مقدمه:

علم ارتعاشات: حذف ارتعاشات ناخواسته و ایجاد ارتعاشات خواسته (هدف)

معادلات دیفرانسیل (مرتبه اول، دوم و...) مطالعه شود.

با آنچه برخورد می‌کنیم باید آن را به یک مدل ارتعاشی تبدیل کرده و بتوانیم آن را تحلیل کنیم.

پدیده فیزیکی ← مدل ارتعاشی ← تحلیل مدل ارتعاشی شامل بدست آوردن معادلات دیفرانسیل حرکت و حل معادلات

↓

این مدل ارتعاشی ممکن است دارای n درجه آزادی باشد.

$n = 1, 2, 3, \dots$

اگر $n=1$ باشد، به ساده‌ترین حالت یعنی یک معادله دیفرانسیل حرکت می‌رسیم.

اگر $n=2$ باشد، به دو معادله دیفرانسیل حرکت می‌رسیم. (یک دستگاه معادلات دیفرانسیل)

⋮

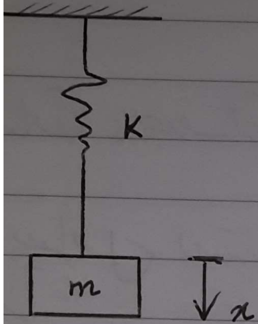
در صورتی که $n>2$ باشد نمی‌توان معادلات را به روش دستی محاسبه کرد و باید از نرم افزار استفاده کنیم. (مانند نرم افزار مطلب)

متلب!

ساده‌ترین مدل ارتعاشی شامل سیستم جرم فنر با یک درجه آزادی می‌باشد.

درجه آزادی: تعداد متغیرهای مستقل برای توصیف حرکت سیستم را گویند.

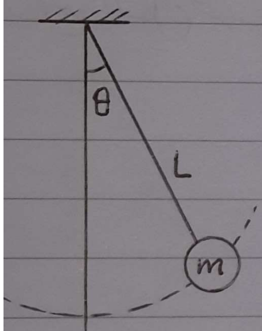
سیستم جرم فنر:



یک حرکت در راستای قائم (حرکت رفت و برگشتی)
دارد که دارای حرکت خطی می باشد.

متغیر مستقل : x

اگر x را مبنا قرار دهیم موقعیت جرم m با توجه به پارامتر x مشخص می شود.

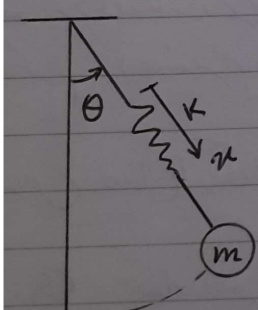


آونگ ساده دارای یک درجه آزادی و حرکت دورانی می باشد.

θ در هر زمان مشخص باشد با وجود آن می توان موقعیت m را مشخص کرد.

آونگ ساده

متغیر مستقل : θ

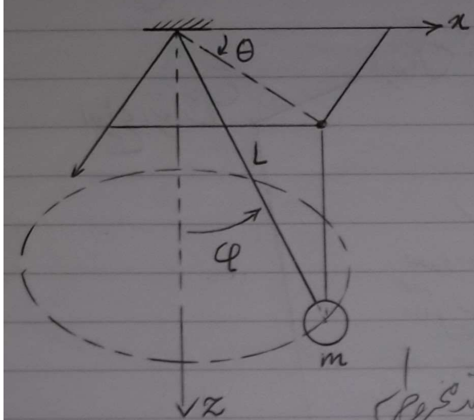


سیستم مقابل دارای دو درجه آزادی می باشد،
هم افزایش طول داریم (که ثابت نیست) و از
طرفی θ هم تغییر می کند.

متغیرهای مستقل برای توصیف حرکت جرم هستند.

متغیرهای مستقل : θ, x

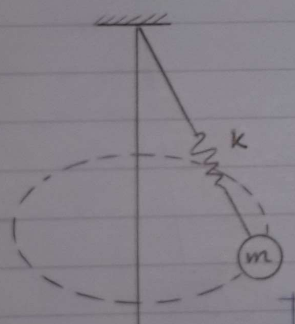
سیستم دو درجه آزادی



آونگ مخروطی دارای دو درجه آزادی می باشد
θ و φ باید معلوم باشند تا موقعیت m
مشخص شود (حرکت دورانی دارد)

اگر به این آونگ یک فنر متصل کنیم دارای
سه درجه آزادی و حرکت دورانی خواهد
بود.

آونگ مخروطی
تعداد مختصات های مستقل : θ , φ
سیستم دو درجه آزادی



طول L هم در این حالت تغییر می کند و سیستم
دارای سه متغیر مستقل می باشد
x , φ , θ

$\boxed{\text{سیستم سه درجه آزادی}}$

معادلات دیفرانسیل حرکت را می توان به کمک قوانین نیوتن و دینامیک بدست آورد
و تعداد آن ها به درجه آزادی بستگی دارد.

حرکت یا خطی است یعنی با متغیر x سروکار داریم یا دورانی می باشد که متغیر θ
داریم.

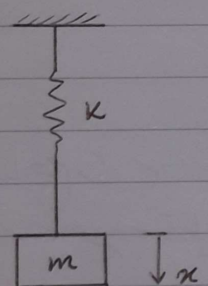
دو نوع ارتعاش داریم:

انواع ارتعاشات

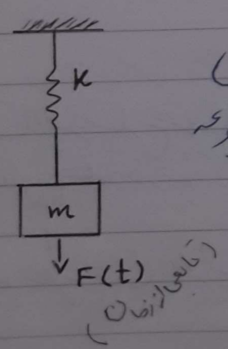
ارتعاش آزاد: تحریک اولیه
- جابه‌جایی اولیه (x_0)
- سرعت اولیه (V_0)
- جابه‌جایی اولیه و سرعت اولیه (x_0 و V_0)

بعد از اینکه سیستم دچار ارتعاش آزاد شد با فرکانسی که اصطلاحاً به آن فرکانس طبیعی می‌گوییم به ارتعاش در می‌آید.
مقدار فرکانس طبیعی به K و m بستگی دارد.

تعداد فرکانس‌های طبیعی یک سیستم ارتعاشی به تعداد درجات آزادی آن بستگی دارد.

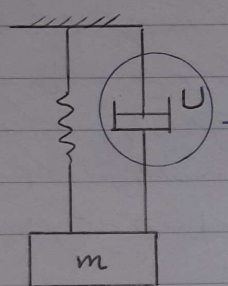


ارتعاش اجباری: در ارتعاش اجباری همواره نیرویی همراه سیستم وجود دارد.



