اگر این‌طور فرض کنیم که $\{a\}$ها و ωها و θهای متفاوتی در معادله صدق می‌کنند یعنی $\{a\}_i \sin(\omega_i t+\theta_i)$های متفاوتی جواب می‌باشند، براساس ریاضی مجموع آنها جواب می‌باشد.

$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$: بردار دامنه ارتعاش

با جایگذاری جواب کلی در معادله دیفرانسیل حرکت داریم:

$$-\omega^2 [m]\{a\}\sin(\omega t+\theta) + [k]\{a\}\sin(\omega t+\theta) = \{0\}$$

$$\xrightarrow{\text{با حذف سینوس}} \big[[k]-\omega^2[m]\big]\{a\} = \{0\} \longrightarrow \big|[k]-\omega^2[m]\big| = 0$$

برای غیر صفر بودن آمدیم بردار $\{a\}$، اینگونه عمل می‌کنیم:

برای غیر صفر بودن ماتریس بردار $\{a\} \neq 0$ باید دترمینان $\big[[k]-\omega^2[m]\big]$ صفر باشد. البته صفر بودن دترمینان، موجب وابسته شدن a_iها (عناصر بردار $\{a\}$) می‌شود. بدین جهت با انتخاب دلخواه یکی از a_iها بقیه عناصر را بدست می‌آوریم:

جواب‌های بدست آمده از روش فوق بهم وابسته می‌باشند. (بردارهای $\{a\}$ نسبت بهم وابسته‌اند)

برای ωهای مختلف، $\{a\}$های مختلفی بدست می‌آید.

ω: فرکانس‌های ارتعاش می‌باشند. $\omega^2 = \lambda$

تعداد فرکانس‌ها (ωها) به تعداد درجات آزادی می‌باشند.

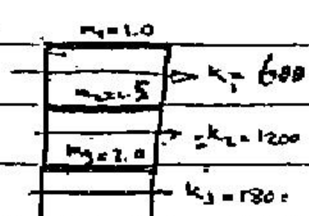
تذکر: $\big[[k]-\omega^2[m]\big]\{a\} = \{0\}$

$$\longrightarrow \big[\underbrace{[m]^{-1}[k]}_{[A]} - \lambda[I]\big]\{a\} = \{0\} \longrightarrow [A]\{a\} = \lambda\{a\}$$

براساس رابطه‌ی آخر بدست آمده مشاهده می‌شود که λها مقادیر ویژه‌ی ماتریس $[A]$ ($[A]=[m]^{-1}[k]$) می‌باشند.

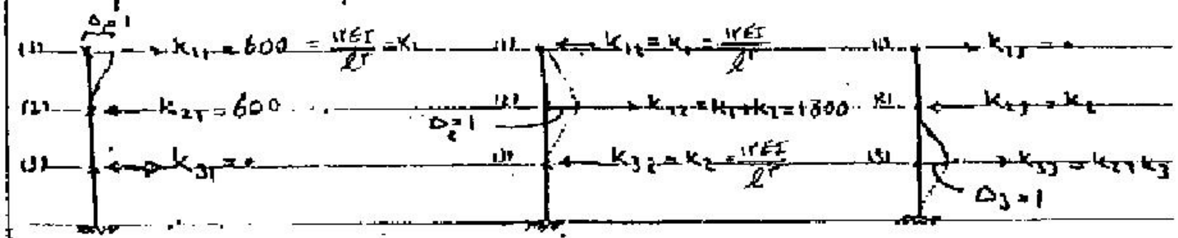
به همین ترتیب، بردار $\{a\}$ نیز بردار ویژه‌ی ماتریس $[A]$ خواهد بود.

مثال: قاب برشی سه طبقه‌ی مقابل را در نظر بگیرید. بردار فرکانس‌ها را بیابید. (اعداد در سیستم SI می‌باشند)



$\{\omega\} = ?$

$\Delta = \left| [k] - \omega^2 [m] \right| = 0$



$$\rightarrow [k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 \end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| [k] - \omega^2 [m] \right| = \begin{vmatrix} 600-\omega^2 & -600 & 0 \\ -600 & 1800-1.5\omega^2 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000-2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{\omega^2}{600} = \lambda} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-2\lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \lambda^3 - 5.5\lambda^2 + \underbrace{7.5}_{=\frac{22.5}{3}}\lambda - 2 = 0$$

Ascending ↓

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.35 \xrightarrow{\text{متغیر ثابت}} \omega_1 = 14.5 \\ \lambda_2 = 1.61 \longrightarrow \omega_2 = 31.1 \\ \lambda_3 = 3.5 \longrightarrow \omega_3 = 46.1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{\omega\} = \begin{Bmatrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.1 \end{Bmatrix} (rad/s)$$

به کوچکترین فرکانس، فرکانس اصلی گفته می‌شود ← اهمیت بیشترین نقش را دارد.

۲) ماتریس شکل حالت ارتعاش یا ماتریس مودال $(\{\Phi\})$. Modal Shape Matrix

$$\left[[k] - \omega^2 [m] \right] \{q\} = \{0\}$$

در این معادله فرض $\omega = \omega_1$ قرار دهیم، یک بردار $\{q\}_1$ بدست می‌آید که عناصر آن بهم وابسته‌اند. به همین ترتیب $\omega = \omega_2$ بردار $\{q\}_2$ و ... را بدست می‌آوریم.

از این به بعد به جای $\{q\}_i$ از $\{\Phi\}_i$ استفاده می‌کنیم:

$$\{\Phi\}_i = \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \\ \vdots \\ \phi_{in} \end{Bmatrix}$$

یعنی به ازای i امین مود بدست آمده است

یعنی به ازای مد یا فرکانس i

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \vdots \\ \phi_{1n} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{2n} \end{Bmatrix} \quad , \ \ldots \ , \quad \{\phi\}_n = \begin{Bmatrix} \phi_{n1} \\ \phi_{n2} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{Bmatrix}$$

$\{\phi\}_i$ را بردار شکل ارتعاش یا بردار مودال می‌نامیم. این بردار شکل ارتعاش آزاد را مشخص می‌کند چرا که اگر سازه به شکل $\{\phi\}_i$ در زمان معلوم در بیاید، مقادیر حرکت آزاد سیستم بدست می‌آید. (در لحظه‌ی $t=t_n$) بنابراین شکل سازه در لحظه‌ی $t=t_n$ بدست می‌آید (به ازای $\omega=\omega_i$).

$\{\phi\}_i$ که متناظر ω_i می‌باشد را شکل ارتعاش مود i ام می‌نامیم.

$$\begin{array}{cccccc} & \omega=\omega_1 & \omega=\omega_2 & \omega=\omega_3 & & \omega=\omega_n \\ [\phi] = \Big[& \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \{\phi\}_3 & \cdots & \{\phi\}_n \Big] \end{array}$$

ماتریس شکل حالت‌های ارتعاش (ماتریس مودال)

ماتریس مودال از کنار هم قرار دادن بردارهای $\{\phi\}_i$ که متناظر ω_i می‌باشند حاصل می‌شود.

جواب نهایی به صورت زیر می‌باشد:

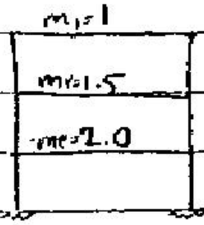
$$\{x\} = A_1\{\phi\}_1 \sin(\omega_1 t+\theta_1) + A_2\{\phi\}_2 \sin(\omega_2 t+\theta_2) + A_3\{\phi\}_3 \sin(\omega_3 t+\theta_3) + \cdots$$

از آنجا که $\{\phi\}_i$ ضریب صفر نیست و جابجایی سازه ضریب صفر است، پس ضرایب A_i در معادلات فوق قرار داده می‌شوند تا این عیب را جبران کنند.

طبیعی است که جواب تابع شرایط اولیه باشد. بنابراین A_i و θ_i وابسته به شرایط اولیه می‌باشند. این شرایط اولیه، جابجایی و سرعت هر یک از درجات آزادی در $t=0$ می‌باشد. پس به تعداد $2n$ شرط اولیه داریم که $2n$ مجهول (A_i و θ_i) با استفاده از معادلات وابسته به شرایط اولیه بدست می‌آیند.

$$t=0: \begin{cases} x_1(0)=\ldots \ , \ \dot{x}_1(0)=\ldots \\ x_2(0)=\ldots \ , \ \dot{x}_2(0)=\ldots \\ \vdots \end{cases}$$

دوشنبه ۸۴/۸/۳۰



مثال: $\omega_1=14.5$ $\quad \omega_2=31.1$ $\quad \omega_3=46.1$

$\lambda_1=0.351$ $\quad \lambda_2=1.61$ $\quad \lambda_3=3.54$

شکل مودها را رسم کنید. $[\Phi]=?$ جواب = ?

در جلسه قبل گفتیم که جواب معادله دیفرانسیل حرکت ارتعاش آزاد $[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$

به صورت $\{x\}=\{a\}\sin(\omega t+\phi)$ است.

و به این نتیجه رسیدیم که:

$$\left[[k]-\omega^2[m]\right]\{a\}=\{0\}$$

$$\longrightarrow \left|[k]-\omega^2[m]\right|=0$$

در شماره دوم به تعداد درجات آزادی فرکانس داریم و برای هر فرکانس یک بردار ویژه $\{\Phi\}_i$.

$[\Phi]$ از کنار هم چیدن بردارهای $\{\Phi\}_i$ تشکیل می‌شود.

در جلسه قبل ماتریس سختی و ماتریس جرم را برای قاب فوق تشکیل دادیم

- $\lambda=0.351$

$$0=\begin{bmatrix}1-0.351 & -1 & 0\\ -1 & 3-0.351(1.5) & -2\\ 0 & -2 & 5-0.351(2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0.649a_1-a_2=0\\ -a_1+2.474a_2-2a_3=0\\ -2a_2+4.298a_3=0\end{cases}$$

از آنجا که این معادلات فوق مستقل نیستند برای رسیدن به جواب $a_1=1$ قرار داده و a_2 و a_3 را حساب می‌کنیم

$a_1=1 \longrightarrow a_2=0.649 \quad , \quad a_3=0.300$

$$\rightarrow \{\Phi\}_1=\begin{Bmatrix}1\\0.649\\0.300\end{Bmatrix}$$

- $\lambda_2=1.61$ $\qquad\qquad$ - $\lambda_3=3.54$

$\rightarrow \omega=\omega_2=31.1 \longrightarrow \{\Phi\}_2=\begin{Bmatrix}1\\-0.601\\-0.676\end{Bmatrix}$ $\qquad \rightarrow \omega=\omega_3=46.1 \rightarrow \{\Phi\}_3=\begin{Bmatrix}1\\2.57\\2.47\end{Bmatrix}$

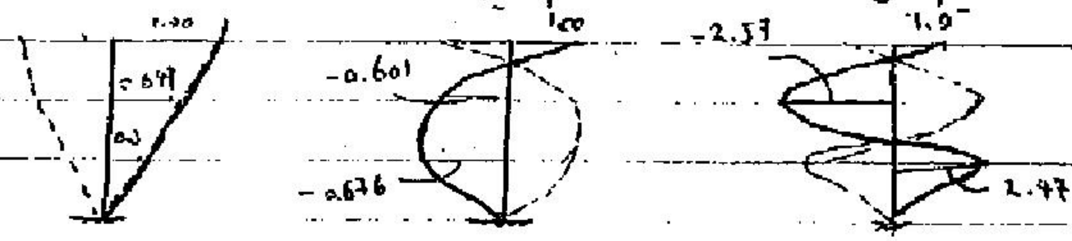
$$\Rightarrow [\Phi] = \begin{array}{ccc} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \{\phi\}_3 \\ \left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.699 \\ 0.300 \end{Bmatrix} \right. & \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.601 \\ -0.676 \end{Bmatrix} & \left. \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.57 \\ 2.47 \end{Bmatrix} \right] \end{array}$$

$$\Rightarrow \{x\} = A_1 \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.699 \\ 0.300 \end{Bmatrix} \sin(14.5t+\theta_1) + A_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.601 \\ -0.676 \end{Bmatrix} \sin(31.1t+\theta_2)$$

$$+ A_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.57 \\ 2.47 \end{Bmatrix} \sin(46.1t+\theta_3)$$

A_i ها و θ_i ها با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آیند + نتیجه می‌شود که تمام مودهای ارتعاشی در جواب موثرند.

حال می‌خواهیم شکل سازه در مودهای مختلف را رسم نماییم:



مود اول — مود دوم — مود سوم

یعنی با در نظر گرفتن هر یک از مودها، شکل سازه به صورت فوق می‌شود. ولی در حقیقت جواب ترکیبی از سه مود فوق می‌باشد.

مودی که بیشترین تاثیر را روی جواب دارد و بستگی به نوع تحریک دارد، فرکانس مربوط به آن فرکانس غالب است.

در سازه‌های معمولی عموماً مود اول غالب است.

در مورد سازه‌های با ساختار خاص ممکن است هر یک از مودها غالب باشند.

دلیل این است که مود اول را مود اساسی یا بزرگترین مود می‌نامند. چون نشان داده که انرژی ذخیره شده در مود حاکم کمترین است.

توجه کنید که در حل معادلات مشخصه از نظر عددی هیچ اشتباهی نکردیم. اما از طرف دیگر پایین‌ترین سختی مورد استفاده ما ثابت است. (یعنی در محدوده خطی هستیم).

۱۳) شرایط تعامد:

قطری کردن ماتریس های جرم و سختی:

اگر رفتار سازه خطی باشد، می‌توانیم معادلات دینامیکی را به معادلات مستقل (جدا از هم) تبدیل کنیم. مخصوصا این غیرقطری بودن ماتریس سختی است که منجر به همبسته بودن معادلات دینامیکی می‌شود. بنابراین با قطری کردن ماتریس های سختی و جرم، معادلات دینامیکی غیرهمبسته می‌شوند.

بنابراین به دنبال قطری کردن این ماتریس ها هستیم:

$$\begin{cases} \{\phi\}_n^T [m] \{\phi\}_m = 0 \quad , n \neq m \\ \{\phi\}_n^T [K] \{\phi\}_m = 0 \quad , n \neq m \end{cases} \Rightarrow \text{شرایط تعامد}$$

به دنبال این هستیم که روابط فوق را اثبات کنیم:

$$\left[[k] - \omega^2 [m] \right] \{\phi\} = \{0\}$$

$$\longrightarrow [k]\{\phi\} = \omega^2 [m] \{\phi\}$$

رابطه فوق را یکبار برای مود n ام و یکبار برای مود m ام می نویسیم:

$$\begin{cases} \text{مود } n: & [k]\{\phi\}_n = \omega_n^2 [m] \{\phi\}_n \quad \text{(I)} \\ \text{مود } m: & [k]\{\phi\}_m = \omega_m^2 [m] \{\phi\}_m \quad \text{(II)} \end{cases}$$

طرفین رابطه (I) را در $\{\phi\}_m^T$ ضرب می کنیم. داریم:

$$\{\phi\}_m^T [k] \{\phi\}_n = \omega_n^2 \{\phi\}_m^T [m] \{\phi\}_n$$

$$\xrightarrow{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T} \{\phi\}_n^T [k] \{\phi\}_m = \omega_n^2 \{\phi\}_n^T [m] \{\phi\}_m \quad (*)$$

همچنین طرفین رابطه II را در $\{\phi\}_n^T$ ضرب می کنیم:

$$\{\phi\}_n^T [k] \{\phi\}_m = \omega_m^2 [m] \{\phi\}_m \{\phi\}_n^T$$

$$\longrightarrow \{\phi\}_n^T [k] \{\phi\}_m = \omega_m^2 \{\phi\}_n^T [m] \{\phi\}_m \quad (**)$$

$$\rightarrow (\omega_n^2 - \omega_m^2)\{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_m = 0$$

یعنی اگر $m \neq n$ آنگاه $\omega_n \neq \omega_m$ پس باید: $\{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_m = 0$

و این همان مورد نظر اثبات شده است.

$$[M] = [\Phi]^T[m][\Phi] \quad , \quad [\Phi]^T[k][\Phi] = [K]$$

می‌خواهیم ماتریس $[M]$ و $[K]$ را حساب کنیم:

$$[M] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T \\ \{\phi\}_2^T \\ \vdots \\ \{\phi\}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & m & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \cdots & \{\phi\}_n \end{bmatrix}$$

یعنی ماتریس قطری است.

$$= \begin{bmatrix} \{\phi\}_1^T[m]\{\phi\}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \{\phi\}_2^T[m]\{\phi\}_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_n \end{bmatrix} \rightarrow [M] = \left[\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i\right] = [M_i]$$

بنابراین ماتریس $[M]$ به طرف مودی، ماتریس قطری است و به آن ماتریس قطری جرم گویند.

به همین ترتیب ماتریس $[K]$ نیز قطری می‌شود

$$[K] = \left[\omega_i^2\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}\right]$$

$[K] = \omega_i^2[M]$ $[K]$ را ماتریس سختی قطری یا ماتریس سختی قطری شده نامیم

$$[M] = [\,^\lceil M_i \rfloor] \quad , \quad M_i = \{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i$$

$$[K] = [\,^\lceil K_i \rfloor] \quad , \quad K_i = \omega_i^2\{\phi\}_i^T[m]\{\phi\}_i$$

۵) نرمال کردن ماتریس مودال:

$\omega = \omega_i$

$$\{\phi\}_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix} \xrightarrow[\sqrt{M_i}]{\text{در این تقسیم}} \{\bar{\phi}\}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\phi_{1i}}{\sqrt{M_i}} \\ \frac{\phi_{2i}}{\sqrt{M_i}} \\ \vdots \\ \frac{\phi_{ni}}{\sqrt{M_i}} \end{Bmatrix}$$

M_i ماتریس جرم عمومی می‌باشد.

بردار نرمال مودال

چون مقادیر را نسبی و متغیر یا مستقل ما انتخاب کردیم، مجاز به این تقسیم هستیم.

$$[\bar{\Phi}] = \left[\{\bar{\Phi}\}_1 \ \{\bar{\Phi}\}_2 \ \cdots \ \{\bar{\Phi}\}_n \right]$$

حال اگر ماتریس [M] را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$[\bar{M}] = [\bar{\Phi}]^T [m] [\bar{\Phi}]$$

$$\longrightarrow [\bar{M}]_i = \left\lceil \{\bar{\Phi}\}_i^T [m] \{\bar{\Phi}\}_i \right\rfloor = \left\lceil \frac{\{\Phi\}_i^T}{\sqrt{M_i}} [m] \frac{\{\Phi\}_i}{\sqrt{M_i}} \right\rfloor$$

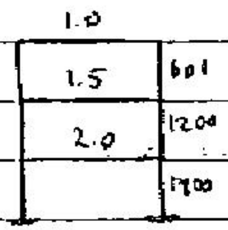
$$\longrightarrow [\bar{M}]_i = \lceil 1 \rfloor = [I]$$

به همین ترتیب داریم:

$$[\bar{K}] = \lceil \omega_i^2 \rfloor$$

اینها ابزاری برای جدا کردن معادلات حرکت می‌باشند.

مثال:



$$m = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{Bmatrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.4 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 \end{bmatrix}, \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.649 & -0.601 & -2.57 \\ 0.3 & -0.676 & 2.47 \end{bmatrix}$$

ماتریس نرمال مودال:

$$[\bar{\Phi}] = \begin{bmatrix} 1.0/\sqrt{1.801} & 1.0/\sqrt{2.455} & 1.0/\sqrt{23.1} \\ 0.649/\sqrt{1.801} & -0.601/\sqrt{2.455} & -2.57/\sqrt{23.1} \\ \frac{0.300}{\sqrt{1.801}} & \frac{-0.672}{\sqrt{2.455}} & \frac{2.47}{\sqrt{23.1}} \end{bmatrix}$$

$$[M] = [\Phi]^T [m] [\Phi] = \begin{bmatrix} \underbrace{1.801}_{M_1} & & \\ & \underbrace{2.455}_{M_2} & \\ & & \underbrace{23.10}_{M_3} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow [\bar{\Phi}] = \begin{bmatrix} 0.745 & 0.637 & 0.208 \\ 0.480 & -0.384 & -0.535 \\ 0.223 & -0.432 & 0.514 \end{bmatrix}$$

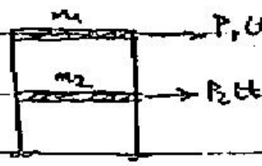
بنابراین:

$$[\bar{M}] = [\bar{\Phi}]^T [m] [\bar{\Phi}] = [I], \qquad [\bar{K}] = [\bar{\Phi}]^T [k] [\bar{\Phi}] = \lceil \omega_i^2 \rfloor$$

XI) حرکت اجباری MDOF قابهای برشی (بدون میرایی):

۱) منفک کردن معادلات دیفرانسیل حرکت، Uncoupled Dif. equ. of Motion:

معادله دیفرانسیل حرکت بصورت زیر است:



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = P_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = P_2(t) \end{cases}$$

در هر یک از معادلات حرکت ممکن است بیش از یک متغیر موجود باشد. برای جدا کردن آنها باید هر معادله یک متغیر باشد، همچنین حل می‌کنیم که مختصات تعمیم یافته را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{x\} = [\Phi]\{\underbrace{Y}_{\text{مختصات تعمیم یافته}}\}$$

$$\longrightarrow [m][\Phi]\{\ddot{Y}\} + [k][\Phi]\{Y\} = \{P(t)\}$$

طرفین را در $[\Phi]^T$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{[\Phi]^T[m][\Phi]}_{[M]}\{\ddot{Y}\} + \underbrace{[\Phi]^T[k][\Phi]}_{[K]}\{Y\} = \underbrace{[\Phi]^T\{P(t)\}}_{\{\mathcal{P}(t)\}}$$

$$\longrightarrow [M]\{\ddot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{\mathcal{P}(t)\}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} M_1\ddot{Y}_1 + K_1Y_1 = \mathcal{P}_1(t) \\ M_2\ddot{Y}_2 + K_2Y_2 = \mathcal{P}_2(t) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

یعنی با استفاده از خاصیت تعامد مودها، معادلات همبسته MDOF را به چند معادله مستقل تبدیل نمودیم که هر یک از آنها تنها یک متغیر مجهول دارد.

بنابراین هر معادله مانند یک SDOF است که می‌توان آن را از طریق انتگرال دوهامل حل کرد و Y را بدست آورد.

و با استفاده از Y_i ها X_i را می‌یابیم.

روش فوق را روش آنالیز مودال می‌نامیم.

اگرچه کار را برای چند درجه آزادی درست آمدیم، روش تاریخچه زمانی را حل کردیم. روش طیفی با تغییر یا اندرکی ما می‌دانیم مثلاً مانند هم تغییر بیان را می‌دانیم (که البته برای طراحی نیز لازم است).

