات تعادل می‌نماییم :

$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1-x_2) = P_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2-x_3) - k_1(x_1-x_2) = P_2(t)$$

$$m_3\ddot{x}_3 + k_3x_3 - k_2(x_2-x_3) = P_3(t)$$

به علت وجود مجهولات مشترک در معادلات، مشخص است که معادلات همبسته می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}P_1(t)\\ P_2(t)\\ P_3(t)\end{Bmatrix}$$

$$\Longrightarrow [m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{P(t)\}$$

ماتریس سختی با ترتیب k_{ij} به دست آمده تحلیل II

* ماتریس سختی همواره متقارن است.

X-1-1) حرکت آزاد قاب برشی - بدون میرایی ($\{P(t)\}=\{0\}$) :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

جواب معادلات فوق به شکل ریاضیات به صورت مقابل می‌باشد: $\{x\} = \{a\}\sin(\omega t+\theta)$

ماتریس مجهول

و زاویه فاز که باید تعیین شود