نیرویی که همراه سیستم می‌باشد یک نیروی خارجی است که از بیرون وارد مجموعه می‌شود.

(نکته:)
در صورتیکه $F(t)$ نوسانی باشد دارای فرکانس می‌باشد که اصطلاحاً به آن فرکانس تحریک می‌گوییم.
اگر فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم برابر شود حالت تشدید رخ می‌دهد.
در حالت تشدید دامنه‌ی ارتعاشات (در حالت بدون میرایی) به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.



عامل میرا کننده، یک عامل مؤثر است که باعث می‌شود حالت تشدید بوجود نیاید!

$F(t)$ هر شکلی می‌تواند داشته باشد (می‌تواند ثابت، ضربه‌ای، پله یا نوسانی باشد)
حالت نوسانی یعنی اینکه بتواند در دوره‌های مختلف تکرار شود.

$F(t)$ همیشه همراه سیستم می‌باشد که به جرم m وارد می‌شود.

حالت تشدید یک حالت خطرناک می‌باشد که در این وضعیت اصطلاحاً می‌گویند دامنه ارتعاشات به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و ارتعاشش بیش از حد می‌شود، که این سبب می‌شود سازه دچار مشکل شده و متلاشی گردد.

تاثیر میرایی: دامنه ارتعاشات را از بی‌نهایت کم‌تر می‌کند یعنی سیستم دیگر متلاشی نخواهد شد ولی باز هم در حالت تشدید با میرایی مقدار ماکزیمم را خواهیم داشت.

سیال به عنوان میراکننده می‌تواند عمل کند، هوا یک سیال است که وجود آن به عنوان یک حالت میرایی می‌تواند تاثیرگذار باشد.
در خلاء، ارتعاشات تا بی‌نهایت ادامه خواهد داشت اما در دمای اتاق رفته رفته کم می‌شوند.

اثبات این قضیه در پاسخ به معادلات در نمودارها مشاهده خواهد شد.

در رابطه با ارتعاش آزاد:

سیستم جرم - فنر را در نظر می‌گیریم. (اگر در مدل ارتعاشی که پیش از این گفته شد فنر نبود) جرم m را تحریک اولیه کنیم یعنی مثلاً آن را به اندازه‌ی x بکشیم سیستم تحت این تحریک به ارتعاش در می‌آید یعنی جرم m نسبت به موقعیت اولیه (stabile) خودش بالا و پایین می‌رود که به این ارتعاش، ارتعاش آزاد می‌گویند. (یا اینکه توسط چکش ضربه‌ای به جسم وارد کنیم که در این صورت سرعت اولیه خواهد داشت یا هر دو کار را انجام می‌دهیم.)

دامنه (فرکانس) ارتعاش به دو عامل بستگی دارد: k و m

ممکن است ما چندین فرکانس طبیعی داشته باشیم که تعداد آن‌ها به درجه آزادی بستگی دارد. اگر سیستم یک درجه آزادی داشته باشد فقط یک فرکانس طبیعی خواهیم داشت.

و اینکه در عمل کدام فرکانس قرار بگیرد به نوع تحریک اولیه بستگی دارد.

در امتحان یک سیستم داده می‌شود و می‌گویند فرکانس طبیعی سیستم را به دست آورید.

تعریف فرکانس (f): تعداد نوسان در ثانیه

فرکانس دایره‌ای (ω): $\omega = 2\pi f$

(T) دوره تناوب: مدت زمان لازم برای یک نوسان کامل

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

فرکانس طبیعی : f_n

فرکانس طبیعی دایره‌ای : ω_n ، $\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega_n}}$

حرکت تناوبی (نوسانی) : حرکتی را گویند که در دوره‌های زمانی مشخص تکرار می‌شود.

$$x(t+T)=x(t)$$

حرکت تناوبی حرکتی است که در دوره‌های مختلف تکرار می‌شود که به این دوره، اصطلاحاً دوره تناوب می‌گویند. (دامنه در همه‌ی لحظات یکسان می‌باشد.)

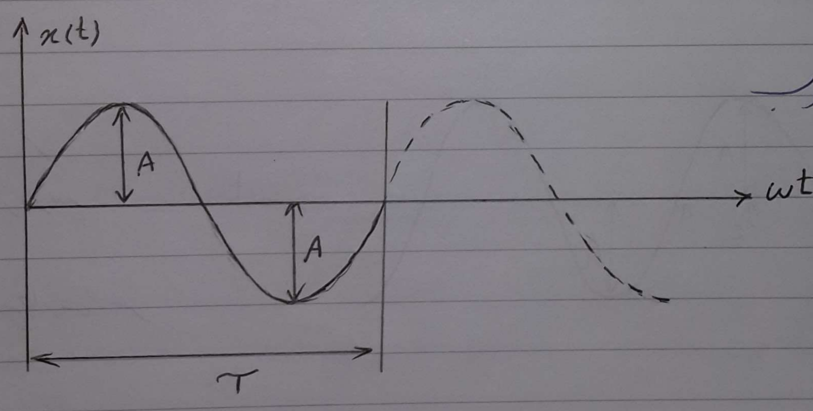
حرکت هارمونیک : ساده‌ترین حرکت تناوبی است که می‌تواند اتفاق بیفتد.

$$x(t)=A\sin\omega t$$

A: دامنه حرکت

t: زمان

T: دوره تناوب

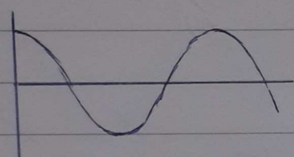


$t\to \pi/2$ ، $\omega=\frac{2\pi}{T}$ $\to$ $\sin\underbrace{\omega t}_{\pi/2}=1$ $\to$ $x(t)=A$

نیروی هارمونیک جای x، F قرار می‌گیرد که به صورت sin تغییر می‌کند، ترکیب sin و cos هم یک حرکت هارمونیک می‌باشد.

به اندازه‌ی φ (زاویه حرکت) نقطه شروع اختلاف خواهد داشت.

اگر: $x(t) = A\cos\omega t \rightarrow$ نقطه شروع $\frac{\pi}{2}$ خواهد بود.