در حقیقت روش این جلسه ما روش تاریخچه زمانی مودال می‌باشد.

$$\ddot{Y}_1 + \omega_1^2 Y_1 = \frac{P_1(t)}{m_1}$$

$$\ddot{Y}_2 + \omega_2^2 Y_2 = \frac{P_2(t)}{m_2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

سازه هم شکل به معادله اول، مود اول (ω_1)

در معادله دوم، مود دوم (ω_2) و ... دخالت دارند.

اگر به جای $[\Phi]$ از $[\bar{\Phi}]$ استفاده می‌کردیم، داشتیم:

$$\underbrace{[\bar{\Phi}]^T[m][\bar{\Phi}]}_{[\bar{m}]}\{\ddot{Y}\} + \underbrace{[\bar{\Phi}]^T[K][\bar{\Phi}]}_{[\bar{K}]}\{Y\} = \underbrace{[\bar{\Phi}]^T\{P(t)\}}_{\{\bar{P}(t)\}}$$

$\{\bar{P}(t)\}$ را نیروی خارجی به مختصات تعمیم یافته گوییم.

مختصات تعمیم یافته با استفاده از خاصیت مودها، باعث جدا شدن معادلات همبسته می‌شود. چرا که هر معادله را جداگانه مسئله دینامیکی از نظر مودهای دیگر است.

دوشنبه ۸۴/۹/۲۱

مثال:

$$[m]=\begin{bmatrix}1.0 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2.0\end{bmatrix} \qquad k=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}\times 600$$

$$\bar{\Phi}=\begin{bmatrix}0.745 & 0.638 & 0.208\\ 0.480 & -0.384 & -0.535\\ 0.223 & -0.432 & 0.514\end{bmatrix} \qquad \{\omega\}=\begin{Bmatrix}14.1\\ 31.1\\ 46.1\end{Bmatrix}$$

$$\{x(0)\}=\begin{Bmatrix}x_1(0)=0.5\\ x_2(0)=0.4\\ x_3(0)=0.3\end{Bmatrix} \qquad \{\dot{x}(0)\}=\begin{Bmatrix}\dot{x}_1(0)=0\\ \dot{x}_2(0)=9\\ \dot{x}_3(0)=0\end{Bmatrix}$$

با جایگذاری $\{x\}=[\Phi]\{Y\}$ در رابطه $[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{P(t)\}$ و ضرب طرفین رابطه در $[\Phi]^T$ به ماتریس‌های قطری $[M]$ و $[K]$ تعمیم‌یافته زیر می‌رسیم:

$$[K]=[\Phi]^T[k][\Phi] \qquad [M]=[\Phi]^T[m][\Phi]$$

$\{Y(t)\}$ مختصات تعمیم‌یافته است که به صورت معادلات مستقل از هم در دسترس می‌آیند.

$$M_i\ddot{Y}_i+K_iY_i=0 \longrightarrow \ddot{Y}_i+\omega_i^2Y_i=0$$

و داریم:

$$Y_i(t)=\frac{\dot{Y}_i(0)}{\omega_i}\sin\omega_it+Y_i(0)\cos\omega_it$$

اکنون می‌دانیم که Y_i را می‌خواهیم که شرایط اولیه آن بر حسب x_i است. برای این منظور می‌توانیم طرفین رابطه $\{x\}=[\Phi]\{y(t)\}$ را در $[\bar{\Phi}]^T[m]$ ضرب کنیم:

$$[\bar{\Phi}]^T[m]\{x\}=\underbrace{[\bar{\Phi}]^T[m][\bar{\Phi}]}\{y(t)\}$$

اگر $[\Phi]$ نرمال شده باشد این قسمت واحد خواهد بود

$$\{y(t)\}=[\bar{\Phi}]^T[m]\{x\}\,\underbrace{[M]^{-1}}_{=I}$$

با توجه به عملیات فوق برای این مثال خواهیم داشت:

$$\{Y(0)\}=\begin{Bmatrix}0.499\\ -0.171\\ 0.091\end{Bmatrix} \qquad \dot{Y}(0)=\begin{Bmatrix}6.48\\ -5.188\\ -7.227\end{Bmatrix}$$

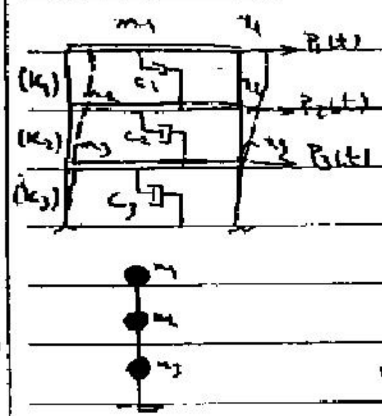
$$\Rightarrow \{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{6.78}{14.5}\sin 14.5t + 0.794\cos 14.5t \\ + -0.171\cos 31.1t \\ +0.091\cos 46.1t \end{Bmatrix}$$

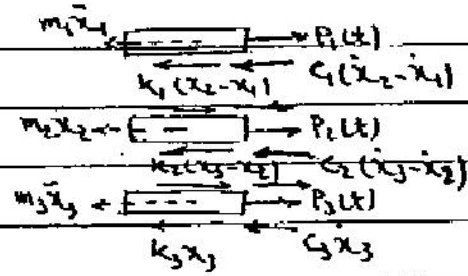
$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{6.98}{14.5}\sin 14.5t \\ \frac{-5.186}{31.1}\sin 31.1t \\ \frac{-7.223}{46.1}\sin 46.1t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.794\cos 14.5t \\ -0.171\cos 31.1t \\ 0.091\cos 46.1t \end{Bmatrix} \times A$$

$$\{x\} = [\bar{\Phi}]\{y\}$$

۷) حرکت قاب‌های برشی MDOF (با میرایی):

برای منظور کردن میرایی در سازه از میراگرهای فرضی استفاده می‌کنیم





$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_2-x_1) + c_1(\dot{x}_2-\dot{x}_1) = P_1(t)$$

$$-c_1(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + m_2\ddot{x}_2 + k_1(x_2-x_1) + k_2(x_3-x_2) + c_2(\dot{x}_3-\dot{x}_2) - k_1(x_2-x_1) = P_2(t)$$

$$m_3\ddot{x}_3 + k_3x_3 + c_3\dot{x}_3 - k_2(x_3-x_2) - c_2(\dot{x}_3-\dot{x}_2) = P_3(t)$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

مشاهده می‌شود که ماتریس میرایی شباهت بسیاری به ماتریس سختی دارد.
مجهول بودن ماتریس میرایی تفاوت این حالت با حالت قبل است.

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{P(t)\}$$

با در نظر گرفتن $\{x\}=[\Phi]\{Y\}$ و ضرب کردن معادله فوق در $[\Phi]^T$ می‌توان نوشت:

$$\underbrace{[\Phi]^T[m][\Phi]}_{[M]}\{\ddot{Y}\} + \underbrace{[\Phi]^T[c][\Phi]}_{[C]}\{\dot{Y}\} + \underbrace{[\Phi]^T[k][\Phi]}_{[K]} = \underbrace{\{P(t)\}}_{[\Phi]^T\{P(t)\}}$$

معمولاً برای حل مسائل فرض کردن میرایی و جرم و سختی نیز رابطه‌ای خطی برقرار است. این فرض چندان دور از واقعیت نیست و از آزمایشات نیز حاصل می‌شود که این رابطه با همین فرض است)

$[c] = \alpha[M] + \beta[k]$ به منظور فرض میرایی به صورت ترکیب خطی از جرم و سختی که میرایی کلاسیک می‌گویند.

فرض میرایی کلاسیک را برای حل مسائل به صورت مودال انجام می‌دهیم.

$$= [\Phi]^T[c][\Phi] = \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{bmatrix}$$

$$= [2\zeta_i M_i \omega_i]$$

با فرض فوق و معرفی نسبت میرایی ماتریس $[C]$ نیز قطری است:

$$M_i \ddot{Y}_i + C_i \dot{Y}_i + K_i Y_i = P_i(t)$$

با تعریف: $\zeta = \frac{c}{2m\omega}$

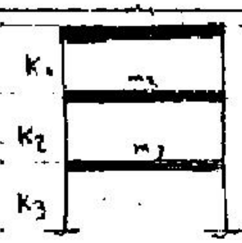
$$\longrightarrow \ddot{Y}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{1}{M_i} P_i \quad , \; i = 1, \dots, n$$

ζ_i: نسبت میرایی برای مود i ام. هر کدام از معادلات فوق مشابه SDOF با انتگرال دوهامل قابل حل هستند.

برای سازه‌ها معمولاً نسبت میرایی برای مودهای مختلف، ζ های متفاوت در نظر گرفته نمی‌شود و یک میرایی برای سازه در نظر می‌گیرند. مفاهیم ζ_i تنها مفهوم ریاضی هستند و معادل فیزیکی ندارند یعنی نمی‌توان نشان داد مود i ام با ζ بزرگتر زودتر میرا می‌شود.

حل معادلات فوق از طریق انتگرال دوهامل انجام می‌شود سپس از رابطه $\{x\}=[\Phi]\{Y\}$، $\{x\}$ به دست می‌آید.

VI) تحلیل تاریخچه زمانی = نیروی خارجی زلزله = لرزش پایه (تحلیل خطی):



$$[m]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{P(t)\}$$

در هر لحظه جابجایی را بدست می‌آوریم.

$$\{P_e(t)\} = [m]\{I\}\ddot{x}_g = \begin{Bmatrix} m_1\ddot{x}_g \\ m_2\ddot{x}_g \\ m_3\ddot{x}_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{x}_g$$

$$\longrightarrow \{P_e(t)\} = [m]\{I\}\ddot{x}_g$$

با فرض $\{x\} = [\Phi]\{Y\}$ و ضرب $[\Phi]^T$ در طرفین تساوی داریم: $\{\overline{P}(t)\} = [\Phi]^T\{P(t)\}$

$$\{\overline{P}_e(t)\} = \underbrace{[\Phi]^T[m]\{I\}}_{\{L\}}\ddot{x}_g$$

$\{L\} = [\Phi]^T[m]\{I\}$ را بردار مشارکت می‌نامیم.

$$\longrightarrow P_{ei} = L_i\ddot{x}_g \quad , \quad L_i = \{\phi\}_i^T[m]\{I\} = \text{ضریب مشارکت} = L_i^T$$

بدین ترتیب معادلات مجزا به صورت زیر در می‌آید:

$$M_i\ddot{Y}_i + C_i\dot{Y}_i + k_iY_i = L_i\ddot{x}_g$$

* ضریب مشارکت ضریبی است که با ضرب در شتاب زلزله، نیروی موثر آن را به ما می‌دهد.

$$\longrightarrow \ddot{Y}_i + 2\omega_i\xi_i\dot{Y}_i + \omega_i^2Y_i = \frac{L_i}{M_i}\ddot{x}_g$$

در این مرحله یک معادله تام است که جواب با استفاده از انتگرال دوهامل بدست می‌آید.

VII) مقایسه برش پایه در تحلیل خطی (تاریخچه زمانی) و روش طیفی آیین نامه ۲۸۰۰:

از انتگرال دوهامل استفاده می‌کنیم، داریم:

$$Y_i = \int_0^t \frac{L_i}{\omega_iM_i}\ddot{x}_g \cdot e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{L_i}{\omega_iM_i}\int_0^t \ddot{x}_g \cdot e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau = \frac{L_i}{\omega_iM_i}Q_i(t)$$

بدین ترتیب داریم:

$$Y_i = \frac{L_i \cdot Q_i(t)}{\omega_iM_i} \quad ①$$

حال می‌خواهیم مختصات تغییر مکان را پیدا کنیم

• در SDOF قبلاً دیدیم که حرکت در اثر زلزله به صورت زیر نوشته می شود:

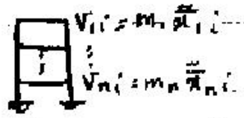
شتاب مطلق = $\ddot{x}$

$$m(\ddot{x}_g+\ddot{x})+kx=0 \longrightarrow m\ddot{x}+kx=0 \longrightarrow \ddot{x}=-\omega^2 x$$

به همین ترتیب داریم: $\ddot{Y}_i=-\omega_i^2 Y_i$ ②

• از طرفی: $\{x\}=[\Phi]\{Y\} \Longrightarrow \{x\}_i=\{\Phi\}_i Y_i$ یا $\{\ddot{x}\}_i=\{\Phi\}_i \ddot{Y}_i$ ③

اگر نقطه سیستم را در نظر بگیریم:



نیروی برشی در هر تراز طبقات: $\{V\}_i=[m]\{\ddot{x}\}_i$

برای بدست آوردن برش پایه باید تمامی المان های ماتریس $\{V\}$ را با هم جمع کنیم. گیراست فرق تمام نقاط سیستم را یعنی:

$V_i=\sum_{n=1}^{n}\{V_n\}_i$: برش پایه مود i

$$③ \longrightarrow \{V\}_i=[m]\{\Phi\}_i\ddot{Y}_i$$

$$② \longrightarrow \{V\}_i=[m]\{\Phi\}_i\omega_i^2 Y_i$$

$$① \longrightarrow \{V\}_i=[m]\{\Phi\}_i\omega_i^2\cdot\frac{L_i\cdot Q_i(t)}{\omega_i\cdot M_i}$$

$$=[m]\{\Phi\}_i\cdot\frac{L_i}{M_i}\cdot\omega_i\cdot Q_i(t)$$

$(AB)^T=B^TA^T$

$L_i^T=L_i$

برش پایه برای تمام سیستم: $V_i=\underbrace{\{1\}^T[m]\{\Phi\}_i}_{L_i^T=L_i}\cdot\frac{L_i}{M_i}\cdot\omega_i\cdot Q_i(t)$

در ضرب $\{1\}^T$ تمامی المان ها را با هم جمع کرده ام

$$\Longrightarrow V_i=\frac{L_i^2}{M_i}\omega_i Q_i(t)$$

همانطور که مشاهده می شود برش پایه تابعی از زمان است. و این طبیعی است.

$$M_i=[\Phi]_i^T[m][\Phi]_i \quad , \quad L_i=[\Phi]^T[m]\{1\}$$

$$\longrightarrow \frac{L_i^2}{M_i}=\frac{1}{g}\cdot\boxed{\frac{\left(\sum_j W_j\Phi_{ji}\right)^2}{\sum_j W_j\Phi_{ji}^2}}=\frac{1}{g}\,W_{ei}$$

و W_{ei}: وزن موثر

$$\longrightarrow \frac{L_i^2}{M_i}=\frac{W_{ei}}{g}$$

$$\longrightarrow V_i=\frac{W_{ei}}{g}\cdot\omega_i\cdot Q_i(t)$$

برش پایه ی کل از جمع برش پایه ای مودهای مختلف بدست می آید:

$$V=\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{n}W_{ei}\cdot\omega_i\cdot Q_i(t)$$

در آیین‌نامه مقدار $Q(t)$ را برابر گرفته و در وزن‌ها ضرب می‌کنیم $W_i Q(t)$. $Q(t)$ از جنس شتاب نیست در حقیقت همان C است. که از حداکثر شتاب همین زلزله به عنوان طیف آماری بدست آمده است که از طیف آیین‌نامه بدست می‌آید.

برای آنالیز تاریخچه زمانی (دینامیکی) ما مقدار برش پایه در هر لحظه را بدست می‌آوریم ولی در روش طیفی از حداکثر Σ استفاده می‌کنیم.

علت استفاده از جذر مجموع مربعات در روش طیفی این است که ما از برش Σ (با در نظر گرفتن) حداکثر مودها استفاده کرده و قصد ترکیب آنها را داریم. جمع مستقیم آنها مقداری دست بالا است و در ریاضی ثابت می‌شود که جذر مجموع مربعات برآورد خوبی از آنها فراهم است.

ولی در روش تاریخچه ما برش پایه را برای هر لحظه بدست می‌آوریم و این طبیعی است که از Σ استفاده کنیم. چون جواب ما در هر لحظه دقیق می‌باشد.

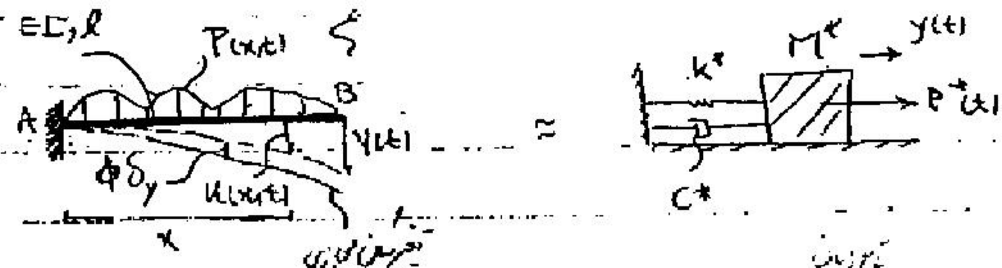
مراحل تحلیل تاریخچه زمانی (آنالیز لحظه‌ای):

۱- ماتریس‌های M و K را تشکیل می‌دهیم.
۲- $[\Phi]$ و $\{\omega\}$ را حساب می‌کنیم.
۳- $[M]$ و $[K]$ (ماتریس‌های قطری جرم و سختی) را حساب می‌کنیم.
۴- $\{L\}$ را حساب می‌کنیم.
۵- با معرفی $\{x\}=[\Phi]\{Y\}$ معادلات همبسته را جدا می‌کنیم.
۶- معادلات فوق (مشابه معادله یک درجه آزادی) را با انتگرال دوهامل حل کرده و $\{Y\}$ را بدست می‌آوریم.
۷- $\{x\}$ را از رابطه $\{x\}=[\Phi]\{Y\}$ بدست می‌آوریم.

تمرین‌های ۲-۷، ۱-۸ و ۳-۸ تحویل داده شود.

V) روش کمیات تعمیم یافته :

در این روش برخلاف جرم متمرکز، جرم ها شکل گسترده خود را دارند ولی شکل ارتعاش به دلخواه انتخاب می‌شود. در این روش سازه اصلی به صورت SDOF مدل می‌شود.



انرژی سینتیک (جنبشی) $\xrightarrow{\text{معادل سازی}}$ M^*

انرژی پتانسیل $\Longrightarrow$ K^* $\Bigg\} \Rightarrow C^*$

کار مجازی نیروهای خارجی $\Longrightarrow$ P^*

$$u(x,t) = \underbrace{\varphi(x)}_{\text{Shape Function}} \cdot \overbrace{Y(t)}^{\text{تابع زمانی}} = \varphi Y$$

Shape Function (تابع شکلی دلخواه)

- انرژی سینتیک (جنبشی) :

سازه : $T = \frac{1}{2}\int_l (\overbrace{m\,dx}^{\text{جرم}})(\overbrace{\varphi \dot{Y}}^{\text{سرعت}})^2 = \frac{1}{2}\dot{Y}^2 \int_l m\varphi^2 dx$

SDOF : $T = \frac{1}{2} \cdot M^* \cdot \dot{Y}^2$

از مساوی قرار دادن دو مقدار T داریم :

$$M^* = \int_l m \cdot \varphi^2 \cdot dx$$

- انرژی پتانسیل (معادل سازی K^*) :

سازه : $P = \frac{1}{2}\int \frac{M^2 dx}{EI}$, $M = EI\frac{d^2u}{dx^2} = EI\varphi'' Y$

$\longrightarrow P = \frac{1}{2}\int \frac{(EI\varphi'' Y)^2 dx}{EI} \longrightarrow P = \frac{1}{2}Y^2\int EI \cdot \varphi''^2 dx$

SDOF : $P = \frac{1}{2}K^* Y^2$

از برابر قرار دادن دو مقدار انرژی پتانسیل، P^* بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2}K^*Y^2 = \frac{1}{2}Y^2\int_l EI\,\phi''^2\,dx \Longrightarrow K^* = \int_l EI\cdot\phi''^2\cdot dx$$

- کار مجازی (محاسبه P^*):

سازه: $\delta W = \int_l (P\,dx)(\phi\,\delta y) = \delta y \int_l P\cdot\phi\cdot dx$

SDOF: $\delta W = P^*\cdot\delta y$

$$\longrightarrow P^* = \int_l P\cdot\phi\cdot dx$$

- میرایی (محاسبه C^*):

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega} \longrightarrow C^* = 2M^*\omega^*\zeta \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}}$$

کاملاً واضح است که برای سیستم، مشخصات سیستم معلوم باشد؛ آنگاه با استفاده از یک تابع شکل اختیاری که بیانگر شکل ارتعاش سازه باشد، می‌توانیم مقادیر M^*، P^*، K^* و C^* را بدست آوریم.

$$M^*\ddot{Y} + C^*\dot{Y} + K^*Y = P^*(t)$$

با حل کردن معادله بالا به روش‌های دینامیکی SDOF، Y را بدست می‌آوریم و با استفاده از آن و معلوم بودن ϕ، تابع $u(x,t)$ مشخص می‌گردد.

با استفاده از روش مختصات تعمیم یافته، در حقیقت ما می‌توانیم یک سازه با جرم گسترده را به یک SDOF تبدیل کرده و آن را حل کنیم:

* تنها مشکل این روش حدس تابع شکل ارتعاش است.