حرکت — مشتق می‌گیریم

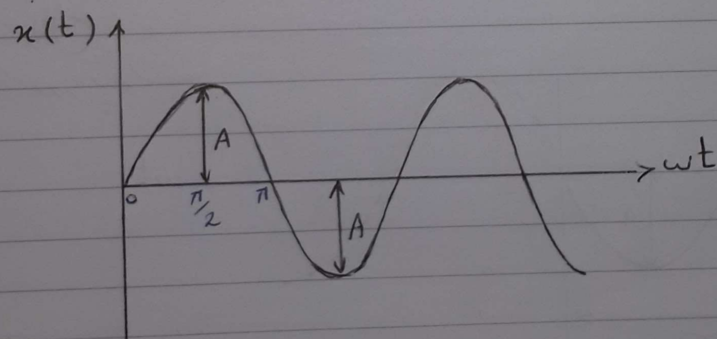
$$x = A\sin\omega t \Rightarrow \dot{x} = A\omega\cos\omega t = A\omega\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{2})$$

سرعت

دوباره مشتق می‌گیریم

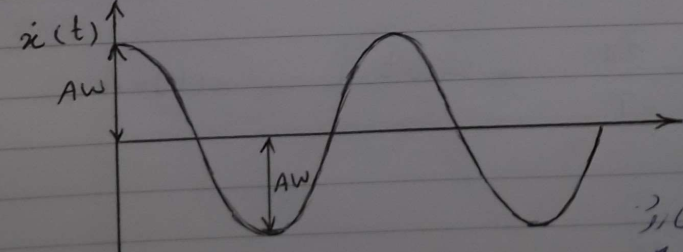
$$\Rightarrow \ddot{x} = -A\omega^2\sin\omega t = A\omega^2\sin(\omega t + \pi)$$

شتاب



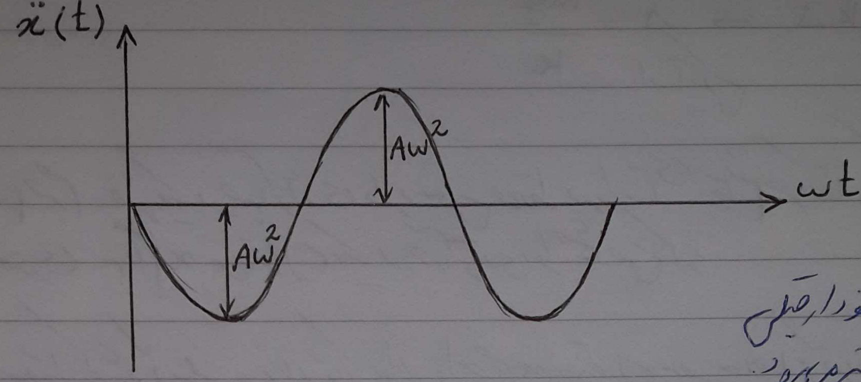
هارمونیک

زاویه فاز صفر



هارمونیک

زاویه فاز به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ جلوتر می‌رود
اختلاف فاز با نمودار بالا $\leftarrow \frac{\pi}{2}$



هارمونیک

زاویه فاز نسبت به نمودار قبلی به اندازه‌ی $\pi/2$ جلوتر می‌رود.

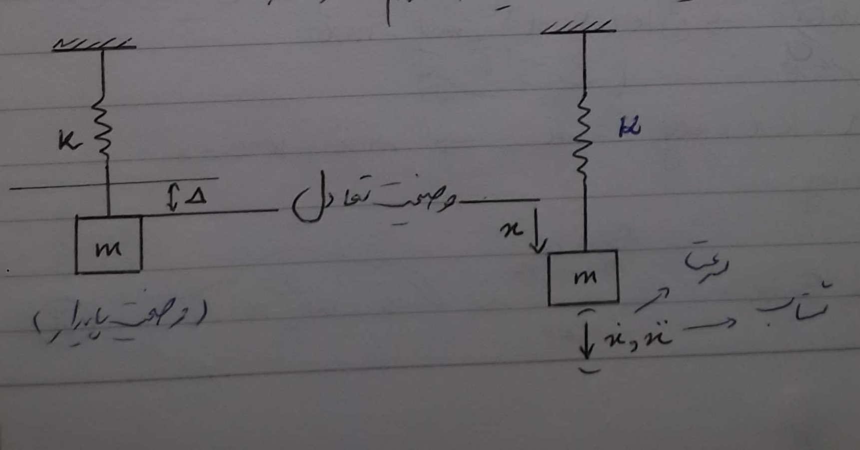
نقطه اشتراک این سه نمودار آن است که هر سه نمودار هارمونیک می‌باشند مشاهده می‌شود که اگر حرکتی هارمونیک باشد مشتقات آن یعنی سرعت و شتاب هم هارمونیک می‌باشد.

اختلاف نمودارها در زاویه فاز می‌باشد و دومی مقدار دامنه که تغییر کرده است.

$$\left.\begin{aligned} x &= A\sin\omega t \\ \dot{x} &= A\omega\sin(\omega t+\pi/2) \\ \ddot{x} &= A\omega^2\sin(\omega t+\pi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{x} = -x\omega^2 \Rightarrow \ddot{x}+\omega^2 x=0 \qquad (\mathrm{I})$$

این معادله دیفرانسیل حرکت خاص حرکت هارمونیک می‌باشد. معادله دیفرانسیل خطی درجه 2 که در مورد حرکت هارمونیک صدق می‌کند.

ساده‌ترین مدل ارتعاشی یک درجه آزادی سیستم جرم فنر می‌باشد.



$$mg = k\Delta \Rightarrow \underset{\text{استاتیکی}}{\Delta} = \frac{mg}{k}$$

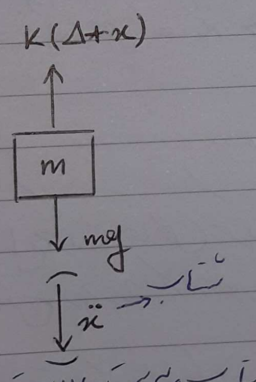
سیستم جرم و فنر یک درجه آزادی دارد یعنی فقط در راستای قائم حرکت می‌کند و با پارامتری به نام x می‌توان یک درجه آزادی را مشخص کرد.

Δ : مقدار کشیدگی فنر می‌باشد که بواسطه جرم m متصل به فنر حاصل گردیده است.

وضعیت تعادل مبنای مقایسه (x) می‌باشد. مکانی که موقعیت جرم m نسبت به این خط سنجیده می‌شود.

برای اینکه سیستم به ارتعاش درآید باید آن را تحریک کنیم. (در اینجا تحریک نداشتیم)

بعد از اینکه سیستم به ارتعاش درآمد موقعیت m نسبت به وضعیت تعادل سنجیده می‌شود.



نیروهای جهت شتاب مثبت و خلاف جهت آن منفی می‌باشند.

طبق قانون دوم نیوتن داریم. (جهت عکس شتاب و به سمت بالا است)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -k(\Delta + x) \underset{\text{(در جهت شتاب)}}{+mg} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \underset{(k\Delta = mg)}{\cancel{-k\Delta}} - kx + \cancel{mg} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

(تقسیم طرفین بر m)

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \xrightarrow[\text{با تعریف}]{\frac{k}{m} = \omega_n^2} \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \text{(II)}$$

PAN

معادله‌ی بدست آمده یک معادله دیفرانسیل حرکت می‌باشد.

با مقایسه روابط (I) و (II) به این نتیجه می‌رسیم که حرکت جرم m متصل به فنر یک حرکت هارمونیک است.

اگر یک منبع نورانی را به جرم m متصل کنیم (از جائیکه سیستم در حال ارتعاش می‌باشد) و یک نوار حساس به نور را پشت آن قرار داده و با سرعت ثابت عبور دهیم حرکت ایجاد شده روی صفحه (نوار) یک حرکت کاملاً سینوسی می‌باشد که حرکت هارمونیک نام دارد. این آزمایش باید حتماً در خلاء (جایی که هیچ گونه میرا کننده (اصطکاک) وجود نداشته باشد) انجام شود.

$\ddot{x} + w_n^2 x = 0$ معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم

این معادله از یک حرکت هارمونیک نشأت می‌گیرد.

حال برای آنکه $x(t)$ را لحاظ کنیم شکل کلی یک حرکت هارمونیک را بیان می‌کنیم. یک حرکت هارمونیک که زاویه‌ی فاز آن نه صفر است و نه $\frac{\pi}{2}$ بلکه بین این دو زاویه می‌باشد.

$x(t) = A\sin wt + B\cos wt$ شکل کلی حرکت هارمونیک

A و B ثابت اند و از شرایط اولیه مسئله بدست می‌آیند.

منظور از شرایط اولیه همان تحریکات اولیه (جابجایی، سرعت یا هر دو) می‌باشد.

شرایط اولیه:
- $x(0) = x_0$ جابجایی اولیه
- $\dot{x}(0) = V_0$ سرعت اولیه

اگر $B = 0 \leftarrow$ $x(t) = A\sin wt$ (زاویه فاز صفر)

اگر $A = 0 \leftarrow$ $x(t) = B\cos wt$ (زاویه فاز $\frac{\pi}{2}$)

شرایط اولیه را در معادله کلی قرار می‌دهیم $(t=0)$

$$x(0) = A\underbrace{\cancel{\sin}(0)}_{0} + B\underbrace{\cancel{\cos}(0)}_{1} = x_0 \Rightarrow \boxed{B = x_0}$$

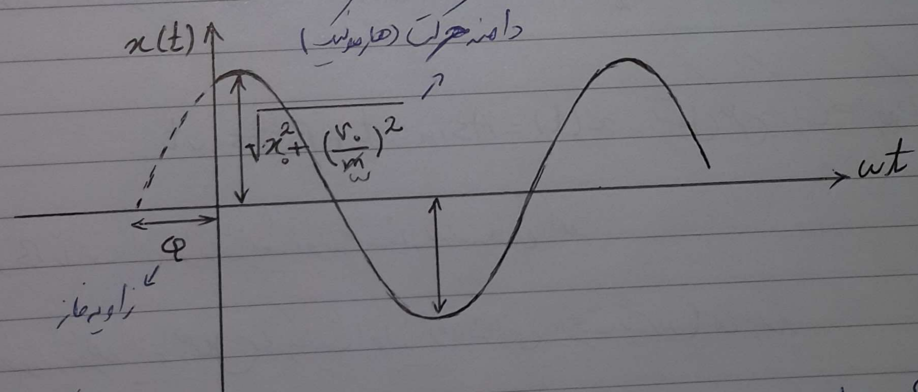
برای استفاده از شرط دوم شرایط اولیه از رابطه کلی مشتق می‌گیریم:

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$$

$$\dot{x}(0) = A\omega\underbrace{\cancel{\cos}(0)}_{1} - B\omega\underbrace{\cancel{\sin}(0)}_{0} = v_0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{v_0}{\omega}}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t$$

معادله حرکت m یعنی شکل کلی که m حرکت می‌کند و کاملاً هارمونیک است.



چون در معادله هم sin و هم cos داریم محور $x(t)$ نه روی صفر و نه روی $\pi/2$ می‌باشد بلکه بین این دو قرار دارد.

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{x_0}{v_0/\omega}\right) \Rightarrow \varphi = tg^{-1}\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right)$$

در صورتیکه جابجایی اولیه (x_0) نداشته باشیم و فقط سرعت اولیه (که با ضربه چکش روی سیستم بوجود آمده است) داشته باشیم زاویه فاز برابر صفر و دامنه $\frac{V_0}{\omega}$ خواهد بود.

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t$$

اگر سرعت اولیه (V) نداشته باشیم و فقط جابجایی داشته باشیم، زاویه حرکت برابر $\pi/2$ و دامنه حرکت x_0 خواهد بود.

$$x(t) = x_0 \cos \omega t$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

فرکانس طبیعی دایره‌ای سیستم جرم فنر

k ← ثابت فنر

m ← جرم

فرکانس طبیعی به مقدار k و m بستگی دارد.

سیستم با فرکانس طبیعی ω_n مرتعش می‌شود و حرکت حتماً هارمونیک می‌باشد.

$$\dots \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

معادله دیفرانسیل حرکت

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } \ddot{x}}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

فرکانس طبیعی

روش های بدست آوردن معادله دیفرانسیل حرکت
(در ارتباط با سیستم های ارتعاشی)

۱- روش مستقیم ← (استفاده از قانون دوم نیوتن)

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

۲- روش انرژی (ریلی): در یک سیستم نامیرا مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل مقدار ثابتی است.

سیستم نامیرا: سیستمی که در آن از میرا کننده استفاده نشده باشد.

$T + U = \text{constant}$

T: انرژی جنبشی — U: انرژی پتانسیل — constant: ثابت

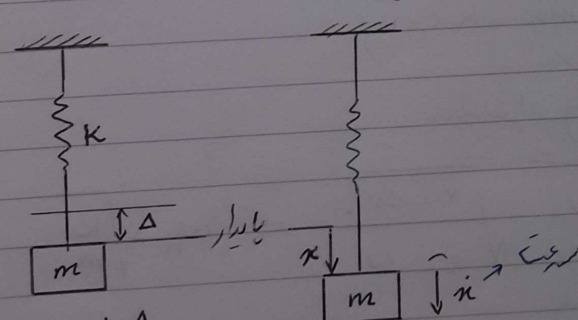
از این مقدار ثابت می توان برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل حرکت استفاده کرد.