جزئیات محاسبه برش پایه

$$P^* = \mathcal{L}\ddot{u}_g \longrightarrow M^*\ddot{y} + C\dot{y} + K^*y = \mathcal{L}\ddot{u}_g$$

انتگرال دوهامل : $y = \dfrac{L}{m^* \omega^*} \displaystyle\int_0^{t} \ddot{u}_g \, e^{-\xi \omega^* (t-\tau)} \sin \omega_D^* (t-\tau)\, d\tau = \dfrac{L}{M^* \omega^*} Q(t)$

$$\rightarrow u = \phi y = \frac{\phi L Q(t)}{M^* \omega^*}$$

$\ddot{\bar{u}}$: شتاب مطلق

$m\ddot{\bar{u}} + Kx = 0 \longrightarrow$ نیروی اینرسی هر قطعه $= (mdx)\ddot{\bar{u}}$

$$\rightarrow dV = (mdx)\ddot{\bar{u}} = (mdx)\,\omega^2 u = (mdx)\,\omega^2 \phi y = \frac{m\phi L \omega^* Q(t)}{M^*}\,dx$$

برش پایه از جمع نیروهای اینرسی مطلق گسترده در طول تیر بدست می‌آید :

$$V(t) = \int_l dV = \int \frac{m\phi L \omega^* Q(t)}{M^*}\,dx$$

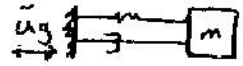
$$= \underbrace{\int (m\phi dx)}_{L} \cdot \frac{\omega^* L Q(t)}{M^*} = \frac{L^2}{M^*}\,\omega^* Q(t)$$

۸۲/۹/۲۸ دوشنبه

پاسخ سازه‌ها

- محاسبه برش پایه:
با منظور کردن اثر زلزله داریم:

مثل SDOF:



$$P^* = \int_l P\phi\,dx$$

$$= \int_l m\ddot{u}_g\,\phi\,dx = \ddot{u}_g \underbrace{\int_l m\phi\,dx}_{L} = L\,\ddot{u}_g$$

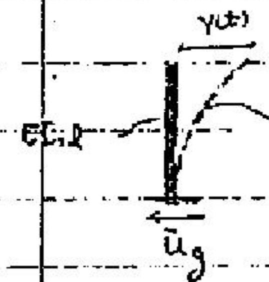
حال با ضریب مشارکت داریم:

$$\Rightarrow P^* = L\,\ddot{u}_g$$

با استفاده از این P^* مانند حالت قبل می‌توان برش پایه را بدست آورد.

$$V = \frac{L^2}{M^*}\,\omega^*\,Q(t)$$

مثال:



$$u(x,t) = \phi(x)\cdot Y(t) \quad , \quad \phi(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2l} \quad , \quad \zeta = 10\%$$

مطلوبست معادله دیفرانسیل حرکت در مختصات تعمیم یافته را بدست آورید.

$$M^* = \int_l m\,\phi^2\,dx = \int_l m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)^2 dx = 0.226\,ml$$

$$k^* = \int_l EI\,\phi''^2\,dx = EI\int \frac{\pi^4}{16l^4}\cos^2\frac{\pi x}{2l}\,dx = 3.04\,\frac{EI}{l^3}$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{k^*}{M^*}} = 3.66\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

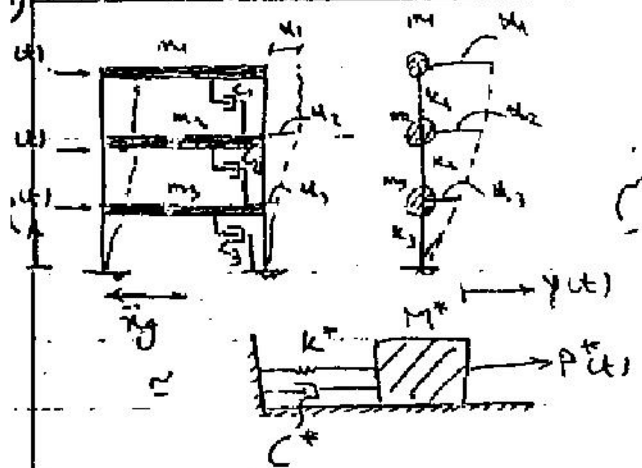
$$C^* = 2M^*\omega^*\zeta = 2\,(0.1)\,(0.226\,ml)\left(3.66\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}\right) = 0.165\,ml\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

$$L = \int_l m\cdot\phi\cdot dx = \int_l m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)dx = 0.364\,ml$$

$$\longrightarrow 0.226\,ml\,\ddot{Y} + 0.165\,ml\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}\,\dot{Y} + 3.04\,\frac{EI}{l^3}Y = 0.364\,ml\,\ddot{u}_g$$

$$\longrightarrow \ddot{Y} + 0.730\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} + 13.45\,\frac{EI}{ml^4}Y = 1.61\,\ddot{u}_g$$

- این روش برای کنترل جواب‌های دقیق، روش مناسبی می‌باشد.



مثل قبل ما سازه معادل را با استفاده از یک مدل جرم متمرکز مدلسازی کنیم و سپس از روش مختصات تعمیم یافته استفاده کنیم.

چون جرم متمرکز داریم به جای انتگرال، $\sum$ خواهیم داشت و نیز از تفاضل جابجایی‌ها در محاسبه انرژی پتانسیل استفاده می‌شود. چرا انرژی پتانسیل برش اهمیت دارد.

$$u = \phi(x) \cdot Y(t) = \phi \cdot Y$$

* ممکن است چند نوع انرژی اهمیت داشته باشد مثل برش و خمش که باید هر دو در نظر گرفته شود.

- انرژی جنبشی (بدست آوردن M^*):

$$\text{سازه: } T = \frac{1}{2}\sum m_i (\phi_i \dot{Y})^2$$
$$\text{SDOF: } T = \frac{1}{2} M^* \dot{Y}^2 \longrightarrow M^* = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \phi_i^2$$

- انرژی پتانسیل (بدست آوردن K^*):

$$\text{تغییر مکان نسبی} = \Delta\phi_i = \phi_{i+1} - \phi_i$$

$$\text{سازه: } P = \frac{1}{2}\sum k_i (\Delta\phi_i \cdot Y)^2$$
$$\text{SDOF: } P = \frac{1}{2} k^* \cdot Y^2 \longrightarrow k^* = \sum_{i=1}^{n} k_i (\Delta\phi_i)^2$$

- میرایی (محاسبه C^*):

$$\omega^* = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} , \qquad C^* = 2M^*\omega^*\zeta$$

- کار مجازی نیروهای خارجی (بدست آوردن P^*):

$$\text{سازه: } \delta W = \frac{1}{2}\sum P_i \cdot \phi_i \cdot \delta Y$$
$$\text{SDOF: } \delta W = \frac{1}{2} P^* \cdot \delta Y \longrightarrow \underset{1 \times 1}{P^*} = \sum P_i \cdot \phi_i$$

برای زلزله داریم:

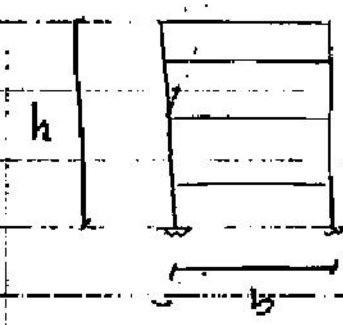
با فرض: $L = \sum m_i \phi_i$ داریم:

$$P^* = \sum P_i \cdot \phi_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{u}_g \cdot \phi_i$$
$$P^* = L \cdot \ddot{u}_g$$
$$\rightarrow V(t) = \frac{L^2}{M^*} \omega^* Q(t)$$

دوشنبه ۸۸/۸/۲۸ — دینامیک سازه‌ها

- توابع شکل پیشنهادی برای قاب‌های کوتاه، متوسط و بلند:

• برای قاب‌های برشی کوتاه که $\frac{h}{b}<1.5$، توصیه می‌شود تابع شکل به صورت



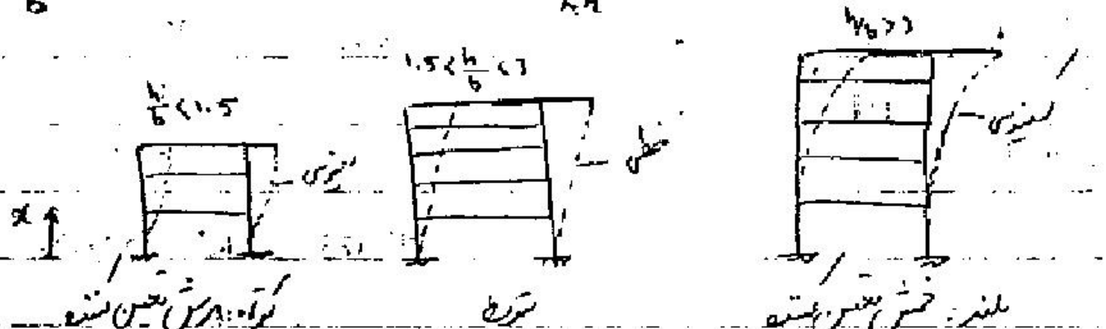
$\frac{h}{b}<1.5 \longrightarrow \phi(x)=\sin\frac{\pi x}{2h}$ (سینوسی)

در نظر گرفت.

ساختمان‌های با $\frac{h}{b}<1.5$ را ساختمان‌های کوتاه می‌نامیم.

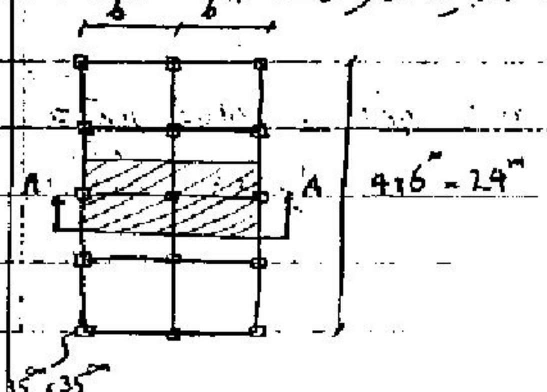
• ساختمان متوسط: $1.5<\frac{h}{b}<3 \longrightarrow \phi(x)=\frac{x}{h}$ (خطی)

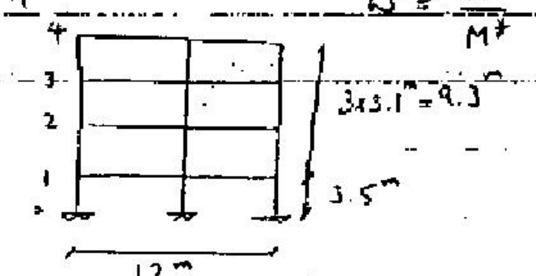
• ساختمان بلند: $\frac{h}{b}>3 \longrightarrow \phi(x)=1-\cos\frac{\pi x}{2h}$ (سینوسی)



همانند روش ریلی، در این روش نیز تابع شکلی که کوچکترین ω^* را بدهد، به واقعیت نزدیک‌تر است.

مثال: $\omega^* = \frac{K^*}{M^*}$





Section A-A

$K^* = \sum K(\Delta\phi_i)^2$

$M^* = \sum m_i\phi_i^2$

وزن طبقه فوقانی = 1735 kN

وزن طبقه متداول = 1990 kN

(همکف) - " = 1980 kN

$E = 24.8\times10^6\ kN/m^2$

I) $\phi(x)=\sin(\frac{\pi x}{2h})$

II) $\phi(x)=\frac{x}{h}$

$m_1 = \frac{1990}{9.81} \times \frac{1}{4} = 50.71 \text{ ton}$ (از $\frac{1}{4}$ وزن) $m_2 = m_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1980}{9.81} = 50.46 \text{ ton}$

$m_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1735}{9.81} = 44.22 \text{ ton}$

$k = \frac{12EI}{\ell^3} \Rightarrow \qquad k_{01} = 3 \times \frac{12EI}{(3.5)^3} = 25409 \ \text{kN/m}$

$k_{12} = k_{23} = k_{34} = 3 \times \frac{12EI}{(3.1)^3} = 36569 \ \text{kN/m}$

I) $\Phi(x) = \sin \frac{\pi x}{2h}$

تراز	K_i	m_i	ϕ_i	$\Delta\phi_i$	$m_i\phi_i^2$	$K_i(\Delta\phi_i)^2$
4		44.22	1.0		44.22	
	36569		(0.758)	(0.242) 0.091		184.34
3		50.46	0.929		43.35	
	36569		(0.514)	(0.241) 0.205		1536.81
2		50.46	0.724		26.45	
	36569		(0.273)	(0.240) 0.308		3469.08
1		50.71	0.416		8.78	
	25409			(0.273) 0.416		4397.18

Σ $M^* = 123$ $K^* = 9587.41$

$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{9587.41}{123}} = 8.83 \ \text{rad/sec} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{8.83} = 0.71 \text{ Sec}$

II) $\Phi(x) = x/h \longrightarrow \omega^* = 9.59 \ \text{rad/sec} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{9.59} = 0.65 \text{ sec}$

کمترین ω^* که ارائه بدهد واقعی‌ترین $\phi(x)$ آن می‌باشد.

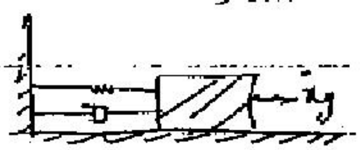
از آنجا که $\frac{h}{b} < 1.5$ می‌باشد، مشاهده می‌شود که تصمیم تابع شکل سینوسی مناسب است.

دینامیک سازه‌ها — چهارشنبه ۳۰/۹/۸۴

XIV) آنالیز طیفی (Spectral Analysis):

۱) طیف جواب (Response Spectra):

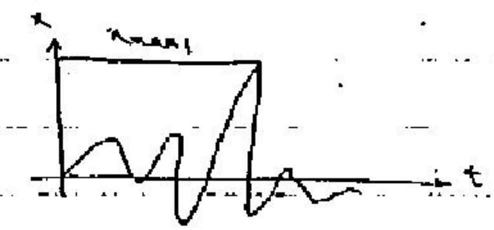
هدف آنالیز طیفی (شبه دینامیکی) به دست آوردن ماکزیمم پاسخ تحت اثر نیروی خارجی (مثلاً زلزله) در برابر پریودهای مختلف به دست بیاوریم، و با این روش می‌توان تشخیص داد اگر زلزله‌ای رخ دهد حداکثر جابجایی چقدر خواهد بود و در نظر می‌توان سازه را طراحی کرد.
شیوه کار به این صورت است که سیستم یک درجه آزادی تحت نیروی خارجی زلزله را در نظر می‌گیریم و جواب را با استفاده از انتگرال دوهامل به دست می‌آوریم:



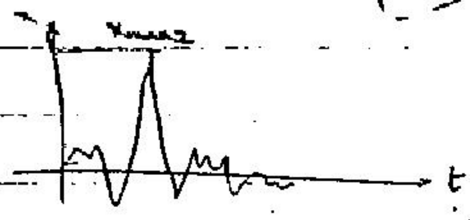
$$x=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P(\tau)\cdot e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\cdot \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau \qquad , \quad P(\tau)=m\ddot{x}_g$$

$$\Longrightarrow \quad x=\frac{1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{x}_g\cdot e^{-\zeta\omega(t-\tau)}\cdot \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$$

$$\begin{cases}\omega=\omega_1\\ \text{زلزله معین}\\ \zeta=\text{معین}\end{cases}$$

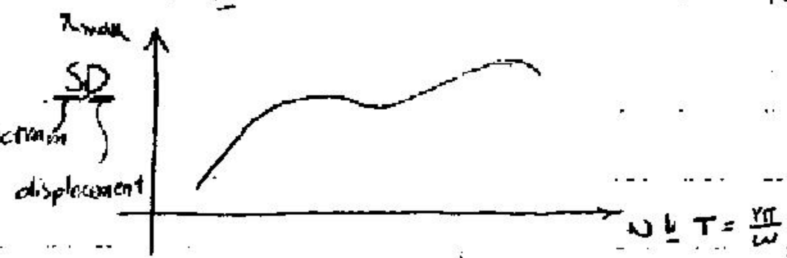


پس از به دست آوردن جواب ماکزیمم آن را برای مشخصات زلزله، ω و ζ به ترتیب ثبت می‌کنیم. سپس با تغییر دادن ω ها ($\omega_2=\omega$) انجام می‌دهیم (زلزله و میرایی همان)، به همین ترتیب یک x_{max} خواهیم داشت. این کار را برای ω_i های مختلف برای یک زلزله و میرایی ثابت انجام می‌دهیم.



بدین ترتیب می‌توانیم مقادیر مختلف x_{max} را برحسب ω_i ها ترسیم کنیم:

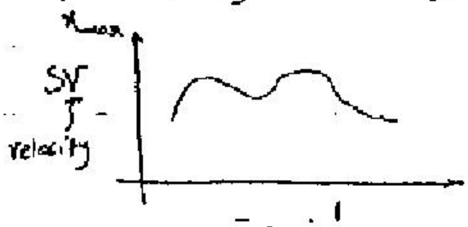
ω	x_{max}
ω_1	x_{max1}
ω_2	x_{max2}
⋮	⋮



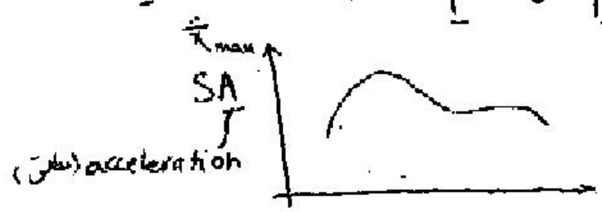
طیف جابجایی

به منحنی می‌گوییم طیف جابجایی می‌گوییم.

بدین ترتیب می‌توانیم منحنی ماکزیمم سرعت برحسب فرکانس (طیف سرعت) و یا طیف شتاب را رسم نماییم.



طیف سرعت



طیف شتاب

با توجه به اینکه پس طیف‌ها برای هر زلزله جواب متفاوت می‌شوند که برای یک زلزله و یک میرایی خاص سرعت آن متفاوت و با تغییر زلزله، شکل آنها تغییر می‌کند. برای حل شکل ۴، برای چند ξ مشخص از ۲% تا ۷% طیف رسم می‌شود.

مزیت این روش این است که با دانستن فرکانس سیستم و داشتن منحنی می‌توانیم به سادگی ماکزیمم سرعت و شتاب یا جابجایی را پیدا کنیم.

با توجه به اینکه من به طیف دقیق ارتباطی ندارد، می‌توان صرف طیف را یک فرکانس نشان داد. $\int_0^t \ddot{x}_g \, e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau)\,d\tau$

از جنس سرعت است و ما آن را V' می‌نامیم پس می‌توان نوشت:

$Max\,V'$ را PSV می‌نامیم و شبه سرعت طیفی می‌نامیم:

$$Max\ x = \frac{Max\,V'}{\omega} \quad \text{یا} \quad SD = \frac{SV}{\omega}$$

تقریباً $\omega_D = \omega$ برابر است

در نظر می‌گیریم برای SDOF، داشتیم (با صرف‌نظر از میرایی):

$$m(\ddot{x}+\ddot{x}_g) + kx = 0 \longrightarrow m(\underbrace{\ddot{x}_t}_{\text{شتاب مطلق}}) + kx = 0 \longrightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

PSA: شبه شتاب طیفی (ماکزیمم شتاب مطلق بدون میرایی)

$$\longrightarrow PSA = \omega^2 SD$$

در زلزله‌های طیفی می‌توان گفت: اختلاف SA و PSA بسیار ناچیز است. بنابراین ما PSA را با SA برابر می‌گیریم.

حال می‌توان نوشت:

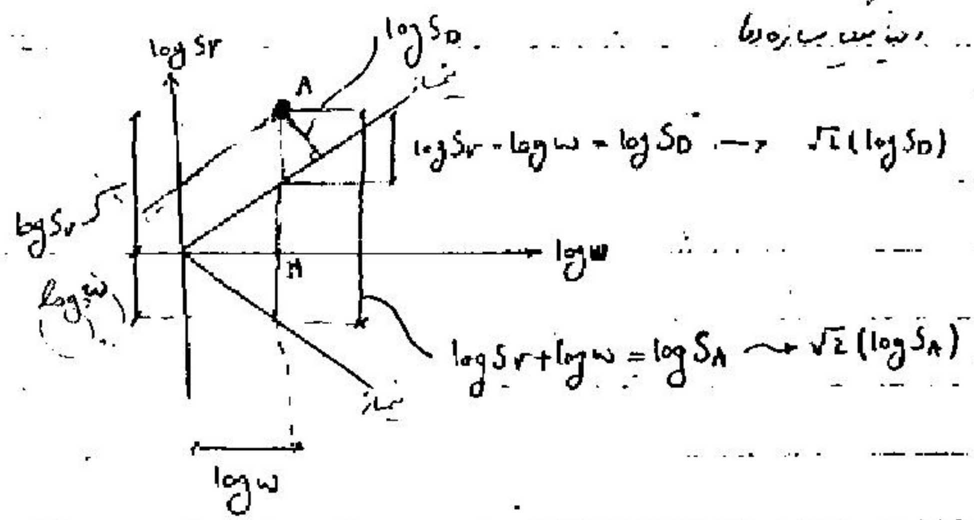
$$SD = \frac{1}{\omega} SV \qquad SA = \omega^2 SD$$

$$SA = \omega^2 SD = \omega^2\left(\frac{1}{\omega} SV\right) \longrightarrow \begin{cases} S_A = \omega S_V \\ S_D = \frac{1}{\omega} S_V \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \log S_A = \log S_V + \log \omega \\ \log S_D = \log S_V - \log \omega \end{cases}$$

حال می‌خواهیم سه نمودار را در یک سیستم مختصات رسم نمود:

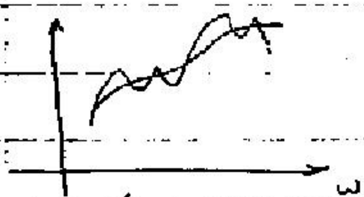
ادامه طیف سه‌گانه‌ها — چهارشنبه ۸۲/۹/۳۰



طیف فوق را می‌توان برای میرایی‌های مختلف ترسیم نمود.

۲) طیف طرح Design Spectra :

طیف حاصل (را برای سرعت و شتاب) برای یک زلزله و یک میرایی خاص ممکن است به صورت مقابل باشد.



در این حالت به ازای نقاط با تغییر کمی در فرکانس، تغییرات زیادی در مقدار حداکثر پاسخ حاصل می‌شود که در واقعیت ممکن است چنین نباشد. برای اجتناب از این مسائل، باید نقاط تیز معینی را حذف کنیم. از طرفی طیف مربوط به یک زلزله خاص را نمی‌توان معیاری برای طراحی مد نظر گرفت. برای حل این مشکل بهتر است زلزله‌های مختلفی را بگیریم و از مجموع آنها یک طیف تشکیل دهیم.

طیفی که در حد معقولی با رعایت حذف تیزی‌ها تشکیل شده (طیف از طیف چند زلزله)، طیف طرح نامیده می‌شود.

روش‌های مختلفی برای نرم کردن طیف وجود دارد. البته روش نرم کردن چندان اهمیتی ندارد چرا که مشکلات بیشتر هستند و نرم کردن در مقابل اثر آنها بسیار ناچیز است. (منظور برای استفاده از چند زلزله)

شکل کلی طیف زلزله در نقاط مختلف یکسان است

* ممکن است یک زلزله برای 3 و 8 طیف طرح شود، با ضرب آن در یک ضریب آن را بزرگ یا کوچک می‌کنند + اعداد طیف در g باید ضرب شوند.

۳) آنالیز طیفی MDOF :

همانطور که دیدیم توانستیم در MDOF ، یک سری معادلات داریم شبیه به معادلات SDOF یعنی {w} سری معادله داریم:

$$\{x\} = [\Phi]\{Y\}$$

$$\ddot{Y}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{L_i}{M_i}\ddot{x}_g$$

$$x(t) = \frac{1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{x}_g \cdot e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \cdot \sin\omega_D(t-\tau)$$

طیفی که با استفاده از این تبدیل ساختیم مربوط به SDOF است.

برای SDOF : $\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \ddot{x}_g$

اگر از طیف استفاده کنیم ناچاریم max(Y) را برداشت کنیم، و باید در $\frac{L_i}{M_i}$ ضرب کنیم. این ضریب تنها تفاوت طیف MDOF و SDOF است.

$Y_{1max},\ Y_{2max},\ Y_{3max}, \dots \qquad Y_{i\,max} = \frac{L_i}{M_i}\, x_{max_{SD}}$

بعد از آنکه Y_{max} ها را بدست آوردیم در رابطه $\{x\}=[\Phi]\{Y\}$ قرار می‌دهیم. چرا که این حالت بسیار ریسکی و بالاست. برای این کار از روش جذر مجموع مربعات استفاده می‌شود. می‌توان از CQC نیز استفاده کرد.