مشتق می گیریم نسبت به زمان

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}(T+U) = 0$$

بدست آوردن معادله دیفرانسیل حرکت سیستم جرم-فنر به کمک روش انرژی:

وضعیت ارتعاش



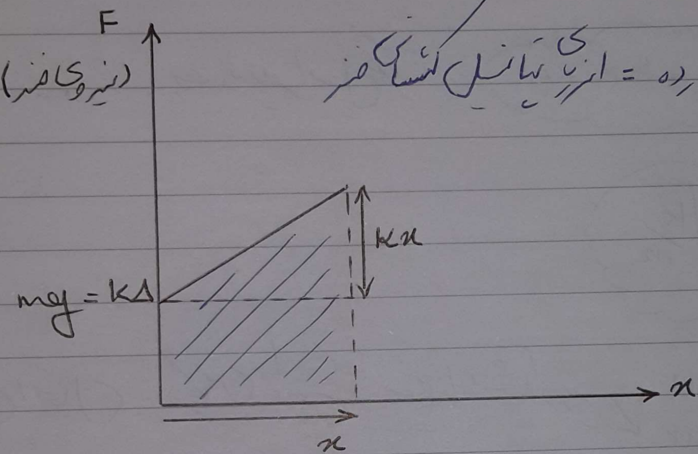
$mg = K\Delta$

قبل از اینکه جرم m به سیستم متصل شود، سیستم در حالت آزاد خودش می‌باشد و وقتی جرم m را متصل می‌کنیم به اندازه‌ی Δ تغییر طول خواهیم داشت. (حالت استاتیک)

نیرویی که فنر تحمل می‌کند ← F

$x = 0 \to F = mg = k\Delta$

مساحت قسمت هاشور خورده = انرژی پتانسیل کشسانی فنر



هرچه x بیش‌تر شود نیروی فنر هم بیش‌تر خواهد شد.

چون فنر به حالت ایده‌آل است نمودار حالت خطی دارد.

انرژی پتانسیل فنر $= \underbrace{mgx}_{\text{مستطیل}} + \underbrace{\frac{(kx)(x)}{2}}_{\text{مثلث}} = mgx + \frac{1}{2}kx^2$

چون ارتفاع دارد به اندازه‌ی x کم می‌شود

انرژی پتانسیل گرانشی زمین $= -mgx$

+

انرژی پتانسیل کل $U = \frac{1}{2}kx^2$

انرژی جنبشی کل $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$U + T = \text{Constant} \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \text{Constant}$$

مشتق می‌گیریم

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow k\dot{x}x + m\ddot{x}\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(kx + m\ddot{x}) = 0$$

$\dot{x} \neq 0$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

معادله دیفرانسیل حرکت

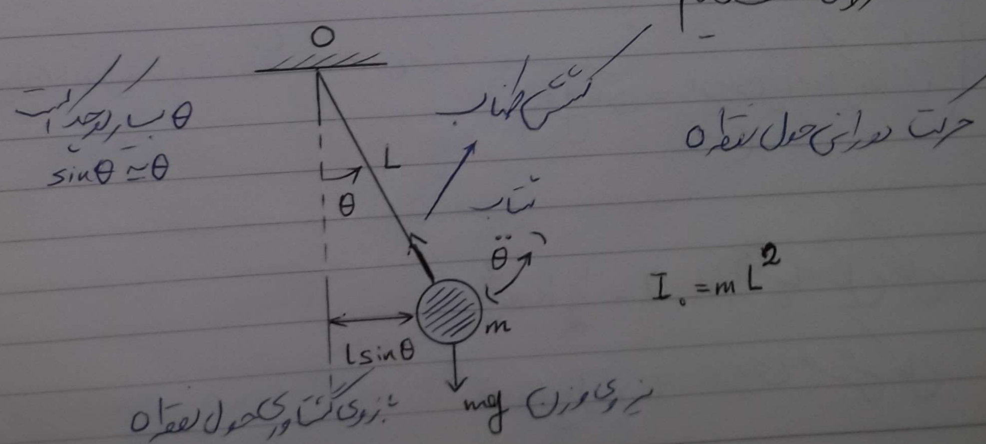
$$\rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

* سوال امتحان: فرکانس طبیعی سیستم را بدست آورید ← ۱) روش انرژی
۲) روش مستقیم

فرکانس طبیعی یک آونگ ساده (یک سیستم آزادی با یک درجه آزادی):

بدست آوردن فرکانس طبیعی آونگ ساده (تحت نوسانات کوچک):

الف- روش مستقیم



$$I_0 = mL^2$$

قانون دوم نیوتن : (در دینامیک)

حرکت خطی

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\to T = \frac{1}{2} m v^2$

حرکت دورانی

$\sum M_0 = I_0 \alpha$

گشتاور نیروها حول نقطه O

شتاب زاویه‌ای

ممان اینرسی جرمی جسم حول نقطه O

$\to T = \frac{1}{2} I \omega^2$!!

$(T = \frac{1}{2} m r^2 \to T = \frac{1}{2} m R^2)$ ممان نقطه O (جرم ۱)

I : ممان اینرسی قطبی

I : گشتاور دوم سطح

$\sum M_0 = I_0 \alpha \Rightarrow -\cancel{m}g\cancel{L}\sin\theta = (\cancel{m}L^{\cancel{2}})\ddot{\theta}$

(گشتاوری که وزن mg حول O ایجاد می‌کند ساعتگرد است و با جهت $\ddot{\theta}$ که پادساعتگرد می‌باشد مخالف می‌باشند)

$\Rightarrow -g\sin\theta = L\ddot{\theta} \xrightarrow[\sin\theta \simeq \theta]{\text{در نوسانات کوچک}} -g\theta = L\ddot{\theta}$

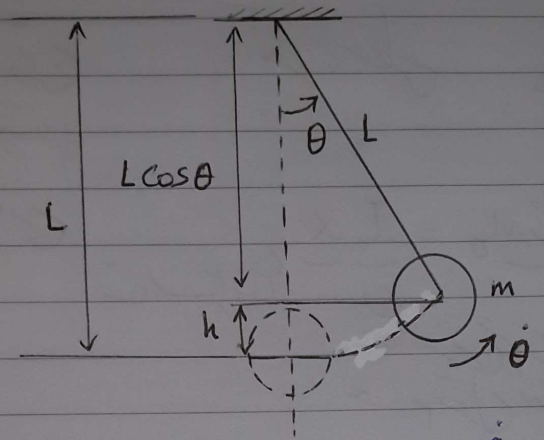
$\Rightarrow L\ddot{\theta} + g\theta = 0$

معادله دیفرانسیل حرکت

$\omega_n = \sqrt{\frac{\theta \text{ ضریب}}{\ddot{\theta} \text{ ضریب}}} = \sqrt{g/L}$

شکل معادله دیفرانسیل حرکت با شکل معادله دیفرانسیل حرکت هارمونیک شباهت دارد یا به عبارتی پاسخ کاملاً هارمونیک می‌باشد.