چون تمام Y_{max} ها در یک زمان اتفاق نمی‌افتند برای تعیین x_{max} از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$x_1 = \phi_{11}Y_1 + \phi_{12}Y_2 + \phi_{13}Y_3 + \cdots$$

$$\Longrightarrow x_{1max} = \sqrt{(\phi_{11}Y_{1max})^2 + (\phi_{12}Y_{2max})^2 + \cdots}$$

مراحل آنالیز طیفی :

۱- $\{\omega\}$ ، $[\Phi]$ ، $[M]$ و $\{L\}$ را حساب می‌کنیم $\leftarrow \{L\} = [\Phi]^T[m]\{i\}$ (بردار واحد)

۲- از یک طیف مناسب S_D ، S_V و S_A را برداشت می‌کنیم.

۳- مقادیر فوق را در $\frac{L_i}{M_i}$ ضرب می‌کنیم.

۴- Y_{imax} ها را بدست می‌آوریم $\leftarrow Y_{imax} = \frac{L_i}{M_i}S_{Di}$

۵- از قانون SRSS ، حداکثر جواب‌ها را بدست می‌آوریم. (جذر مجموع مربعات مدها)

تذکر: اگر فرکانس‌ها نزدیک باشند، بهتر است از روش CQC استفاده شود.

برش پایه: برای آنالیز طیفی بدست آوردیم:

$$\begin{cases} V_{i\,max} = \frac{L_i^2}{M_i}\cdot\omega_i\, Q(t)_{max} = \frac{L_i^2}{M_i}S_{Ai} \\ Q(t) = \int_0^t \ddot{x}_g \cdot e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \cdot \sin\omega_D(t-\tau)\, d\tau \end{cases}$$

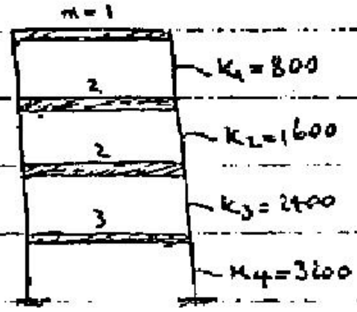
حداکثر $Q(t)$ با S_A برابر است.

$$Y_{max}^{i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{L_i}{M_i} S_{Ai}\right)^2}$$

* S_{Ai} : از یک طیف بدست می‌آید که بر اساس اطلاعات سایت ایجاد شده است ولی در آیین نامه بر اساس طیف کلی آیین نامه است.

در آنالیز شبه طیفی (مشابه ۲۸۰۰)، از طیف مربوط به یک منطقه خاص استفاده می‌کنیم و اثرات شکل پذیری (ضریب رفتار) را در R ضرب... رفتار می‌بینیم و برای تعدیل نتایج، نیرو را بر R تقسیم می‌کنیم.

مثال: مطلوبست حداکثر تغییر مکانهای بام؟



$\zeta = 5\%$

$$k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \times 800$$

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \{\omega\} = \begin{Bmatrix} 13.294 \\ 29.660 \\ 41.079 \\ 55.822 \end{Bmatrix}, \quad \underset{[\Phi]^T[m][\Phi]}{[M]} = \begin{bmatrix} 2.872 & & & \\ & 2.173 & & \\ & & 4.366 & \\ & & & 3.642 \end{bmatrix}$$

n	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	S_D	S_A
1	0.47	0.6	0.28g
2	0.21	0.14	0.30g
3	0.15	0.07	0.28g
4	0.11	0.03	0.24g

$$\{L\} = [\Phi]^T[m]\{1\} = \begin{Bmatrix} 4.2565 \\ -1.5912 \\ -1.3426 \\ 0.6527 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\frac{L_i}{M_i}\right\} = \begin{Bmatrix} 1.482 \\ -0.731 \\ -0.307 \\ -0.179 \end{Bmatrix}$$

$$\longrightarrow Y_{i\,max} = \begin{Bmatrix} 1.482 \times 0.6 \\ -0.731 \times 0.14 \\ -0.307 \times 0.07 \\ -0.179 \times 0.03 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8892 \\ -0.1024 \\ -0.0215 \\ -0.0054 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.7791 & 0.4465 & 0.2351 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow x_{1\,max} = \Big[\overbrace{(0.8892 \times \underbrace{1}_{\phi_{11}})^2}^{\text{اثر مود اول}} + \overbrace{(-0.1024 \times \underbrace{0.7791}_{\phi_{12}})^2}^{\text{اثر مود دوم}} + \overbrace{(-0.0215 \times \underbrace{0.4465}_{\phi_{13}})^2}^{\text{اثر مود سوم}} + (-0.0054 \times \underbrace{0.2351}_{\phi_{14}})^2\Big]^{1/2}$$

$$\longrightarrow x_{1\,max} = (\underbrace{0.791}_{\text{اثر مود اول}} + \underbrace{0.010}_{\text{اثر مود دوم}} + \underbrace{0.005}_{} + \underbrace{0.0}_{})^{1/2} = 0.895$$

ملاحظه: می‌توان در هر لحظه با فرض جرم، اثر سختی برم را بعد در مقابل اثر جرم اول ... ناچیز می‌باشد.

دوشنبه ۵/۱۰/۸۴

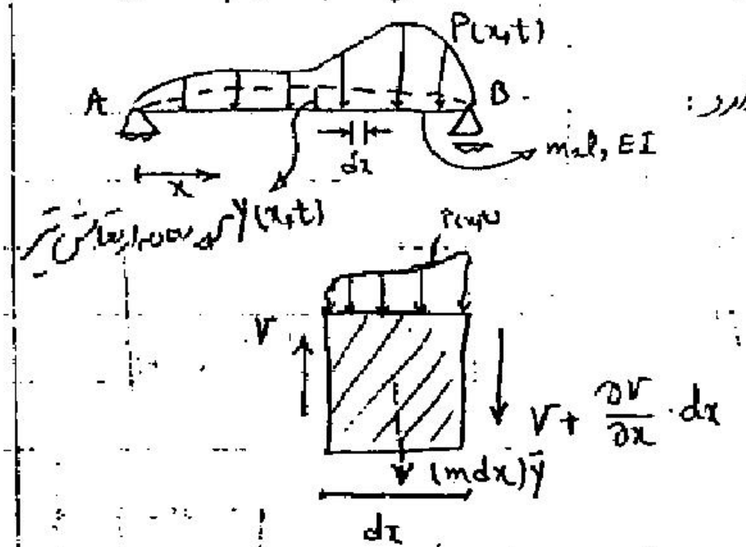
XIII) ارتعاش قطعات با جرم پیوسته:

۱) ارتعاش تیر با جرم گسترده یکنواخت:

این روش مشابهی می‌توان از روش جرم متمرکز استفاده کرد تا آن زمانی که بشود بارهای تحقیقاتی و گردهشی جاری آید.

فرض کنید تیری با جرم گسترده‌ای تحت اثر یک بار گسترده قرار دارد:

تعادل دینامیکی جزئی به طول dx را بررسی می‌کنیم: (جرم واحد طول m می‌باشد).



$$\sum F_y = 0 \implies V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx\right) - m\ddot{y}\,dx - P(x,t)\cdot dx = 0$$

$$\longrightarrow m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial x} = -P(x,t)$$

از طرفی می‌دانیم: $M = EI\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ و $V = \dfrac{\partial M}{\partial x}$ پس می‌توان نوشت:

$$\rightarrow m\ddot{y} + EI\,y^{IV} = -P(x,t)$$

مشتق دوم نسبت به زمان

مشتق چهارم نسبت به x

۲) ارتعاش آزاد:

اسنال ارتعاش آزاد را ($P(x,t)=0$) را بررسی می‌کنیم:

$$m\ddot{y} + EI\,y^{IV} = 0$$

از ریاضی می‌دانیم: $y(x,t) = \underbrace{\varphi(x)}_{\text{تابع شکل}} \cdot \underbrace{f(t)}_{\text{تابع زمان}}$ که در آن $\varphi(x)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \varphi(x) = A\sin ax + B\cos ax + C\sinh ax + D\cosh ax \\ \\ F(t) = A_\circ \sin\omega t + B_\circ \cos\omega t \end{cases}$$

مثال:

$$a = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}} \qquad \omega = (al)^2\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم: (D، C، B، A به عنوان شرایط مرزی و $A_\circ$ و $B_\circ$ به عنوان شرایط اولیه در مسئله جابجایی اولیه به دست می‌آیند)

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} Y=0 \\ M=0 \end{cases} \qquad x=l \Rightarrow \begin{cases} Y=0 \\ M=0 \end{cases}$$

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} Y_{0,t}=0 \xrightarrow{\varphi_0=0} B+D=0 \\ M_{0,t}=0 \xrightarrow{\varphi''_0=0} -B+D=0 \end{cases} \longrightarrow B=D=0$$

$$x=l \Rightarrow \begin{cases} Y_{l,t}=0 \xrightarrow{\varphi_l=0} A\sin al + C\sinh al = 0 \\ M_{l,t}=0 \xrightarrow{\varphi''_l=0} -A\sin al + C\sinh al = 0 \end{cases} \Rightarrow A\sin al = 0$$

$$2C\sinh al = 0 \Rightarrow C=0$$

(A نمی‌تواند صفر شود چون همه چیز صفر می‌شود)

$$\sin al = 0 \Longrightarrow a_n l = n\pi$$

$$\longrightarrow \omega_n = (n\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \qquad \longrightarrow \varphi(x) = A\sin ax$$

$$\Rightarrow Y(x,t) = A\sin ax \cdot (A_\circ \sin\omega_n t + B_\circ \cos\omega_n t)$$

داریم چون چندین ω داریم جواب چنین خواهد شد:

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A\sin a_n x\,(A_\circ \sin\omega_n t + B_\circ \cos\omega_n t)$$

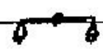
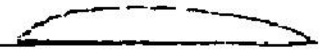
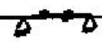
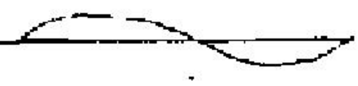
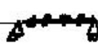
با بردن ضریب A در داخل پرانتز داریم:

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin ax\,(A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t)$$

که A_n و B_n از شرایط مرزی به دست می‌آیند.

حال می‌خواهیم شکل ارتعاش را تحت فرکانس‌های مختلف ترسیم کنیم :

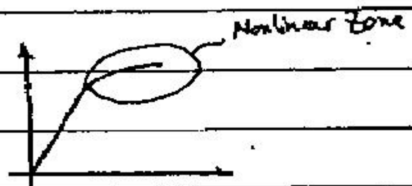
نتایج را در جدول زیر آورده‌ایم :

n	$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$	$\varphi(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$	شکل مود ارتعاش
1 	$\pi^2 \sqrt{EI/mL^4}$	$\sin \frac{\pi}{L} x$	
2 	$4\pi^2 \sqrt{EI/mL^4}$	$\sin \frac{2\pi}{L} x$	
3 	$9\pi^2 \sqrt{EI/mL^4}$	$\sin \frac{3\pi}{L} x$	
4 	$16\pi^2 \sqrt{EI/mL^4}$	$\sin \frac{4\pi}{L} x$	

انواع تحلیل غیرخطی :

۱. غیرخطی بودن مصالح — Material Nonlinearity

۲. غیرخطی بودن هندسی — Geometric Nonlinearity



غیرخطی بودن مصالح منطقه‌ای از نمودار تنش-کرنش است که رابطه آن‌ها خطی نباشد.

ابتدا برخی اعضای سازه وارد منطقه غیرخطی می‌شوند (غیرخطی شدن مصالح)

عیب این مسئله آن است که با ورود مصالح به منطقه غیرخطی، جابجایی‌ها افزایش می‌یابد. حسن آن این است که خاصیت شکل‌پذیری در سازه باعث می‌شود تا در منطقه پلاستیک توان انرژی بیشتری جذب شود.

ممکن است که هیچ یک از اعضا وارد منطقه غیرخطی نشوند اما رابطه نیرو و جابجایی بدون پلاستیک شدن مصالح و با ترسیم هندسی سازه، غیرخطی باشد.

اگر ما در محاسبات در نظر بگیریم، غیرخطی شدن مصالح است. در اینجا غیرخطی هندسی، تغییر شکل‌ها را در نظر می‌گیریم

در مرحله خطی رابطه نیرو - تغییر مکان را به صورت $F = KX$ در نظر گرفتیم. اما چنین رابطه‌ای در منطقه غیرخطی برقرار نیست

نتیجه: می‌توانیم معادله دیفرانسیل حرکت را به صورت $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx$ بنویسیم چراکه K تغییر کرده است و باید به جای آن از F_s استفاده کنیم که از داده‌های مسأله است.

غیرخطی هندسی:

معادله دیفرانسیل حرکت در جهت θ که جهت θ در شکل است می‌دهیم.

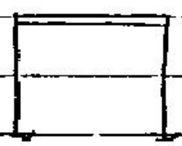
$$\sum_{O} M = 0 \Longrightarrow ml^2\ddot{\theta} + (mg\sin\theta)l = 0$$

$$\Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$\theta \ll 1: \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \Longrightarrow$ که معادله خطی است.

otherwise: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\underbrace{\sin\theta}_{(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots)} = 0 \Longrightarrow$ که رابطه غیرخطی است.

۱) معادله جزئی تعادل دینامیکی:



احتمالاً ضریب برای در منطقه غیرخطی ثابت نمی‌باشد و در اثر رفتارهای غیرخطی بیشتر K می‌شود:

$$F_I + F_D + F_S = P(t)$$

در منطقه غیرخطی نمی‌توانیم از انتگرال دوهامل استفاده کنیم چرا که اساس انتگرال دوهامل بر اصل جمع آثار است که خود از خطی بودن ناشی می‌شود.

بنابراین در دو لحظه غیرخطی می‌توان نوشت:

$$F_I(t=i) + F_D(t=i) + F_S(t=i) = P(t=i)$$
$$F_I(i+1) + F_D(i+1) + F_S(i+1) = P(i+1)$$

یعنی معادله دیفرانسیل تعادل در هر لحظه می‌تواند متفاوت باشد. از تفاضل این معادلات برای دو لحظه متوالی داریم:

$$\underbrace{(F_{I_{i+1}} - F_{I_i})} + \underbrace{(F_{D_{i+1}} - F_{D_i})} + \underbrace{(F_{S_{i+1}} - F_{S_i})} = \underbrace{P_{i+1}(t) - P_i(t)}$$

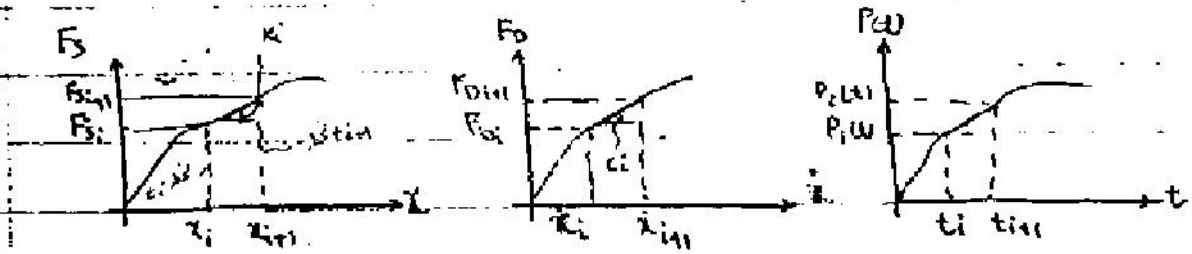
$$\Longrightarrow \Delta F_I + \Delta F_D + \Delta F_S = \Delta P(t)$$

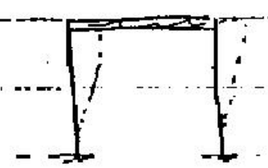
Δ: تغییرات در بازه Δt

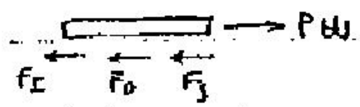
* اگر ارتباط بین دو جابجایی متوالی در یک بازه زمانی معلوم را بدانیم، می‌توانیم از معادلات استفاده کنیم. اینکار را مرحله به مرحله انجام می‌دهیم که به این روش، گام به گام گویند.

۲- روش گام به گام برای تحلیل غیرخطی:

اساس روش گام به گام پیدا کردن پاسخ بین t_i و t_{i+1} ها، و مقادیر در لحظات است که با فرض‌هایی صورت می‌گیرد.







$$t_{i+1}-t_i=\Delta t$$

$$\longrightarrow F_I+F_D+F_S=P(t)$$

$$\begin{cases} t=t_i \rightarrow & F_{I_i}+F_{D_i}+F_{S_i}=P_i(t) \\ t=t_{i+1} \rightarrow & F_{I_{i+1}}+F_{D_{i+1}}+F_{S_{i+1}}=P_{i+1}(t) \end{cases}$$

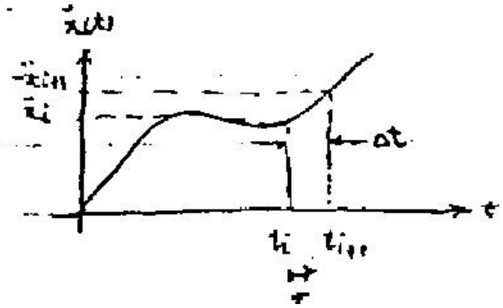
$$\longrightarrow \left(F_{I_{i+1}}-F_{I_i}\right)+\left(F_{D_{i+1}}-F_{D_i}\right)+\left(F_{S_{i+1}}-F_{S_i}\right)=\left(P_{i+1}(t)-P_i(t)\right)$$

$$\longrightarrow m\underbrace{(\ddot{x}_{i+1}-\ddot{x}_i)}_{\Delta\ddot{x}_i}+c_i\underbrace{(\dot{x}_{i+1}-\dot{x}_i)}_{\Delta\dot{x}_i}+k_i\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{\Delta x_i}=\Delta P_i(t)$$

معادله جزئی تعادل دینامیکی:

$$\longrightarrow m\Delta\ddot{x}_i+c_i\Delta\dot{x}_i+k_i\Delta x_i=\Delta P_i(t)$$

۳- تحلیل دینامیکی غیرخطی با فرض شتاب ثابت.



مثلاً برای محدوده بین t_i و t_{i+1} می‌توان فرض کرد:

τ را مبدأ زمان جدید از t_i تعریف می‌کنیم.

حل تحلیلی

$$\ddot{x}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \quad (1)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق داریم:

$$\dot{x}(\tau) = A + \frac{\tau}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \quad (2)$$

ثابت A از شرایط اولیه (سرعت اولیه) بدست می‌آید

$$\tau = 0 \text{ یا } t = t_i \longrightarrow \dot{x} = \dot{x}_i \xrightarrow{(2)\ \text{سرعت اولیه}} A = \dot{x}_i$$

$$\longrightarrow \dot{x}(\tau) = \dot{x}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$$

$$\tau = \Delta t \text{ یا } t = t_{i+1} \longrightarrow \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \quad (3)$$

و با انتگرال‌گیری از معادله سرعت:

$$x(\tau) = \dot{x}_i \cdot \tau + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) + A \quad (4)$$

$$\begin{cases} \tau = 0 \\ \text{or} \\ t = t_i \end{cases}, \; x = x_i \longrightarrow A = x_i$$

$$\longrightarrow x(\tau) = x_i + \dot{x}_i \tau + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \quad (5)$$

$$\tau = \Delta t \text{ or } t = t_{i+1} \longrightarrow x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \cdot \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4}\underbrace{(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})}_{\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i + 2\ddot{x}_i = \Delta\ddot{x}_i + 2\ddot{x}_i} \quad (6)$$

رابطه‌ی (۶) رابطه‌ی مناسبی است اما به شکل مناسب درآمده را به صورت ساده‌تری تبدیل کنیم. برای این کار از معادله جزئی متقابل استفاده می‌کنیم

$$\longrightarrow \Delta\ddot{x}_i = \ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i \quad (7)$$

$$\Delta\dot{x}_i = \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

$$(6) \longrightarrow \Delta\ddot{x}_i + 2\ddot{x}_i = \frac{4}{\Delta t^2}(\Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t)$$

$$\longrightarrow \text{تغییرات شتاب:}\; \Delta\ddot{x}_i = \frac{4}{\Delta t^2}(\Delta x_i - \dot{x}_i \cdot \Delta t) - 2\ddot{x}_i \quad (8)$$

$$(6) \longrightarrow \Delta x_i - \dot{x}_i \cdot \Delta t = \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \quad (9)$$

طرفین رابطه فوق را در $\frac{2}{\Delta t}$ ضرب کرده داریم:

$$\frac{2}{\Delta t}(\Delta x_i - \dot{x}_i \cdot \Delta t) = \frac{\Delta t}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \quad (10)$$

$$(3) \longrightarrow \Delta\dot{x}_i = \frac{\Delta t}{2}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \quad (11)$$

(۱۱) و (۱۰) → تغییرات سرعت: $\Delta \dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t}(\Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t)$ (12)

روابط بدست آمده را در معادله حرکتی تعادل قرار می‌دهیم: (روابط (8)، (12))

$$m\left(\frac{4}{\Delta t^2}(\Delta x_i - \dot{x}_i \Delta t) - 2\ddot{x}_i\right) + c_i\left(\frac{2}{\Delta t}(\Delta x_i - \dot{x}_i \cdot \Delta t)\right) + k\Delta x_i = \Delta P_i$$

$$\longrightarrow \Delta x_i \underbrace{\left(k_i + \frac{2c_i}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2}\right)}_{k_i^*} = \underbrace{\Delta P_i + \dot{x}_i\left(\frac{4m}{\Delta t} + 2c_i\right) + 2m\ddot{x}_i}_{\Delta P_i^*}$$

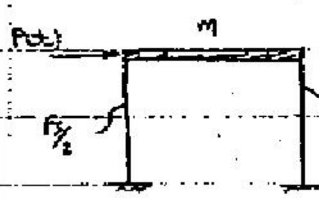
از زمان صفر شروع کنیم همه مجهولات را داریم پس:

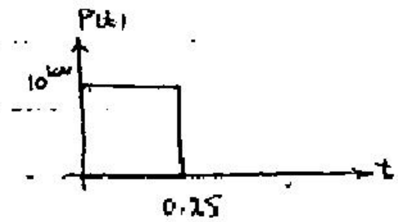
$$\longrightarrow \text{تغییرات جابجایی: } \Delta x_i = \frac{\Delta P_i^*}{k_i^*} \qquad (13)$$

با استفاده از Δx_i می‌توان $\Delta \dot{x}_i$ و $\Delta \ddot{x}_i$ بدست آورد و x_{i+1} و $\ddot{x}_{i+1}$ را برای گام بعدی بدست آورد.

* مراحل کار در حالت کلی آمده است.

* در مدلسازی غیرخطی مرسوم است که رفتار را Elasto-perfect plastic فرض می‌کنند.