ب ـ روش انرژی



سرعت دورانی می باشند : ω یا $\dot{\theta}$

وقتی جسم m مقداری بالا می آید انرژی پتانسیل گرانشی بوجود می آید.

$T = \frac{1}{2} m v^2$ برای حرکت خطی

$T = \frac{1}{2} I \omega^2$ برای اجسامی که دوران می کنند

ممان اینرسی جرمی

$$h = L - L\cos\theta \Rightarrow h = L(1-\cos\theta)$$

$$I_0 = mL^2$$

$$U = mgh \Rightarrow U = mgL(1-\cos\theta)$$

$$T = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}(mL^2)\dot{\theta}^2$$

$\dot{\theta}$: سرعت زاویه ای

$U + T =$ ثابت $\Rightarrow \frac{d}{dt}(T+U) = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1-\cos\theta)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$mL^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\theta}\sin\theta\, mgL = 0 \xrightarrow[\text{(در نوسانات کوچک)}]{\sin\theta \simeq \theta}$$

$$mL^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgL\dot{\theta}\theta = 0 \Rightarrow$$

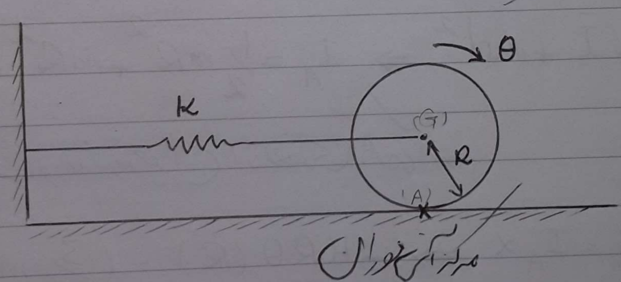
$$mL\dot{\theta}(L\ddot{\theta} + g\theta) = 0 \xrightarrow{mL\dot{\theta} \neq 0} L\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

(معادله دیفرانسیل حرکت)

$$\omega_n = \sqrt{g/L}$$

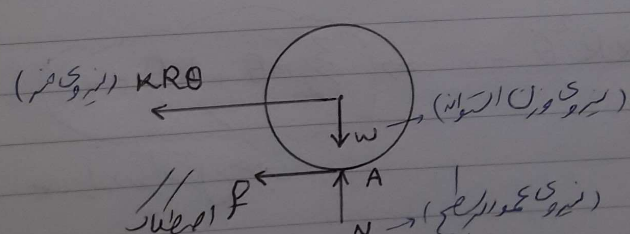
فرکانس طبیعی سیستم ارتعاشی مقابل را بدست آورید.

استوانه‌ای که دارای حرکت غلطشی بدون لغزش می‌باشد. (سطح دارای اصطکاک است که از لغزش جلوگیری می‌کند)

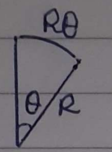


روش مستقیم

جرم استوانه ← m
ثابت فنر ← K
شعاع استوانه ← R



وقتی استوانه به اندازه‌ی θ می‌چرخد فنر به اندازه‌ی $R\theta$ کشیده خواهد شد.



ممان اینرسی جرمی حول مرکز جرم استوانه (محور مرکزی) $\bar{I} = \frac{1}{2}mR^2$

فرمول:

$$I = \bar{I} + md^2$$

ممان اینرسی جرمی حول هر محور دلخواهی که به موازات محور مرکز جرم قرار دارد.

d: فاصله‌ی دو محوری که مد نظر می‌باشد (محور دلخواه)

d: فاصله‌ی دو محور از هم

(ممان اینرسی جرمی حول نقطه A)

$$\Sigma M_A = I_A \alpha$$

$$I_A = \bar{I} + md^2 \Rightarrow I_A = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

W و f و N گشتاور ندارند چون از نقطه‌ی A می‌گذرند.

$$\Sigma M_A = I_A \alpha \Rightarrow -\underbrace{KR\theta}_{\text{نیروی فنر}}\underbrace{(R)}_{\text{بازو}} = \left(\frac{3}{2}mR^2\right)\ddot{\theta}$$

(چون خلاف جهت $\ddot{\theta}$ می‌باشد.)

$$\Rightarrow \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + KR^2\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}m\ddot{\theta} + k\theta = 0}$$

معادله دیفرانسیل حرکت

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\text{ضریب } \theta}{\text{ضریب } \ddot{\theta}}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{3}{2}m}} = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

چون سیستم یک درجه آزادی دارد تنها دارای یک فرکانس طبیعی می باشد.

روش انرژی

انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2}_{\text{دورانی}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{خطی}} = \underline{\frac{1}{2}I_A\omega^2}$$

(سرعت خطی)

مرکز جرم استوانه حرکت مانند هم حرکت دورانی و هم خطی دارد اما برای نقطه A فقط حرکت دورانی داریم.

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2$$

(انرژی جنبشی)

$R\theta = x \Rightarrow R\dot{\theta} = \dot{x}$

(مقداری که فنر کشیده می شود) (سرعت v)

انرژی پتانسیل فقط مربوط به k می شود و فقط انرژی پتانسیل الاستیک فنر داریم چون به سمت بالا و پایین حرکتی نکرده انرژی پتانسیل گرانشی نداریم.

$$U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2 = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

$$T+U = \text{Constant}$$

$$T+U = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} K R^2 \theta^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} K R^2 \theta^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(T+U) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\theta}\dot{\theta} + K R^2 \dot{\theta}\theta = 0$$

$$\Rightarrow R^2\dot{\theta}\left(\frac{3}{2} m \ddot{\theta} + K\theta\right) = 0$$

$$\xrightarrow{R^2\dot{\theta} \neq 0} \frac{3}{2} m \ddot{\theta} + K\theta = 0$$

معادله دیفرانسیل حرکت

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{2K}{3m}}$$

تعریف میرایی و ثابت میرایی:

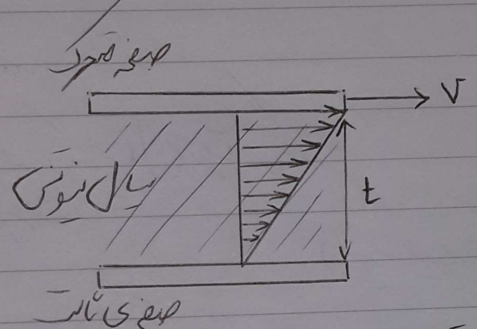
میرایی (۲):
- لزجی (در ارتباط با یک سیال مطرح است)
- خشک

اگر سیستم جرم - فنر در یک محوطه سیال ارتعاش کند قطعاً این سیال روی دامنه‌ی ارتعاشات تاثیر خواهد داشت.
عامل سیال دامنه ارتعاشات را بعد از مدتی کاهش داده و از بین می برد.