مثال:

$F_{sy} = 15\ kN$

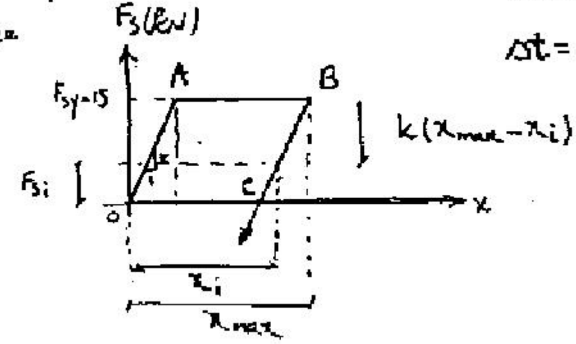
$k = 30\ kN/cm \longrightarrow x_y = \frac{15}{30} = 0.5$

$m = 0.2\ ton \qquad \zeta = 0 \longrightarrow c = 0$

$\Delta t = 0.05\ sec$

$t = 0 \sim 0.55\ sec$

$t = 0 \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$



$$k_i = \begin{cases} 30 & x < 0.5 \quad \text{ناحیه } OA \\ 0 & 0.5 < x < x_{max} \quad \text{ناحیه } AB \\ 30 & \text{ناحیه } BC \end{cases}$$

$$F_{si} = \begin{cases} 30x_i & OA \\ 15 & AB \\ 15 - 30(x_{max} - x_i) & BC \end{cases}$$

با محدود هر مرحله x_i بزرگترین یا بیشینه بدست آوریم منطقه‌ای (OA، AB و BC) قرار دارد
X_{max} را با برحسب محاسبات بدست آوریم زمان متناوب است که از آن T شروع به کاهش می‌کند.

$$\longrightarrow \ddot{x} = \frac{1}{m}(P_0 - c_0\dot{x}_0 - k_0 x_0) = \frac{1}{0.2} \times 10 = 50 \ \mathrm{cm/sec^2}$$

$$K^*_i = k_i + \frac{2C_i}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2} \longrightarrow K^*_i = k_i + \frac{4(0.2)}{(0.05)^2} = k_i + 320$$

$$\Delta P^*_i = \Delta P_i + \left(\frac{4m}{\Delta t}\right)\dot{x}_i + 2m\ddot{x}_i = \Delta P_i + 16\dot{x}_i + 0.4\ddot{x}_i$$

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t}\Delta x_i - 2\dot{x}_i \qquad \Delta\dot{x}_i = 40\Delta x_i - 2\dot{x}_i$$

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m}(P_i - \cancel{c_i}\dot{x}_i - k_i x_i) = 5(P_i - F_{Si})$$

$$\begin{cases} \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \\ \Delta\dot{x}_i = \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i \end{cases}$$

تمرین‌های ۱۵-۱ و ۱۵-۳ تحویل داده شود.

تکلیف غیرخطی روز امتحان تحویل داده شود.

* حسن روش غیرخطی کوچکتر شدن قطع و ضعف آن زیاد شدن جابجایی است.

i	t_i	P_i	ΔP_i	F_{si}	$\ddot{x}_i$	k_i^*	ΔP_i^*	Δx_i	$\Delta \dot{x}_i$	x_{i+1}	$\dot{x}_{i+1}$
0	0.00	10	0	0	50	350	20	0.05714	2.2857	0.05714	2.2853
1	0.05	10	0	1.7143	41.4286	350	53.1429	0.15184	1.5020	0.20898	3.7878
2	0.10	10	0	6.2694	18.6531	350	68.0653	0.19447	0.2034	0.40345	3.9911
3	0.15	10	0	12.1036	-10.5178	350	59.6511	0.17043	-1.1650	0.57388*	2.8261
4	0.20	10	0	15.0000	-25	320	35.2181	0.11006	-1.2500	0.68394	1.5761
5	0.25	10	0	15.0000	-25	320	15.2181	0.04756	-1.2500	x_{max} 0.73150	0.3261
6	0.30	0	-10	15.0000	-75	350	-34.7819	-0.09938	-4.6273	0.63212	-4.3012
7	0.35	0	0	12.0186	-60.0927	350	-92.8565	-0.26530	-2.0098	0.36682	-6.3110
8	0.40	0	0	4.0595	-20.2913	350	-109.0943	-0.31170	0.1540	0.05512	-6.1570
9	0.45	0	0	-5.2915	26.4574	350	-87.9284	-0.25122	2.2650	-0.19611	-3.8920
10	0.50	0	0	-12.8282	66.1410	350	-36.6156	-0.10462	3.5994	-0.30072	-0.2926

x_{max}

* مقدار [illegible] از x_y بیشتر شده است بنابراین : $F_s = F_{sy}$ ($k_i = 0.0$) خلاصه

• [illegible] حداکثر مقدار خود می‌رسد ($k_T = 30$) [illegible] CD

فلوچارت روش گام به گام با شتاب ثابت

(1)

داده‌ها $x_0 ,\ \dot{x}_0 ,\ m ,\ c_i ,\ k_i ,\ P_i ,\ \Delta t \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$

(2)

$$\ddot{x}_0 = \frac{1}{m}\left(P_0 - c_0\,\dot{x}_0 - k_0\,x_0\right)$$

(3)

$$k_i^* = k_i + \frac{2c_i}{\Delta t} + \frac{4m}{\Delta t^2} \qquad (11)$$

(4)

$$\Delta P_i^* = \Delta P_i + \left(\frac{4m}{\Delta t} + 2c_i\right)\dot{x}_i + 2m\,\ddot{x}_i \qquad (12)$$

(5)

$$\Delta x_i = \frac{\Delta P_i^*}{k_i^*} \qquad (13)$$

(6)

$$^*\ \Delta \ddot{x}_i = \frac{4}{\Delta t^2}\left(\Delta x_i - \dot{x}_i\,\Delta t\right) - 2\ddot{x}_i \qquad (14)$$

$$\Delta \dot{x}_i = \frac{2}{\Delta t}\,\Delta x_i - 2\dot{x}_i$$

(7)

$$x_{i+1} = \Delta x_i + x_i$$

$$\dot{x}_{i+1} = \Delta \dot{x}_i + \dot{x}_i$$

$$\ddot{x}_{i+1} = \Delta \ddot{x}_i + \ddot{x}_i$$

* بجای این رابطه می‌توان مقدار $\ddot{x}_{i+1}$ را مستقیماً از رابطه زیر بدست آورد:

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m}\left(P_i - c_i\,\dot{x}_i - k_i\,x_i\right)$$

- کنترل سازه‌ها :

بکارگیری ابزار یا اعضایی در سازه که باعث بهبود رفتار آن گردد.

- انواع کنترل سازه‌ها :

1) کنترل غیرفعال (Passive Control) ← مثل بادبند، اعضا یا ابزار بکاررفته در سازه با نیروی خارجی نیاز ندارند.

2) کنترل فعال (Active Control) ← قطعه دیده شود که هنگام زلزله خارج از سازه به سازه نیرویی وارد کند تا زلزله کنترل شود. معمولاً انرژی به صورت برقی اعمال می‌شود.

3) کنترل نیمه فعال (Semi Active Control) ← مانند فعال ولی انرژی کمتر

4) کنترل دوگانه (Hybrid Control)

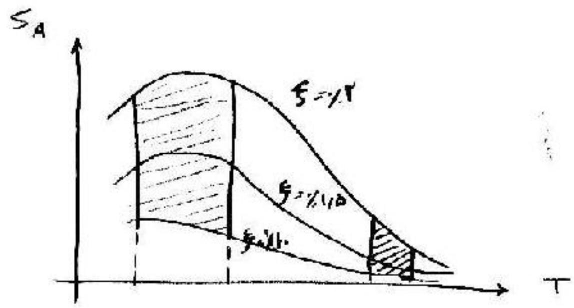
۱) کنترل غیرفعال (passive control) :

۱) قاب‌های خمشی ۲) بادبندها ۳) دیوارهای برشی ۴) جداسازهای لرزه‌ای ۵) میراگرها

۱-۴) جداساز لرزه‌ای (Base Isolation) ← وسیله‌ای که معمولاً زیر سازه قرار داده می‌شود که باعث تخفیف اثر زلزله بر سازه می‌گردد. آنچه امروزه بیشتر استفاده می‌شود لاستیک‌هایی با ورقه فلزی و هسته سربی است. این جداسازها باید آنقدر سخت باشند که وزن سازه را بتوانند تحمل کنند. دلیل هسته سربی تأمین میرایی است، لاستیک انعطاف در برابر زلزله را تأمین می‌کند و وزن سازه را فلز تحمل می‌کند. معمولاً به LR معروف است. پس بطور کلی:

- به اندازه کافی سخت برای تحمل وزن سازه باشد ← فلز
- به اندازه کافی در برابر جابجایی انعطاف‌پذیری داشته باشد ← پلاستیک (Lead Rubber Bearing)
- قابلیت جذب انرژی زیادی داشته باشد ← سرب

- اثر جداسازها در کاهش اثرات زلزله بر سازه‌ها:



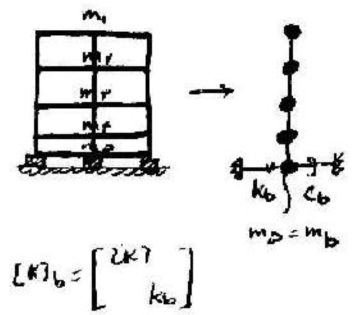
کاهش شتاب طیفی بر اثر جداساز
Period Shift

← وقتی جداساز موثر است که T کم باشد

- محدودیت‌های جداسازها:

- واژگونی ← تکیه‌گاه سازه است، نیرو زیاد باشد باید واژگونی حتماً کنترل شود ← در ساختمان‌های بلند ۲۰-۳۰ طبقه به بالا جدا نمی‌شوند
- جابجایی زیاد در محل جداسازها.
- عدم وجود فضا در اطراف ساختمان ← باید حدود ۶۰ با سازه کناری فاصله داشته باشد.
- در خاک ضعیف و ناپایدار.

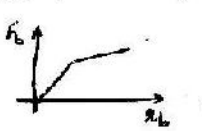
- مدل‌سازی جداسازها:



$$[m]_b\{\ddot{x}\}+[c]_b\{\dot{x}\}+[K]_b\{x\}=-[m]_b\{1\}\ddot{x}_g$$

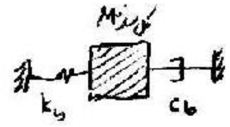
$$[m]_b=\begin{bmatrix}[m] & \\ & m_b\end{bmatrix}\qquad [K]_b=\begin{bmatrix}[K] & \\ & k_b\end{bmatrix}\qquad [c]_b=\begin{bmatrix}[c] & \\ & c_b\end{bmatrix}$$

رفتار جداساز غیرخطی است و باید غیرخطی تحلیل شود.

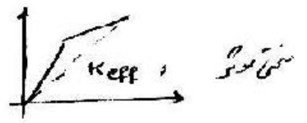


- روش تقریبی مدل سازی سازه با جداساز:

برای طراحی اولیه از این روش استفاده می‌کنند.



SDOF



$$\begin{cases} T_b = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{K_{eff}}} \\ \xi_b = \dfrac{c_b}{2M\sqrt{K_{eff}/M}} \end{cases} \rightarrow \text{طیف} \rightarrow S_a \rightarrow \text{برش پایه}$$

مثال - فرض کنید $T_f = ۰/۴\ s$ و $\xi = ۲٪$ و با جداسازها $T_b = ۲\ s$, $\xi = ۱۰$. $\frac{W}{V}$ را بدست آورید.

(a) سازه بدون جداساز

$$V_f = m S_A$$

$$\begin{cases} T_f = ۰/۴\ s \\ \xi = ۲٪ \end{cases} \rightarrow \text{طیف} \rightarrow S_A = ۱/۸۳g$$

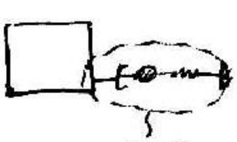
$$V_f = m(۱/۸۳g) = ۱/۸۳W \rightarrow \frac{V_f}{W} = ۱/۸۳$$

(b) سازه با جداساز

$$\begin{cases} T_b = ۲\ s \\ \xi = ۱۰٪ \end{cases} \rightarrow \text{طیف} \rightarrow S_A = ۰/۳۶g$$

$$V_b = m(۰/۳۶g) = ۰/۳۶W \rightarrow \frac{V_b}{W} = ۰/۳۶$$

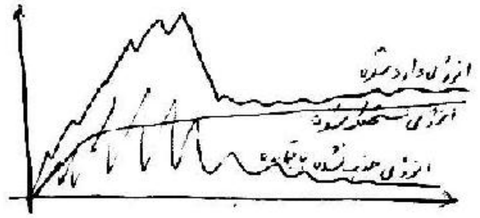
* هم می‌توان جداساز را یک طبقه در نظر گرفت هم می‌توان آن را مدل کرد. در این مثال اینگونه عمل شده است:



SDOF

* بهتر است جداسازها در محل های نزدیک گسل اجرا نشود.

۱-۵) میراگرها ← بعد از جداسازها مهمترین کاربرد را داشته‌اند. میرایی روشی است که باعث جذب انرژی می‌گردد و جواب سازه را مستهلک می‌کند.



← با افزایش میرایی میزان انرژی مستهلک شده افزایش و انرژی جمع شده کاهش می‌یابد.

در نتیجه می‌توان با میراگر مصنوعی، میزان انرژی مستهلک شده را افزایش داد.

- انواع میراگرها:

۱) میراگر ویسکوز ۲) میراگر اصطکاکی ۳) میراگر سیال ۴) میراگر ویسکوالاستیک

۵) میراگر سیم فلزی

۱-۵-۱) میراگر ویسکوز ← متناسب با سرعت به سازه نیرو وارد می‌کند. چنین میرایی تابعی از سرعت حرکت است که معمولاً خطی در نظر می‌گیرند:

$F_D \leftarrow\!\dashv\!\!\!]\!\!\rightarrow F_D \qquad F_D = f(\dot{x}) = c\dot{x}$

برای اندازه‌گیری میزان جذب انرژی میراگرها، مقدار جذب انرژی شده توسط آنها در یک سیکل رفت و برگشت اندازه‌گیری و محاسبه می‌شود:

W_{vis} = انرژی جذب شده میراگر در یک سیکل $= \int_T F_D\,dx = \int_T F_D\,\dot{x}\,dt = \int_T c\dot{x}^2\,dt$

اگر حرکت سازه را به صورت سینوسی در نظر بگیریم:

$$x = \rho \sin\omega t \longrightarrow W_{vis} = \int_T c(\rho\omega\cos\omega t)^2\,dt$$

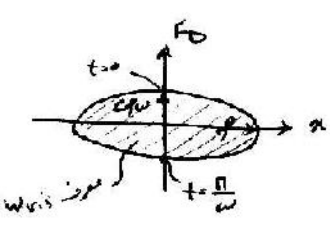
$$\longrightarrow W_{vis} = c\pi\omega\rho^2$$

منحنی F_D و x را می‌توان به صورت زیر رسم کرد:

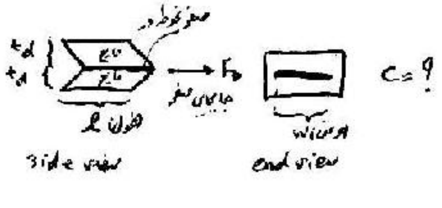
$$(1)\quad \frac{x}{\rho} = \sin\omega t \quad , \quad F_D = c\dot{x} = c\rho\omega\cos\omega t$$

$$(2)\quad \frac{F_D}{c\rho\omega} = \cos\omega t$$

$$\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \frac{F_D^2}{(c\rho\omega)^2} = 1$$



مثال - تعیین ثابت میراگر ویسکوز (صفحه غوطه‌ور در مایع):



تنش برشی مایع: τ
کرنش برشی مایع: γ
ضریب چسبندگی: G

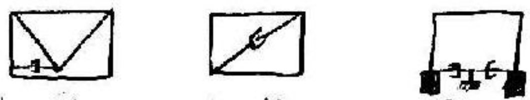
رابطه تنش برشی برای مایع چسبنده : $\tau = G_v \dot{\gamma}$

رابطه کرنش مایع و جابجایی صفحه (صفحه وسطی) : $\gamma = \frac{x}{t_d}$

$$F_D = 2wl\tau = 2wl(G_v \dot{\gamma}) = 2wl\left(G_v \cdot \frac{\dot{x}}{t_d}\right) = \left(\frac{2wl}{t_d} G_v\right)$$

$$\rightarrow C = \frac{2wl}{t_d} G_v$$

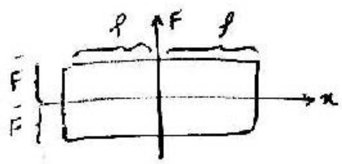
* انواع روش کاربرد میراگر :

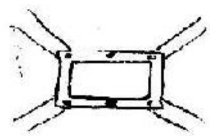


در انتهای بادبند — به عنوان بادبند — همراه جداساز — درون دیوار برشی

۱-۵-۲) میراگر اصطکاکی :

اگر حداکثر نیروی اصطکاکی $\bar{F}$ باشد و در یک حرکت سینوسی $(x = \rho \sin \omega t)$ انرژی در یک سیکل حرکت برابر است با :

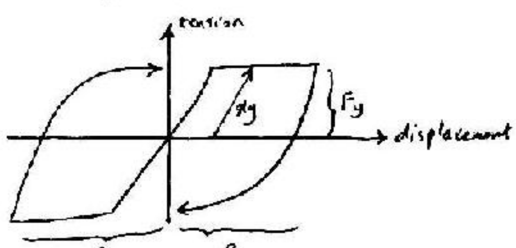




$$W_{col} = 4\bar{F}\rho$$

۱-۵-۳) میراگر تسلیمی (هیسترزیس) :

در صورتی که مصالح اعضا در ساخت میراگر به کار رفته وارد مرحله غیرخطی شود و حرکت آن سیکلی باشد، میراگر تسلیمی پدید می‌آید.

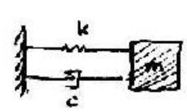


انرژی در یک سیکل حرکت سینوسی $(x = \rho \sin \omega t)$ به صورت زیر قابل بیان است :

$$\begin{cases} \mu = \frac{\rho}{x_y} & \text{: شکل‌پذیری} \\ W_h = 4 F_y \rho \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) \end{cases}$$

این نوع میراگر در سایر میراگرها بیشتر مورد توجه است. مثلا قرار دادن میلگردهای با طولهای اضافی در سازه‌های بتنی برای افزایش شکل‌پذیری.

۱-۵-۴) میراگر ویسکوالاستیک :

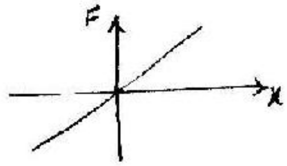


تلفیق میراگر ویسکوز و یک فنر است مثل یک قطعه فنر که درون پوشش پلیمری قرار گرفته باشد :

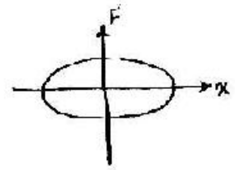
می‌توان میراگری طرح کرد که سختی مثل فنر باشد یا مثل میراگر معمولی که به جنس مواد سازنده بستگی دارد.

نیروی معادل میراگر ویسکوالاستیک عبارتست از :

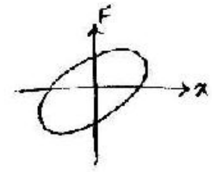
$$F = Cx' + Kx$$



$F = Kx$



$F = Cx'$



$F = Cx' + Kx$

- معادل سازی انواع میراگر با میراگر ویسکوز :

این کار معمولاً در عمل رخ می‌دهد و شکل آیین نامه‌ای دارد + وقتی چند نوع میراگر داریم می‌خواهیم میراگرها را یکدست کرده تحلیل کنیم.

• میراگر اصطکاکی :

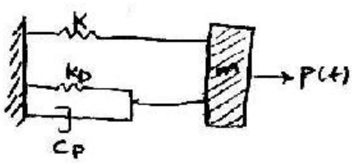
$$W_{vis} = C\pi\omega\rho^2 \quad , \quad W_{col} = 4F\rho$$

$$\rightarrow C_{eqol} = \frac{4F}{\pi\omega\rho}$$

• میراگر تسلیمی :

$$W_h = 4F_y\rho\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) \quad , \quad W_{vis} = C\pi\omega\rho^2$$

$$\rightarrow C_{eqh} = \frac{4F_y}{\pi\omega\rho}\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)$$



مثال - طرح میراگر ویسکوالاستیک برای SDOF : تعیین C_D و K_D :

$C_D = 0.15\,K_D \quad , \quad m = 1000\ kg \quad , \quad \omega = 2\pi\ rad/s \quad , \quad K = 310\ kN/m$

$$m\ddot{x} + C_D\dot{x} + (K+K_D)x = P(t)$$

$$\omega^2 = \frac{K+K_D}{m} \rightarrow K + K_D = m\omega^2 = 394\ kN/m$$

$$\begin{cases} K_D = 394 - 310 \rightarrow K_D = 84\ kN/m \\ C_D = 0.15 \times 84 = 12.6\ kN\cdot s/m \end{cases}$$

* محدودیت های موجود در اجرا و ساخت ، بطور کلی مقادیر مجهول را تعیین می‌کند که اینجا این محدودیت $\omega = 2\pi\ rad/s$ بوده.

مثال - فرض کنید $F_D = C\dot{x}^2$ ، ثابت میراگر معادل ویسکوز را برای یک حرکت سینوسی SDOF بنویسید. میراگر فوق می‌تواند معرف اثر آب یا هوا بر روی سیستمی باشد که با سرعتهای کم ۲۰٪ تا ۳۰٪ حرکت می‌کند.

$$x = \rho\cos\omega t \longrightarrow \dot{x} = -\rho\omega\sin\omega t$$

انرژی یک سیکل کامل :

$$\bullet\ W = 2\int_{-x}^{x} F_D\,dx = 2\int_0^{\pi} F_D(\dot{x}\,dt) = 2\int_0^{\pi} C\dot{x}^3\,dt = \frac{8}{3}C\omega^2\rho^3$$

$$\bullet\ W = W_{vis} \xrightarrow{C_{eq}\ \text{تابع}} C_{eq}\pi\omega\rho^2 = \frac{8}{3}C\omega^2\rho^3 \longrightarrow C_{eq} = \frac{8}{3\pi}C\omega\rho$$

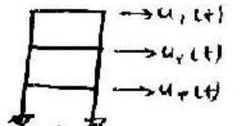
۲) کنترل فعال (active control) :

- مبانی :

در کنترل فعال سازه ها نیروی خارجی توسط یک دستگاه مولد نیرو، محرک (actuator) به سازه آنچنان وارد می شود که رفتار سازه را متعادل کند.

تفاوت روش کنترل فعال و غیر فعال در انرژی لازم برای عملکرد کنترل است + کنترل غیر فعال بیشتر بر مبنای مصالح هوشمند صورت می گیرد . در کنترل غیر فعال، کنترل ها مثل میراگرهای خاص با انرژی کمتری کار می کنند.