اگر یک صفحه‌ی متحرک و یک صفحه‌ی ثابت در نظر بگیریم و میان آن‌ها سیال نیوتنی داشته باشیم. صفحه‌ی بالایی (متحرک) را با سرعت ثابت روی سیال حرکت می‌دهیم. بین لایه‌های مختلف سیال تنش برشی به وجود می‌آید که پروفیل تنش کاملاً خطی می‌باشد.

هرچه لایه‌های سیال به صفحه‌ی بالایی نزدیک‌تر باشد تنش برشی بیشتر است.

$$\text{تنش} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}}$$



$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \xrightarrow{\text{سیال نیوتنی}} \underset{\text{تنش برشی}}{\tau} = \underset{\text{ضریب ویسکوزیته}}{\mu} \frac{\overset{\text{سرعت}}{V}}{\underset{\text{ضخامت}}{t}} \xRightarrow{\tau = \frac{F}{A}}$$

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{t} \Rightarrow \underset{\text{نیروی اصطکاکی}}{F} = \underset{C}{\left(\frac{\mu A}{t}\right)} \underset{\text{سرعت}}{V} \Rightarrow F = CV$$

(همیشه زمانی وجود دارد که حرکت وجود داشته باشد)

$$N = \left(\frac{N.s}{m}\right)\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\begin{cases} \mu \to \frac{N.s}{m^2} \\ A \to m^2 \\ t \to m \end{cases}$$

$N/m^2 = pa$

$$\left(F = \overset{\text{ثابت فنر}}{\underset{(N/m)}{k}} x \right)$$

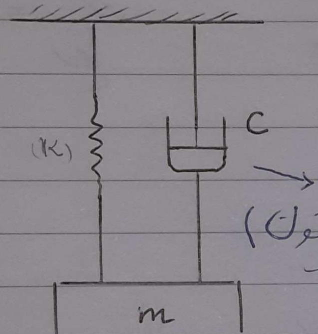
PAN

ثابت میرائی لزجی $C = \frac{\mu A}{t} = \frac{\frac{N.s}{m^2} \cdot m^2}{m} = \frac{N.s}{m}$

(مربوط به سیال)

سیستم جرم فنر همراه با میرائی لزجی :

نمایش :



سیستم جرم فنر درون یک سیال نوسان می کند و میرا می شود.

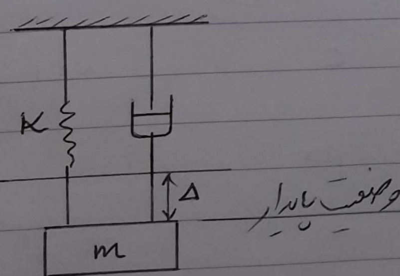
(شبیه سیلندر پیستون)

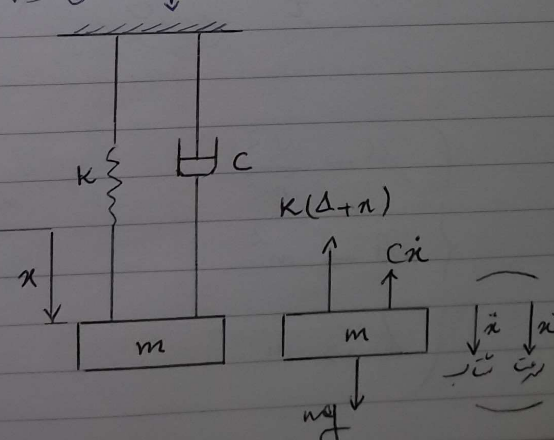
همیشه نیروی میرائی وقتی بوجود می آید که سرعت وجود داشته باشد یعنی سیستم دارای حرکت باشد. (درحالت ثابت نیروی میرائی نداریم.)

ارتعاش آزاد سیستم جرم فنر همراه با میرائی لزجی :

درحالت ثابت سرعت و نیروی میرائی نداریم

(ارتعاش بوجود می آید)





$mg = K\Delta$

$\Rightarrow \underbrace{\Delta}_{\text{استاتیک}} = \frac{mg}{K}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow mg - k(\Delta + x) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{mg} - \cancel{k\Delta}}_{mg = k\Delta} - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$ معادله دیفرانسیل حرکت

(نسبت به سیستم جرم و فنر معمولی یک $c\dot{x}$ اضافه‌تر دارد)

هرچه c سیال بیشتر باشد نیروی میرائی بیشتر خواهد بود. (c آب از هوا بیشتر است.)

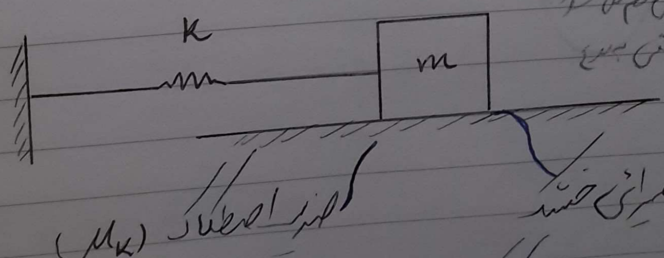
عامل c مربوط به سیال می‌باشد.

میرائی خشک: مربوط به اصطکاک است یعنی یک سیستم جرم و فنر را روی یک سطح دارای اصطکاک بگذاریم و رها کنیم

میرائی خشک: تماس جسم با یک سطح

به عنوان مثال بین لنت ترمز و دیسک ترمز میرائی خشک وجود دارد.

(هوا هم از آنجا که سیال است بعد از مدتی کم می‌شود
سیستم جرم و فنر در یک سیال [illegible]
سیال دارد)



دو تا سطح خشک که روی هم کشیده می‌شوند و اصطکاک ایجاد می‌شود.

یکی از عواملی که انرژی را از بین می برد اصطکاک می باشد.

میرایی: سبب اتلاف انرژی می شود. (به واسطه نیروی میرایی انرژی تلف می شود)

مروری بر مطالب گذشته:

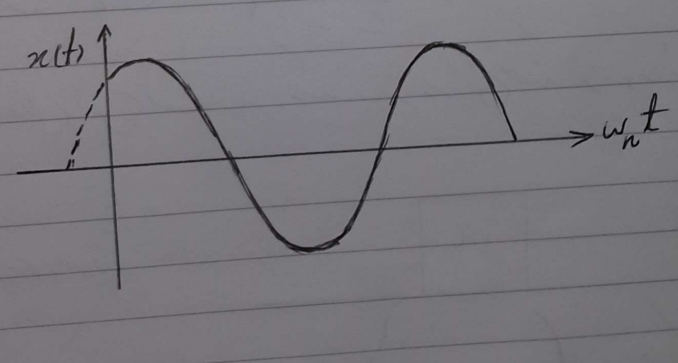
حل معادله $m\ddot{x} + kx = 0$: (سیستم جرم فنر بدون میرایی)

پاسخ عمومی $x(t) = \underbrace{A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t}_{\text{پاسخ هارمونیک}}$

A و B ثابت اند و از شرایط مسئله بدست می آیند.