در این روش، سازه را برای نیروهای کنترل از زلزله داده طرح می کنیم و رفتار سازه با کنترل های اعمالی در سازه، متعادل می شود.



$\{u(t)\}$ = بردار نیروهای کنترل

* امروزه معمولاً از ترکیب کنترل های فعال و غیرفعال با غیرفعال استفاده می شود ← سیستم ترکیبیه . هزینه بیشتر استفاده از کنترل فعال و غیرفعال است.

- مزایای کنترل فعال و نیمه فعال نسبت به کنترل غیرفعال :

۱) جبران عدم قطعیت های تغییر زلزله و مشخصات سازه .

۲) امکان ساخت ساختمان بسیار بلند مقاوم در برابر زلزله.

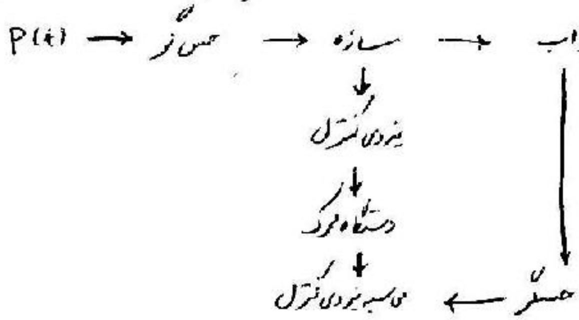
۳) صرفه جویی .

- سیستم های مدار باز، مدار بسته و مدار باز - بسته :

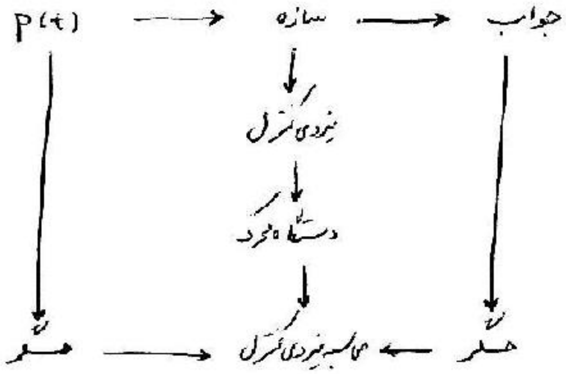
• سیستم مدار باز (open loop) ← در این سیستم مقدار نیروی کنترل صرفاً براساس نیروی خارجی تعیین میشود :

P(t) → حسگر → سیستم کنترل → سازه → جواب

• سیستم مدار بسته (closed loop) ← در این سیستم مقدار نیروی کنترل صرفاً براساس جواب سازه تعیین می شود ← عمده سازه های هوشمند + در عمل بیشتر این نوع استفاده میشود.



• سیستم مدار باز بسته ← در این سیستم، نیروی کنترل براساس جواب نیروی خارجی تعیین می‌شود ← بر این مبنا عمل می‌کند

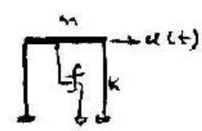


که رفتار سازه در طول یک چرخه پیش‌بینی و اصلاح می‌شود و نیرو بر همین اساس در هر مرحله به سازه وارد می‌شود ← اگر پیش‌بینی در چند مرحله به درستی صورت نگیرد باعث ناپایداری سازه شده و بحث پایداری سازه به میان می‌آید.

* علت آن تأخیر زمانی پس از اعمال نیروی خارجی مثل زلزله، باید رفتار سازه برای این تأخیر زمانی پیش‌بینی شود و در گام بعد اصلاح شود.

* به کنترل‌های بسته و باز-بسته، کنترل با بازخورد (feedback control) گفته می‌شود.

- کنترل با بازخورد سختی و میرایی برای SDOF:



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=p(t)+u(t)$$

نیروی کنترل: $\{u(t)\}=\underbrace{[F]_{1\times2}}_{\text{ماتریس بهره}}\begin{Bmatrix}x\\ \dot{x}\end{Bmatrix}_{2\times1}\rightarrow u(t)=f_1x+f_2\dot{x}$

عملکرد نیروی کنترل به صورت فوق در نظر گرفته شود مثل آن است که سختی و میرایی را تغییر داده‌ایم:

$$u(t)=-c_d\dot{x}-k_dx$$

آنقدر با ضرایب بازی می‌شود تا رفتار سازه در حد دلخواه قرار بگیرد.

مراحل یافتن نیروی کنترل فوق به صورت زیر است:

- جواب بدون کنترل حساب می‌شود.
- نیروی کنترل $u(t)$ با انتخاب مقادیر دلخواهی برای c_d و k_d تعیین می‌شوند.
- معادله حرکت را تشکیل می‌دهیم.
- جواب سازه را بدست می‌آوریم، اگر جواب در حد مجاز بود که نیروی کنترل انتخابی درست است وگرنه چرخه تکرار می‌شود.

• تغییر $u(t)$ ناگهانی خواهد بود که هم جواب سازه در پریود قابل قبول باشد و هم بهینه باشد.

* با جایگذاری $u(t)$ در معادله حرکت داریم:

$$\ddot{x} + \underbrace{(2\xi\omega + \frac{c_d}{m})}_{2\xi_{eq}\,\omega_{eq}}\dot{x} + \underbrace{(\omega^2 + \frac{k_d}{m})}_{\omega_{eq}^2}x = -\ddot{x}_g$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\xi_{eq}\,\omega_{eq}\,\dot{x} + \omega_{eq}^2\,x = -\ddot{x}_g$$

میتوان به راحتی نشان داد:

• افزایش بازخورد جابجایی ($K_d \uparrow$) باعث افزایش فرکانس و کاهش میرایی میشود.

• افزایش بازخورد سرعت ($c_d \uparrow$) باعث افزایش میرایی میشود.

در صورتیکه بخواهیم جابجایی را کاهش دهیم بازخورد میرایی مناسب تر است.

مثال - اثر بازخورد سرعت در معادله SDOF:

رفتار دو مدل SDOF با مشخصات مقابل را با بازخورد سرعت تحت اثر زلزله ال سنترو دقت بررسی کنید ($\ddot{x}_g = 0.15g$)

سازه ۱: $m = 1000\ kg$ سازه ۲: $m = 1000\ kg$

$k = 40000\ N/m$ $K = 16000\ N/m$

$C = 250\ N.S/m$ $C = 820\ N.S/m$

منحنی جابجایی - ξ_a ، ξ_a - حداکثر نیروی کنترل را رسم کنید. فرض کنید $\xi_a = \xi_{eq} - \xi$.

• سازه ۱ : $\omega = \sqrt{\frac{40}{1}} = 6.32\ rad/s \longrightarrow T = 0.99\ S$

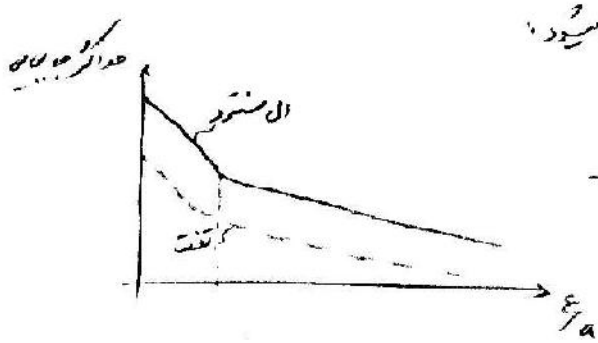
$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{250}{2\times 1000 \times 6.32} = 0.02$$

• سازه ۲ : $\omega = 4$ ، $T = 1.57$ ، $\xi = 0.102$

معادله دیفرانسیل حرکت با کنترل درحالیکه $K_d = 0$ باشد بصورت زیر نوشته میشود:

$$\ddot{x} + 2\omega(\underbrace{\xi + \xi_a}_{\text{تغییرات نسبت میرایی}})\dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{x}_g$$

بعنوان نسبت منفی ε/a ، حداکثر جابجایی قاب را نشان داده میشود :



← همانطور که مشاهده میشود با افزایش میرایی جابجایی سازه کاهش می یابد.

★ هرچه سازه نرم تر ← • با سطح افزایش میرایی سازه کنترل می شود.

• نیروی کنترل کمتری نیاز است.

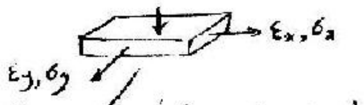
← • شکل سازه نرم ، جابجایی زیاد است.

۳) کنترل نیمه فعال (semi active controller) :

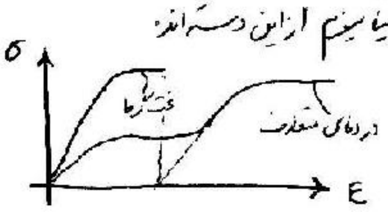
در این نوع کنترل گرها می توان با تغییر در مشخصات آنها هنگام وقوع زلزله نیروهای دلخواه را تولید کرد. میراگرهای نیمه فعال به انرژی کمی نیاز دارند. چند نمونه از میراگرهای نیمه فعال عبارتند از :

۱-۳) پیستون هیدرولیکی با روزنه متغیر ← با تنظیم خودکار روزنه ورود و خروج مایع ، نیروی وارد به سازه کنترل می شود.

۲-۳) میراگر پیزوالکتریک ← مصالح یا میراگرهای پیزوالکتریک ، مصالحی هستند که تحت اثر ولتاژ الکتریکی ساختار ملکولی آنها تغییر کرده و در راستاهای مختلف تغییر شکل میدهند. این مصالح از نوع خاص تغییر شکل شده‌اند.



۲-۳) آلیاژهای شکل یاب (shape memory alloy) ← مصالحی هستند که اگر در شرایط معمولی عادی تغییر می کنند در اثر تغییرات دما میتوان آنها را به شکل اولیه باز گرداند. آلیاژهایی از قبیل نیکل و تیتانیوم از این دسته‌اند.



۳-۴) سیالات کنترل پذیر (MR، ER) ← سیالاتی که در اثر میدان های خارجی چسبندگی بین ذرات آن زیاد می‌شود.

سیالاتی هستند که تحت اثر میدان الکتریکی و یا مغناطیسی از حالت مایع به نیمه جامد تبدیل می‌شود.

درصورتیکه سیال تحت اثر میدان الکتریکی تغییر حالت دهد به آن ER (electro rheological) و درصورتیکه سیال تحت اثر میدان مغناطیسی تغییر حالت دهد به آن MR (magneto rheological) گویند.

با مصالح فوق میراگرهای نیمه فعال یا فرک‌های نیمه فعال ساخته می‌شود.

امروزه MR کاربرد بیشتری دارد.

- انواع روشهای تعیین نیرو های کنترل :

هدف یافتن نیروی کنترل $\{u(t)\}$ است به نحوی که رفتار سازه در حد مجاز قرار گیرد. بهترین روشها عبارتند از :

۱) روش تخصیص قطب ها (pole assignment method)

۲) روش بهینه کنترل خطی (کلاسیک) (linear optimal control)

۳) روش کنترل لحظه‌ای بهینه (instantamious optimal control)

۴) روش کنترل ضربانی (palse control method)

۵) روش کنترل فازی (fuzzy control method)

- معادلات دیفرانسیل حرکت سازه های کنترل شده در فضای حالت :

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) + u(t)$ (ماتریس)

با اضافه کردن $\dot{x}=\dot{x}$ به دو طرف، درجه معادله را به یک کاهش می‌دهیم :

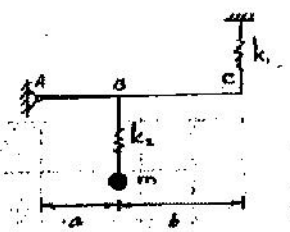
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}}_{\dot{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -m^{-1}k & -m^{-1}c \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}}_{q:\text{بردار حالت}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{bmatrix}}_{B} \begin{Bmatrix} p(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(t) \end{Bmatrix}$$

• فضای حالت ← فضایی که حداقل پارامترهای لازم برای مشخص کردن شرایط سازه در یک لحظه بطور مستقل از لحظات دیگر را داشته باشیم

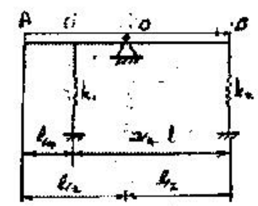
$$\rightarrow \dot{q} = Aq + BP(t) + Bu(t) \quad , x = Dq$$

که در آن $D = [I \;\; 0]$.

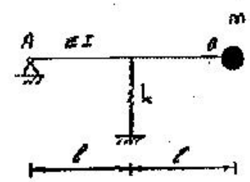
۱-۱ تیر AC صلب و بدون وزن فرض می‌شود. معادله دیفرانسیل ارتعاش قائم جرم m را بنویسید و فرکانس ارتعاش را تعیین کنید.



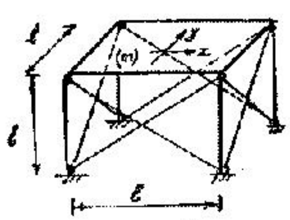
۲-۱ تیر AB صلب و جرم کل آن m می‌باشد. ارتعاش دورانی آن حول نقطه O بررسی کنید و فرکانس ارتعاش را بدست آورید. زاویه دوران را کوچک فرض کنید.



۳-۱ تیر AB بدون وزن و الاستیک فرض می‌شود. فرکانس ارتعاش جرم m را تعیین کنید.



۴-۱ ساختمان یک طبقه نشان داده شده در دو امتداد دارای مهاربندی است. فرکانس ساختمان را در ارتعاش در امتداد (x) محاسبه کنید. از سختی خمشی ستون‌ها صرف‌نظر کنید. سطح مقطع مهاربندها A =



جواب ۱-۱

$$\bullet\ F_1 = K_1\Delta_1 = K_1 l\theta,\quad F_2 = K_2\Delta_2 = K_2(x - a\theta),\quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{a}{l} \rightarrow F_1 \cdot l = F_2 \cdot a \;\Bigg\}\rightarrow K_1 l^2\theta = K_2 a x - K_2 a^2\theta \rightarrow \theta = \frac{aK_2}{l^2K_1 + a^2K_2}x$$

$$\bullet\ m\text{ تعادل دینامیکی}:\quad m\ddot{x} + F_2 = mg,\quad F_2 = \frac{l}{a}F_1 = K_1\frac{l^2}{a}\theta \;\Bigg\}\rightarrow m\ddot{x} + \underbrace{\boxed{\frac{K_1K_2l^2}{l^2K_1 + a^2K_2}}}_{\bar{K}}x = mg$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\bar{K}}{m}} \ldots$$

جواب ۲-۱

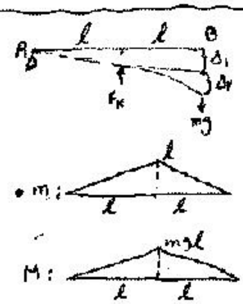
$$\bullet\ \text{تعادل دینامیکی}:\quad I_{mo}\ddot{\theta} + F_2\frac{l}{4} + F_1\frac{l}{4} = 0$$

$$F_1 = K_1\Delta_1 = K_1\frac{l}{4}\theta,\quad F_2 = K_2\Delta_2 = K_2\frac{l}{4}\theta,\quad I_{mo} = 2\int_0^{l/2}\frac{m}{l}x^2dx = \frac{ml^2}{12}$$

$$\rightarrow \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta} + \left(\frac{4K_2+K_1}{4}\right)\frac{l^2}{4}\theta = 0 \rightarrow m\ddot{\theta} + \underbrace{\boxed{3\left(\frac{4K_2+K_1}{4}\right)}}_{\bar{K}}\theta = 0$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\bar{K}}{m}} \ldots$$

جواب ۳-۱



$$\bullet\ \Sigma M_A = 0 \rightarrow F_K = 2mg,\quad F_K = k\Delta_K,\quad \Delta_1 = 2\Delta_K \;\Bigg\}\rightarrow \Delta_1 = \frac{4mg}{K}$$

تحت بار واحد :

تحت بار mg :

$$\rightarrow \text{روش کار مجازی}:\quad \Delta_2 = \frac{2}{EI}\left(\frac{mgl^2}{2}\cdot\frac{2l}{3}\right) \rightarrow \Delta_2 = \frac{2mgl^3}{3EI}$$

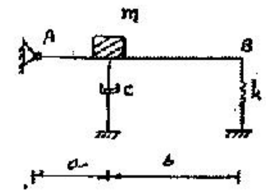
$$\rightarrow \Delta_{st} = \frac{4mg}{K} + \frac{2mgl^3}{3EI} = \frac{mg}{\bar{K}} \rightarrow \bar{K} = \frac{1}{\frac{4}{K} + \frac{2l^3}{3EI}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\bar{K}}{m}} \ldots$$

جواب ۴-۱

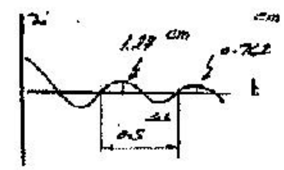
$$\bullet\ \bar{K} = 2K\quad ;\ \text{دو میله در فشار و دو میله در کشش}$$

$$\bullet\ K = \frac{AE}{L}\cos^2\theta,\quad L = \sqrt{2}l,\quad \theta = 45^\circ \rightarrow K = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{AE}{l}$$

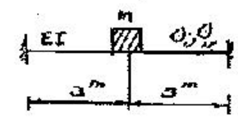
$$\rightarrow \bar{K} = \sqrt{2}\frac{AE}{l} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\bar{K}}{m}} \ldots$$



۱-۲ جرم m روی تیر صلب با وزن ناچیز AB قرار دارد. معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد سیستم را با میرائی کم بنویسید.



۲-۲ منحنی جواب یک سیستم جرم، فنر و میراگر مطابق شکل می‌باشد. اگر سختی فنر $k = 1450 \; N/cm$ باشد جرم سیستم را حساب کنید.



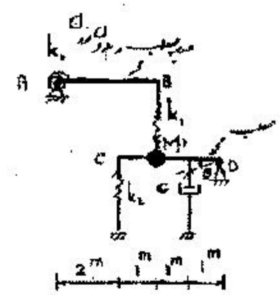
$m = 2 \; ton$

$\xi = \%10$

۳-۲ برروی تیر الاستیک AB، جرم m واقع شده است. این تیر تحت شرایط اولیه

$x_0 = 10 \; cm \; , \; \dot{x}_0 = 3 \; cm/s$

ارتعاش می‌کند. لنگر خمشی تکیه‌گاه را در لحظه به دست آورید.



۴-۲ با فرض کوچک بودن θ، معادله دیفرانسیل حرکت سیستم را برحسب θ بنویسید. تیر AB صلب بوده و تیر CD دارای جرم کل (m) می‌باشد.

جواب ۱-۲

$\bullet \; \frac{x}{x_k} = \frac{a}{\ell} \rightarrow x_k = \frac{\ell}{a}x \rightarrow F_k = Kx_k = K\frac{\ell}{a}x$

$\bullet \; \sum M_A = 0 \xrightarrow{\text{دینامیکی}} m\ddot{x}a + c\dot{x}a + F_k \cdot \ell - mg = 0$

$\rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + K(\frac{\ell}{a})^2 x = mg$

تغییر متغیر: $x = \bar{x} + x_s \; , \; mg = K(\frac{\ell}{a})^2 x_s$

$\xrightarrow{\text{در معادله حرکت}} m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + K(\frac{\ell}{a})^2 \bar{x} = 0$

$\bullet \; C_{cr} = 2m\omega = 2m\sqrt{\frac{\bar{K}}{m}} = 2\frac{\ell}{a}\sqrt{Km} \rightarrow \xi = \frac{c}{C_{cr}} = \frac{ac}{2\ell\sqrt{Km}}$

$\rightarrow \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{(\frac{\ell}{a})^2 K}{m}} \times \sqrt{\frac{4\ell^2 Km - a^2c^2}{4\ell^2 Km}} = \frac{1}{2m}\sqrt{4Km\frac{\ell^2}{a^2} - c^2}$

جواب ۲-۲

$\bullet \; \xi = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1.27}{0.762} = 0.08$

$\bullet \; T = 0.15 = \frac{2\pi}{\omega_D} \rightarrow \omega_D = 41.87 \; rad/s$

$\rightarrow \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} \rightarrow 41.87 = \sqrt{\frac{1450}{m}}\sqrt{1-0.08^2} \rightarrow m = 912 \; Kg$

جواب ۳-۲

$\bullet \; \delta_{st}$ عامل $: \; \delta_{st} = \frac{mg \cdot \ell^3}{192EI} = \frac{42.07}{EI}$

$\bullet \; \delta_{dy}$ عامل $: \; K = \frac{192EI}{\ell^3} = 0.198EI \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 0.021\sqrt{EI} \rightarrow \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 0.021\sqrt{EI}$

$\rightarrow x = e^{-\xi\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega}{\omega_D}\sin\omega_D t + x_0\cos\omega_D t\right) = \delta_{dy}$

$\rightarrow \Delta = \delta_{st} + \delta_{dy} \rightarrow M = \frac{6EI}{\ell^2}\Delta = 70 \; N.m$

جواب ۴-۲

$\bullet \; \sum M_O = 0 \xrightarrow{\text{دینامیکی}} I_{mo}\ddot{\theta} + M\ddot{\theta} \times 2 + C\dot{x} \times 1 - K_1 x_1 \times 2 + K_2 x_2 \times 3 = 0$

$I_{mo} = \frac{m\ell^2}{3} = 3m$

$x = 1 \times \theta \rightarrow \dot{x} = \dot{\theta}$

$x_2 = 3\theta$

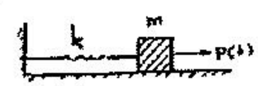
$\left.\begin{array}{l} x_M - x_1 + 2\theta_0 = 2\theta \\ \sum M_A = 0 \xrightarrow{\text{استاتیکی}} K_0\theta_0 = 2K_1x_1 \rightarrow \theta_0 = \frac{2K_1x_1}{K_0} \end{array}\right\} \rightarrow x_1 = \frac{2K_0}{4K_1 + K_0}\theta$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} 3m\ddot{\theta} + 4M\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \left(9K_2 - \frac{4K_1K_0}{4K_1+K_0}\right)\theta = 0$

۳-۱ جواب سیستم فوق را برای دو حالت زیر بدست آورید:

(a) میرایی را در نظر نگیرید.

(b) $\zeta = \%20$ فرض کنید.