یک سیستم جرم فنر که ارتعاش آزاد می کند فقط یک پاسخ دارد. (پاسخ هارمونیک)

در این جا هیچگاه دامنه ی ارتعاشات به صفر نمی رسد چون عامل میرایی نداریم.



حل معادله دیفرانسیل : $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

یک معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم (مطالعه شود *)

برای حل معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم یک معادله مشخصه بدست می‌آوریم و سپس ریشه‌های آن را محاسبه می‌کنیم

پاسخ فرضی : $x(t) = e^{st}$

$$\dot{x}(t) = se^{st}$$

$$\ddot{x}(t) = s^2e^{st}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow ms^2e^{st} + cse^{st} + ke^{st} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{st}(ms^2 + cs + k) = 0 \Rightarrow ms^2 + cs + k = 0$$

معادله مشخصه

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

ریشه‌های معادله

$$\xrightarrow[\text{ریشه‌های معادله مشخصه}]{s_1 \to +,\ s_2 \to -} s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

سه وضعیت را می‌توان در نظر گرفت

1) زیر رادیکال مثبت باشد ← ریشه‌ها حقیقی

2) زیر رادیکال منفی باشد ← ریشه‌ها موهومی

3) زیر رادیکال صفر باشد ← ریشه مضاعف ($s_1 = s_2$)

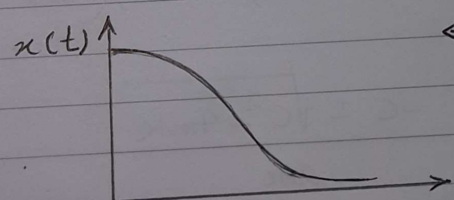
پاسخ عمومی معادله : $\boxed{x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}}$

A و B ثابت اند و از شرایط اولیه مسئله بدست می آیند.

شرایط اولیه $\begin{cases} x(0) & \text{جابجایی اولیه} \\ \dot{x}(0) & \text{سرعت اولیه} \end{cases}$

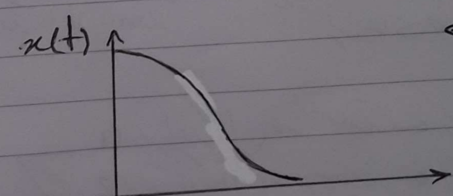
پاسخ عمومی $x(t) = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\left(Ae^{\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\, t} + Be^{-\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\, t}\right)$

الف) $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$ ⇐ ریشه های معادله مشخصه حقیقی اند.



غیرهارمونیک

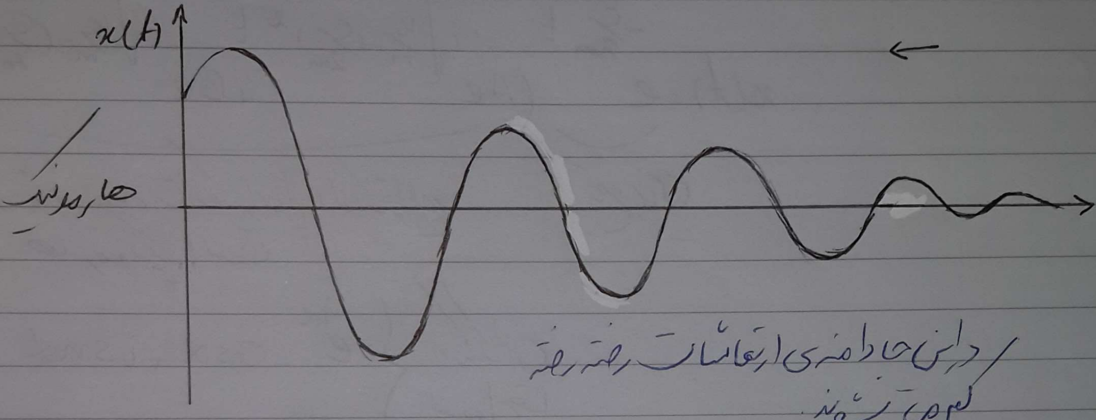
ب) $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$ ⇐ ریشه های معادله مشخصه مضاعف اند



غیرهارمونیک

تفاوت الف و ب در این است که ب زودتر به صفر می رسد. (ارتعاشی برای جرم m انجام نمی شود)

ج) $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m} \Rightarrow$ ریشه‌های معادله مشخصه موهومی اند.



ریشه موهومی: $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$

(ریشه حقیقی ندارد.)

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow x=\pm i$

ریشه‌های موهومی

$\sqrt{-1}=i$

$$x(t)=\underbrace{e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}}_{\text{تابع نمایی}}\left(\underbrace{Ae^{\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\,t}+Be^{-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\,t}}_{\text{(در حالت ج) تابع هارمونیک}}\right)$$

ضرب تابع نمایی در تابع هارمونیک سبب کاهش دامنه‌ی ارتعاشات می‌شود.

هارمونیک یعنی دارای دامنه ثابت است اما چون در اینجا در یک تابع نمایی ضرب شده است دامنه ارتعاشات رفته رفته کم می‌شود تا نهایتاً به صفر می‌رسد.

حالت ج) $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$ $\qquad i = \sqrt{-1}$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\frac{c}{2m}t}}_{\text{تابع نمائی}}\underbrace{\left(Ae^{i\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\,t} + Be^{-i\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\,t}\right)}$$

ثابت می شود که رابطه بالا تابع هارمونیک است.

به کمک این فرمول ها

$$\begin{cases} e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \end{cases}$$

مجموع sin و cos یک تابع هارمونیک می باشد.

حالت ب) $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow$

$$c^2 = \frac{4m^{\cancel{2}}k}{\cancel{m}} = 4mk \Rightarrow \boxed{c = 2\sqrt{mk}}$$

ثابت میرایی بحرانی

$$\begin{cases} c_{cr} = 2\sqrt{mk} \longrightarrow c_{cr} = 2\sqrt{m(m\omega_n^2)} \\ \omega_n = \sqrt{k/m} \Rightarrow k = m\omega_n^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_{cr} = 2\sqrt{m^2\omega_n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_{cr} = 2m\omega_n}$$

(cr = critical بحرانی)