$P(t) = 10 \cos 10t$

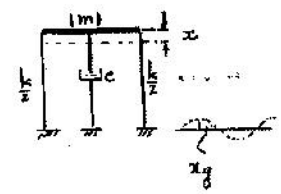
$k = 70 \ N/cm$

$W = 172 \ N$

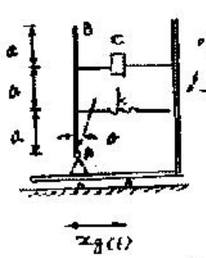
$x_0 = \dot{x}_0 = 0$

۳-۲ قاب یک طبقه تحت اثر حرکت تکیه‌گاهی $x_g = a \sin \bar{\omega} t$ به صورت فوق قرار دارد، معادله ارتعاش جرم m را بنویسید. سختی تیرها:

$k =$



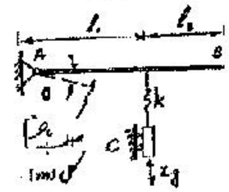
۳-۳ میله AB سخت با جرم واحد طول $\bar{m}$ (m) معادله حرکت آن را برحسب (θ) بنویسید. جابجایی تکیه‌گاهی $x_g(t)$ بوده و θ را کوچک فرض کنید.



۳-۴ اگر تکیه‌گاه سیستم روبرو به صورت زیر باشد:

$x_g = x_0 \sin \bar{\omega} t$

انجام شود، معادله دیفرانسیل حرکت را بنویسید.



جواب ۳-۱-

(a) • $x_0 = \dot{x}_0 = 0 \longrightarrow x_c = x_t = 0$

• $m = \frac{W}{g} = 17.53 \ kg \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \ rad/s$, $\bar{\omega} = 10 \ rad/s$ $\Big\} \longrightarrow \beta = 0.5$, $P_0 = 10 \ N \longrightarrow$

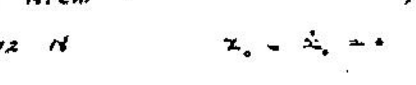
$\longrightarrow f = \frac{10}{7000}\left[(1-0.5^2)^2 + 0\right]^{-\frac{1}{2}} = 1.894 \times 10^{-3}$, $\theta = 0 \longrightarrow x_s = x_p =$

$\longrightarrow x_s = x_p = f \sin(10t) \longrightarrow x = x_s + x_t = 1.86 \times 10^{-3} \sin 10t$

(b) (a) مثل $\xrightarrow{\text{با}} \zeta = \%20$

جواب ۳-۲-

• x : جابجایی مطلق ، $x - x_g$: جابجایی نسبی



$\longrightarrow m\ddot{x} + (\dot{x} - \dot{x}_g)c + (x - x_g)K = 0$

$\longrightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = c\dot{x}_g + Kx_g = ca\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t + Ka\sin\bar{\omega}t$

جواب ۳-۳-

• $\Sigma M_A = 0 \xrightarrow{\text{دینامیکی}} I_{mo}\ddot{\theta} + c\dot{x}_c \times 2a + Kx_k \times a = -M\ddot{x}_g \times \frac{3}{2}a$

$I_{mo} = \int r^2 dM = \frac{M\ell^2}{3} = \frac{m \times 3a \times 9a^2}{3} = 9ma^3$

$x_c = 2a\theta \longrightarrow \dot{x}_c = 2a\dot{\theta}$, $x_k = a\theta$, $M = 3a \times m$

$\longrightarrow 9ma^3\ddot{\theta} + 4ca^2\dot{\theta} + ka^2\theta = -\frac{9}{2}a^2 m \ddot{x}_g$

$\longrightarrow 9ma\ddot{\theta} + 4c\dot{\theta} + k\theta = -4.5 a m \ddot{x}_g$

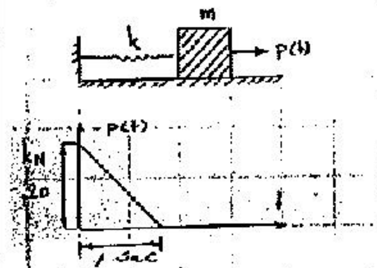
جواب ۳-۴-

• $\sum M_A \xrightarrow{\text{دینامیکی}} I_{mo}\ddot{\theta} + K(x - x_g) = 0$

$x = \ell_1\theta$, $I_{mo} = \frac{m\ell^2}{3}$, $x_g = x_0 \sin\bar{\omega}t$

$\longrightarrow \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + K\ell_1^2\theta = x_0 \ell_1 K \sin\bar{\omega}t$ ، معادله حرکت

$\longrightarrow m\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{3K\ell_1^2}{\ell^2}\right)}_{\bar{K}}\theta = \cdots \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\bar{K}}{m}} = \frac{\ell_1}{\ell}\sqrt{\frac{3K}{m}}$

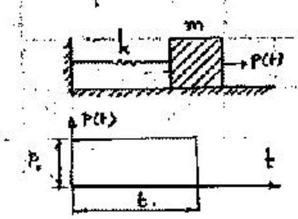


۴-۱ سیستم شکل داده شده در شکل تحت نیرو قرار دارد. مقدار تغییر مکان جرم m را در زمان‌های زیر به دست آورید

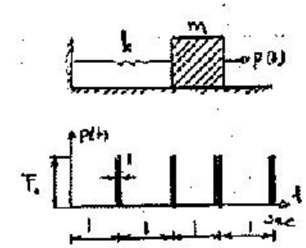
(a) $t = 0.3$ sec

(b) $t = 2$ sec

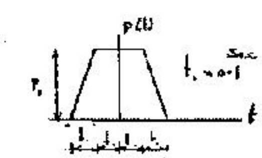
$k = 2$ kN/cm , $m = 50$ tons



۴-۲ معادله پاسخ سیستم را برای $t > t_1$ به دست آورید.



۴-۳ جرم m در زمان $t=0$ با تغییر مکان اولیه صفر، تحت ارتعاش درمی‌آید. تحت اثر ضربه‌های مکرر قرار می‌گیرد. در صورتی که حداکثر ... در زمان $t=0$ ... با توجه به k ، m ، F_0 به دست آورید.



۴-۴ سیستم جرم (m) و فنر (k) شکل (۴-۳) تحت اثر نیروی ذوزنقه‌ای شکل مقابل قرار می‌گیرد. ... تغییر مکان حداکثر را حساب کنید.

جواب ۴-۲- برای $t \le t_1$ مسئله به صورت ارتعاش اجباری تحت بار $P(t)$ است. پس از اتمام بار، جسم به حالت ارتعاش آزاد در می‌آید که از رابطه SDOF بدون میرایی با حرکت آزاد پیروی می‌کند. x_0 و $\dot{x}_0$ جابجایی و سرعت در لحظه t_1 است:

- $t \le t_1$: ارتعاش اجباری $\rightarrow x = \frac{1}{m\omega}\int_0^{t_1} P_0 \sin\omega(t-\tau)\,d\tau = \frac{P_0}{K}(1-\cos\omega t_1)$

- $t > t_1$: حرکت آزاد $\rightarrow x = x_0 \cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t$

$x_0 = \frac{P_0}{K}(1-\cos\omega t_1) \rightarrow \dot{x}_0 = \frac{P_0\omega}{K}\sin\omega t_1 \quad , \quad t = t - t_1$

$\rightarrow x = \frac{P_0}{K}(1-\cos\omega t_1)\cos\omega(t-t_1) + \frac{P_0\omega}{K}\sin\omega t_1 \sin\omega(t-t_1)$

$\xrightarrow{\text{ساده}} x = \frac{P_0}{K}(1-\cos\omega t) - \frac{P_0}{K}(1-\cos\omega(t-t_1))$

جواب ۴-۳- نیرو ضربه‌ای + بدون میرایی است، پس:

$x = \frac{P(t)\Delta t}{m\omega}\sin\omega t = \frac{\frac{1}{2}(0.2+0.2)P_0}{m\omega} = 0.2\frac{P_0}{m\omega} \rightarrow F_{max} = Kx_{max} = 0.2\frac{P_0 K}{m\omega}$

جواب ۴-۱- روش ۴-۳:

a) $t \le 1s$ (ارتعاش اجباری)

$P(t) = -20000(t-1) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2\times10^5}{50\times10^3}} = 2\ rad/s = \omega_0$

$\rightarrow x = \frac{1}{2\times50\times10^3}\int_0^t (-20000(t-1))\sin 2(t-\tau)\,d\tau = -\frac{1}{10}(t-1)(1-\cos 2t)$

$\rightarrow x(0.3) = 0.012$ m

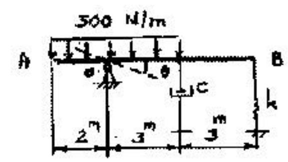
b) $x = -\frac{1}{10}(t-1)(1-\cos 2t) \rightarrow \dot{x} = -\frac{1}{10}(1-\cos 2t) - \frac{2}{10}(t-1)\sin 2t$

$\rightarrow x(1) = 0 = x_0 \quad , \quad \dot{x}(1) = -0.14 = \dot{x}_0$

$\rightarrow x = x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t = -\frac{0.14}{2}\sin 2(t-1)$

$\rightarrow x(2) = -0.064$ m

۵-۱. تیر صلب AB تحت اثر بار گسترده یکنواخت قرار دارد. معادله دیفرانسیل حرکت را برحسب زاویه (θ) بنویسید. زاویه θ را کوچک فرض کنید.

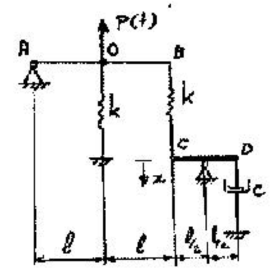


$k = 5000$ N/cm

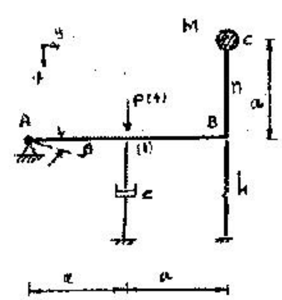
$C = 1000$ N.sec/cm

W (وزن کل تیر) $= 800$ N

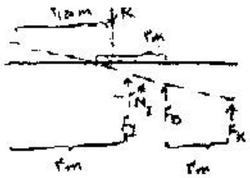
۵-۲. در تیر AB، CD صلب هستند. جرم کل تیر CD برابر m بوده و از جرم تیر AB صرفنظر شود. معادله ارتعاش سیستم را برحسب (x) بنویسید و مقادیر M^*، C^*، K^* و P^* را مشخص کنید. تغییر مکان سیستم را کوچک فرض کنید.



۵-۳. قطعه ABC صلب بوده و جرم واحد طول آن (m) است. با فرض کوچک بودن (θ) معادله دیفرانسیل حرکت سیستم را بدست آورید.



جواب ۵-۱



$$\begin{cases} K = 500\times 1.5 = 750\,N & ,\ \delta_R = 1.5\,\delta_\theta \\ F_I = m\ddot{x}_I = 2m\ddot{\theta} & ,\ \delta_I = 2\delta_\theta \\ M_I = \dfrac{ml^2}{12}\ddot{\theta} & ,\ \delta_\theta \\ F_K = Kx_K = 4K\theta & ,\ \delta_K = 4\delta_\theta \\ F_D = C\dot{x}_c = 2C\dot{\theta} & ,\ \delta_D = 2\delta_\theta \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{مقادیر}]{\text{با جایگزاری}} 7412\ddot{\theta} + 9000\dot{\theta} + 18000\theta = 1250$$

جواب ۵-۲

$$\begin{cases} P(t) & ,\ \delta_P = \frac{1}{2}\delta_{KB} \\ F_I = 0 \ (\text{جرم ندارد}) & \\ M_I = 0 \ (\text{جرم ندارد}) & \\ F_{KO} = Kx_o & ,\ \delta_{KO} = \frac{1}{2}\delta_{KB} \\ F_{KB} = K(x - x_B) & ,\ \delta_{KB} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_o = \frac{1}{2}x_B} K\left(\tfrac{1}{2}x_B\right)\tfrac{1}{2}\delta_{KB} - K(x - x_B)\delta_{KB} + P(t)\tfrac{1}{2}$$

$$\longrightarrow x_B = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}\frac{P(t)}{K}$$

$$\begin{cases} F_I = 0 \ (x = 0\ \text{جرم}) & ,\ \delta_I \\ M_I = \dfrac{ml^2}{12}\ddot{\theta} & ,\ \delta_\theta \\ F_K = K(x - x_B) = 0.2Kx - 0.4P(t) & ,\ \delta_K = \frac{l}{2}\delta_\theta \\ F_D = C\dot{x} & ,\ \delta_D = \frac{l}{2}\delta_\theta \end{cases}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{m}{9}}_{m^*}\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{4}}_{c^*}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{25}}_{k^*}x = \underbrace{-\frac{1}{5}P(t)}_{P^*(t)}$$

جواب ۵-۳

$F_I = 2ma\ddot{x}_1 = 2ma(a\ddot{\theta}) = 2ma^2\ddot{\theta}$, $\delta_I = a\delta_\theta$ $\longrightarrow 2ma^2\ddot{\theta}$

$F_{2I} = ma(\ddot{x}_2, \ddot{y}_2) = ma(2a\ddot{\theta}, 1.5a\ddot{\theta}) = \begin{cases} 2ma^2\ddot{\theta} \\ 1.5ma^2\ddot{\theta} \end{cases}$, $\begin{cases} \delta_{2Ix} = 2a\delta_\theta \\ \delta_{2Iy} = 1.5a\delta_\theta \end{cases}$ $\longrightarrow 6.25ma^2\ddot{\theta}$

$F_{3I} = M(\ddot{x}_3, \ddot{y}_3) = M(2a\ddot{\theta}, a\ddot{\theta}) = \begin{cases} 2Ma\ddot{\theta} \\ Ma\ddot{\theta} \end{cases}$, $\begin{cases} \delta_{3Ix} = 2a\delta_\theta \\ \delta_{3Iy} = a\delta_\theta \end{cases}$ $\longrightarrow 5Ma^2\ddot{\theta}$

$M_{1I} = \frac{(2ma)(2a)^2}{12}\ddot{\theta} = \frac{8}{12}ma^2\ddot{\theta}$, δ_θ $\longrightarrow \frac{8}{12}ma^2\ddot{\theta}$

$M_{2I} = \frac{(ma)a^2}{12}\ddot{\theta} = \frac{1}{12}ma^2\ddot{\theta}$, δ_θ $\longrightarrow \frac{1}{12}ma^2\ddot{\theta}$ $\Big\} = 0.75ma^2\ddot{\theta}$

$F_D = C\dot{x}_c = Ca\dot{\theta}$, $\delta_D = a\delta_\theta$ $\longrightarrow Ca^2\dot{\theta}$

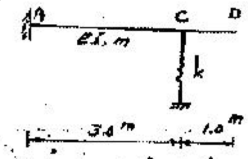
$F_K = Kx_K = 2aK\theta$, $\delta_K = 2a\delta_\theta$ $\longrightarrow 4a^2K\theta$

$P(t)$, $\delta_P = a\delta_\theta$ $\longrightarrow P(t)\cdot a$

$$\longrightarrow (7m + 5M)\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + 4K\theta = \frac{1}{a}P(t)$$

سوالات فصل ۶	روش ریلی	دینامیک سازه‌ها

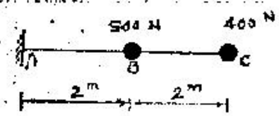
۶-۱ تیر کنسول AB به جرم واحد طول m و صلبیت EI، در نقطه C به فنر k متصل است. زمان تناوب سیستم را بدست آورید.



فرض کنید: $\varphi(x)=(x/\ell)^2$

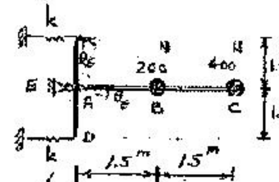
$m = 100\ kg/m\ ,\ k = 50\ kN/m$

۶-۲ زمان تناوب اصلی تیر کنسول AC را بدست آورید. از وزن تیر صرف‌نظر کنید. تابع شکل ارتعاش $\varphi(x)$ را شکل تیر در اثر بارهای استاتیکی در نظر بگیرید.



EI = ثابت

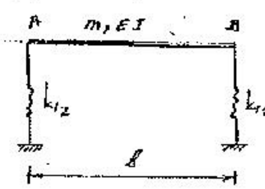
۶-۳ زمان تناوب اصلی تیر کنسول AC را بدست آورید. از وزن تیر صرف‌نظر کنید. تیر در نقطه A به قطعه صلب FD متصل شده است. از اثر اینرسی قطعه FD در ارتعاش صرف‌نظر کنید.



تابع شکل ارتعاش را شکل تیر در اثر بارهای وزن در نظر بگیرید.

$k = 50\ kN/m\ ,\ EI =$ ثابت

۶-۴ تیر AB با جرم کل (m) مطابق شکل فنرهایی دارد. در صورتی که رابطه شکل ارتعاش را



$\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{\ell} + b$

فرض کنیم، زمان اصلی سیستم را بدست آورید.

جواب ۶-۱-

$$\omega = \frac{\int EI\,\psi''^2(x)\,dx + \sum \psi_i^2(x) k_i}{\int m\psi^2(x)\,dx}$$

$\psi(x) = \frac{x^2}{\ell^2} \longrightarrow \psi'(x) = \frac{2x}{\ell^2} \to \psi''(x) = \frac{2}{\ell^2} \to \psi''^2(x) = \frac{4}{256}\ ,\ \psi^2(x) = \frac{x^4}{4^4}$

$\psi_{فنر}(x) = \psi(3) = \frac{9}{16} \longrightarrow \psi^2_{فنر}(3)\,k = \frac{9}{16}\times 50\times 10^3$

$$\longrightarrow \omega = \frac{\int_0^4 \frac{4}{256} EI\,dx + \frac{9}{16}\times 50000}{\int_0^4 100\,\frac{x^4}{4^4}\,dx} \longrightarrow \omega = \frac{1}{32}\sqrt{80\,EI + 2025}$$

جواب ۶-۲-

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{Px^2}{6EI}(3a-x) & 0 \le x \le a \\ \frac{Pa^2}{6EI}(3x-a) & a \le x \le \ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_B = \frac{500\times 2^2}{6EI}(3\times 2-2) + \frac{400\times 2^2}{6EI}(3\times 4-2) = \frac{4000}{EI} \\ y_C = \frac{500\times 2^2}{6EI}(3\times 4-2) + \frac{400\times 4^3}{6EI}(3\times 4-4) = \frac{11867}{EI} \end{cases}$$

$$\rightarrow \omega = g\,\frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i y_i^2} = 9.81\,EI \times \frac{500\times 4000 + 400\times 11867}{500\times 4000^2 + 400\times 11867^2} \longrightarrow \omega = 0.032\sqrt{EI}$$

جواب ۶-۳-

$\psi(x)$ در مسئله قبل را در رابطه مسئله قبل جایگزین کنید

$$\begin{cases} y_B = \psi(x)\big|_{x=1.5m} + \theta_E \times 1.5 \\ y_C = \psi(x)\big|_{x=3m} + \theta_E \times 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta_E = \frac{\Delta_K}{1}\ ,\ \Delta_K = \frac{F_K}{k} \\ \sum M_E = 200\times 1.5 + 400\times 3 = 1500\ N\cdot m \longrightarrow F_K = \frac{\sum M_E}{2} = 750\ N \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \Delta_K = 0.015\ m \\ \rightarrow \theta_E = 0.015\ rad \end{array}$$

$\longrightarrow y_B = \frac{1125}{EI} + 0.0225\ ,\ y_C = \frac{3600}{EI} + 0.045$

$\longrightarrow \omega^2 = g\,\frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i y_i^2} = \dots$

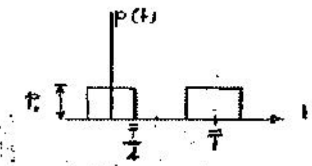
جواب ۶-۴-

$$\begin{cases} x=0 \longrightarrow \psi(0) = b \\ x=\ell \longrightarrow \psi(\ell) = b \end{cases} \longrightarrow \sum \psi_i^2(x) K_i = kb^2$$

$\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{\ell} + b \longrightarrow \psi'(x) = \frac{\pi}{\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell} \longrightarrow \psi''(x) = -\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{\ell}$

$$\longrightarrow \omega^2 = \frac{\int EI\,\psi''^2(x)\,dx + \sum \psi_i^2(x)\,k_i}{\int m\psi^2(x)\,dx} \longrightarrow \omega = \frac{2K}{m}\ \frac{\frac{EI}{K\ell^3}\frac{\pi^4}{4} + \frac{b^2}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{4b}{\pi} + b^2}$$

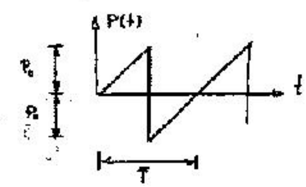
۷-۱ نیروی خارجی دوره‌ای [illegible]



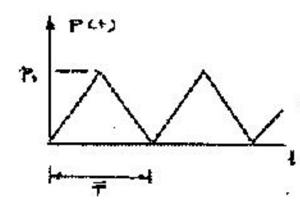
۷-۲ جواب سیستم جرم فنر را تحت اثر P(t) بدست آورید.

فرض کنید: $\bar{\omega} = 1.5\,\omega$

$\zeta = \%10$



۷-۳ جواب سیستم جرم فنر را تحت اثر P(t) بدست آورید.



جواب ۷-۳ - تابع زوج $\longrightarrow b_n = 0$

$$P(t) = \begin{cases} -\frac{2P_0}{T}t &, -\frac{T}{2} \le t \le 0 \\ \frac{2P_0}{T}t &, 0 \le t \le \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{P_0}{2} \quad , \quad a_n = \frac{2P_0}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \frac{-4P_0}{n^2\pi^2} & \text{n فرد} \\ 0 & \text{n زوج} \end{cases}$$

$$\longrightarrow x = \frac{1}{K}\left[\frac{P_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\beta_n^2}\,\frac{P_0}{n^2\pi^2}\cos n\bar{\omega}t\right)\right]$$

جواب ۷-۲ - تابع فرد $\longrightarrow a_0, a_n = 0$

$$P(t) = \frac{2P_0}{T}t \quad , \quad -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$

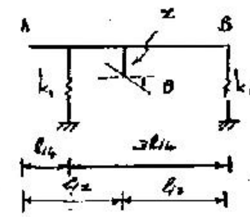
$$\longrightarrow b_n = \frac{2}{T}\int_T P(t)\sin n\bar{\omega}t\,dt = -\frac{2P_0}{n\pi}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2P_0}{n\pi} \quad , \quad \beta_n = 1.5n$$ ، [illegible]

$\longrightarrow x = \dots$ [illegible]

جواب ۷-۱ - تابع زوج $\longrightarrow b_n = 0$

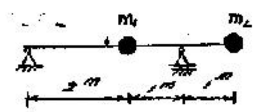
$$a_0 = \frac{P_0}{2} \quad , \quad a_n = \frac{2P_0}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{n زوج} \\ \pm\frac{2P_0}{n\pi} & \text{n فرد} \end{cases}$$

۸-۱ تیر صلب AB با جرم واحد طول m می‌تواند در امتداد قائم حرکت انتقالی و دوران حول مرکز چرخش نقطه (O) داشته باشد. معادلات دیفرانسیل حرکت را بنویسید.



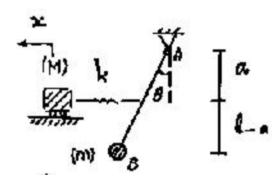
۸-۲ حرکت تام جرم‌های m_1 و m_2 را بررسی کرده و معادلات دیفرانسیل حرکت را بنویسید.

$m_1 = m_2 = 100$ kg

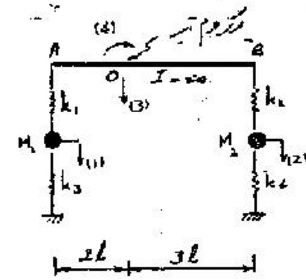


EI = ثابت

۸-۳ یک دستگاه دوزنقه‌ای شکل مقابل را در نظر بگیرید. میله AB صلب و بدون جرم فرض می‌گردد. معادلات دیفرانسیل حرکت را بنویسید. θ = کوچک



۸-۴ تیر صلب AB با جرم‌های M_1 و M_2 در شکل زیر نشان داده شده است. جرم واحد طول تیر برابر m است. سیستم دارای چهار درجه آزادی (۱)، (۲)، (۳) و (۴) است. معادلات دیفرانسیل ارتعاش سیستم را بصورت ماتریسی بنویسید.

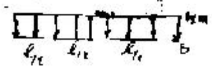


جواب ۸-۱

• محاسبه [K] :

$K_{22} = \frac{K_1\ell^2}{4} + \frac{K_2\ell^2}{16}$, $K_{11} = K_1 + K_2$, $K_{12} = \frac{K_2\ell}{4} - \frac{K_1\ell}{2} = K_{21}$ $\longrightarrow K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$

• محاسبه [m] :

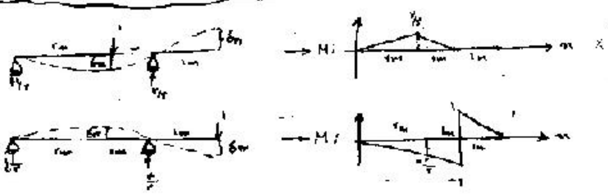


$m_{11} \times \frac{\ell}{4} = m\ell \times \frac{\ell}{4} \longrightarrow m_{11} = m\ell$, $m_{21} = 0$

$m_{22} = -\frac{\ell}{4} m \times \frac{\ell}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\frac{\ell}{4} \times 2 \ldots = \frac{m\ell^3}{12}$, $m_{12} = 0$

$\longrightarrow m = \begin{bmatrix} m\ell & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^3}{12} \end{bmatrix}$

جواب ۸-۲

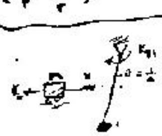


$\longrightarrow \begin{cases} \delta_{11} = \left(\frac{2}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\right)\frac{1}{EI} = \frac{8}{9EI} , & \delta_{22} = \left(-1 \times 2 \times \frac{1}{2} \times -\frac{2}{3} + 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)\frac{1}{EI} = \frac{1}{EI} \\ \delta_{12} = \left(\frac{2}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times -\frac{2}{3}\right)\frac{1}{EI} = -\frac{4}{9EI} = \delta_{21} \end{cases}$

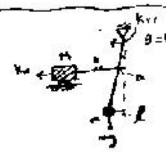
$\longrightarrow \delta = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{EI} \longrightarrow K = \delta^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 4.5 \\ 4.5 & 8 \end{bmatrix} EI = K$, $m = \begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{bmatrix}$

جواب ۸-۳

• محاسبه K :



$\begin{cases} K_{11} = K \\ K_{21} = -Ka \end{cases}$



$\begin{cases} K_{22} = Ka^2 + mg\ell \\ K_{12} = -Ka \end{cases}$

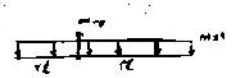
• محاسبه [m] :

$\begin{cases} m_{22} = m\ell\ell = m\ell^2 \\ m_{11} = M \end{cases}$

جواب ۸-۴

• محاسبه (K) : $\begin{cases} K_{11} = K_1 + K_3 , & K_{21} = 0 , & K_{31} = -K_1 , & K_{41} = 2\ell K_1 \\ K_{12} = 0 , & K_{22} = K_2 + K_4 , & K_{32} = -K_2 , & K_{42} = 3\ell K_2 \\ K_{13} = -K_1 , & K_{23} = -K_2 , & K_{33} = K_1 + K_2 , & K_{43} = 3\ell K_2 - 2\ell K_1 \\ K_{14} = 2\ell K_1 , & K_{24} = 3\ell K_2 , & K_{34} = 3\ell K_2 - 2\ell K_1 , & K_{44} = 9\ell^2 K_2 + 4\ell^2 K_1 \end{cases}$

• محاسبه (m) : $\begin{cases} m_{11} = M_1 , & M_{22} = M_2 \\ m_{33} = 5m\ell \\ m_{44} = \frac{35}{3} m\ell^3 \end{cases}$



جواب ۹-۱

[K] محاسبه: انتقالی‌ها → $F = \frac{12EI}{\ell^3}\times 1$ ، $M = \frac{6EI}{\ell^2}\times 1$

دورانی‌ها → $R = \frac{6EI}{\ell^2}$ ، $M = \frac{4EI}{\ell}$

$$\begin{cases} K_{11} = 4\times\frac{12EI}{h^3} = \frac{48EI}{h^3}, & K_{21} = -2\times\frac{12EI}{h^3} = -\frac{24EI}{h^3}, \; K_{31} = K_{41} = 0, \; K_{51} = K_{61} = -\frac{6EI}{h^2} \\ K_{12} = -\frac{24EI}{h^3}, & K_{22} = \frac{24EI}{h^3}, \; K_{32} = K_{42} = \frac{6EI}{h^2} = K_{52} = K_{62} \\ K_{13} = 0, & K_{23} = \frac{6EI}{h^2}, \; K_{33} = 2\times\frac{4EI}{h} + \frac{4EI}{2h} = \frac{10EI}{h}, \; K_{43} = \frac{EI}{h}, \; K_{53} = \frac{2EI}{h}, \; K_{63} = 0 \\ K_{14} = 0, & K_{24} = \frac{6EI}{h^2}, \; K_{34} = \frac{EI}{h}, \; K_{44} = \frac{10EI}{h}, \; K_{54} = 0, \; K_{64} = \frac{2EI}{h} \\ K_{15} = -\frac{6EI}{h^2}, & K_{25} = \frac{6EI}{h^2}, \; K_{35} = \frac{2EI}{h}, \; K_{45} = 0, \; K_{55} = \frac{4EI}{h} + \frac{4EI}{2h} = \frac{6EI}{h}, \; K_{65} = \frac{EI}{h} \\ K_{16} = -\frac{6EI}{h^2}, & K_{26} = \frac{6EI}{h^2}, \; K_{36} = 0, \; K_{46} = \frac{2EI}{h}, \; K_{56} = \frac{EI}{h}, \; K_{66} = \frac{6EI}{h} \end{cases}$$

$[K_{con}]$ محاسبه: $K_{con} = K' - S^{-1} = \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] \end{bmatrix}$

جواب ۹-۲

[K] محاسبه: $\begin{cases} K_A = K_B = \frac{12EI}{\ell^3} = 2K \\ K_D = \frac{12EI}{\ell^3} = 2K, \; K_C = \frac{24EI}{\ell^3} = 4K \end{cases}$

$K_{xx} = 2\times 2K = 4K$ ، $K_{yx} = 0$ ، $K_{zx} = 0$

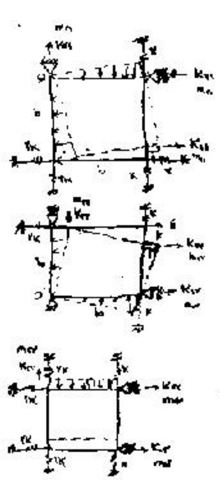
$K_{xy} = 0$ ، $K_{yy} = 4K\times 1 = 4K$ ، $K_{zy} = 2K\times\frac{b}{2} - 4K\times\frac{b}{2} = -Kb$

$K_{xz} = \frac{b}{2}\times 4K - \frac{b}{2}\times 4K = 0$ ، $K_{yz} = -\frac{b}{2}\times 2K + \frac{b}{2}\times 4K = Kb$

$K_{zz} = 2Kb\times b + 2K\times\frac{b}{2}\times\frac{b}{2} + 4K\times\frac{b}{2}\times\frac{b}{2} = [illegible]\,Kb^2$

[m] محاسبه: $m_{xx} = m = m_{yy}$ ، $m_{zz} = \frac{m(2b^2)}{12} = \frac{mb^2}{6}$

جواب ۹-۳



[K] محاسبه

$\sum M_o = 0 \rightarrow K_{11}b = 2Kb \rightarrow K_{11} = 2K$

$\sum F_y = 0 \rightarrow K_{21} = 0$

$\sum F_x = 0 \rightarrow K_{31} = 2K$

$\sum M_o = 0 \rightarrow K_{12}b = 2Kb \rightarrow K_{12} = 2K$

$\sum F_y = 0 \rightarrow K_{22} = 2K$

$\sum F_x = 0 \rightarrow K_{32} = 2K$

$\sum F_y = 0 \rightarrow K_{23} = 2K$

$\sum F_x = 0 \rightarrow K_{33} = 2K$

$\sum M = 0 \rightarrow K_{13} = 2K$

[m] محاسبه

u_1: $\sum M_o$، $\sum F_x \rightarrow m_{11} = \frac{m}{2}$، $m_{31} = \frac{m}{2}$

$\sum F_y \rightarrow m_{21} = \frac{m}{2}$

u_2: $\rightarrow m_{12} = \frac{m}{2}$، $m_{22} = \frac{m}{2}$، $m_{32} = \frac{m}{2}$

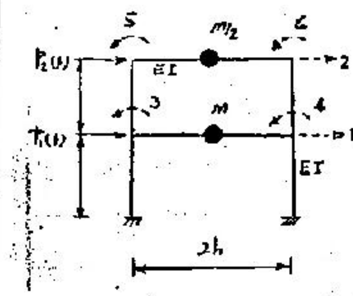
u_3: $\rightarrow m_{13} = \frac{m}{2}$، $m_{23} = \frac{m}{2}$، $m_{33} = m$

زلزله در جهت x و y ... m در جهت ...

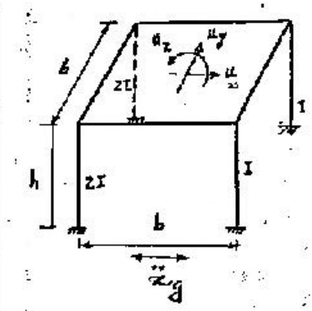
$P_{ex}(t) = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} \end{bmatrix}\ddot{x}_g$

$P_{ey}(t) = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} \\ m \end{bmatrix}\ddot{y}_g$

دینامیک سازه‌ها | سیستم‌های چند درجه آزاد (MDOF) | سال شماره ۹



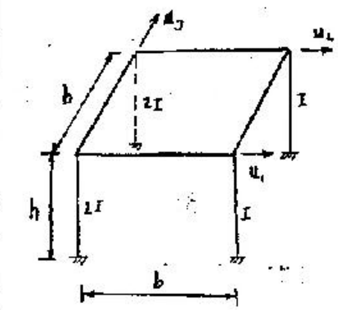
۹-۱ شش درجه آزادی (چهار دورانی و دو انتقالی) برای قاب مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید، ماتریس سختی را تشکیل دهید و درجات آزادی دورانی را تراکم کنید و سپس معادلات دیفرانسیل حرکت را بنویسید. (از اینرسی دورانی صرف‌نظر شود)



۹-۲ یک ساختمان مطابق شکل مقابل فرض می‌شود و درجات آزادی آن به دو انتقالی (u_x ، u_y) و یک دورانی حول محور z (u_z) محدود شده است. معادلات دیفرانسیل حرکت را برای زلزله در امتداد محور x بنویسید.

جرم دال سقف m =

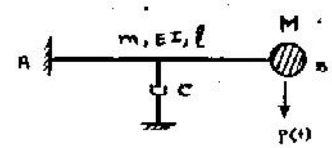
از جرم ستون‌ها صرف‌نظر کنید



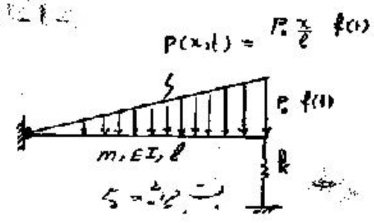
۹-۳ مسئله ۹-۲ را با درجات آزادی مطابق شکل مقابل حل کنید.

نیروی زلزله را یک بار در جهت x و یک بار در جهت y بنویسید.

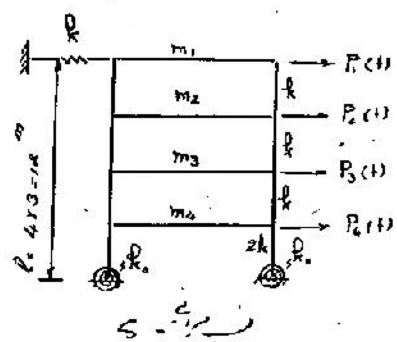
۱۰-۱ مقادیر جرم، سختی، میرایی و نیروی خارجی در مختصات تعمیم یافته را تعیین کنید. فرض کنید $\phi(x) = 1-\cos\frac{\pi x}{2\ell}$



۱۰-۲ اگر $\phi(x) = \frac{x}{\ell}$ فرض شود، مقادیر جرم، سختی، میرایی و نیروی خارجی را در مختصات تعمیم یافته بدست آورید.



۱۰-۳ ساختمان چهار طبقه‌ای مطابق شکل مقابل مدل شده است. معادله دینامیکی حرکت آن را در مختصات تعمیم یافته بنویسید. فرض کنید: $\phi(x) = x/\ell$



جواب ۱۰-۱-

$$M^* = \int_0^\ell m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2\ell}\right)^2 + M = 0.227\,m + M \quad \rightarrow \omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}}$$

$$K^* = \int_0^\ell EI\left(\frac{\pi^2}{4\ell^2}\cos\frac{\pi x}{2\ell}\right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32\ell^3} \quad \rightarrow C^* = 2\zeta M^*\omega^*$$

$$P^* = P(t) \quad , P_e^* = -\ddot{u}_g\int_0^\ell m\left(1-\cos\frac{\pi x}{2\ell}\right)dx = 0.364\,m\ell\ddot{u}_g \rightarrow \text{اثر زلزله}$$

جواب ۱۰-۲-

$$M^* = \int_0^\ell m\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{1}{3}m \quad K^* = k \quad \rightarrow \omega^* = \sqrt{\frac{3k}{m}} \rightarrow C^* = \frac{2}{3}\zeta m\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$P^* = \int_0^\ell P_0\frac{x}{\ell}\cdot\frac{x}{\ell}f(t)\,dx = \frac{1}{3}P_0\ell f(t)$$

جواب ۱۰-۳-

$$\phi_1(x) = 1 \quad , \phi_2(x) = \frac{3}{4} \quad , \phi_3(x) = \frac{1}{2} \quad , \phi_4(x) = \frac{1}{4}$$

$$M^* = \sum_{i=1}^{4} m_i\phi_i^2 = m_1\times 1^2 + m_2\times\frac{3^2}{4} + m_3\times\frac{1^2}{2} + m_4\times\frac{1^2}{4} = m_1 + \frac{9}{16}m_2 + \frac{1}{4}m_3 + \frac{1}{16}m_4$$

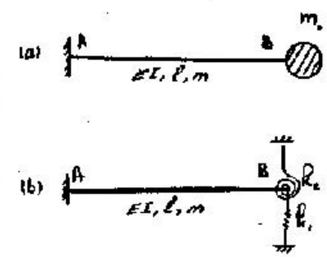
$$K^* = \sum_{i=1}^{5} k_i\Delta\phi_i^2 = k\left(1-\frac{3}{4}\right)^2 + k\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2 + k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2 + 2k\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$+\; k\times(1)^2 + 2k_0\times\left(\frac{1}{12}\right)^2 = 1.312k + 0.0139k_0$$

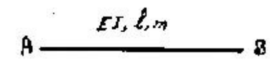
$$P^* = \sum_{i=1}^{4} P_i\phi_i = P_1(t) + \frac{3}{4}P_2(t) + \frac{1}{2}P_3(t) + \frac{1}{4}P_4(t)$$

دینامیک سازه‌ها — مدل جرم گسترده سازه‌ها — مسائل شماره ۱۱

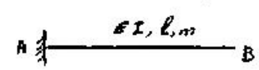
۱-۱۱ ـ شرایط مرزی را برای سیستم‌های زیر در مدل تیر برنولی بنویسید.



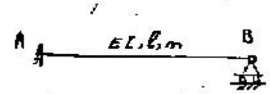
۲-۱۱ ـ معادله مشخصه یک تیر دو سر آزاد را بدست آورید.



۳-۱۱ ـ معادله مشخصه تیر نشان داده شده را بنویسید.



۴-۱۱ ـ سه مود اول تیر نشان داده شده را بیابید.



جواب ۱۱-۲ ـ

$y(x,t) = \Phi(x) \cdot f(t)$

$$\begin{cases} \Phi(x) = A\sin ax + B\cos ax + C\sinh ax + D\cosh ax \\ f(t) = A_0 \sin\omega t + B_0 \cos\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(0,t) = 0 \rightarrow \Phi''(0) = 0 \rightarrow D = B \\ V(0,t) = 0 \rightarrow \Phi'''(0) = 0 \rightarrow C = A \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} M(\ell,t) = 0 \rightarrow \Phi''(\ell) = 0 \rightarrow (\sinh a\ell - \sin a\ell)A + (\cosh a\ell - \cos a\ell)B = 0 \quad (2) \\ V(\ell,t) = 0 \rightarrow \Phi'''(\ell) = 0 \rightarrow (\cosh a\ell - \cos a\ell)A + (\sinh a\ell + \sin a\ell)B = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \cos a\ell \cdot \cosh a\ell = 1 \rightarrow a\ell = \dots \rightarrow a_n = \dots, \quad \omega_n = a_n^2\sqrt{\frac{EI}{m}}$

$(1), (2) \; B = -\frac{\square}{\square}A \xrightarrow{\text{[illegible]}} \Phi(x) = A(\sin a_n x + \sinh a_n x + (\cos a_n x + \cosh a_n x)(-\frac{\square}{\square}))$

جواب ۱۱-۱ ـ

$y(x,t) = \Phi(x) \cdot \tau(t)$

a) • $y(0,t) = y'(0,t) = 0 \rightarrow \Phi(0) = \Phi'(0) = 0$

• $M(\ell,t) = EI\, y''(\ell,t)$

$\sum M_0 = 0 \rightarrow M(\ell,t) = I_{m_0} \ddot\theta$

$\theta = y'(\ell,t) \rightarrow \ddot\theta = \Phi'(\ell)\ddot\tau(t)$

$\tau(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \rightarrow \ddot\tau(t) = -\omega^2\tau(t)$

$\rightarrow EI\,\Phi''(\ell)\tau(t) = -I_{m_0}\omega^2\Phi'(\ell)\tau(t)$

$\rightarrow EI\,\Phi''(\ell) + I_{m_0}\omega^2\Phi'(\ell) = 0$

• $V(\ell,t) = EI\, y'''(\ell,t)$

$\sum F_y = 0 \rightarrow V(\ell,t) = m_0 a_y = m_0 \frac{\partial^2 y(\ell,t)}{\partial t^2} = m_0\Phi(\ell)\ddot\tau(t)$

$\rightarrow EI\,\Phi'''(\ell)\tau(t) = m_0\Phi(\ell) \cdot \omega^2\tau(t)$

$\rightarrow EI\,\Phi'''(\ell) + m_0\Phi(\ell)\omega^2 = 0$

b) • $y(0,t) = y'(0,t) = 0 \rightarrow \Phi(0) = \Phi'(0) = 0$

• $\sum M = 0 \rightarrow M(\ell,t) = k_r\theta \xrightarrow{\text{(a) مثل}} EI\,\Phi''(\ell) + k_r\Phi'(\ell) = 0$

• $\sum F_y = 0 \rightarrow V(\ell,t) = k_t\, y(\ell,t) \xrightarrow{\text{(a) مثل}} EI\,\Phi'''(\ell) + k_t\Phi(\ell) = 0$

جواب ۱۱-۳ ـ روش [illegible] ۲ نقطه :

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \rightarrow \Phi(0) = 0 \\ y'(0,t) = 0 \rightarrow \Phi'(0) = 0 \end{cases}$$

⋮

$\rightarrow \cos a\ell \cdot \cosh a\ell = -1 \rightarrow \dots$ [illegible]

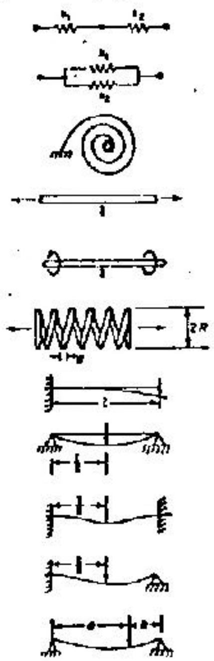
جواب ۱۱-۴ ـ روش [illegible] ۳ نقطه :

$$\begin{cases} y(\ell,t) = 0 \rightarrow \Phi(\ell) = 0 \\ M(\ell,t) = 0 \rightarrow \Phi''(\ell) = 0 \end{cases}$$

⋮

$\rightarrow \tan a\ell = \tanh a\ell \rightarrow$ [illegible] ...

Table of Spring Stiffness



$k = \dfrac{1}{1/k_a + 1/k_b}$

$k = k_a + k_b$

$k = \dfrac{EI}{l}$, I = moment of inertia of cross-sectional area

l = total length

$k = \dfrac{EA}{l}$ A = cross-sectional area

$k = \dfrac{GJ}{l}$ J = torsion constant of cross section

$k = \dfrac{Gd^4}{64nR^3}$ n = number of turns

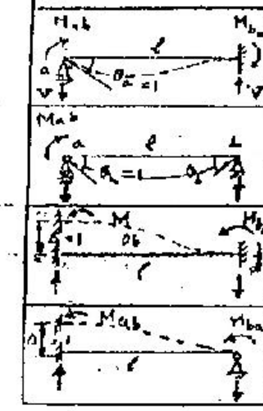
$k = \dfrac{3EI}{l^3}$

$k = \dfrac{48EI}{l^3}$

$k = \dfrac{192\,EI}{l^3}$

$k = \dfrac{768EI}{7l^3}$

$k = \dfrac{3EIl}{a^2b^2}$



(EI) عضو	M_{ab}	M_{ba}	V
	$\frac{4EI}{\ell}$	$\frac{2EI}{\ell}$	$\frac{6EI}{\ell^2}$
	$\frac{3EI}{\ell}$	.	$\frac{3EI}{\ell^2}$
	$-\frac{6EI}{\ell^2}$	$-\frac{6EI}{\ell^2}$	$\frac{12EI}{\ell^3}$
	$-\frac{3EI}{\ell^2}$	0	$\frac{3EI}{\ell^3}$